

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

В. Э. Завистовский

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов специальности 1-48 01 03 «Химическая технология
природных энергоносителей и углеродных материалов»

В двух частях

Часть 1

Теоретические основы расчетов

В двух книгах

Книга первая

Новополоцк
ПГУ
2009

УДК 621.01(075.8)

ББК 22.2я73

313

Рекомендовано к изданию методической комиссией
технологического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 8 от 30.06.08)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

отдел главного механика Новополоцкого ОАО «Нафтан» (гл. механик –
член-корреспондент Белорусской инженерной академии А. Ф. ШУТИН);
кандидат технических наук, доцент кафедры химической техники
УО «Полоцкий государственный университет» Е. М. ШЕСТОПАЛОВ

Завистовский, В. Э.

313 Прикладная механика : учеб.-метод. комплекс для студентов спец.
1-48 01 03 «Химическая технология природных энергоносителей
и углеродных материалов». В 2 ч. Ч. 1. Теоретические основы расчетов.
В 2 кн. Кн. 1 / В. Э. Завистовский. – Новополоцк : ПГУ, 2009. – 292 с.
ISBN 978-985-418-853-9.

Представлены конспект лекций, даны словарь терминов и определений,
основные зависимости и формулы.

Предназначен для студентов технологических специальностей вузов;
будет полезен преподавателям.

УДК 621.01(075.8)

ББК 22.2я73

ISBN 978-985-418-853-9 (Ч. 1, кн. 1)
ISBN 978-985-418-852-2

© Завистовский В. Э., 2009
© УО «Полоцкий государственный
университет», 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
1. ВВЕДЕНИЕ В ПРИКЛАДНУЮ МЕХАНИКУ	7
1.1. Определение и основные задачи курса	7
1.2. Понятия машины, механизма, аппарата и прибора	8
1.3. Краткие сведения из истории развития механики	11
Вопросы для самоконтроля	14
Литература	14
2. СТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, ДЕТАЛЕЙ МАШИН И АППАРАТОВ	15
2.1. Основные понятия и аксиомы статики	15
2.2. Связи и реакции связей. Опоры	18
2.3. Системы сходящихся сил	22
2.4. Теория пар сил	26
2.5. Произвольная плоская система сил	28
2.6. Произвольная пространственная система сил	37
2.7. Центр тяжести	42
2.8. Трение	49
2.9. Стержневые системы с идеальными шарнирами	53
Вопросы для самоконтроля	56
Литература	58
3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	59
3.1. Кинематика точки	59
3.2. Кинематика твердого тела	73
3.3. Плоскопараллельное движение твердого тела	78
3.4. Сложное движение точки	82
3.5. Сложное движение твердого тела	85
Вопросы для самоконтроля	87
Литература	88
4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ И ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ	89
4.1. Основные понятия, законы и задачи динамики	89
4.2. Силы инерции и метод их определения	91
4.3. Работа и мощность	92
4.4. Общие теоремы динамики	97
4.5. Приложение общих теорем динамики к механике жидкости	103
4.6. Понятие о балансировке вращающихся тел	111
Вопросы для самоконтроля	112
Литература	113
5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ	114
5.1. Структура механизмов	114

5.2. Классификация механизмов	121
5.3. Методы кинематического исследования механизмов	128
5.4. Силы, действующие в механизмах	132
Вопросы для самоконтроля	133
Литература	134
6. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ	135
6.1. Основные положения и определения	135
6.2. Центральное растяжение и сжатие	147
6.3. Испытания материалов	165
6.4. Геометрические характеристики плоских сечений	179
6.5. Сдвиг и смятие	187
6.6. Кручение	195
6.7. Изгиб прямого бруса	208
6.8. Основные положения теории напряженного состояния	226
6.9. Сложное сопротивление	233
6.10. Тонкостенные оболочки и резервуары	241
6.11. Устойчивость сжатых стержней и оболочек	249
6.12. Основы расчета на действие динамических нагрузок	260
6.13. Местные напряжения	265
Вопросы для самоконтроля	269
Литература	275
СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ	276
ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ФОРМУЛЫ	287

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прикладная механика – дисциплина, представляющая собой основу общетехнической подготовки студентов химико-технологических специальностей.

Структура представленного учебно-методического комплекса:

- Часть 1. Теоретические основы расчетов:
 - книга 1 – лекционный курс;
 - книга 2 – практические занятия; лабораторный практикум; расчетно-графическая работа; контрольная работа для студентов-заочников;
- Часть 2. Детали машин и аппаратов:
 - книга 1 – лекционный курс;
 - книга 2 – практические занятия;
 - книга 3 – курсовое проектирование.

В таком изложении курс прикладной механики издается впервые. Потребность в написании данного учебно-методического комплекса возникла из-за необходимости систематизировать в соответствии с программой курса сведения из различных общеинженерных дисциплин, таких как «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Материаловедение», «Взаимозаменяемость и технические измерения», «Детали машин», «Основы конструирования аппаратов и машин», изложить их в определенной последовательности с учетом специфики специальности, с единых позиций, логически дополняя друг друга.

Часть 1. Теоретические основы расчетов. Лекционный курс для удобства изучения разделен на шесть разделов: «Введение в прикладную механику», «Статическое взаимодействие элементов конструкций, деталей машин и аппаратов», «Основы кинематики механических систем», «Динамическое взаимодействие элементов конструкций и задачи динамики», «Основы теории механизмов» и «Основы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость». Для удобства изучения и освоения курса каждый раздел снабжен перечнем вопросов для самоконтроля и списком использованной и рекомендуемой литературы. В конце приведены словарь терминов и основные формулы и уравнения, используемые при изучении прикладной механики.

Следует отметить, что какой бы хороший ни был учебно-методический комплекс – это всего лишь методический путеводитель при изучении дисциплины, и ограничиваться только им было бы непростительной ошибкой. Студент должен читать и изучать учебники и учебные пособия, пользоваться справочной и нормативной технической лите-

ратурой, всем тем учебным материалом, который поможет ему стать квалифицированным специалистом. Учебно-методический комплекс решает одну из главнейших задач высшего образования – научить студента учиться, т.е. на базе минимального количества материала студенту надо преподнести такие знания и привить такие навыки, которые позволят ему в дальнейшем всю необходимую информацию находить и усваивать самостоятельно.

Студент, изучивший курс «Прикладная механика» должен:

знать:

- связи различных разделов прикладной механики с другими общенаучными инженерными дисциплинами;
- основные модели механики и границы их применения;
- основные методы исследования нагрузок, перемещений и напряженно-деформированного состояния в элементах конструкций, методы проектных и проверочных расчетов изделий;
- методы проектно-конструкторской работы; подходы к формированию множества решений проектной задачи на структурном и конструкторском уровнях; общие требования к автоматизированным системам проектирования;

уметь:

- пользоваться терминологией, характерной для различных разделов прикладной механики;
- проектировать и конструировать типовые элементы машин, получать оценки их прочности и жесткости;

иметь навыки:

- использования справочной литературы и стандартов;
- выбора аналогов и прототипа конструкций при проектировании;
- проведения инженерных расчетов по теории механизмов, деталям машин и механике деформируемого твердого тела;
- оформления проектной и конструкторской документации в соответствии с требованиями ЕСКД.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам, особенно кандидату технических наук, доценту кафедры химической техники Е. М. Шестопалову, за внимательное и квалифицированное прочтение рукописи, внесшего весьма ценные пожелания, позволившие улучшить качество рукописи с позиций специфики химико-технологических специальностей, а также инженеру кафедры механики С. В. Жаворонок за техническую помощь в оформлении рукописи.

Тема 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРИКЛАДНУЮ МЕХАНИКУ

1.1. Определение и основные задачи курса

Механикой называют науку, цель которой – изучение движения и напряженного состояния элементов машин и аппаратов, строительных конструкций и трубопроводов, сплошных сред и т.п. под действием приложенных к ним сил.

Механику принято делить на теоретическую и прикладную. Обе они диалектически взаимосвязаны и взаимозависимы. В теоретической механике устанавливаются общие закономерности изучаемых объектов вне связи их с конкретными приложениями.

Под термином «*прикладная механика*» понимают область механики, посвященную изучению движения и напряженного состояния реальных технических объектов (конструкций, машин, химических аппаратов и т.п.) с учетом основных закономерностей, установленных в теоретической механике.

Курс прикладной механики решает следующие учебные задачи:

- формирование представлений об общих методах проектирования на примере механических систем;
- получение сведений о различных разделах механики, основных гипотезах и моделях механики и границах их применения;
- приобретение первичных навыков практического проектирования и конструирования с использованием современных компьютерных технологий.

«Прикладная механика» – учебная дисциплина, представляющая собой основу общетехнической подготовки студентов немашиностроительных специальностей, в частности, химико-технологических. Курс прикладной механики базируется на таких математических, естественно-научных и общепрофессиональных дисциплинах, как математика, информатика, физика, инженерная и машинная графика, материаловедение, технология конструкционных материалов.

«Прикладная механика» – комплексная дисциплина. Она включает разделы курсов «Теоретическая механика», «Теория механизмов и машин», «Сопротивление материалов», «Детали машин и основы конструирования». Темы этих дисциплин разработаны с единых позиций, с учетом междисциплинарных связей и логически дополняют друг друга.

Цель изучения дисциплины – заложить основу общетехнической подготовки студентов, необходимую для последующего изучения специальных инженерных дисциплин, а также дать знания и навыки в области механики, необходимые при разработке и эксплуатации машин, приборов и аппаратов.

В процессе изучения прикладной механики студенты слушают лекционный курс, выполняют практические и лабораторные работы, расчетно-графическую работу и курсовой проект.

1.2. Понятия машины, механизма, аппарата и прибора

В технике широко применяют различные механические системы, которые разделяют на машины, механизмы, аппараты и приборы.

Машиной называют совокупность взаимосвязанных звеньев, предназначенную для преобразования энергии или движения, накопления и переработки информации с целью повышения производительности, замены или облегчения физического и умственного труда человека (рис. 1.1). Это определение отражает всевозможные разновидности машин, действие которых основано на различных физических принципах.

Машины делят на две группы: машины-двигатели и рабочие машины. *Машинами-двигателями* (рис. 1.1, а) называют такие машины, в которых один вид энергии (электрической, тепловой, сжатой пружины и т.п.) преобразуется в энергию движения исполнительных органов рабочих машин. К *рабочим машинам* (рис. 1.1, б) относят машины, предназначенные для облегчения и замены физического труда человека по изменению формы, свойств, состояния, размеров и положения обрабатываемых материалов и объектов.

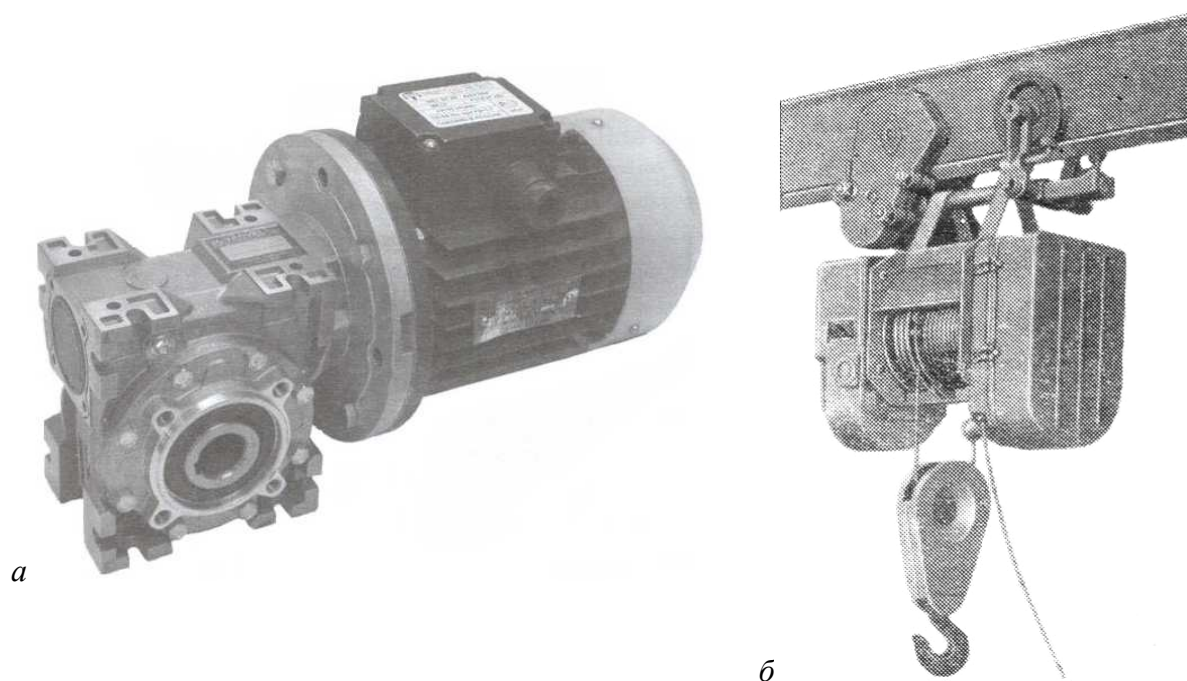


Рис. 1.1. Типы машин:

а – червячный одноступенчатый мотор-редуктор VARVEL; б – электроталь ТЭ

Многочисленные разновидности машин отличаются осуществляемыми с их помощью производственными процессами. Их сходство определяется наличием в машинах механизмов, предназначенных для передачи и преобразования движения.

Механизмом называют совокупность взаимосвязанных звеньев, допускающую их относительное движение и предназначенную для преобразования заданного движения одного или нескольких из них в требуемое движение остальных (рис. 1.2).

В теории механизмов звено, совершающее полнооборотное вращательное движение вокруг неподвижной оси, принято называть *кривошипом*; звено, совершающее неполнооборотное вращательное движение, – *коромыслом*; звено, участвующее в сложном движении, – *шатун*ом; звено, совершающее возвратно-поступательное движение, – *ползуном*. *Циклом движения* механизма называют полную совокупность последовательных однократно воспроизводимых относительных расположений звеньев механизма. Это означает, например, что за один оборот кривошипа кривошипно-ползунного механизма ползун совершит полный прямой и полный обратный ходы, т.е. один двойной ход.

Различные технические устройства называют также *аппаратами*. Аппараты химических и нефтехимических производств предназначены для ведения в них технологических процессов (рис. 1.3).

К *приборам* относят системы, служащие для передачи и преобразования движения и предназначенные для регистрации и регулирования физических и технологических процессов производства, технических измерений, приема и передачи различной информации и сигналов и др. (рис. 1.4).

К *параметрам машин* относят общие и специфические параметры [5]. К *общим параметрам* относят производительность, скорости рабочих движений выходных звеньев, мощность привода, коэффициент полезного действия, массу и габаритные размеры; к *специфическим* – параметры, которые характерны для конкретного вида машин.

Производительность машин измеряют в тех единицах, которые пригодны для обрабатываемых материалов, например, производительность компрессоров – $\text{м}^3 / \text{мин}$.

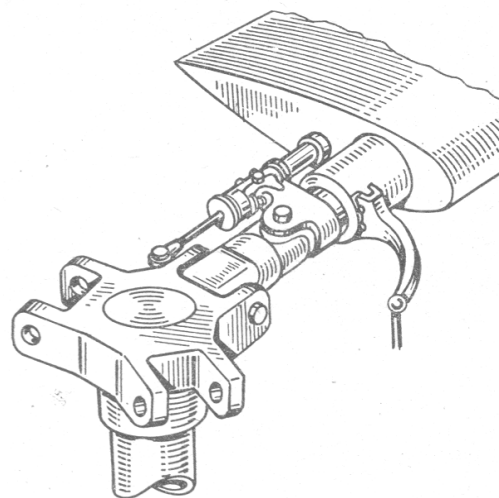


Рис. 1.2. Механизм подвижного соединения лопасти несущего винта с втулкой

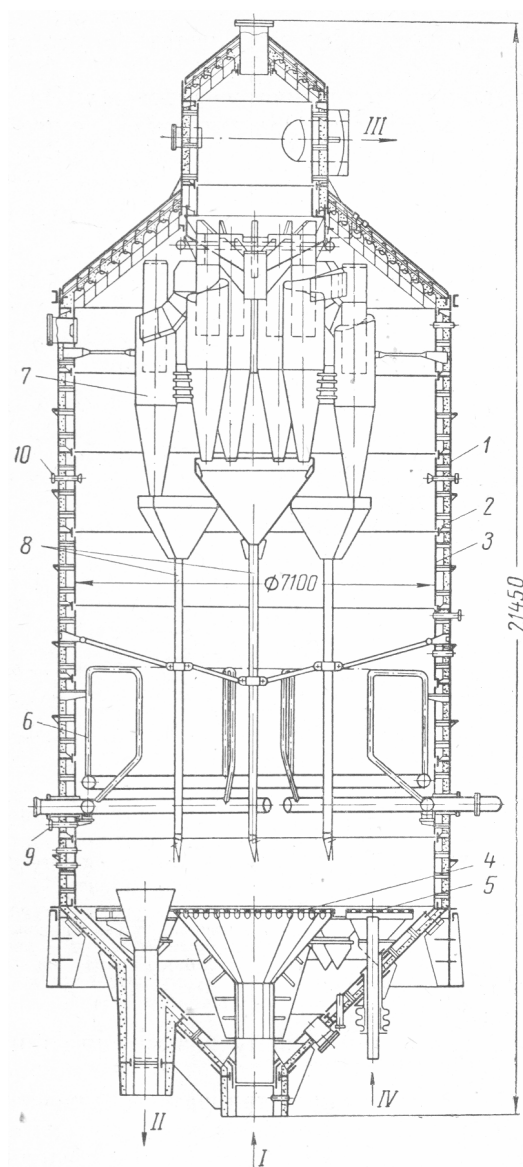


Рис. 1.3. Реакционный аппарат – регенератор: 1 – корпус; 2 – футеровка; 3 – защитная облицовка; 4 – распределительная решетка; 5 – короб для распределения воздуха; 6 – охлаждающие змеевики; 7 – циклоны; 8 – стояки; 9 – форсунка топливная; 10 – форсунка водяная

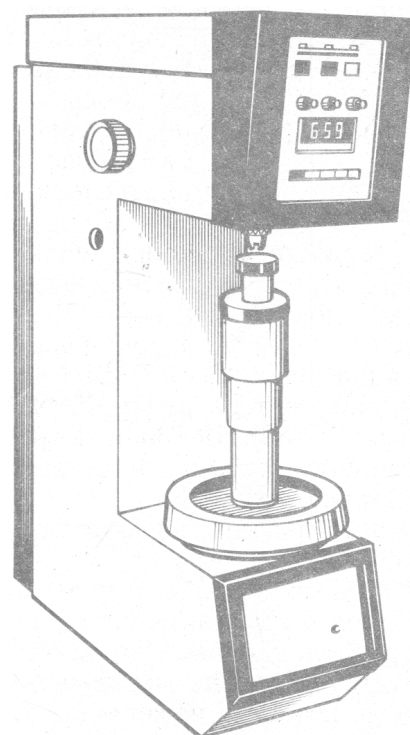


Рис. 1.4. Прибор 2120 ТР для измерения твердости по Роквеллу

Скорости рабочих движений указывают, как правило, для каждого вида движения.

Коэффициент полезного действия отображает долю полезно реализуемой энергии и эффективность ее использования.

Такие параметры, как *масса* и *габаритные размеры*, необходимо знать для транспортирования машин, рационального и безопасного их размещения на производственных территориях.

Приводы машин и приборов различают по виду применяемой для их действия энергии на электрические, внутреннего сгорания, пневматические, гидравлические, пружинные и др.

Все основные характеристики и параметры машин указываются в техническом паспорте, которым снабжают машину.

1.3. Краткие сведения из истории развития механики

Историю механики как науки о машинах и механизмах можно начинать с очень глубокой древности. Уже в эпоху неолита и бронзового века появилось *колесо*, несколько позже применяются *рычаг* и *наклонная плоскость*. Регулярное применение рычага и наклонной плоскости начинается в связи со строительными работами в древневосточных государствах. Первые египетские пирамиды строились примерно за три тысячи лет до нашей эры. При сооружении храмов, колоссальных статуй и обелисков вес отдельных глыб достигал десятков и даже сотен тонн. Такие глыбы из каменоломен доставлялись на место сооружения храма на специальных *салазках*. В каменоломнях для отрыва каменных глыб от породы служил *клин*. К рычагу и клину в эллинистическую эпоху, начавшуюся на рубеже IV – III вв. до н.э., добавляются еще *блок* и *винт*. Вращательные движения преобразовывали с помощью систем *зубчатых колес*. Более сложные механические орудия – *водяное колесо*, *червячная передача*, *винт*, *насос* и т.д. – применялись сравнительно редко [1].

Характерной чертой античной механики является разобщенность учения о движении – кинематики и учения о равновесии – статики. Развитие этих основных областей механики в течение длительного времени шло независимо друг от друга. Чисто кинематическое описание движений стало делом астрономов; учение о равновесии развивалось на основе опыта применения различных приспособлений. *Архит Тарентский* (ок. 428 – 365 гг. до н.э.) разрабатывал теорию блока полиспастов; *Аристотель* (384 – 322 гг. до н.э.) в своих сочинениях достаточно полно изложил общие понятия механики; *Архимед* (ок. 287 – 212 гг. до н.э.) установил законы рычага, открыл закон гидростатики.

Развитие механики в эпоху эллинизма связано с именем *Герона Александрийского* (I – II вв. н.э.), основное сочинение которого «Механика», состоящее из трех книг, обобщило исследования античных механиков. Первая книга посвящена теоретическим вопросам, в которой наряду с некоторыми чисто геометрическими построениями рассматриваются передача движения с помощью зацепленных кругов, сложение движений по правилу параллелограмма, распределение нагрузки между опорами, определяется центр тяжести. Во второй книге дается описание пяти простых машин: рычага, ворота, клина, винта и блока. В третьей книге описаны различные конструкции приборов для поднятия тяжестей и прессов, основанных на комбинациях простых машин.

В эпоху расцвета Римской империи и тем более в эпоху ее упадка в механике все более значительную роль начинает играть "ремесленная" традиция. Утрачивается интерес к теоретическим построениям, содержание трактатов сводится к набору простейших правил действия простых машин. Под "механикой" понималось только архитектурно-строительное и инженерное искусство.

Начало возрождения теоретического направления относится к VIII – IX вв. и связано с развитием науки в странах Ближнего и Среднего Востока. В "Книге знаний" *Абу Али Ибн-Сина* (980 – 1037 гг.) рассматриваются пять простых машин, а также их

комбинации, некоторые из которых отсутствуют у Герона. На конкретных примерах рассматривается применение описанных машин и их комбинаций для поднятия грузов. *Абу Райхан Бируни* (973 – 1050 гг.) выполнил многочисленные описания всевозможных механических устройств, применяемых при строительстве ирригационных сооружений.

В X – XII вв. в Европе большое развитие получили водяные и ветряные мельницы, тогда же появились и механические часы. Немаловажное значение для накопления знаний о законах природы имели изготовление военного снаряжения, кораблестроение, градостроительство, устройство крупных гидротехнических сооружений.

Эпоха Возрождения отмечена и трудами выдающихся ученых-механиков. *Леонардо да Винчи* (1452 – 1519 гг.) был не только художником, но и математиком, механиком, физиком и инженером, которому обязаны важными открытиями самые разнообразные отрасли науки и техники. *Тарталья* (1499 – 1557 гг.) и *Кардано* (1501 – 1576 гг.) занимались главным образом вопросами движения брошенных тел. *Джованни Батиста Бенедетти* (1530 – 1590 гг.) и *Симон Стевин* (1548 – 1620 гг.) внесли весомый вклад в разработку проблем геометрической статики. *Николай Кузанский* (1401 – 1464 гг.) и *Николай Коперник* (1473 – 1543 гг.) развили кинематическую теорию движения, поставили вопрос об относительности механических движений. Открытием законов движения планет наука обязана *Иоганну Кеплеру* (1571 – 1630 гг.).

Картина мира, нарисованная наукой в XVII в., требовала конкретизации, дополнения и изменения. На первый план выступает динамика, так как именно она позволила статике слиться с экспериментальными исследованиями того времени. Основная серия открытий связана с именами *Г. Галилея* (1564 – 1642 гг.), открывшего закон инерции и сформулировавшего законы падающих тел и законы качания маятника, *И. Ньютона* (1643 – 1727 гг.), сформулировавшего основные законы классической механики, *Л. Эйлера* (1707 – 1783 гг.), которому принадлежат важные работы по математическому анализу, оптике, баллистике и др., *Ж.Л. Лагранжа* (1736 – 1813 гг.), заложившего основы аналитической механики, *Э. Торричелли* (1608 – 1647 гг.), открывшего закон истечения жидкости из сосуда, *Х. Гюйгенса* (1629 – 1695 гг.), который ввел понятия центробежной и центростремительной силы и моментов инерции, исследовал движение математического и физического маятника, *Р. Декарта* (1596 – 1650 гг.), заложившего основы аналитической геометрии, впервые широко использовавшего понятие о переменной величине, *Б. Паскаля* (1623 – 1662 гг.) – изобретателя суммирующей машины, открывшего один из основных гидростатических законов, *Д. Бернулли* (1700 – 1782 гг.), который вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, *Ж.Л. Даламбера* (1717 – 1783 гг.), сформулировавшего один из основных принципов механики, *С.Д. Пуассона* (1781 – 1840 гг.), чьему перу принадлежат важные работы по аналитической и небесной механике, теории упругости, математической физике и по различным разделам математики, *М.В. Остроградского* (1801 – 1861 гг.), разрешившего ряд важных задач в области гидродинамики, гидростатики, теории упругости, теории теплоты и баллистики.

Развитие механики во второй половине XIX в. отличается большей дифференциацией и широтой размаха мысли, чем в предыдущий период [3]. Русские ученые принимали деятельное участие в разработке многих актуальных проблем механики, а в решении некоторых из них внесли основной вклад.

Пафнутий Львович Чебышев (1821 – 1894 гг.) – русский математик и механик. Ему принадлежат классические открытия в теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов. *Александр Михайлович Ляпунов* (1857 – 1918 гг.) – основоположник современной теории устойчивости движения. Ему принадлежат важнейшие исследования по теории фигур равновесия вращающейся жидкости и устойчивости этих фигур. *Иван Всеволодович Мещерский* (1859 – 1935 гг.) – основоположник механики тел переменной

массы. Его работы явились основой для решения многих проблем реактивной техники. *Николай Егорович Жуковский* (1847 – 1921 гг.) – основоположник современной гидродинамики и аэродинамики. *Сергей Алексеевич Чаплыгин* (1869 – 1942 гг.) – основоположник современной газовой динамики. *Дмитрий Иванович Журавский* (1821 – 1891 гг.) – основоположник русской школы мостостроения. Он первым дал теорию расчета мостовых ферм и формулу для расчета изогнутых балок на изгиб при наличии скалывающих (касательных) напряжений в них. *Феликс Станиславович Ясинский* (1856 – 1899 гг.) внес значительный вклад в развитие теории упругости, сопротивления материалов, статике сооружений. Ему принадлежат ряд важных работ по теории устойчивости упругих стержней. *Степан Прокопьевич Тимошенко* (1878 – 1972 гг.) написал много работ по теории устойчивости упругих систем. Его учебниками «Курс сопротивления материалов», «Курс теории упругости» и др. пользуются до сих пор в высших учебных заведениях всего мира.

Круг проблем прикладной механики более четко определился в XX в., когда в высших учебных заведениях начали организовываться кафедры прикладной механики [2]. В основном внимание специалистов по прикладной механике в первой половине XX в. было обращено либо к теории механизмов и машин, либо к теории гироскопов.

Теория механизмов и машин изучает строение, кинематику и динамику машин. Термин «машина» в механике и, в особенности, в истории механики имел неоднозначный смысл. Машины или так называемые простые машины до XVIII в. означали приспособления для подъема тяжестей или перемещения грузов по поверхности. В мануфактурном периоде развития промышленности встречаются машины, занимающие как бы промежуточное положение между простыми машинами и современными, обладающими тремя составными частями: более или менее сложный исполнительный механизм, передаточный механизм и двигатель.

В советский период проблемами теории механизмов и машин начал заниматься *Иван Иванович Артоболевский* (1905 – 2003 гг.), ставший впоследствии признанным организатором и руководителем советской школы теории машин. Советскую школу механики [4] обогатили труды *А.А. Благонравова, Н.И. Колчина, Л.Г. Лойцянского, А.И. Лурье, А.П. Малышева, А.П. Иванова, С.В. Вяхирева, Л.Б. Левенсона, Г.К. Суслова, Я.Б. Шорра, Е.А. Чудакова, Н.Г. Бруевича, С.И. Кожевникова, В.В. Добровольского, В.Н. Кудрявцева, В.А. Гавриленко, П.О. Сомова, Н.М. Беляева, А.Е. Кобринского, М.М. Гернета, Д.Н. Решетова, К.И. Заблонского* и многих других.

В Беларуси в связи с быстрым развитием новых отраслей – автомобилестроения, тракторостроения, станкостроения и в целях решения теоретических и практических задач, стоящих перед промышленностью в целом, в 1957 г. был создан Институт машиноведения АН БССР. Основным научным направлением работ института было развитие теории автоматических процессов в машиностроении, теории расчета и проектирования автоматического оборудования для машиностроения. В настоящее время он носит название «Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси». Именно с его деятельностью, в основном, связано развитие в Беларуси механики машин, механизмов и материалов. Основатели современной белорусской школы механиков – *В.Н. Трейер, И.С. Цитович, В.А. Белый* и др. В настоящее время плодотворная работа *М.С. Высоцкого, Ю.М. Плескачевского, П.Л. Мариева, В.Б. Альгина, О.В. Береснева, Ю.В. Василевича, И.В. Войтова, И.И. Демидовича, М.А. Журавкова, А.М. Захарика, Л.Г. Красневского, С.Е. Карповича, Г.Г. Маньшина, Г.И. Михасева, К.К. Мышкина, В.А. Орловича, А.И. Свириденка, Е.К. Почтенного, А.Т. Скойбеды, Л.А. Сосновского, В.П. Ставрова, Э.И. Старовойтова, Б.М. Хрусталева, А.В. Чигарева, С.А. Чижика* и многие другие вносят существенный вклад в развитие научных школ прикладной механики.

Прикладная механика – динамически развивающаяся наука и в ближайшее время следует ожидать новых открытий и изобретений в различных областях науки и промышленного производства.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте цели и основные задачи курса «Прикладная механика».
2. Дайте определения следующих терминов: «машины», «механизма», «прибора» и «аппарата».
3. Какими основными параметрами характеризуются машины?
4. Какие первые простые машины изобрело человечество?
5. В чем заключалась особенность развития механики в странах Ближнего и Среднего Востока и назовите наиболее известных ученых того времени?
6. Назовите ученых-механиков эпохи Возрождения и их вклад в развитие механики.
7. Назовите наиболее выдающихся ученых-механиков XVII – XIX вв. в Западной Европе и их основные достижения.
8. Охарактеризуйте вклад российской школы механиков в развитие прикладных и фундаментальных исследований.
9. Назовите выдающихся представителей советской школы механиков, охарактеризуйте их вклад в развитие прикладных и фундаментальных исследований.
10. Какими достижениями известна белорусская школа механики машин, назовите имена белорусских ученых-механиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьян, А.Т. Механика от античности до наших дней / А.Т. Григорьян. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
2. Тюлина, И.А. История и методология механики / И.А. Тюлина. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 282 с.
3. История механики с конца XVIII века до середины XX века / под общ. ред. А.Т. Григорьяна и И.Б. Погребысского. – М.: Наука, 1972. – 414 с.
4. Боголюбов, А.Н. Советская школа механики машин / А.Н. Боголюбов. – М.: Наука, 1975. – 175 с.
5. Иосилевич, Г.Б. Прикладная механика / Г.Б. Иосилевич, П.А. Лебедев, В.С. Стреляев. – М.: Машиностроение, 1985. – 576 с.

Тема 2. СТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, ДЕТАЛЕЙ МАШИН И АППАРАТОВ

2.1. Основные понятия и аксиомы статики

Статика – это раздел механики, в котором изучаются общие правила сложения сил и условия равновесия материальных тел под действием сил.

Основные объекты статики – абсолютно твердое тело и сила.

Материальное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называется материальной точкой. За материальную точку в теоретической механике принимается не только мельчайшая частица тела, но и объекты, размеры которых весьма большие.

Абсолютно твердым (недеформируемым) называется тело, у которого расстояния между любыми двумя точками остаются неизменными. В действительности тела в природе под действием различных причин несколько меняют свою форму и размеры, то есть деформируются. Но во многих случаях эти деформации малы и не являются определяющими факторами при выводе общих закономерностей движения и равновесия таких тел.

Механическое движение сопровождается механическим взаимодействием, которое изменяет движение или приводит к деформации самих взаимодействующих тел. Такое взаимодействие в механике описывается понятием «сила» [1]. Чем больше деформация тела или изменение его движения, тем больше сила, которая приводит к этому.

Сила – это количественная мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого взаимодействующие тела могут сообщать друг другу ускорения или деформироваться.

Сила – векторная величина, которая характеризуется численным значением или модулем, точкой приложения и направлением.

Точкой приложения силы называется та материальная частица тела, на которую непосредственно передается действие от другого тела. Под *направлением силы* понимают направление того перемещения, которое получает под действием этой силы материальная точка, вначале находившаяся в покое. Прямая, по которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

На рисунках будем изображать силы в виде направленных отрезков, и обозначать их какой-либо буквой со знаком вектора (рис. 2.1). Такими же буквами, но без знака вектора будем обозначать их модули ($\vec{F}$ – сила, F – ее модуль).

За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1 кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе отсчета, равное 1 м/с^2 . Эта единица называется *ньютоном* (Н).

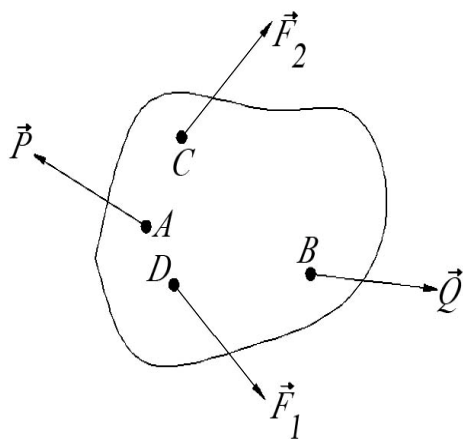


Рис. 2.1. К понятию системы сил

Совокупность сил, действующих на материальное тело, называется *системой сил* (рис. 2.1). Среди сил системы, наравне с заданными, могут быть и неизвестные, подлежащие определению.

Простейшие свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу, устанавливаются аксиомами статики. Опираясь на них, логическим путем строятся все положения статики абсолютно твердого тела. В частности, выводятся правила, по которым можно заменить заданную систему сил более

простой эквивалентной системой. Эту операцию называют *сложением сил*. Может решаться и обратная задача – замена одной силы системой сил (*разложение силы на составляющие*). Системы сил, которые производят одинаковое действие на тело, называются *эквивалентными*.

Запись $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}, \vec{Q}) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ означает, что системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}, \vec{Q})$ и $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ эквивалентны.

Одна сила, эквивалентная системе сил, называется *равнодействующей силой* данной системы [3].

Система сил, эквивалентная нулю, называется *уравновешенной*. Под действием такой системы сил абсолютно твердое тело находится в *равновесии*.

В статике будем пользоваться системой отсчета, неизменно связанной с Землей. Поэтому, когда говорим, что *тело находится в равновесии*, то имеем в виду покой или равномерное прямолинейное движение этого тела *по отношению к Земле*.

В основе статики лежат *аксиомы* – простые исходные положения, подтверждаемые многовековой практикой и не нуждающиеся в доказательствах [2]. Они *устанавливают основные свойства сил, приложенных к материальной точке и к абсолютно твердому телу*.

Аксиома 1 (аксиома равновесия двух сил). Для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно,

чтобы эти силы были равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 2.2):

$$\text{если } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0, \text{ то } F_1 = F_2, \text{ но } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Аксиома 2 (аксиома присоединения и исключения уравнивающих сил). Не изменяя действия системы сил на абсолютно твердое тело, можно прибавить к этой системе (или отнять от нее) взаимно уравнивающиеся силы (рис. 2.3):

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}_1) \sim \vec{P}_1, \text{ если } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0.$$

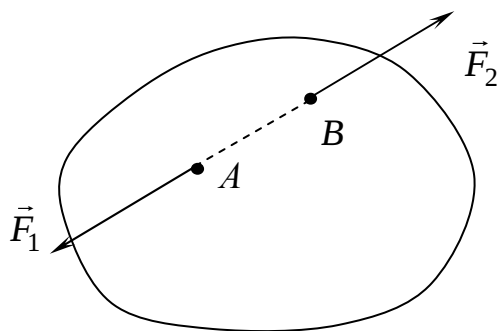


Рис. 2.2. К понятию аксиомы 1

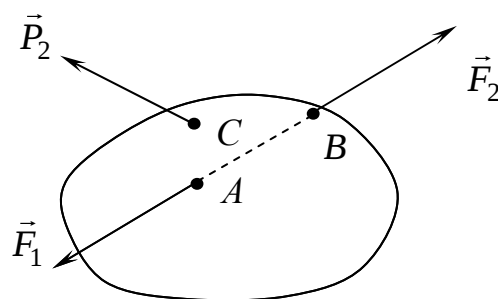


Рис. 2.3. К понятию аксиомы 2

Следствие. Не изменяя действия данной силы на абсолютно твердое тело, ее можно переносить по линии действия в любую другую точку тела.

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке тела, по величине и направлению совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 2.4).

Если обозначим через $\vec{R}$ равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, то на основании этой аксиомы имеем:

$$\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

Аксиома 4 (аксиома равенства действия и противодействия). Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 2.5):

$$F_{12} = F_{21}, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

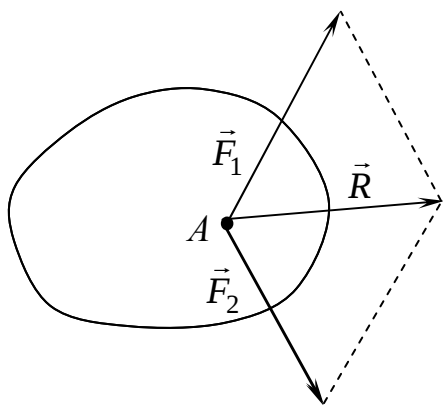


Рис. 2.4. К понятию аксиомы 3

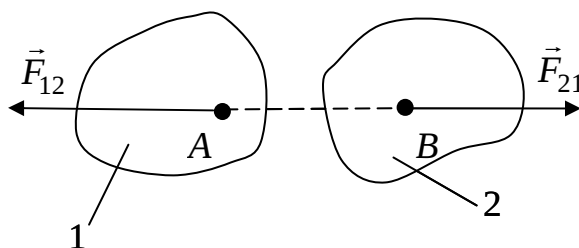


Рис. 2.5. К понятию аксиомы 4

Важно заметить, что действие и противодействие представляют собой две силы, приложенные всегда к двум разным телам. Поэтому их нельзя считать взаимно уравновешивающимися.

Аксиома 5 (принцип затвердевания). *Если деформируемое (не абсолютно твердое) тело, которое находилось под действием системы сил в состоянии равновесия, станет абсолютно твердым, то его равновесие не нарушится.*

Эта аксиома имеет важное значение при изучении равновесия деформируемых тел. Из нее следует, что *условия равновесия абсолютно твердого тела являются необходимыми и для равновесия деформируемого тела.*

Таким образом, принцип затвердевания устанавливает связь между статикой абсолютно твердого тела и статикой деформируемого тела.

Аксиома 6 (аксиома инерции). *Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.*

2.2. Связи и реакции связей. Опоры

Точка (или тело) называются *свободными*, если они могут получать любые перемещения в пространстве. Если же тело поставлено в условия, что некоторые перемещения для него становятся невозможными, то такое тело называется *несвободным*.

Любые ограничения, накладываемые на движения тел, в механике называются связями.

Связи, с которыми приходится встречаться в механике, осуществляются при помощи материальных тел (твердых или гибких). Между несво-

бодным телом и телом, осуществляющим связь, появляются силы взаимодействия. Сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется реакцией связи.

Из аксиомы 4 следует, что сила, с которой тело действует на связь, и реакция этой связи имеют одинаковые величины, но противоположные направления.

Силы взаимодействия тела и связи зависят от других сил, приложенных к несвободному телу. Эти силы называются активными. Как правило, они бывают известными (заданными). Нахождение сил реакций является одной из важнейших практических задач, решаемых в механике.

Сила реакции, как и любая другая сила, является величиной векторной, она характеризуется численным значением (модулем) и направлением. Существует общее правило, характеризующее взаимодействие рассматриваемого тела и связи: *направление силы реакции противоположно тому, в котором связь препятствует перемещению.*

Все многообразие связей, осуществляемых при помощи материальных тел, можно разделить на несколько основных типов [2].

Гладкая поверхность. Тело свободно опирается на гладкую (без трения) поверхность связи в точке A (рис. 2.6). В этом случае реакция опорной поверхности приложена к телу в точке A и направлена по общей нормали, проведенной в этой точке к поверхностям соприкасающихся тел. Поэтому она называется нормальной реакцией и обозначается обычно через $\vec{N}$.

Нить. Связь осуществляется при помощи гибкого тела (троса, каната, цепи и т.п.). Реакция такой связи (реакция нити) приложена к телу в точке крепления к нему нити и направлена вдоль нее к точке подвеса (силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на рис. 2.7).

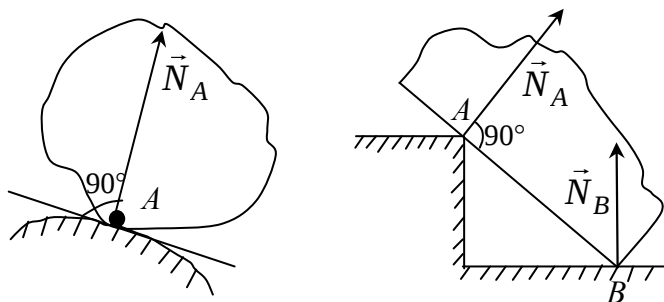


Рис. 2.6. Реакция гладкой поверхности

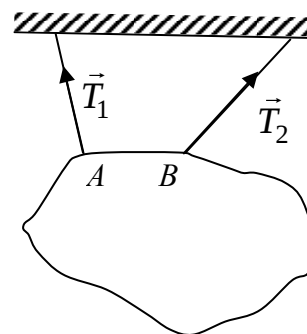


Рис. 2.7. Реакция нити

Неподвижная шарнирная опора. *Шарниром* называется такое подвижное соединение тел, которое дает им возможность свободно поворачиваться относительно друг друга. Если таким способом присоединить тело к неподвижному основанию (стойке), то получается шарнирно-неподвижная опора. При отсутствии трения в шарнире такая опора препятствует перемещению тела в любом направлении, перпендикулярном оси шарнира. Поэтому ее реакция может принимать любое направление, перпендикулярное оси шарнира (например, в плоскости рисунка). При решении задач эту силу реакции обычно представляют в виде двух составляющих сил, которые направляют перпендикулярно друг другу, например, параллельно принятым осям координат (рис. 2.8).

Неподвижная шарнирная опора может быть выполнена при помощи сферического шарнира (рис. 2.9). В этом случае неподвижным остается только геометрический центр B шарнира. Через него проходит линия действия силы реакции, которая может иметь любое направление в пространстве. Поэтому ее представляют уже в виде трех составляющих (направляя параллельно осям x , y , z). Каждая из них указывает на то, что точка B (центр шарнира) не может перемещаться в этом направлении.

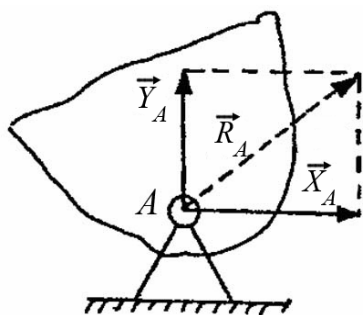


Рис. 2.8. К определению реакции в шарнирно-неподвижной опоре

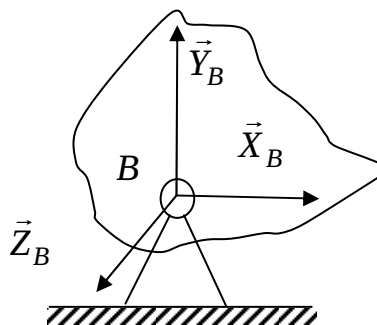


Рис. 2.9. К определению реакции в сферическом шарнире

Подвижная шарнирная опора. Если стойку шарнира поставить на катки так, чтобы она могла свободно перемещаться по опорной поверхности, то реакция такой шарнирной опоры будет направлена (в случае гладкой поверхности) по нормали к ней (рис. 2.10).

Стержневая связь (стержень). Эта связь осуществляется при помощи жесткого невесомого стержня произвольного очертания. На концах стержня имеются шарниры, при помощи которых он крепится к телу и к неподвижному основанию. *Реакция стержневой связи направлена по прямой линии, соединяющей концевые шарниры* (рис. 2.11).

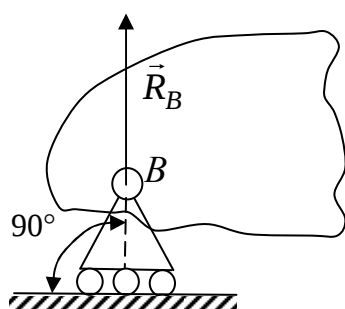


Рис. 2.10. Реакция шарнирной подвижной опоры

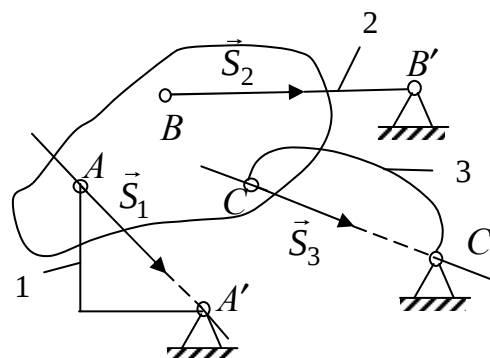


Рис. 2.11. К определению реакций в стержнях

Жесткая заделка или защемление. Так называется связь, ограничивающая любые перемещения тела. В жесткой заделке появляется система сил реакций, которую обычно представляют в виде одной силы (сила реакции жесткой заделки) и одной пары сил с моментом M (реактивный момент). При решении задач их раскладывают на составляющие силы и моменты, которые символизирует ограничение того или иного движения тела. Например, в случае плоской системы сил, они представляются в виде $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{m}_A)$ (рис. 2.12), которые показывают, что тело не может свободно перемещаться в направлении этих сил (или в противоположном направлении) и не может поворачиваться вокруг точки A . В случае пространственной системы сил, реакцию жесткой заделки представляют в виде трех составляющих сил $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ и трех моментов M_{B_x}, M_{B_y} и M_{B_z} относительно осей X, Y и Z (рис. 2.13). Их направление принимают произвольно и после решения задачи, то есть после вычисления составляющих сил реакций и реактивных моментов, уточняют эти направления.

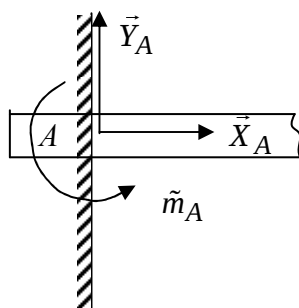


Рис. 2.12. К определению реакций в жесткой заделке (плоская система)

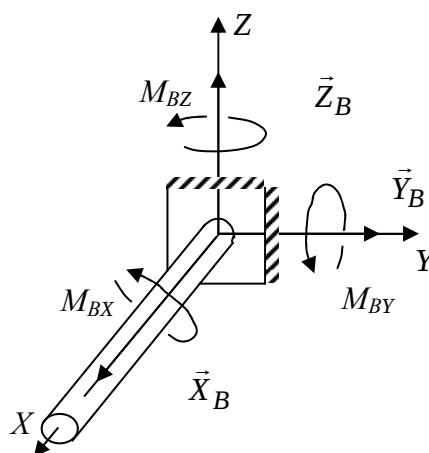


Рис. 2.13. К определению реакций в жесткой заделке (пространственная система)

2.3. Системы сходящихся сил

Сходящимися называются силы, линии, действия которых пересекаются в одной точке.

Если линии действия всех сил системы лежат в одной плоскости, то она называется плоской, в противном случае – пространственной.

Сложением сходящихся сил называется операция определения их равнодействующей.

Простейшую систему образуют две силы, сходящиеся в одной точке. Ранее мы выяснили, что силу, приложенную к твердому телу, можно переносить по ее линии действия и прикладывать в любой точке тела. А из аксиомы 3 следует, что они могут быть заменены одной силой, величина и направление которой совпадают с диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил. Поэтому можно записать

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (2.1)$$

Этот способ сложения двух сил называется *правилом параллелограмма сил*.

Нетрудно видеть, что для нахождения равнодействующей силы не обязательно строить параллелограмм: достаточно к концу одной силы (например, первой) перенести вектор второй силы, а затем из начала первой провести вектор к концу второй (перенесенной) силы (рис. 2.14). Получившийся треугольник называется силовым, а соответствующее правило нахождения равнодействующей силы – *правилом силового треугольника*.

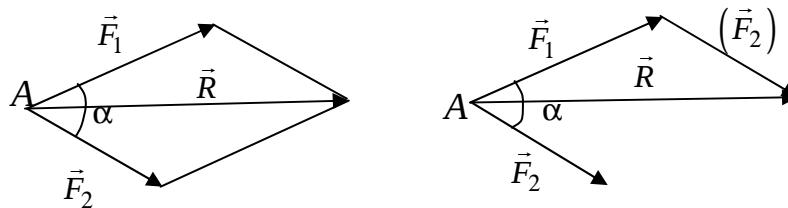


Рис. 2.14. К понятию сложения сил

Равнодействующую двух сходящихся сил можно найти и с помощью вычислений:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (2.2)$$

Чтобы найти равнодействующую в том случае, когда на тело действует большое число сходящихся сил (рис. 2.15), можно воспользоваться правилом силового треугольника последовательно для сложения сначала

двух, затем трех и так далее сил [3]. В результате получим так называемый *силовой многоугольник*, в котором вектор, проведенный из начала первой силы к концу последнего перенесенного вектора, и будет изображать искомую равнодействующую:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (2.3)$$

При построении силового многоугольника может получиться так, что конец последней перенесенной силы (F_n) попадает в начало первой, то есть многоугольник замкнется (рис. 2.16). В этом случае равнодействующая сила системы окажется равной нулю и, следовательно, данная система сил эквивалентна нулю, то есть система сил находится в равновесии.

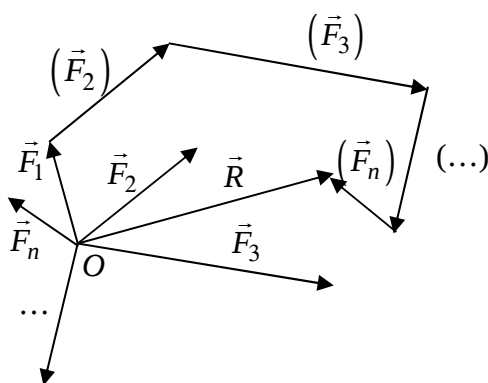


Рис. 2.15. К понятию силового много угольника

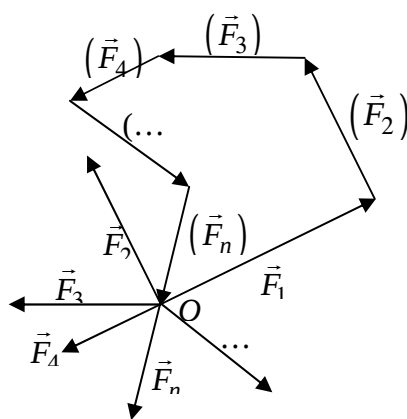


Рис. 2.16. К понятию системы сходящихся сил

Отсюда заключаем, что для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут.

О проекции силы на ось. Пусть задана сила $\vec{F}$ и некоторая ось x – ось проекций (рис. 2.17). Из математики известно, что проекция любого вектора (например, силы $\vec{F}$) на какую-либо ось (например, x) находится по формуле

$$\vec{F}_x = F \cdot \cos \alpha, \quad (2.4)$$

где α – угол между вектором $\vec{F}$ и осью x .

Знак косинуса этого угла и определяет знак проекции вектора на ось. Например, если угол α острый, то $\cos(\alpha) > 0$ и $F_x > 0$; если $90^\circ > \alpha > 270^\circ$, то $F_x < 0$ и т. д.

В частных случаях, когда $\alpha = 0$ (то есть сила параллельна оси проекций и имеет такое же направление), то $F_{1x} = F_1$; если вектор силы перпендикулярен оси проекций, то $F_{2x} = 0$, поскольку $\cos 90^\circ = 0$ и т. д.

Рассмотрим теперь определение равнодействующей сходящихся сил с помощью проекций [3].

Пусть задана система сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$, на которых построили силовой многоугольник $ABCDE$, где вектор $\overrightarrow{AE}$ соответствует равнодействующей силе $\vec{R}$ данной системы (рис. 2.18). Выберем ось x и найдем проекции каждой силы на эту ось. Получаем

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}. \quad (2.5)$$

То есть, *проекция равнодействующей системы сходящихся сил на ось равна алгебраической сумме проекций сил, составляющих эту систему.*

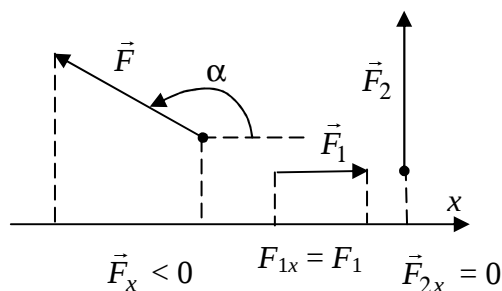


Рис. 2.17. К понятию проекции силы на ось

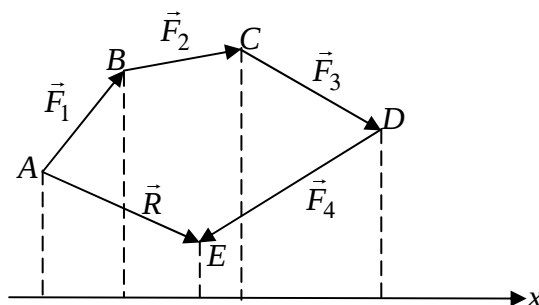


Рис. 2.18. К выводу формулы (2.5)

Полученный результат можно применить и к определению проекции равнодействующей силы на любую другую ось (например, y и z прямоугольной пространственной системы координат $Oxyz$). Следовательно, в случае системы, состоящей из n сил:

$$R_x = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kz}. \quad (2.6)$$

Зная проекции равнодействующей силы на оси координат, можно найти ее величину в случае плоской системы сил по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (2.7)$$

В случае пространственной системы сходящихся сил величина силы R находится, как длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого являются R_x , R_y , R_z (рис. 2.19):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (2.8)$$

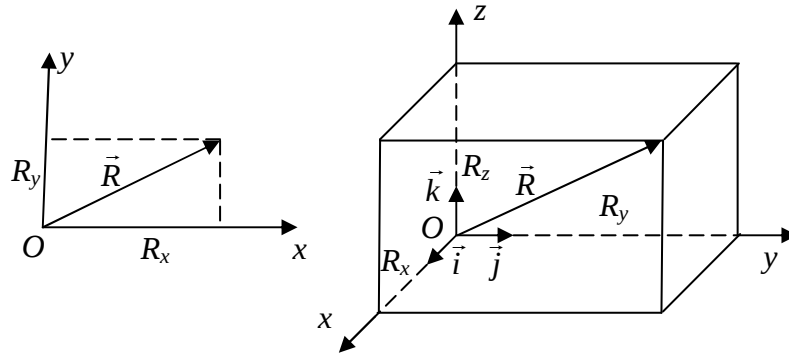


Рис. 2.19. К выводу формул (2.7) и (2.8)

Направление равнодействующей, то есть углы, образуемые ею с осями Ox , Oy и Oz , можно найти из формул:

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R}, \vec{k}) = \frac{R_z}{R} \quad (2.9)$$

Получим теперь аналитические уравнения равновесия сходящихся сил. Как мы установили ранее, для равновесия сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на векторах сил системы, был замкнут, то есть $\vec{R} = 0$. Следовательно, для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kz} = 0, \quad (2.10)$$

а в случае плоской системы сходящихся сил – два уравнения, так как всегда можно принять ось Oz перпендикулярно плоскости, в которой действуют силы системы:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky} = 0. \quad (2.11)$$

Итак, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на каждую из координатных осей равнялась нулю.

2.4. Теория пар сил

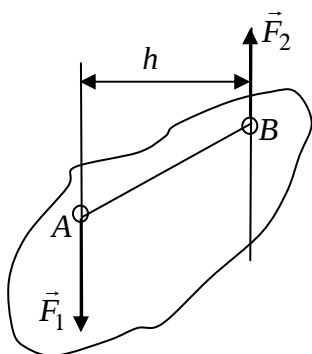


Рис. 2.20. К понятию пары сил

Парой сил называется система двух равных по модулю и противоположных по направлению параллельных сил, приложенных к одному твердому телу (рис. 2.20).

Пара сил (далее – пара), как и сила, является самостоятельной силовой единицей, характеризующей механическое взаимодействие материальных тел. *Пара сил не имеет равнодействующей и не может быть уравновешена одной силой [4].*

Пара производит на тело вращательное действие. Количественной мерой этого действия является момент пары.

Алгебраическим моментом пары называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо. Плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары. Момент пары обозначается буквой M :

$$M = \pm F_1 h = \pm F_2 h. \quad (2.12)$$

Будем считать момент пары положительным, если пара стремится поворачивать тело против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки.

Момент пары обладает следующими свойствами [3]:

- при переносе сил по линиям их действия момент пары не изменяется, так как при этом не изменяются ни величины сил, образующих пару, ни ее плечо;
- момент пары не зависит от положения центра моментов:

$$M_O = M_B = M_C = M.$$

Здесь символом M_O обозначен момент пары относительно точки O (центра моментов).

Не изменяя действия данной пары сил на твердое тело, ее можно заменить любой другой парой, расположенной в той же плоскости и имеющей тот же алгебраический момент.

Следовательно, любые пары, расположенные в одной плоскости и имеющие одинаковые алгебраические моменты, эквивалентны.

Это дает возможность не уточнять из каких сил состоит пара и чему равно ее плечо. Поэтому пары на рисунках изображают при помощи кру-

говых стрелок или условным знаком в виде двух связанных антипараллельных сил, равных по величине (рис. 2.21), с указанием только направлений, в которых эти пары стремятся поворачивать тело.

Сложением пар называется операция замены системы пар эквивалентной более простой системой сил.

Систему пар, действующих в одной плоскости, можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Следовательно, система пар на плоскости может находиться в равновесии только тогда, когда алгебраическая сумма моментов этих пар равна нулю:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_k = 0. \quad (2.13)$$

Отсюда также вытекает, что *плоскую систему пар сил можно уравновесить только парой сил, действующей в этой же плоскости.*

Действие пары (или системы пар) на твердое тело полностью определяется их алгебраическими моментами. Но сказанное справедливо в том случае, когда пары расположены в одной плоскости. Если же к телу приложена система пар, действующих в разных плоскостях, то каждая из них будет стремиться поворачивать тело в своей плоскости действия. Поэтому введенного понятия о моменте пары как алгебраической величине недостаточно. Его надо дополнить, одновременно определив и положение плоскости действия пары. Это можно выполнить, если рассматривать моменты пар сил как векторные величины.

Условимся направлять вектор, изображающий момент пары, перпендикулярно плоскости действия пары в такую сторону, чтобы с его конца было видно, что пара стремится поворачивать эту плоскость против хода часовой стрелки (рис. 2.22). Длину вектора будем принимать равной модулю алгебраического момента пары в этой плоскости.

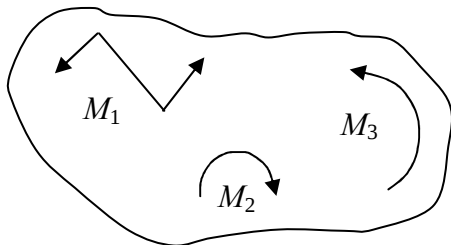


Рис. 2.21. К понятию пары сил

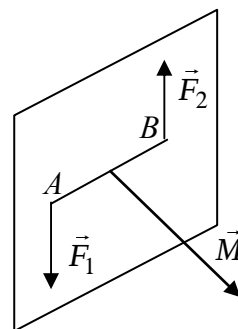


Рис. 2.22. К понятию векторного момента пары сил

Так как пару сил можно перемещать в плоскости ее действия и переносить в другую плоскость тела, параллельную первой, то вектор момента пары можно показывать из любой точки тела. Такие векторы называются свободными.

Если на тело действует система пар, как угодно расположенных в пространстве, то все они могут быть показаны в виде векторов, изображающих их моменты. Причем все они могут быть приложены в одной (любой) точке тела. При необходимости их можно сложить по правилу сложения векторов. Получившийся при этом результирующий вектор будет соответствовать моменту пары, эквивалентной всей системе пар.

2.5. Произвольная плоская система сил

Представим себе твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и пересекающей эту плоскость в точке O (рис. 2.23). Пусть на это тело действуют силы, лежащие в этой же плоскости, например, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Такое тело называется *рычагом*. Эффективность силы, приложенной к рычагу и стремящейся повернуть его вокруг оси вращения, определяется величиной и направлением момента этой силы относительно точки O .

В общем случае центром моментов может быть любая точка, даже не принадлежащая телу. При изучении плоской системы сил момент силы относительно точки рассматривается как алгебраическая величина.

Алгебраическим моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы (рис. 2.24):

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh \quad (2.14)$$

Расстояние h от центра моментов до линии действия силы $\vec{F}$ называется *плечом* этой силы относительно точки O .

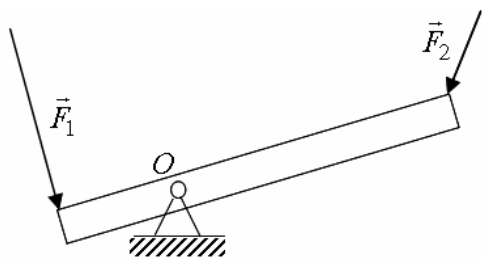


Рис. 2.23. К понятию рычага

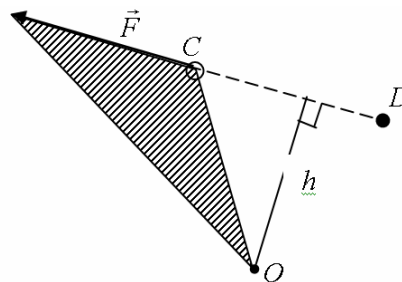


Рис. 2.24. К понятию момента силы относительно точки

Момент силы относительно точки считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра моментов против хода часовой стрелки, в противном случае – отрицательным.

Момент силы измеряется в Н·м.

Отметим следующие свойства алгебраического момента силы относительно точки [3]:

– при переносе силы по линии действия ее момент не изменяется, так как при этом сохраняются и величина силы, и ее плечо относительно центра моментов;

– момент силы относительно точки равняется нулю, если центр моментов лежит на линии действия силы, так как в этом случае плечо силы равно нулю (см. рис. 2.24): $M_D(\vec{F}) = 0$.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей [4]: *алгебраический момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен сумме алгебраических моментов сил, составляющих систему, относительно того же центра.*

Пусть к телу в точке C приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ и сила $\vec{R}$ является их равнодействующей. Примем в качестве центра моментов произвольную точку O . Тогда

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = M_O(\vec{R}) \quad (2.15)$$

Задача об эквивалентной замене произвольной плоской системы сил более простой системой решается приведением системы сил к центру [3]. В основе этого метода лежит **теорема о параллельном переносе силы**: *не изменяя действия силы на твердое тело, ее можно перенести параллельно самой себе и приложить в любой другой точке тела, добавив при этом пару с моментом, равным моменту силы относительно новой точки ее приложения.*

Пусть к твердому телу в точке A приложена сила $\vec{F}$ (рис. 2.25). Действие этой силы на тело не изменится, если в произвольно взятой точке B тела приложим к нему две уравновешивающиеся силы $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, причем $F' = F'' = F$ и $\vec{F}' // \vec{F} // \vec{F}''$. Полученную систему трех сил можно рассматривать как состоящую из силы $\vec{F}'$, которая равна заданной силе $\vec{F}$, но перенесена в точку B параллельно себе, и пары сил $(\vec{F}, \vec{F}'')$ с моментом M :

$$M = -Fh = M_B(\vec{F}). \quad (2.16)$$

Итак,

$$\vec{F} \sim (\vec{F}', M). \quad (2.17)$$

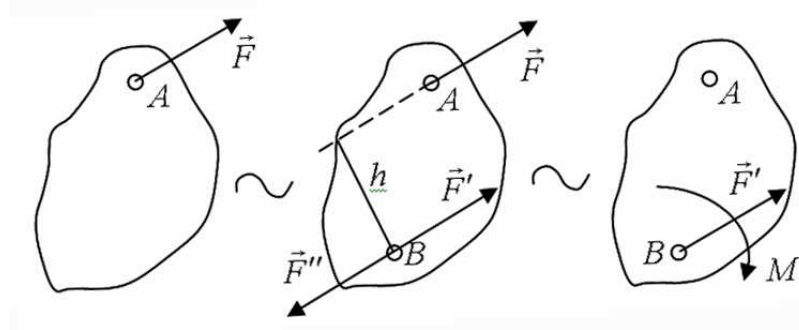


Рис. 2.25. К вопросу о параллельном переносе сил

Рассмотрим систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, приложенных к твердому телу в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ и действующих в плоскости рис. 2.26. Используя предыдущий прием, перенесем каждую силу в произвольно взятую точку O – центр приведения. Вместо исходных сил получим геометрически равные им силы:

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n, \quad (2.18)$$

сходящиеся в точке O , и присоединенные пары с моментами:

$$M_1 = M_O(\vec{F}_1), M_2 = M_O(\vec{F}_2), \dots, M_n = M_O(\vec{F}_n). \quad (2.19)$$

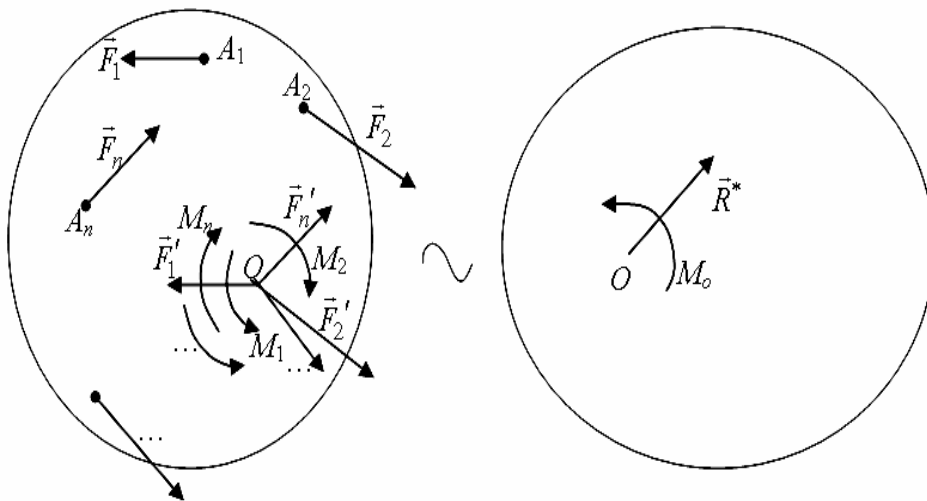


Рис. 2.26. К вопросу о приведении плоской системы сил к заданному центру O

Сложив силы, сходящиеся в точке O , найдем их равнодействующую:

$$\vec{R}^* = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n,$$

или

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}'_n. \quad (2.20)$$

Итак, силы, приложенные в точке O , заменили одной силой $\vec{R}^*$. Эта сила, равная геометрической сумме сил системы, называется ее *главным вектором*. Очевидно, что он не зависит от центра приведения.

Теперь сложим присоединенные пары, появившиеся при параллельном переносе сил заданной системы в центр приведения O :

$$M_O = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k),$$

или

$$M_O = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + \dots + M_O(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k). \quad (2.21)$$

Этот момент называется *главным моментом системы сил относительно центра приведения O* . При перемене центра приведения он будет иметь другое значение, поскольку его слагаемые зависят от положения этой точки.

Таким образом, в результате приведения к точке O заданная система сил заменена более простой эквивалентной системой, состоящей из одной силы (*главный вектор системы*) и одной пары сил с моментом, равным *главному моменту системы сил* относительно центра приведения O :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}^*, M).$$

Следовательно, *плоские системы сил эквивалентны между собой, если они имеют одинаковые главные векторы и главные моменты*.

Чтобы упростить заданную плоскую систему сил, нет необходимости выполнять все указанные преобразования. Достаточно определить величину и направление главного вектора, а также вычислить главный момент системы относительно центра приведения.

Приняв точку O за начало системы координат Oxy , можем записать:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky}. \quad (2.22)$$

Зная проекции главного вектора на оси Ox и Oy , находим его величину и направление:

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2}; \quad (2.23)$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{x}) = R_x^* / R^*, \quad \cos(\vec{R}^*, \vec{y}) = R_y^* / R^*; \quad (2.24)$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{x}) = R_x^* / R^*, \quad \cos(\vec{R}^*, \vec{y}) = R_y^* / R^*. \quad (2.24)$$

Главный момент системы относительно точки O вычисляется по формуле (2.21).

При вычислении $\vec{R}^*$ и M_O могут получиться следующие результаты [3]:

1) $R^* \neq 0$, а $M_O = 0$. Это означает, что данная система сил эквивалентна одной силе, то есть приводится к равнодействующей, причем эта равнодействующая по величине и направлению совпадает с главным вектором и приложена в центре приведения O .

2) $\vec{R}^* = 0$, а $M_O \neq 0$. В этом случае система приведена к паре сил с моментом, равным главному моменту системы.

Так как пару сил можно переносить в плоскости ее действия в любое другое место, то при перемене центра приведения результат не изменится и система сил будет эквивалентна одной и той же паре с одним и тем же моментом.

3) $R^* \neq 0$, а $M_O \neq 0$. Такая система сил допускает дальнейшее упрощение и приводится к равнодействующей силе.

4) $\vec{R}^* = 0$, а $M_O = 0$. В данном случае исходная система сил эквивалентна нулю, то есть находится в равновесии.

Вернемся к рассмотрению случая приведения произвольной плоской системы сил к центру O , когда главный вектор и главный момент некоторой системы сил не равны нулю. Предположим, что получили систему, показанную на рис. 2.27.

Заменим главный момент парой сил $(\vec{R}_1, \vec{R})$. Силы этой пары примем равными главному вектору $R_1 = R = R^*$ и одну из них приложим в точке O , направив ее противоположно $\vec{R}^*$. Линия действия другой силы пары пройдет на расстоянии OO_1 , равном плечу пары:

$$OO_1 = |M_O| / R^*. \quad (2.25)$$

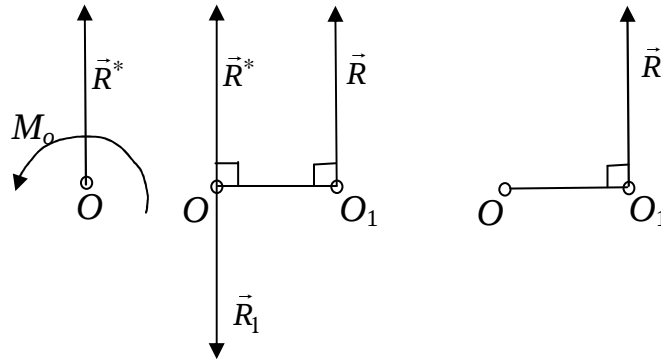


Рис. 2.27. К вопросу приведения плоской системы сил к равнодействующей

В полученной системе трех сил $\vec{R}^*$ и $\vec{R}_1$ уравниваются, и их можно из рассмотрения исключить. После этого останется одна сила, геометрически равная главному вектору системы и приложенная в точке O_1 . Так как она эквивалентна первоначальной системе сил, то является ее равнодействующей.

Итак, в рассматриваемом случае ($R^* \neq 0$ и $M_O \neq 0$) система сил приводится к равнодействующей и справедлива теорема Вариньона.

Ранее [3] установлены условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\vec{R}^* = 0 \text{ и } M_O = 0. \quad (2.26)$$

Из этих условий получим *аналитические уравнения равновесия* произвольной плоской системы сил, используя формулы (2.21) и (2.23):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (2.27)$$

Таким образом, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил системы на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, равнялись нулю.

Система (2.27) называется основной формой уравнений равновесия произвольной плоской системы сил. Для составления этих уравнений оси проекций x и y , а также центр моментов O могут выбираться совершенно произвольно в плоскости действия сил системы. Пользуясь этим правом выбора, можно заменить уравнения проекций на уравнения моментов относительно других центров и получить еще две системы:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.28)$$

(ось проекций x не должна быть перпендикулярна прямой OA);

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.29)$$

(центры моментов B , A и O не должны находиться на одной прямой).

Системы (2.28) и (2.29) называются соответственно второй и третьей формами уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

Ограничения на выбор центров моментов обусловлены следующим.

Предположим, что система сил приводится к равнодействующей $\vec{R}^*$. Поскольку об этом заранее не известно, то может случиться так, что выбранная ось проекций окажется перпендикулярной силе $\vec{R}^*$, а центры моментов O и A – на линии ее действия (рис. 2.28). Тогда уравнения системы (2.28) будут выполняться. То есть, приходим к противоречию: уравнения равновесия выполняются, хотя система сил не является уравновешенной. Во избежание подобных случаев и вводятся указанные ограничения.

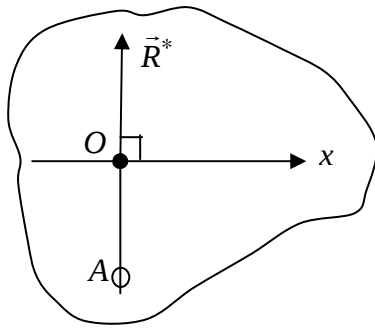


Рис. 2.28. К выводу формулы (2.28)

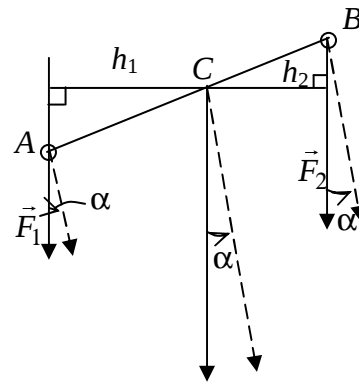


Рис. 2.29. К понятию равнодействующей двух параллельных сил

О плоской системе параллельных сил. Система двух параллельных сил является плоской, так как через их линии действия всегда можно провести плоскость.

Пусть к твердому телу в точках A и B приложены две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные по параллельным прямым в одну сторону (рис. 2.29). Главный вектор этой системы $\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ направлен в ту же сторону, что и заданные силы, и параллелен им. Его модуль равен сумме величин сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и отличен от нуля. В этом случае система сил приводится к равнодействующей, причем ее величина и направление такие же, как и у главного вектора, то есть

$$R = F_1 + F_2 \quad \text{и} \quad \vec{R} \uparrow \uparrow \vec{R}^*.$$

Чтобы найти точку, через которую проходит линия действия силы $\vec{R}$, воспользуемся теоремой Вариньона. Предположим, что равнодействующая сила системы проходит через какую-то точку C на прямой AB . Примем эту точку за центр моментов и по теореме Вариньона будем иметь:

$$AC / CB = F_2 / F_1.$$

Точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей системы двух параллельных сил, направленных в одну и ту же сторону, делит отрезок AB между точками приложения сил системы на части, обратно пропорциональные величинам этих сил.

В заключение отметим следующее, если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ повернуть в одну и ту же сторону на угол α , то все сказанное выше останется без изменений. Это означает, что точка C – геометрическая характеристика системы параллельных сил: через нее всегда проходит линия действия равнодействующей двух параллельных, одинаково направленных сил, имеющих заданные величины, независимо от их направления по отношению к прямой AB . Эта точка называется *центром системы двух параллельных сил*.

Рассмотрим плоскую систему параллельных сил (рис. 2.30). Для ее равновесия необходимо и достаточно, чтобы выполнялись общие для любой плоской системы сил условия равновесия [3]: главный вектор и главный момент системы относительно любого центра должны быть равны нулю. Полученные из них аналитические уравнения (2.27) применимы и в данном случае. Вспомним, что на выбор осей проекций и центра моментов для составления этих уравнений не накладываются никакие ограничения. Но так как линии действия сил рассматриваемой системы параллельны, то сумма проекций сил системы на ось, перпендикулярную им (например, на ось Oy), будет тождественно равна нулю. Исключив по этой причине одно из уравнений системы (2.27), получаем, что *для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два уравнения:*

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (2.30)$$

В качестве уравнений равновесия могут быть использованы и другие, например:

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad (2.31)$$

в которых центры моментов должны выбираться так, чтобы прямая OA не была параллельна линиям действия сил системы.

О распределенной нагрузке. Рассматривая понятие силы, мы отмечали, что в реальных условиях сосредоточенные, то есть приложенные в точке, силы не встречаются. Они обязательно распределены по объему, площади или линии [4]. Рассмотрим такие силы.

Простейшей системой распределенных сил является система, показанная на рис. 2.31, *а*. Силы системы равномерно распределены на прямолинейном участке AB длиной l , направлены в одну сторону и параллельны между собой. Сила, приходящаяся на единицу длины участка, называется интенсивностью распределенных сил (или распределенных нагрузок). Она измеряется в Н/м и обозначается буквой q .

Рассматриваемая система сил имеет равнодействующую:

$$Q = ql, \quad (2.32)$$

проходящую посередине участка AB , по которому распределены силы.

Другим примером является система параллельных сил, направленных в одну сторону, но переменной интенсивности: силы распределены по закону треугольника (рис. 2.31, *б*).

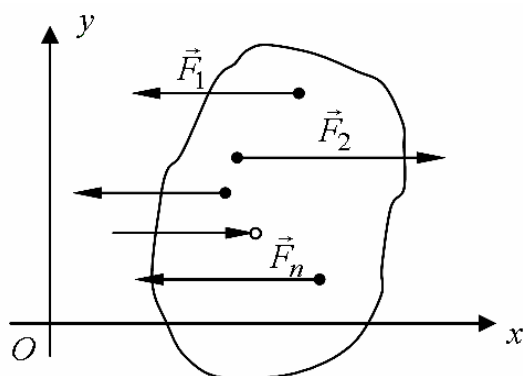


Рис. 2.30. К выводу уравнений равновесия плоской системы параллельных сил

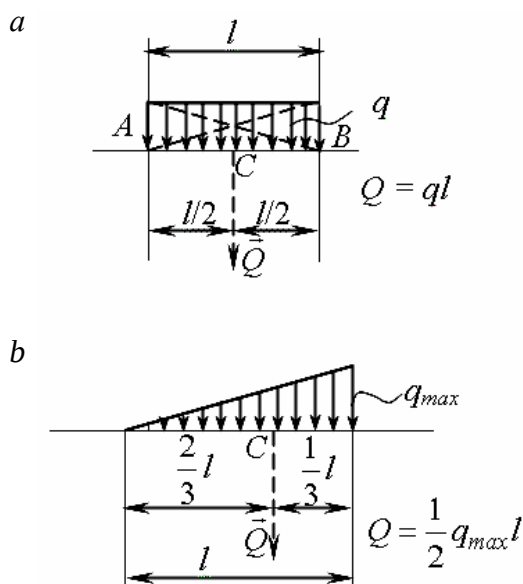


Рис. 2.31. К понятию равнодействующей системы распределенных сил: *а* – постоянной интенсивности; *б* – переменной интенсивности

Такая система сил тоже имеет равнодействующую Q :

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l. \quad (2.33)$$

Ее линия действия проходит через точку C , которая располагается ближе к тому концу участка, где интенсивность нагрузки – наибольшая и расстояние до точки C от этого конца участка равно $1/3$ длины всего участка.

2.6. Произвольная пространственная система сил

Момент силы относительно точки как вектор. Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O , характеризующий ее вращательный эффект, определяется тремя элементами [3]: численным значением (модулем); плоскостью действия, в которой находятся центр моментов и сила; направлением поворота в этой плоскости. В случае плоской системы сил достаточно указывать только численное значение и направление момента силы относительно точки, то есть рассматривать его как алгебраическую величину.

В случае пространственной системы сил плоскости поворота для каждой силы различны и их следует указывать отдельно. Проще всего это можно сделать, если изображать момент силы относительно точки как вектор. В механике принято направлять вектор момента силы относительно точки по перпендикуляру к плоскости, в которой находятся сила и центр моментов O , в такую сторону, чтобы с конца его было видно, что сила стремиться поворачивать тело против хода часовой стрелки (рис. 2.32). Длину вектора принимают равной величине момента. Построенный таким образом вектор будет одновременно характеризовать величину момента силы относительно точки, плоскость, в которой сила стремиться поворачивать тело, и направление поворота этой плоскости. Сама же точка приложения этого вектора будет являться центром моментов.

Момент силы относительно оси. Ранее мы говорили о вращательном эффекте силы, приложенной к телу, относительно точки этого тела. В технике приходится иметь дело с телами, которые могут вращаться вокруг оси (например, валы, оси, зубчатые колеса и другие детали различных машин и устройств). Поэтому очень важно установить, какое действие оказывает сила, приложенная к таким телам. Вращательный эффект, создаваемый силой в подобных случаях, характеризуется ее моментом относительно оси вращения тела.

Пусть некоторая сила $\vec{F}$ и ось Z занимают произвольное положение по отношению друг к другу (рис. 2.33). Через точку O , произвольно принятую на оси, проведем плоскость π , перпендикулярную ей.

Из начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$, изображающего силу $\vec{F}$, опустим перпендикуляры на эту плоскость. Их основания являются проекциями точек A и B на плоскость π . Из проекции начала силы $\vec{F}$ на плоскость π (точка a) к проекции конца силы (точка b) проведем вектор $\overrightarrow{ab} = \vec{F}_\pi$. Он является проекцией вектора силы $\vec{F}$ на плоскость π . Момент силы $\vec{F}_\pi$ относительно точки O принимается за момент силы $\vec{F}$ относительно оси z и обозначается символом $M_z(\vec{F})$.

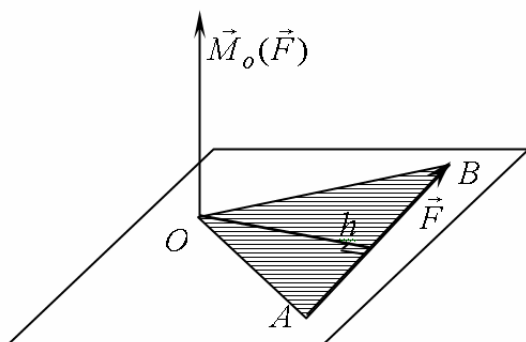


Рис. 2.32. К понятию векторного момента силы относительно точки

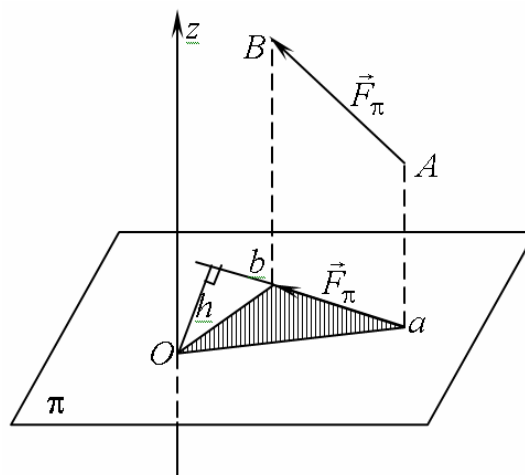


Рис. 2.33. К понятию момента силы относительно оси Z

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z называется момент проекции этой силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки O их пересечения:

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_\pi) = \pm F_\pi h. \quad (2.34)$$

Из этого определения следует, что момент силы относительно оси – алгебраическая величина.

Правило знаков: если с конца оси моментов видно, что сила стремится поворачивать тело вокруг этой оси против хода часовой стрелки, то ее момент относительно этой оси будем считать положительным, а если по ходу часовой стрелки – отрицательным.

Момент силы относительно оси обращается в нуль в следующих двух случаях:

- если сила параллельна оси моментов (в этом случае проекция силы на плоскость перпендикулярную оси равна нулю);
- если линия действия силы пересекает эту ось (плечо силы $\vec{F}_\pi$ относительно точки O равно нулю).

Эти случаи можно объединить: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось моментов лежат в одной плоскости.

Приведение системы сил к центру. Ранее [3] установили, что при параллельном переносе силы в другую точку тела необходимо добавить к этой силе присоединенную пару. Ее момент рассматривали как алгебраическую величину. Эти результаты с некоторыми уточнениями можно использовать и в случае пространственной системы сил.

Так как через линию действия любой силы и точку в пространстве всегда можно провести плоскость, то параллельный перенос силы тоже всегда осуществляется в плоскости. Но присоединенные пары будут расположены в разных плоскостях, поэтому моменты присоединенных пар следует рассматривать как векторы:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \quad \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \quad \dots, \quad \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n) \quad (2.35)$$

Переносим каждую силу в точку O (центр приведения), будем заменять ее геометрически равной силой, приложенной в точке O , и векторному моменту $\vec{M}_k$:

$$\vec{F}_k \sim (\vec{F}'_k, \vec{M}_k). \quad (2.36)$$

Складывая силы, сходящиеся в точке O , получим главный вектор системы:

$$\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{R}^*$$

или

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (2.37)$$

То есть, *главный вектор произвольной пространственной системы сил равен геометрической сумме сил системы.*

Сложив векторные моменты присоединенных пар, получим главный момент системы сил относительно центра приведения:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_O$$

или

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (2.38)$$

То есть, *главный момент произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения равен геометрической сумме векторных моментов сил системы относительно этого центра.*

Таким образом, *любая произвольная пространственная система сил может быть заменена эквивалентной системой, состоящей из одной силы и одной пары сил:*

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{R}^*, \vec{M}_O). \quad (2.39)$$

Величина и направление главного вектора системы определяются через его проекции на оси координат:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad R_z^* = \sum_{k=1}^n F_{kz}; \quad (2.40)$$

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2}; \quad (2.41)$$

$$\cos \alpha = R_x^*/R^*; \quad \cos \beta = R_y^*/R^*; \quad \cos \gamma = R_z^*/R^*. \quad (2.42)$$

Для вычисления главного момента произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения O сначала вычисляются главные моменты системы сил относительно координатных осей Ox , Oy и Oz :

$$\begin{aligned} \vec{M}_x &= \vec{M}_x(\vec{F}) + \vec{M}_x(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_x(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_x(\vec{F}_k), \\ \vec{M}_y &= \vec{M}_y(\vec{F}) + \vec{M}_y(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_y(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_y(\vec{F}_k), \\ \vec{M}_z &= \vec{M}_z(\vec{F}) + \vec{M}_z(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_z(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_z(\vec{F}_k). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Затем находятся величина и направление $\vec{M}_O$ по формулам:

$$M_O = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2}, \quad (2.44)$$

$$\cos \alpha_1 = M_x/M_O; \quad \cos \beta_1 = M_y/M_O; \quad \cos \gamma_1 = M_z/M_O, \quad (2.45)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы, которые образуют главный момент $\vec{M}_O$ с осями координат.

Произвольная пространственная система сил будет находиться в равновесии, если она эквивалентна нулю. Это возможно лишь тогда, когда главный вектор и главный момент системы относительно произвольно взятого центра O равны нулю.

Условия:

$$\vec{R}^* = 0, \quad \vec{M}_O = 0 \quad (2.46)$$

являются *необходимыми и достаточными условиями равновесия пространственной системы сил*. Они равносильны следующим *шести аналитическим уравнениям равновесия*:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на каждую из трех координатных осей, а также алгебраические суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей были равны нулю.

Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил. Пространственная система параллельных сил является частным случаем произвольной пространственной системы сил, так как линии действия всех сил параллельны между собой, но не лежат в одной плоскости.

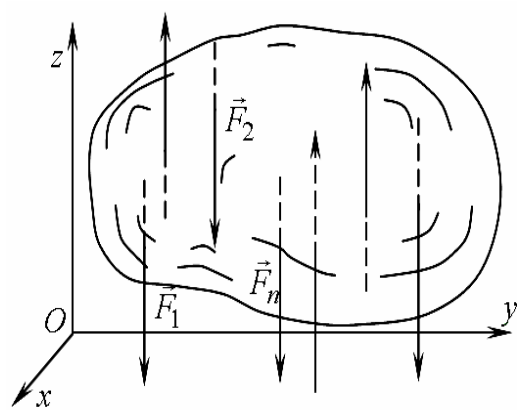


Рис. 2.34. К вопросу уравнений равновесия пространственной системы параллельных сил

Примем такую систему координат $Oxyz$, чтобы ось Oz была параллельна линиям действия сил системы (рис. 2.34). Тогда две другие оси: Ox и Oy – будут перпендикулярны им, и проекции сил системы на эти оси будут равны нулю. Следовательно, два уравнения системы (2.46) автоматически выполняются, и их составление сведется к записи тождества $0 \equiv 0$. Кроме этого, момент каждой силы относительно оси Oz , параллельной линиям действия сил, тоже будет равен нулю. Следовательно, последнее уравнение системы (2.46) выполнится тождественно. В результате из шести уравнений системы (2.47) останется три:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (2.48)$$

Итак, для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций их на ось, параллельную линиям действия сил системы, а также суммы моментов сил относительно двух осей, перпендикулярных им, равнялись нулю.

Рассматривая различные системы сил, мы получили условия и уравнения их равновесия. При этом выяснили, что уравнения могут составлять в различных формах. Но важно отметить следующее. В какой бы форме они ни составлялись, их число, например, в случае произвольной пространственной системы сил – шесть. Следовательно, если в задаче рас-

сматривается равновесие тела под действием такой системы сил, то *методами статики* можно определить не более шести неизвестных.

Аналогичную ситуацию имеем и в случае любой другой системы сил: *количество уравнений равновесия ограничено и определяется видом самой системы сил*. Например, для плоской системы сходящихся сил их всего два, а для произвольной плоской системы – три и т. д.

Количеством уравнений равновесия определяется и число неизвестных, которые можно найти, решая задачи статики.

Если в задаче статики число неизвестных равно количеству уравнений равновесия, то она может быть решена методами, которые мы рассматриваем. Такие задачи называются *статически определенными*. Если же количество неизвестных больше числа уравнений равновесия, то задача становится статически неопределимой. Для решения таких задач наравне с уравнениями равновесия применяются методы, которые рассматриваются в сопротивлении материалов.

2.7. Центр тяжести

На все частицы материального тела вблизи земной поверхности действуют силы притяжения к Земле, называемые силами тяжести [3]. Если размеры тела сравнительно невелики, то эти силы параллельны между собой и направлены в одну сторону. Их равнодействующая называется силой тяжести тела. Очевидно, что

$$P = \sum_{k=1}^n P_k, \quad (2.49)$$

где P – сила тяжести тела;

P_k – сила тяжести k -той частицы.

Как было показано ранее, равнодействующая двух параллельных и одинаково направленных сил проходит через одну и ту же точку C при любой ориентации сил относительно прямой, соединяющей точки их приложения. Этот результат может быть распространен и на случай большого числа параллельных сил, направленных в одну сторону, так как, найдя центр первых двух сил, в нем можно приложить их равнодействующую, затем найти центр этой равнодействующей и некоторой третьей силы системы и т. д. Следовательно, система сил тяжести частиц материального тела имеет свой центр, через который проходит линия действия их равнодействующей. Эта геометрическая точка, принадлежащая телу, называется его *центром тяжести*.

Чтобы найти положение центра тяжести тела, выберем систему координат $Oxuz$, неизменно связанную с телом. Ось Oz направим вертикально вверх, то есть параллельно линиям действия сил тяжести. Тогда можно записать:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (P_k x_k)}{P}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (P_k y_k)}{P}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (P_k z_k)}{P}. \quad (2.50)$$

По таким же формулам можно вычислять координаты центра тяжести тела, если с ним сама система координат непосредственно не связана.

Представим себе некоторый объем V , заполненный однородным веществом, имеющим удельный вес γ . Силы тяжести такого тела и некоторой его частицы пропорциональны их объемам V и V_k :

$$P = V\gamma, \quad P_k = V_k\gamma. \quad (2.51)$$

Если в формулы (2.50) подставить значения P и P_k , то получаем

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k x_k)}{V}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k y_k)}{V}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (V_k z_k)}{V}. \quad (2.52)$$

Выражения (2.52) определяют положение центра тяжести объема, который является его геометрической характеристикой.

Рассмотрим теперь тонкую однородную пластинку весом P . Эта сила равномерно распределена по всей площади пластинки, так что

$$P = A \cdot \gamma,$$

где γ – сила тяжести, приходящаяся на единицу площади.

Мысленно разобьем всю пластинку на n частей ($k = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, что сила тяжести P_k равна $A_k \gamma$.

Выберем систему координат, расположенную в плоскости пластинки, и найдем положение ее центра тяжести C :

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k x_k)}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k y_k)}{A}. \quad (2.53)$$

где x_k и y_k – координаты центров тяжести выделенной части.

Эти формулы определяют положение центра тяжести пластинки, но положение этой точки не зависит ни от силы тяжести, ни от вещества, из которого сделана пластинка. Следовательно, по ним находится положение центра тяжести не самой пластинки, а ее площади. Так мы пришли к понятию «*центр тяжести плоской фигуры*», то есть геометрического объекта, не обладающего массой. Это понятие является еще одной геометрической характеристикой плоской фигуры.

Аналогичными рассуждениями можно прийти к понятию «*центр тяжести геометрической линии*»:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k x_k)}{L}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k y_k)}{L}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n (L_k z_k)}{L}. \quad (2.54)$$

где L_k – длина k -той части, на которые разбита вся линия.

В полученных формулах (2.50) – (2.54), определяющих центры тяжести материального и геометрического тел, суммы состоят из бесчисленного множества слагаемых. Правила вычисления таких сумм излагаются в курсе интегрального исчисления. Здесь мы рассмотрим некоторые приемы, позволяющие легко определить центры тяжести простейших тел и фигур [1].

Метод симметрии

Если материальное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести такого тела находится в этой плоскости. Действительно, каждой частице M' такого тела соответствует частица M'' , расположенная по другую сторону от плоскости симметрии и имеющая такую же силу тяжести. Равнодействующая сила тяжести обеих частиц проходит через середину отрезка $M''M'$, то есть лежит в плоскости симметрии. Очевидно, что так обстоит дело со всеми точками тела, и поэтому равнодействующая сил тяжести всех частиц тела проходит через точку C , находящуюся в плоскости симметрии.

Например, центр тяжести прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей, где пересекаются две оси симметрии прямоугольника. Точно так же центр тяжести параллелограмма, имеющего центр симметрии в точке пересечения диагоналей, находится в этой точке.

Метод разбиения

Сущность данного метода состоит в том, что рассматриваемое тело разбивается на несколько простейших тел, причем таких, что положение центра тяжести каждого из них можно определить заранее, например, ис-

пользуя метод симметрии или по известным формулам. Пусть это будут точки $C_1(x_1, y_1, z_1)$, $C_2(x_2, y_2, z_2)$ и т.д. Обозначим центр тяжести всего тела буквой C , а его координаты – x_c, y_c, z_c . Они могут быть найдены по формулам (2.50), в которых суммы состоят уже из конечного числа слагаемых по количеству частей, на которые разбивается тело.

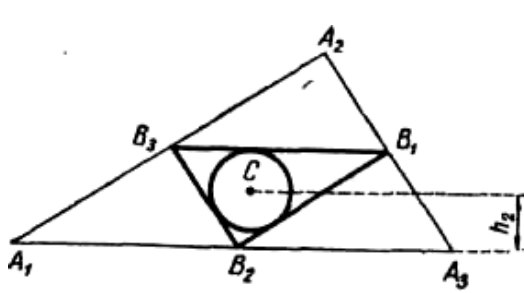
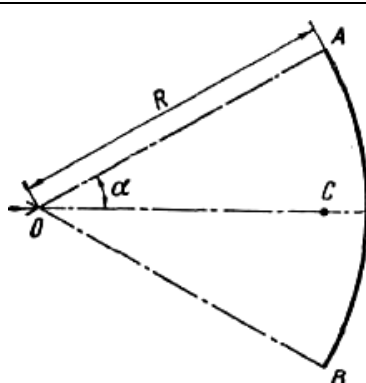
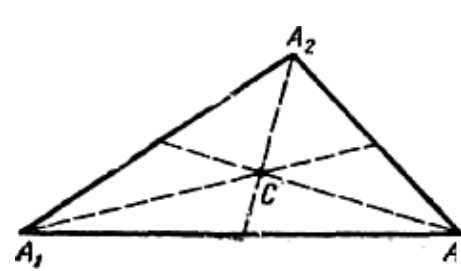
Метод отрицательных масс

Тело, имеющее свободные полости, полагают сплошными, а массу свободных полостей считают отрицательной.

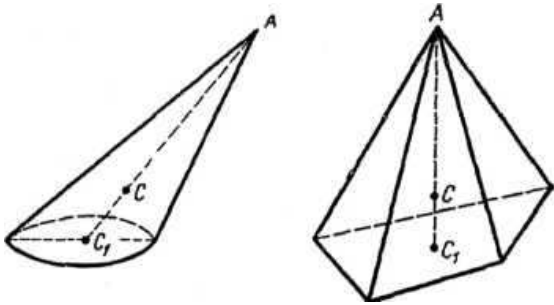
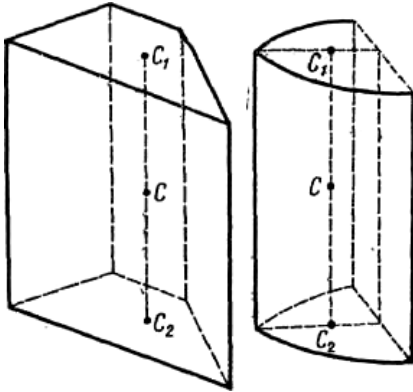
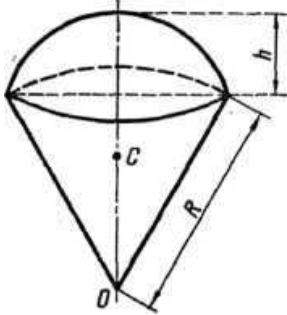
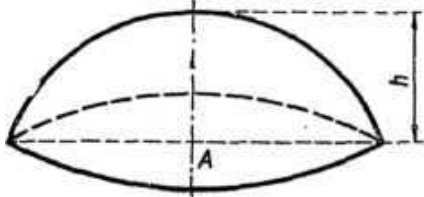
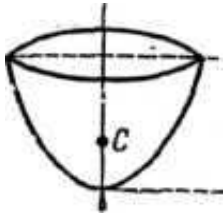
Положения центров тяжести некоторых простых плоских и объемных фигур [2] приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Положение центров тяжести некоторых однородных линий, фигур и тел

Положение центра тяжести линии	
Периметр треугольника	 Центр тяжести находится в центре круга, вписанного в треугольник $\Delta B_1B_2B_3$, где B_1, B_2, B_3 – середины сторон данного треугольника. $h_2 = \frac{H_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3},$ где a_1, a_2, a_3 – стороны данного треугольника и H_2 – высота, соответствующая стороне a_2
Дуга окружности радиуса R	 $OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Положение центра тяжести площади	
Треуголь- ник	 Центр тяжести находится в точке пересечения медиан: $x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$ $y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3),$ где x_i, y_i – координаты вершин треугольника

Трапеция		Центр тяжести находится в точке пересечения прямой AB и прямой, соединяющей середины параллельных сторон. $h = \frac{H}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b},$ где H – высота трапеции
Четырех-угольник		Центр тяжести C находится в точке пересечения отрезков $[C_1C_2]$ и $[C_3C_4]$, где C_1 – центр тяжести треугольника $\Delta A_2A_3A_4$, C_2 – центр тяжести треугольника $\Delta A_1A_3A_4$, C_3 – центр тяжести треугольника $\Delta A_1A_2A_4$ и C_4 – центр тяжести треугольника $\Delta A_1A_2A_3$
Круговой сектор радиуса		$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Круговой сегмент радиуса		$OC = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin^2 \alpha}$
Параболический сегмент		$OC = \frac{2}{5} h$

Положение центра тяжести объема		
Пирамида или конус		$C_1C = \frac{1}{4} AC_1,$ где C_1 – центр тяжести основания, A – вершина и C – центр тяжести пирамиды или конуса
Призма или цилиндр		Центр тяжести C находится в середине отрезка, соединяющего центры тяжести C_1 и C_2 верхнего и нижнего оснований
Шаровой сектор радиуса		Центр тяжести C лежит на оси симметрии, причем $OC = \frac{3}{8} (2R - h),$ где h – высота шарового сегмента
Шаровой сегмент радиуса		Центр тяжести C лежит на оси симметрии на расстоянии от основания сегмента $AC = \frac{3}{4} \frac{(2R - h)^2}{(3R - h)}$
Параболоид вращения		Центр тяжести C лежит на оси симметрии на расстоянии от вершины параболоида $OC = \frac{2}{3} h,$ где h – высота параболоида

Понятие о статическом моменте площади фигуры относительно оси. Возьмем плоскую фигуру в осях координат $Ox - Oy$ (рис. 2.35) и разобьем ее площадь на отдельные элементы.

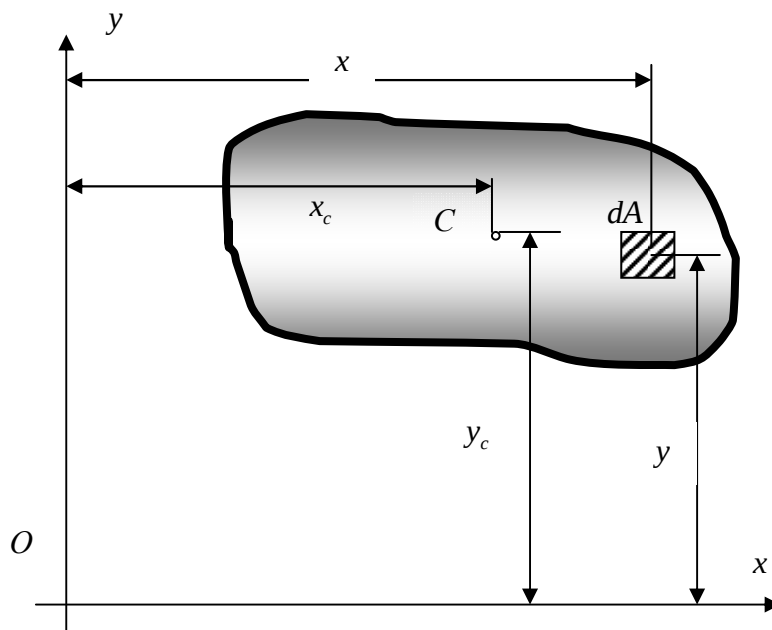


Рис. 2.35. К определению статического момента относительно оси

Выделим элемент площади dA с координатами x и y . Используя положение о моменте силы относительно оси, можно составить выражение и для момента площади относительно оси, который называется *статическим моментом* [3]:

$$dS_x = y \cdot dA; \quad dS_y = x \cdot dA.$$

Просуммировав эти произведения по всей площади, получим:

$$S_x = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A x \cdot dA \quad (2.55)$$

Статическим моментом площади плоской фигуры относительно некоторой оси называется взятая по всей ее площади A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния до этой оси.

Статический момент площади относительно оси принято обозначать буквой S_k с соответствующим индексом. Его размерность – $[длина]^3$.

Если предположить, что x_c и y_c – координаты центра тяжести плоской фигуры, то на основании теоремы о моменте равнодействующей относительно оси, статические моменты площади можно представить в виде:

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c.$$

Отсюда получаем формулы для определения положения центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (2.56)$$

Если оси проходят через центр тяжести сечения ($x_c = 0$; $y_c = 0$), то статические моменты площади относительно этих осей равны нулю. Оси, проходящие через центр тяжести, называются *центральными*.

Статический момент может быть положительным, отрицательным или равным нулю, в зависимости от расположения осей, относительно которых он определяется.

Для вычисления статических моментов площади сложной фигуры ее разбивают на простые части, для каждой из которых известны площадь A_k и положение центра тяжести (x_k, y_k) . Тогда:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{k=1}^n A_k y_k;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{k=1}^n A_k x_k.$$

Отсюда можно найти положение центра тяжести сложной фигуры:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_k}{\sum_{k=1}^n A_k};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_k}{\sum_{k=1}^n A_k}. \quad (2.57)$$

2.8. Трение

2.8.1. Трение скольжения

При скольжении одного тела по поверхности другого (или при стремлении сдвинуть его) в плоскости соприкосновения тел возникают силы сопротивления, препятствующие их относительному движению (рис. 2.36). Эти силы называются *силами трения скольжения*.

Во многих задачах механики и техники, в том числе и при рассмотрении равновесия тел, приходится учитывать действие этих сил. С этой

целью используются приближенные законы трения скольжения (законы Кулона), полученные опытным путем. Их сущность сводится к следующим утверждениям [3, 4]:

1. Силы трения появляются лишь тогда, когда другие приложенные к телу силы стремятся сдвинуть его (или когда оно уже скользит) по поверхности другого тела.

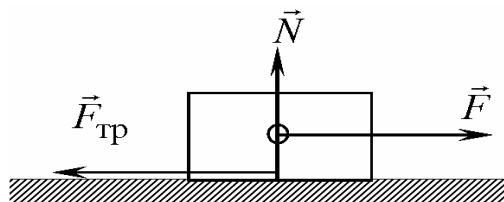


Рис. 2.36. К понятию трения скольжения

Сила трения, действующая на данное тело, направлена в сторону, противоположную направлению относительного движения тела, или в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. В конкретных условиях сила трения может принимать любые значения в пределах от нуля до некоторого предельного значения $F_{пред}$, которое достигается в состоянии относительного проскальзывания или в состоянии предельного равновесия тела.

3. Величина предельной силы трения пропорциональна силе нормального давления N между трущимися поверхностями и не зависит от величины площади соприкасания тел:

$$F_{пред} = Nf, \quad (2.58)$$

где f – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом трения скольжения.

Объединяя второй и третий законы можем записать:

$$0 \leq F_{тр} \leq Nf, \quad (2.59)$$

причем $F_{тр} = Nf$ – в состоянии относительного проскальзывания или в состоянии предельного равновесия, а в остальных случаях значение $F_{тр}$ определяется из уравнений равновесия.

2.8.2. Угол и конус трения

Рассматривая реакции связей, мы предполагали, что при свободном опирании тела на какую-то поверхность, ее реакция направлена по нормали к ней. Опыт показывает, что это предположение не соответствует действительности, если расчет вести с учетом сил трения. Оказывается, реакция реальной (негладкой) неподвижной поверхности образует с нормалью некоторый угол (рис. 2.37) и ее можно разложить на две составляющие:

силу $\vec{N}$, направленную по нормали к опорной поверхности, и силу $\vec{F}_{тр}$, лежащую в касательной плоскости и препятствующую скольжению тела по этой поверхности.

Величина этого угла определяется значением силы трения, которая развивается между телом и связью. Но сила трения не может превосходить своего предельного значения. Поэтому наибольшее значение угла α находим из выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = f \quad (2.60)$$

или

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} f = \varphi. \quad (2.61)$$

Этот наибольший угол, на который может отклониться линия действия силы реакции негладкой поверхности от нормали, проведенной к ней в точке контакта тел, называется углом трения скольжения. Тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения:

$$\operatorname{tg} \varphi = f \quad (2.62)$$

Геометрическое место прямых линий, проведенных из точки A под углом к нормали опорной поверхности в точке A , называется конусом трения (рис. 2.38). Если коэффициент трения скольжения имеет одинаковые значения во всех направлениях, то конус трения – круговой. Если же коэффициент трения в различных направлениях неодинаков, то конус трения не будет круговым [2, 4].

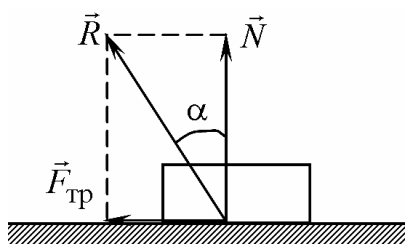


Рис. 2.37. К определению реакции связи негладкой поверхности

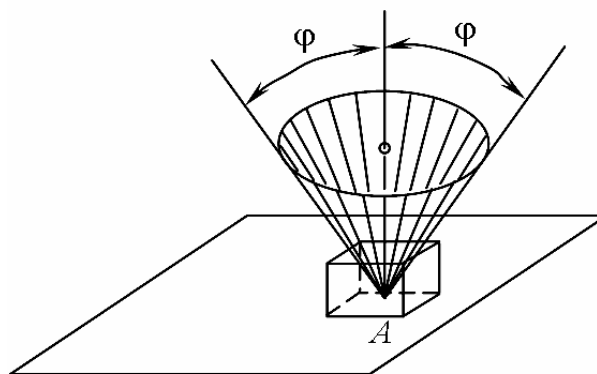


Рис. 2.38. К понятию конуса трения

Таким образом, линия действия полной реакции негладкой поверхности всегда отклонена от нормали к этой поверхности и в случае относительного проскальзывания тела по этой поверхности проходит по образующей конуса трения, а при относительном равновесии – внутри него.

Введенные понятия «конус трения» и «угол трения» имеют не только теоретическое значение. Их применение позволяет решить вопрос о возможном поведении тела на негладкой поверхности при приложении к нему заданных сил [3]. Заштрихованная на рис. 2.38 зона представляет область, обладающую замечательным свойством: как бы ни была велика по интенсивности сила, линия действия которой расположена внутри этой области, эта сила не приведет в движение тело, опирающееся на плоскость. Сдвиг тела возможен лишь такой силой, линия действия которой проходит вне конуса трения.

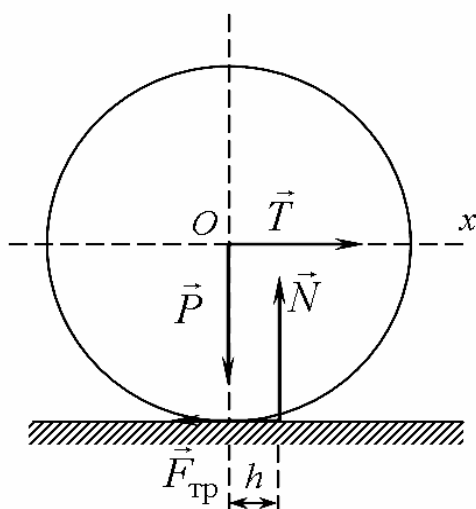
2.8.3. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Представим себе колесо, стоящее на горизонтальной плоскости (рис. 2.39). Пусть $\vec{P}$ – вес колеса и его линия действия проходит через центр O колеса. Приложим в этой точке горизонтальную силу $\vec{T}$.

При действии сдвигающего усилия $\vec{T}$ в месте контакта колеса и поверхности возникает сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, препятствующая проскальзыванию колеса. Эти две равные по модулю силы $\vec{T}$ и $\vec{F}_{тр}$ образуют пару, которая стремится повернуть колесо.

Под действием силы $\vec{P}$ происходит деформация в месте контакта, и нормальная реакция $\vec{N}$ сдвигается в сторону действия силы $\vec{T}$ на некоторое расстояние h . В результате силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ образуют другую пару, препятствующую действию пары $(\vec{T}, \vec{F}_{тр})$.



Максимальную величину $h = k$, соответствующую предельному положению равновесия, называют коэффициентом трения качения. В отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения f коэффициент трения качения k имеет размерность длины.

Значение $\vec{T}$, соответствующее случаю предельного равновесия:

$$T = N \frac{k}{r}. \quad (2.63)$$

Рис. 2.39. К понятию трения качения

При $T > Nk/r$ колесо начнет катиться. Отметим, что трение качения возникает только при перекатывании упругих тел [5]. Если же соприкасающиеся тела абсолютно твердые, то деформации нет и $T = 0$, то есть для качения абсолютно твердого колеса по абсолютно твердой поверхности не потребуется никакой силы.

Обычно сила T , определенная по уравнению (2.63), значительно меньше максимальной силы трения скольжения, определенной по (2.58). Поэтому тела преодолевают трение качения значительно раньше, чем начнется скольжение. Благодаря малому сопротивлению движению подшипники качения и получили большое применение в технике.

Скольжение возможно при $T > fN$, а качение начинается при $T > Nk/r$. Таким образом, если $f > k/r$, то скольжение не возможно; если $f = k/r$, то происходит одновременно и качение и скольжение; если же $f < k/r$ – качение невозможно.

При решении задач действие трения качения учитывается моментом сил сопротивления качению M_c (рис. 2.40). Его величина, как и величина силы трения скольжения, изменяется от нуля до предельного значения:

$$0 \leq M_c \leq M_{пред}, \quad (2.64)$$

где
$$M_{пред} = Nk. \quad (2.65)$$

Своего предельного значения момент сил сопротивления качению достигает в состоянии движения, то есть при перекатывании колеса [3].

2.9. Стержневые системы с идеальными шарнирами

Идеальными точечными шарнирами принято называть такие шарниры, в которых отсутствует трение. Примерами стержневых систем с такими шарнирами могут служить фермы. *Фермой* называется геометрически неизменяемая система прямолинейных стержней, соединенных шарнирами [6]. Простейшим примером фермы является система трех стержней, соединенных между собой шарнирами. Такая система образует треугольник, яв-

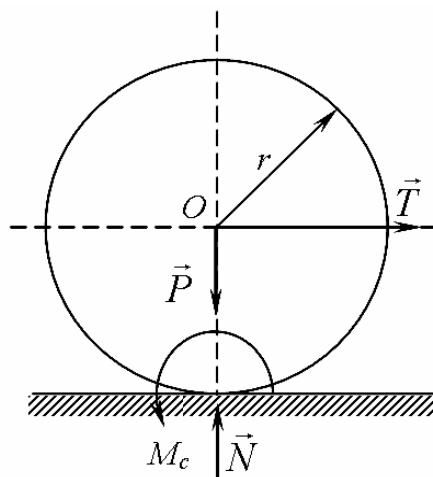


Рис. 2.40. К определению момента сил сопротивления качению

ляющейся геометрически неизменяемой фигурой в том смысле, что, не изменяя длину стержней, нельзя изменить его форму и размеры. Примером геометрически изменяемой системы или механизма является система четырех стержней, соединенных шарнирами (рис. 2.41).

Если оси всех стержней лежат в одной плоскости, ферма называется плоской. Будем рассматривать только фермы, имеющие наименьшее возможное количество стержней при заданном количестве шарниров, то есть *простейшие* фермы.

Основой построения простейшей фермы является треугольник abc (рис. 2.42).

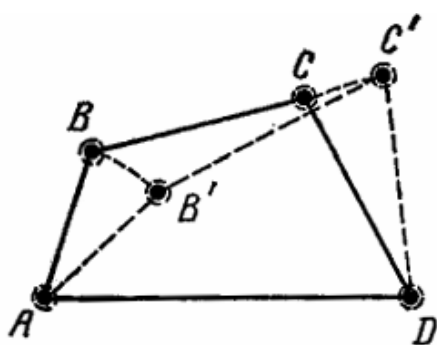


Рис. 2.41. Геометрически изменяемый механизм

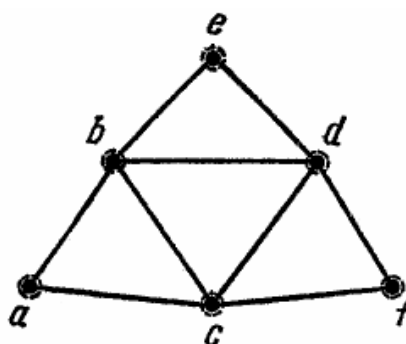


Рис. 2.42. Основа построения простейшей фермы

Чтобы надстроить эту элементарную ферму, необходимо присоединить к ней новые шарниры. Если обозначить число шарниров фермы n , а количество стержней N , то общее количество стержней в простейшей ферме вместе с тремя стержнями основного треугольника можно определить так:

$$N = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \quad (2.66)$$

Соединение стержней фермы между собой называют *узлами*. Каждый шарнир совпадает с узлом фермы. Равенство (2.66) устанавливает связь между количеством стержней и количеством узлов в простейших фермах.

Наиболее часто встречаются фермы трех типов: *мостовые*, употребляющие при постройке мостов, *стропильные*, поддерживающие крыши в различных сооружениях, и *крановые*, являющиеся деталями грузоподъемных механизмов. Вертикальные стержни в мостовых и стропильных фермах называются *стойками*, стержни внешнего контура фермы – *верхним и нижним поясом* фермы соответственно; стержни, лежащие между верхним и нижним поясами, образуют *решетку* фермы. Стержни решетки, наклоненные под различными углами к горизонту, называются *раскосами*.

При решении задач по определению внутренних сил, возникающих в стержнях фермы под действием внешних нагрузок и реакций опор, будем опираться на следующие допущения:

- шарниры, которыми соединены стержни фермы, будем считать идеальными точечными шарнирами без трения;
- все стержни предполагаются абсолютно твердыми;
- внешние силы, приложенные к ферме, предполагаем приложенными в узлах;
- каждый стержень фермы предполагается либо растянут, либо сжат.

Условимся внутренние силы, возникающие в стержнях фермы, называть *усилиями*. Простейшим способом определения усилий в стержнях фермы является *метод вырезания узлов*. При применении этого метода можно использовать как графические, так и аналитические способы решения задачи. Рассмотрим графический способ использования метода вырезания узлов на примере мостовой фермы, находящейся под действием нагрузок P и Q (рис. 2.43).

Прежде чем определять усилия в стержнях фермы, надо сначала найти все реакции опор. Реакции опор R_A и R_B определим аналитически. Предположим, что все стойки (вертикальные стержни) и горизонтальные стержни, образующие верхний и нижний пояса фермы, имеют одинаковую длину (рис. 2.43, *a*). Тогда, решая уравнения равновесия, найдем

$$R_A = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q, \quad R_B = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}Q.$$

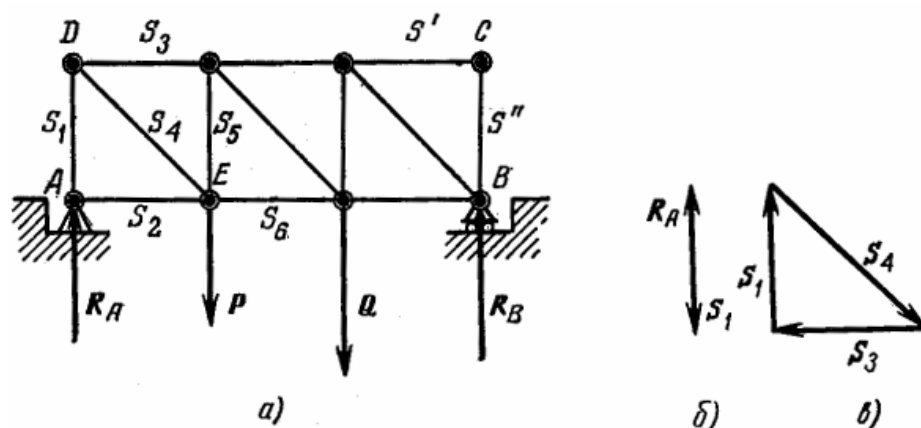


Рис. 2.43. Графический способ применения метода вырезания узлов при расчете фермы: *a* – действующие нагрузки и реакции опор; *б* – силовой многоугольник узла A ; *в* – силовой треугольник узла D

Горизонтальная составляющая реакции опоры A будет равна нулю, так как отсутствуют внешние силы, проецируемые на горизонтальную ось.

Определение усилий в стержнях методом вырезания узлов следует начинать с рассмотрения равновесия узла, в котором пересекаются два стержня. Таких узлов в рассматриваемой ферме два: узел A и узел C . начнем с рассмотрения равновесия узла A .

Условно «вырежем» узел, применяя аксиому об освобождении от связей. Узел A находится в равновесии под действием трех сил: реакции R_A , усилия S_1 в стойке и усилия S_2 в стержне нижнего пояса. Строя замкнутый многоугольник сил (рис. 2.43, б), видим, что усилие $S_2 = 0$, $S_1 = R_A$. Рассмотрим физическое состояние стойки, находящейся под действием усилия S_1 . Нетрудно установить, что стойка сжата. Действительно, S_1 – реакция стойки, приложенная к шарниру A . Как видно из силового многоугольника, эта реакция действует вдоль стержня AD по направлению к шарниру A . Следовательно, стержень AD давит на узел. По третьему закону Ньютона, узел A будет давить на стержень AD . Значит, этот стержень сжат. Общее правило, которым надо пользоваться при определении физического состояния стержней фермы по известным направлениям усилий в стержнях, приложенных к некоторому узлу, можно сформулировать так: *если усилие направлено вдоль стержня от узла, стержень будет растянут, если усилие направлено вдоль стержня к узлу, стержень будет сжат*.

Рассмотрим следующий узел. Этот узел следует выбирать так, чтобы в нем пересекалось не более двух стержней с неизвестными усилиями. Этому требованию удовлетворяет узел D . «Вырезая» его, видим, что он находится в равновесии под действием трех сил: S_1 (уже известной силы), S_4 и S_3 (неизвестных сил). Применяя условие равновесия узла D , строим замкнутый силовой треугольник (рис. 2.43, в). При этом следует помнить, что направление усилия стержня AD , приложенного к узлу D , противоположно направлению усилия этого же стержня, приложенного к узлу A . Рассматривая треугольник сил S_1 , S_3 и S_4 , видим, что стержень верхнего пояса, вдоль которого действует усилие S_3 , сжат, а раскос, вдоль которого действует усилие S_4 , растянут. Переходя к узлу E , найдем усилия S_5 и S_6 и т. д.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит предмет статики? Что называется материальной точкой и системой материальных точек? Что называется абсолютно твердым телом?

2. Что такое сила и какими признаками она характеризуется?
3. Что называется равнодействующей силой? В чем ее отличие от уравнивающей силы?
4. Сформулируйте аксиомы статики.
5. Что называется связью и силой реакции связи? Перечислите основные типы связей и опор, укажите направления их реакций.
6. Как проектируется сила на ось и плоскость? Чем отличаются эти проекции и как они вычисляются?
7. Как формулируются условия равновесия системы сходящихся сил?
8. Что называется парой сил? Чем характеризуется пара сил? При каком условии две пары сил будут эквивалентны?
9. В чем заключается теорема о сложении пар сил, расположенных в одной плоскости и в различных плоскостях?
10. Как определяется на плоскости момент силы относительно точки, оси? В каком случае момент силы относительно точки или оси равен нулю?
11. Что называется главным вектором произвольной плоской или пространственной системы сил? Какая разница между главным вектором и равнодействующей?
12. Что называется главным моментом произвольной плоской или пространственной системы сил?
13. Сформулируйте теорему о параллельном переносе силы.
14. Расскажите о приведении произвольной плоской или пространственной системы сил к центру.
15. Сформулируйте условия равновесия произвольной плоской или пространственной системы сил.
16. Что называется центром тяжести? Как вычисляется центр тяжести линии, площади и объема?
17. Назовите методы определения положения центра тяжести?
18. Что называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси и как он вычисляется? Назовите размерность, свойства и знак статического момента плоской фигуры относительно оси.
19. Как определить положение центра тяжести сложной плоской фигуры, если известны положения центров тяжести отдельных ее частей?
20. Какие силы принято называть силами трения?
21. К чему заключается трение скольжения? Назовите основные законы трения скольжения?
22. Что называется углом и конусом трения?
23. В чем заключается трение качения?

24. В чем отличие коэффициента трения скольжения от коэффициента трения качения?
25. Что понимается под идеальным точечным шарниром?
26. Что называется фермой? Назовите основные элементы конструкции фермы.
27. В чем заключается метод вырезания узлов?

Литература

1. Попов, М.В. Теоретическая механика. Краткий курс / М.В. Попов. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
2. Теоретическая механика: учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец. / В.Э. Завистовский [и др.]; под общ. ред. В.Э. Завистовского. – Новополюцк: ПГУ, 2006. – 204 с.
3. Завистовский, В.Э. Техническая механика / В.Э. Завистовский, Н.М. Захаров. – Мн.: Амалфея, 2000. – 416 с.
4. Никитин, Е.М. Краткий курс теоретической механики для втузов / Е.М. Никитин. – М.: Наука, 1971. – 400 с.
5. Игнатищев, Р.М. Курс теоретической механики / Р.М. Игнатищев, П.Н. Громыко, С.Н. Хатетовский. – Мн.: УП «Технопринт», 2004. – 430 с.
6. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.

Тема 3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кинематикой называется раздел теоретической механики, изучающий механическое движение материальных тел лишь с геометрической стороны, вне зависимости от действующих на них сил.

Механическое движение – это изменение положения тел в пространстве с течением времени.

О таком движении можно говорить лишь в том случае, если указано еще какое-то тело, относительно которого рассматривается положение интересующего нас тела. Такие тела называются *телами отсчета*. Система координат, связанная с телом, относительно которого рассматривается изучаемое движение, называется *системой отсчета*.

Движение тела считается известным тогда, когда имеется возможность определить его положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Механическое движение сопровождается механическим взаимодействием. Оно приводит к изменению состояния движения взаимодействующих тел или к изменению их формы и размеров.

В кинематике рассматривается движение и взаимодействие абсолютно твердых тел, то есть таких тел, у которых не изменяется расстояние между любыми его точками.

Основной задачей кинематики является определение таких параметров, которые характеризуют геометрические свойства и особенности механического движения в данный момент времени, а так же – их изменение с течением времени.

3.1. Кинематика точки

В процессе своего движения точка последовательно занимает различные положения относительно принятой системы отсчета, причем эти положения непрерывно следуют одно за другим. Геометрическое место всех последовательных положений движущейся точки называется *траекторией* этой точки.

3.1.1. Способы задания движения точки

Движение точки можно определить тремя способами: векторным, координатным и естественным [1].

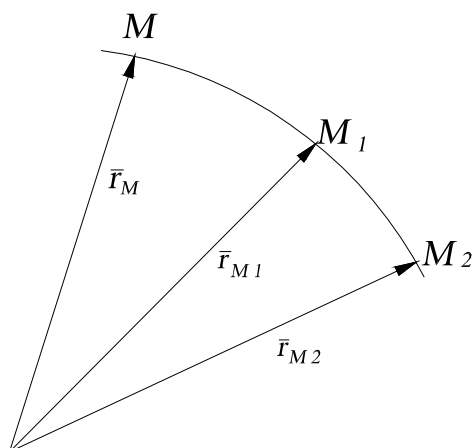


Рис. 3.1. К векторному способу задания движения точки

Векторный способ. Положение точки можно определить с помощью радиус-вектора $\vec{r}_M$, проведенного из некоторой заданной неподвижной точки O в данную точку M (рис. 3.1). При движении точки радиус-вектор $\vec{r}_M$ изменяется по величине и направлению. Каждому моменту времени t соответствует свое значение $\vec{r}_M$. Следовательно, $\vec{r}_M$ является функцией времени t :

$$\vec{r}_M = \vec{r}_M(t) \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) называется *кинематическим уравнением движения точки в векторной форме*. Оно позволяет найти положение точки в пространстве в любой момент времени t . Поэтому (3.1) является законом движения точки, а также описывает в векторной форме траекторию точки.

Векторный способ определения движения точки применяется в радиолокации и телеметрии.

Координатный способ. Этот способ определения движения точки состоит в том, что задаются координаты точки как функции времени. Так в прямоугольной пространственной системе координат $Oxyz$:

$$x_M = f_1(t); \quad y_M = f_2(t); \quad z_M = f_3(t) \quad (3.2)$$

Между векторным и координатным способами задания движения точки существует следующая связь (рис. 3.2):

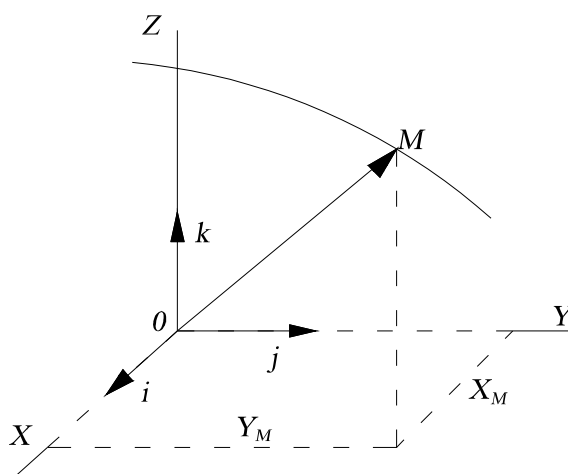


Рис. 3.2. К координатному способу задания движения точки

$$\vec{r}_M = i\vec{x}_M + j\vec{y}_M + k\vec{z}_M \quad (3.3)$$

где i, j, k – орты (или единичные векторы) соответственно направленные по осям координат Ox, Oy, Oz .

Уравнения (3.2) являются уравнениями траектории в параметрической форме. Исключая параметр t из уравнений (3.2), получаем уравнение траектории в явной форме.

Координатный способ определения движения точки широко используется в морской навигации, где

появление корабля определяется его географическими координатами (широта, долгота).

Естественный способ. Если траектория точки известна заранее, то для определения закона движения точки в пространстве достаточно задать положение точки на ее траектории. С этой целью одну из точек, например, O на траектории принимают за начало отсчета дуговых координат, а положение движущейся точки M определяют ее расстоянием от точки O . При этом расстояние $\check{OM} = S_M$ отсчитывается по дуге траектории (рис. 3.3).

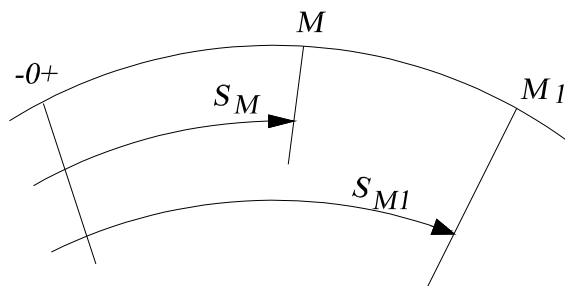


Рис. 3.3. К естественному способу задания движения точки

При движении точки это расстояние изменяется так, что

$$\check{OM} = S_M = f(t) \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) называется *законом движения точки по траектории*.

Таким образом, при естественном способе задания движения точки необходимо, чтобы были указаны траектория точки, начало отсчета дуговых координат (точка O) и закон движения точки M по траектории. Кроме этого, должно быть указано, в каком направлении от точки O следует откладывать положительные и отрицательные значения дуговых координат. Иными словами, должны быть указаны положительное и отрицательное направления движения точки.

Естественный способ задания движения точки является единственно приемлемым для железнодорожного транспорта.

3.1.2. Скорость точки

Скоростью точки называют одну из кинематических мер ее движения, показывающей как быстро и в каком направлении происходит движение точки [4]. Выясним, каким математическим выражением можно описать это понятие. Для этого рассмотрим векторный способ задания движения точки.

Радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определяет положение точки в пространстве в данный момент времени t , а радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t)$ – в момент времени $(t + \Delta t)$ (рис. 3.4). Изменение радиус-вектора за промежуток времени Δt

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (3.5)$$

называется *перемещением точки за этот промежуток времени*. Он показывает, на какое расстояние и в каком направлении произошло изменение положения точки в пространстве, то есть характеризует движение точки за этот промежуток времени только с геометрической точки зрения, сравнивая положения точки в различные моменты времени.

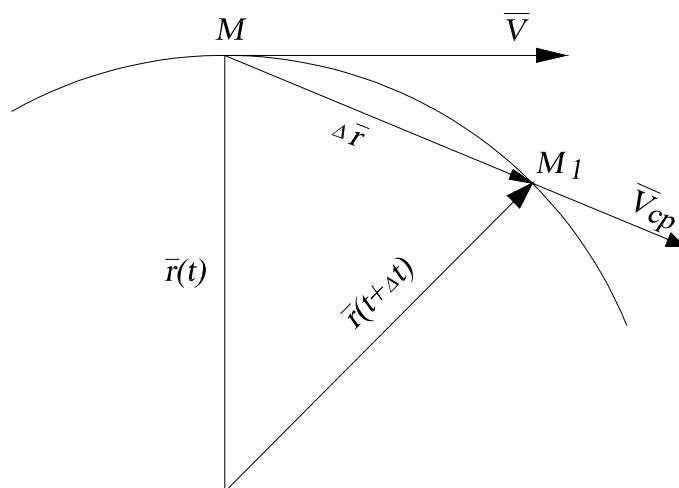


Рис. 3.4. К понятию скорости точки

Отношение перемещения точки $\Delta \vec{r}$ к промежутку времени Δt характеризует среднюю быстроту, с которой произошло движение точки внутри этого промежутка времени, а также – в каком направлении оно произошло. Это отношение считают *средней скоростью* точки за этот промежуток времени Δt

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Средняя скорость $\vec{V}_{cp}$ направлена по секущей MM_1 , проведенной к траектории точки.

Перейдя к пределу этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$, получим вектор, характеризующий и быстроту и направление движения точки в момент времени t :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.7)$$

Очевидно, что он направлен по касательной, проведенной к траектории точки из положения M :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.8)$$

Именно эту производную по времени от радиус-вектора движущейся точки и имеют в виду, когда говорят о скорости точки (о векторе скорости точки).

Полученная формула одновременно является математическим выражением для вычисления скорости точки при векторном способе задания движения этой точки.

Скорость точки в прямоугольной декартовой системе координат. Если движение точки задано координатным способом:

$$x_M = f_1(t); y_M = f_2(t); z_M = f_3(t),$$

то скорость точки определяется по ее проекциям на оси координат. Действительно, разложим вектор скорости $\vec{V}_M$ и радиус-вектор $\vec{r}_M$ по ортам координатных осей (рис. 3.2), получим

$$\vec{V}_M = \vec{i} V_x + \vec{j} V_y + \vec{k} V_z, \quad (3.9)$$

$$\vec{r}_M = \vec{i} x_M + \vec{j} y_M + \vec{k} z_M, \quad (3.10)$$

где x_M, y_M, z_M – координаты движущейся точки; V_x, V_y, V_z – проекции скорости на оси координат.

По определению скорости имеем $\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$.

Подставляя в эту формулу значения $\vec{V}_M, \vec{r}_M$ получим

$$\vec{i} V_x + \vec{j} V_y + \vec{k} V_z = \vec{i} \frac{dx_M}{dt} + \vec{j} \frac{dy_M}{dt} + \vec{k} \frac{dz_M}{dt} \quad (3.11)$$

откуда

$$V_x = \frac{dx_M}{dt}; V_y = \frac{dy_M}{dt}; V_z = \frac{dz_M}{dt} \quad (3.12)$$

Следовательно, *проекции скорости на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки.* Модуль скорости определяется по формуле

$$V_M = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (3.13)$$

Направление скорости определяется по направляющим косинусам

$$\cos(\vec{V}_M x) = \frac{V_x}{V_M}; \cos(\vec{V}_M y) = \frac{V_y}{V_M}; \cos(\vec{V}_M z) = \frac{V_z}{V_M}. \quad (3.14)$$

Скорость точки в естественных координатах. Движение точки будет задано в естественной форме, если известна ее траектория и закон

(или уравнение) движения по траектории $S_M = f(t)$, где S_M – дуговая координата точки (рис. 3.5), заданная как функция времени. Точка O – начало дуговых координат.

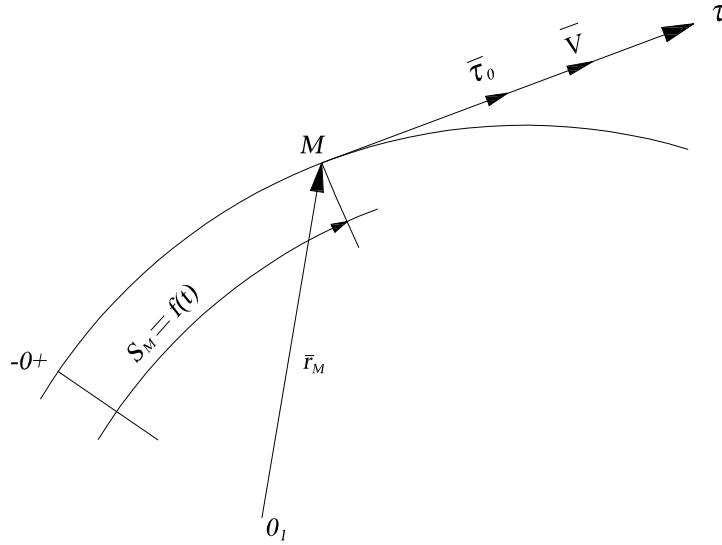


Рис. 3.5. К понятию алгебраической скорости точки

Направим ось M_τ (касательную к траектории в положении M) в сторону увеличения дуговых координат. Единичный вектор (орт) этой оси обозначим $\vec{\tau}^0$, так как вектор скорости точки направлен тоже по касательной к траектории в данном месте M , то

$$\vec{V}_M = (Pr_\tau \vec{V}_M) \vec{\tau}^0 = V_\tau \vec{\tau}^0 \quad (3.15)$$

Проведем из неподвижной точки O_1 радиус-вектор точки M – $\vec{r}_M$

$$\vec{r}_M = \vec{r}(\vec{S}_M) = \vec{r}[S_M(t)] \quad (3.16)$$

Величина $V_\tau = Pr_\tau \vec{V}_M$ быть положительной, если движение происходит в сторону увеличения дуговых координат в положительном направлении по траектории, отрицательной или равной нулю. Ее называют *алгебраической скоростью точки* (в отличие от вектора $\vec{V}_M$ и его модуля $|\vec{V}_M| = V_M$).

Выясним, как можно вычислить алгебраическую скорость точки, применяя формулу (3.8), получим

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}, \quad (3.17)$$

где $\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = 1$ – единичный орт касательной,

$$\vec{V}_M = \frac{dS_M}{dt} \cdot \vec{\tau}^0. \quad (3.18)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (3.15), делаем вывод, что алгебраическая скорость точки (проекция вектора скорости на направление касательной к траектории) равна первой производной по времени от дуговой координаты точки

$$V_{алг} = \frac{dS_M}{dt}. \quad (3.19)$$

Скорость точки при естественном способе задания движения находится дифференцированием по времени закона движения точки по траектории.

3.1.3. Ускорение точки

Кинематическая мера, характеризующая быстроту изменения во времени скорости точки, называется ускорением.

Рассмотрим два сколь угодно близких положения точек M и M_1 на траектории [2]. Скорость точки M обозначим $\vec{V}_M$, а в точке M_1 – $\vec{V}_{M_1}$ (рис. 3.6). Геометрическое приращение вектора скорости за промежуток времени Δt найдем, построив в точке M вектор, равный $\vec{V}_{M_1}$, и соединив концы векторов $\vec{V}_M$ и $\vec{V}_{M_1}$.

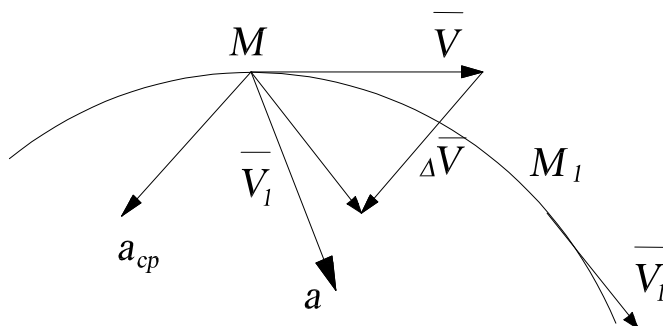


Рис. 3.6. К понятию ускорения точки

Отношение $\Delta \vec{V}_M$ к Δt представляет собой среднее ускорение $\vec{a}_{cp}$:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}_M}{\Delta t}. \quad (3.20)$$

Вектор $\vec{a}_{cp}$ имеет направление $\Delta \vec{V}_M$ (рис. 3.6).

Переходя в (3.20) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, найдем ускорение в данный момент времени

$$\vec{a}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_M}{\Delta t}. \quad (3.21)$$

Если этот предел существует, то получим

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{\dot{\vec{V}}_M}{V_M} \quad (3.22)$$

или

$$\vec{a}_M = \frac{\overrightarrow{d^2 r_M}}{dt^2} = \frac{\ddot{\vec{r}}_M}{r_M}, \quad (3.23)$$

так как

$$\vec{V}_M = \frac{\overrightarrow{dr_M}}{dt} = \frac{\dot{\vec{r}}_M}{r_M}. \quad (3.24)$$

Из (3.22) видно, что ускорение точки равно нулю лишь тогда, когда скорость точки $\vec{V}_M$ постоянна как по величине, так и по направлению. Это соответствует только прямолинейному и равномерному движению. В системе СИ за единицу ускорения принимают 1 м/с^2 .

Так как *ускорение в данной точке* равно первой производной по времени от скорости, то оно *направлено по касательной* к годографу скорости. Проводя в каждой точке траектории векторы, соответственно равные $\frac{\overrightarrow{dV}_M}{dt}$ определим направление ускорения в каждой точке (рис. 3.6).

Проекции ускорения на оси декартовых координат. Если движение точки задано координатным способом: $x_M = f_1(t)$; $y_M = f_2(t)$; $z_M = f_3(t)$, то, раскладывая векторы $\vec{a}_M$, $\vec{V}_M$ по ортам координатных осей, получим

$$\vec{V}_M = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (3.25)$$

$$V_x = \frac{dx_M}{dt}; V_y = \frac{dy_M}{dt}; V_z = \frac{dz_M}{dt} \quad (3.26)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}$$

или

$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{d^2 x_M}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y_M}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z_M}{dt^2} \vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекция ускорения на оси координат.

На основании (3.22) можно написать

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2 x_M}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2 y_M}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2 z_M}{dt^2}. \quad (3.27)$$

Проекции ускорения на неподвижные оси координат равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости на те же оси или вторым производным по времени от соответствующих координат движущейся точки.

Модуль ускорения

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (3.28)$$

Направляющие косинусы ускорения соответственно равны

$$\cos(\widehat{\vec{a}_M x}) = \frac{a_x}{a_M}; \quad \cos(\widehat{\vec{a}_M y}) = \frac{a_y}{a_M} \quad (3.29)$$

Понятие о естественных осях и естественном трехграннике.

Кинематические характеристики движения точки тесно связаны с геометрическими свойствами траектории. Поэтому целесообразно рассматривать движение точки в системе координат, образованной главными направлениями пространственной кривой [4]. Как известно из дифференциальной геометрии, в каждой точке кривой можно провести одну касательную линию M_τ и бесконечное множество нормалей. Их геометрическое место представляет собой единственную в точке M нормальную плоскость N .

Проведем через M_τ касательную плоскость. Вращая ее вокруг M_τ , можно получить сколько угодно плоскостей, касающихся кривой в точке M . Среди этих плоскостей найдутся такие, к которым кривая как бы прилегает наибольшим или наименьшим числом своих точек. Эти плоскости называются соприкасающейся и спрямляющей. Наименование последней происходит от того, что если заставить кривую касаться этой плоскости большим числом своих точек, то кривая начнет спрямляться. Эти три характерные плоскости, которые можно провести в точке M , между собой взаимно перпендикулярны и образуют так называемый естественный трехгранник.

Линии пересечения этих плоскостей (рис. 3.7) образуют так называемую естественную систему координат. Оси этой системы называются касательной – M_τ , главной нормалью – M_n и бинормалью – M_θ . При этом M_τ получается пересечением соприкасающейся и спрямляющей плоскостей; M_n – пересечением нормальной и соприкасающейся плоскостей; M_θ – пересечением нормальной и спрямляющей плоскостей.

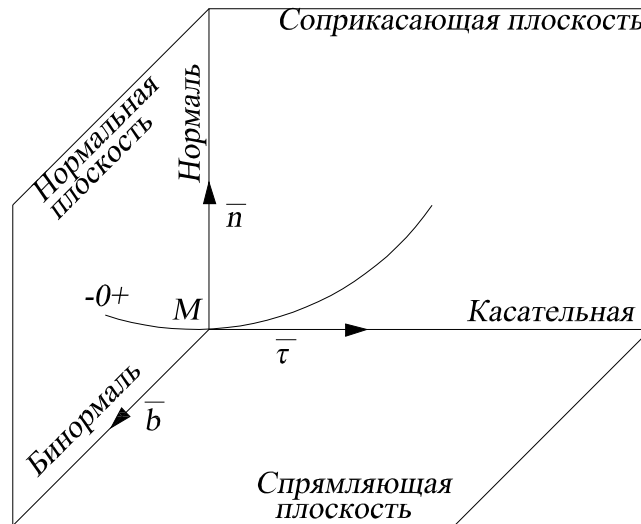


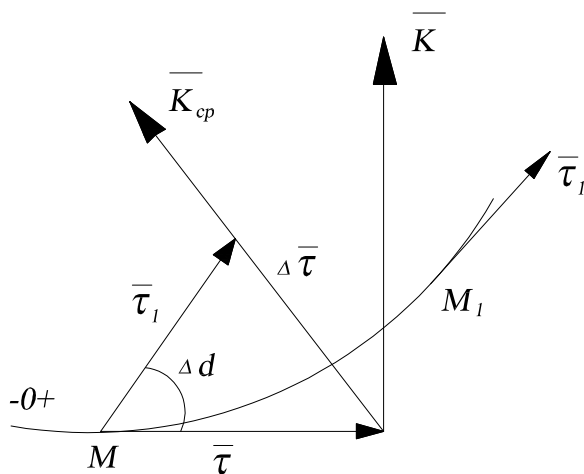
Рис. 3.7. Естественный трехгранник и естественные оси координат

Положительное направление осей выбирают следующим образом:

- M_τ – в сторону увеличения дуговой координаты;
- M_n – в сторону вогнутости кривой, к центру ее кривизны;
- M_b – так, чтобы получилась правая система координат: $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

При движении точки M по траектории вместе с ней перемещается и связанная с ней естественная система координат, направления осей которых непрерывно изменяются в пространстве.

О кривизне кривой. Угол между двумя касательными в двух сколь угодно близких точках M и M_1 на кривой называется *углом смежности* (рис. 3.8). Обозначим его через $\Delta\alpha$.



Отношение $\Delta\alpha$ к элементу дуги ΔS называется *средней кривизной кривой* K_{cp} на отрезке MM_1 :

$$K_{cp} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta S}. \quad (3.30)$$

Предел этого отношения при $M_1 \rightarrow M$ называется *кривизной кривой* в данной точке:

Рис. 3.8. К понятию кривизны кривой

$$K = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{d\alpha}{dS}. \quad (3.31)$$

Следует заметить, что в общем случае кривизна кривой не является постоянной величиной и изменяется от точки к точке.

Величина ρ обратная кривизне кривой в данной точке M называется *радиусом кривизны* кривой в этой точке: $\rho = \frac{1}{K}$, откуда

$$\rho = \frac{dS}{d\alpha}. \quad (3.32)$$

Радиус кривизны имеет простой геометрический смысл: среди множества окружностей, касающихся кривой в точке M найдется такая, которая имеет наибольший порядок соприкосновения с кривой. Ее радиус и есть радиус кривизны кривой в точке M .

Полное ускорение точки. Полное ускорение точки равно векторной сумме касательного (тангенциального) и нормального (центростремительного) ускорений.

Пусть движение точки задано естественным образом, т.е. известны траектория точки и уравнение движения по траектории $S = S(t)$. Рассмотрим два бесконечно близких положения точки M на траектории (рис. 3.9). Скорость точки M будет $\vec{V}$, а точки M_1 .

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta\vec{V}. \quad (3.33)$$

Проведем в точке M касательную τ , ее главную нормаль n и найдем проекции ускорения точки на эти оси. В точке M проведем вектор, параллельный и равный $\vec{V}_1$. Угол между $\vec{V}$ и $\vec{V}_1$ – это угол смежности α . По определению ускорения $\vec{a}$, имеем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \quad (3.34)$$

Среднее ускорение $\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ имеет направление вектора $\Delta\vec{V}$, и следовательно, расположено в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке M , параллельно касательной в смежной точке M_1 (рис. 3.9). Следовательно, ускорение в точке M , как предел среднего ускорения, когда точка M_1 стремится к точке M , расположено в соприкасающейся плоскости и направлено в сторону вогнутости траектории.

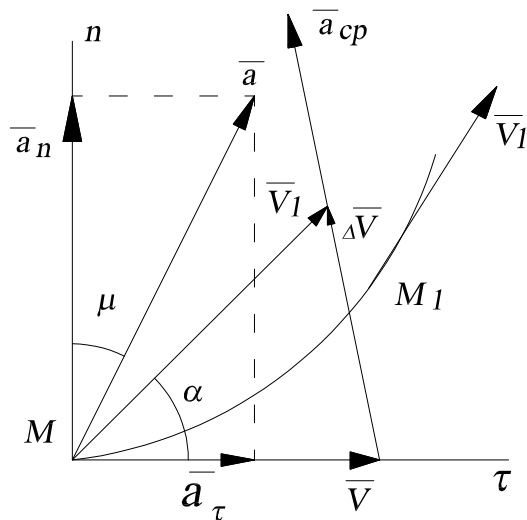


Рис. 3.9. К выводу формулы (3.35)

Таким образом, проекция ускорения на бинормаль равна нулю:

$$a_b = 0.$$

Для нахождения проекции ускорения на касательную a_τ и главную a_n нормали рассмотрим движение точки по плоской кривой, так как вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, совпадающей в этом случае с плоскостью рисунка (см. рис. 3.9).

Так как $\vec{V} = V_\tau \vec{\tau}^0$, а ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, то

$$\vec{a} = V_\tau \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} + \frac{dV_\tau}{dt} \vec{\tau}^0. \quad (3.35)$$

При дифференцировании вектора неизменной величины он поворачивается на 90° в сторону вращения дифференцируемого вектора. В рассматриваемом случае замечаем, что независимо от направления движения точки M , вектор $\vec{\tau}^0$ поворачивается так, что после дифференцирования его направление совпадает с направлением главной нормали, поэтому первый вектор в формуле (3.35) направлен по главной нормали, то есть является нормальной $\vec{a}_n$ составляющей вектора ускорения. Вторая составляющая вектора $\vec{a}$ направлена по $\vec{\tau}^0$, то есть является его касательной составляющей $\vec{a}_\tau$.

Таким образом,

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (3.36)$$

Определение проекций ускорения точки на касательную и главную нормаль (касательное и нормальное ускорение). Вычислим проекции вектора $\vec{a}$ на оси M_τ и M_n . Так как $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, то проекция ускорения на касательную (касательное ускорение) будет

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \quad (3.37)$$

Оно характеризует изменение скорости точки только по величине и равно первой производной по времени от проекции скорости точки на направление касательной (от алгебраической скорости точки) или второй производной по времени от закона движения точки по траектории.

Найдем теперь проекцию ускорения на главную нормаль (нормальное ускорение).

Дифференцирование вектора $\vec{\tau}^0$ неизменной величины приводит к увеличению его модуля в $\frac{da}{dt}$ раз, где в данном случае α – угол смежности.

Заменяя $\frac{da}{dt} = \frac{d\alpha}{dS}$ и $\frac{dS}{dt} = \frac{V_\tau}{\rho}$, получаем

$$a_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho}. \quad (3.38)$$

Нормальное ускорение *характеризует изменение скорости только по направлению*. Нормальное ускорение равно отношению квадрата скорости к радиусу кривизны. Нормальное ускорение всегда направлено по главной нормали в сторону вогнутости траектории (к центру кривизны).

Раскладывая ускорение на составляющие по естественным осям, получим

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau = \vec{a}_n. \quad (3.39)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (3.40)$$

Направление ускорения определим по формуле

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n}, \quad (3.41)$$

где μ – угол между полным ускорением $\vec{a}$ и нормалью (см. рис. 3.9).

3.1.4. Частные случаи движения точки

Равномерное движение. Равномерным называется такое движение, при котором точка за любые равные промежутки времени проходит равные расстояния.

Величина скорости в этом движении $V = \frac{dS}{dt} = \text{const}$. Отсюда $dS = Vdt$.

Если в начальный момент времени точка находилась от начала отсчета на расстоянии S_0 , то в момент времени t расстояние точки от начала отсчета будет

$$S = S_0 + Vt. \quad (3.42)$$

Уравнение (3.42) определяет *равномерное движение точки*. Тогда $S = Vt$ и $V = \frac{S}{t}$, то есть скорость точки при равномерном движении равна отношению пройденного пути ко времени. Так как модуль скорости точки

остается постоянным при любом равномерном ее движении, то всегда ее касательное ускорение будет равно нулю. Отсюда следует, что *касательное ускорение точки характеризует изменение ее скорости по величине* [3].

При равномерном криволинейном движении точки ее скорость, оставаясь постоянной по модулю, изменяется только по направлению. Полное ускорение точки в этом случае равно нормальному ускорению $a = a_n = \frac{V^2}{\rho}$.

Из этого следует, что *нормальное ускорение точки характеризует изменение ее скорости по направлению*.

Прямолинейное движение. При прямолинейном движении точки радиус кривизны ее траектории $\rho = \infty$ и нормальное ускорение точки равно нулю. Следовательно, полное ускорение точки $a = a_\tau = \frac{d^2 S}{dt^2}$.

При прямолинейном движении точка может иметь только касательное ускорение, и поэтому ее полное ускорение равно второй производной по времени от пройденного ею пути или первой производной по времени от алгебраического значения скорости.

В случае если точка совершает прямолинейное и равномерное движение, то нормальное и касательное ускорение точки будут тождественно равны нулю. При таком движении точка не имеет никакого ускорения, так как ее скорость остается все время постоянной как по модулю, так и по направлению.

Равномерно переменное движение. Равномерно переменным (равномерно ускоренным или равномерно замедленным) движением точки называется такое ее движение, когда в равные, произвольно взятые промежутки времени алгебраическое значение скорости точки изменяется на одну и ту же величину.

Уравнение равномерно переменного движения точки имеет вид

$$S = S_0 + V_0 t \pm \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (3.43)$$

Формула (3.43) одинаково справедлива как для прямолинейного, так и криволинейного равномерно переменного движения точки.

Гармоническое колебательное движение. Гармоническим колебанием точки называется такое ее движение, при котором расстояние S точки от начала отсчета изменяется по закону [4]

$$S = a \sin kt \text{ или } S = a \cos kt, \quad (3.44)$$

где a и k – постоянные величины.

Так как значения $\sin kt$ или $\cos kt$ изменяются в пределах от -1 до $+1$, то расстояния S точки от начала отсчета изменяются в пределах $-a \leq S \leq a$.

Наибольшее расстояние a , на которое точка удаляется от начала отсчета, называется *амплитудой колебания*.

Время T одного полного колебания точки называется *периодом колебания* и определяется как

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (3.45)$$

Постоянная k , показывающая, сколько полных колебаний точка совершает за 2π секунды, называется *круговой частотой колебаний* и измеряется в с^{-1} .

3.2. Кинематика твердого тела

В кинематике твердого тела при различных видах движения интересуются кинематическими характеристиками как движения твердого тела в целом, так и кинематическими характеристиками движения отдельных его точек.

3.2.1. Простейшие движения твердого тела

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение твердого тела. Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая намеченная в нем прямая движется, оставаясь параллельной самой себе [4].

Устанавливаются основные свойства поступательного движения **теоремой:** при поступательном движении твердого тела траектории всех точек одинаковы (то есть совпадают при наложении), а скорости и ускорения всех точек геометрически равны (рис. 3.10).

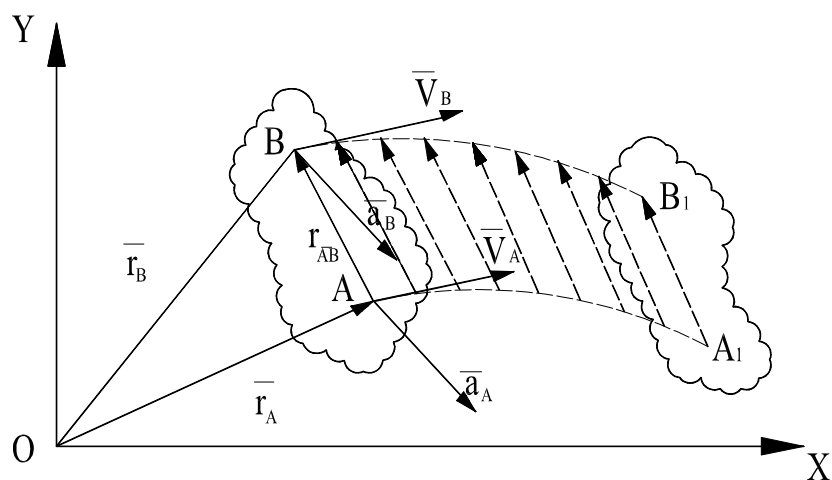


Рис. 3.10. К теореме о поступательном движении твердого тела

Это значит, что

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \text{ и } \vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A. \quad (3.46)$$

Из теоремы следует, что изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения какой-либо одной его точки, то есть к задаче кинематики точки. Уравнения поступательного движения тела имеют вид:

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad z_A = z_A(t). \quad (3.47)$$

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором прямая,

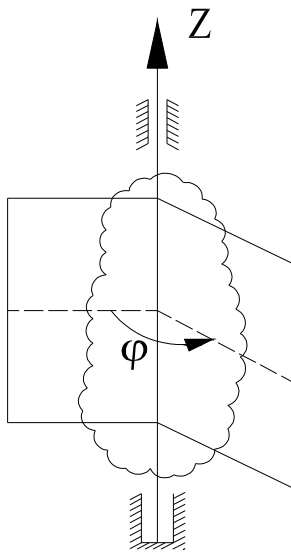


Рис. 3.11. К понятию вращательного движения твердого тела

проходящая через какие-нибудь две точки тела, во время движения, остается неподвижной. Эта прямая называется *осью вращения* тела, обозначим ее *Oz*. Все остальные точки описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Положение тела при вращении вокруг неподвижной оси определяется углом φ между полуплоскостями, проведенными через ось вращения тела, одна из которых неподвижна, а другая неизменно связана с телом. Угол φ называется *углом поворота* тела и считается положительным при вращении против хода часовой стрелки, измеряется в радианах (рис. 3.11).

При известном числе N оборотов тела угол поворота определяется по формуле

$$\varphi = 2\pi N.$$

При вращении тела угол поворота непрерывно изменяется по времени. Следовательно

$$\varphi = \varphi(t). \quad (3.48)$$

Уравнение (3.48) называется *кинематическим уравнением вращательного движения тела вокруг неподвижной оси*.

3.2.2. Угловая скорость и угловое ускорение тела вращающегося вокруг неподвижной оси

Угловая скорость тела в данный момент (обозначается ω) характеризует быстроту изменения угла поворота в данный момент времени и равна производной по времени от кинематического уравнения вращения тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.49)$$

Угловая скорость измеряется в *радианах в секунду*. В технике угловую скорость часто задают числом *оборотов в минуту*, то есть *частотой вращения*. В этом случае угловую скорость, выраженную в *рад/с*, определяют так

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (3.50)$$

где n – число оборотов в минуту.

Знак ω совпадает со знаком φ .

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости и обозначается буквой ε

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3.51)$$

Угловое ускорение измеряется в *рад/с²* или *1/с²* или *с⁻²*.

Если в расчетах знаки ω и ε одинаковы, то вращение тела ускоренное, если противоположны – то замедленное.

Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение являются кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угловую скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно изобразить в виде векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направленных вдоль оси вращения (рис. 3.12, а, в), соблюдая правило: вектор $\vec{\omega}$ направляется вдоль оси вращения в ту сторону, чтобы, глядя с конца вектора $\vec{\omega}$, вращение тела было видно происходящим против хода часовой стрелки. Вектор $\vec{\varepsilon}$ направляется вдоль оси вращения с учетом характера вращения тела, то есть при ускоренном вращении векторы совпадают по направлению (рис. 3.12, а), при замедленном – противоположны (рис. 3.12, б).

Определение скорости и ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Траекториями точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружности, располо-

женные в плоскостях перпендикулярных к оси вращения. Центры этих окружностей находятся в точках пересечения оси вращения с указанными плоскостями. Радиусы данных окружностей называются также *радиусами вращения* точек тела (рис. 3.13, а).

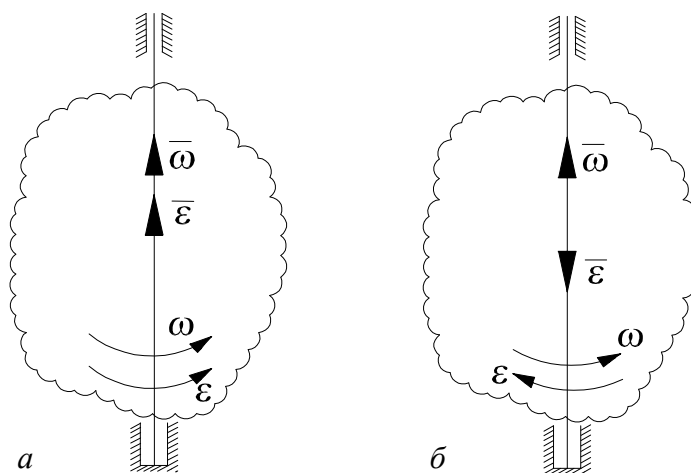


Рис. 3.12. Направление векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ при вращательном движении:
а – ускоренном; б – замедленном

Скорость любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, называется *линейной*. Скорости точек на ободе маховика или вращающегося диска называются также *окружными скоростями*.

Скорость точки K определяется

$$V_k = \omega \cdot h_k, \quad (3.52)$$

где h_k – расстояние от точки до оси вращения.

Линейная скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, по величине равна произведению радиуса вращения на величину угловой скорости. Линейная скорость направлена по касательной к окружности в сторону вращения и, таким образом, перпендикулярна радиусу вращения (рис. 3.13, б).

Полное ускорение точки можно вычислить как векторную сумму касательного $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений.

$$a_k = \sqrt{(a_k^n)^2 + (a_k^\tau)^2}.$$

Выразим эти ускорения через кинематические характеристики вращательного движения тела, то есть через ω и ε

$$a_k^n = \omega^2 \cdot h_k, \quad a_k^\tau = \varepsilon \cdot h_k. \quad (3.53)$$

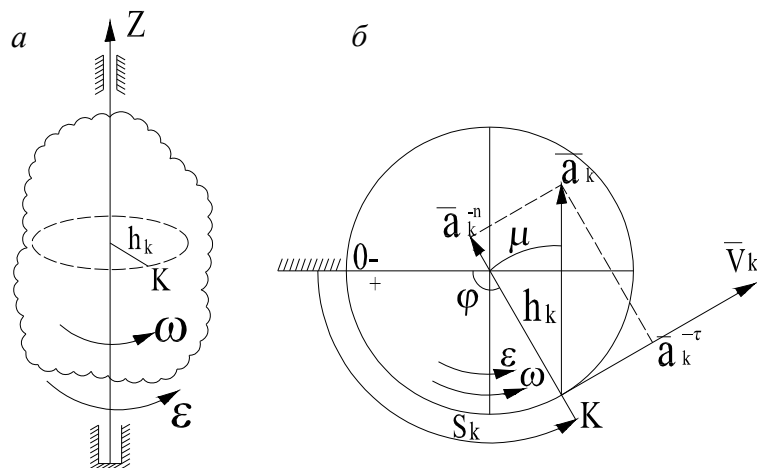


Рис. 3.13. К определению линейной скорости и ускорения точки при вращательном движении: *а* – вращающееся тело; *б* – распределение скорости и ускорения точки *К*

Следовательно, *нормальное ускорение точки тела при вращении его вокруг неподвижной оси равно произведению радиуса вращения на квадрат угловой скорости. Касательное ускорение равно произведению радиуса вращения на угловое ускорение. Нормальное ускорение всегда направлено по радиусу вращения к центру вращения. Касательное ускорение направлено по касательной к траектории, то есть перпендикулярно радиусу вращения в сторону углового ускорения.*

Модуль полного ускорения точки можно найти по формуле

$$a_k = h_k \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (3.54)$$

Направление полного ускорения определим по тангенсу угла μ (рис. 3.13, *б*), который образует вектор полного ускорения с нормальным ускорением. Получим

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{h_k \cdot |\varepsilon|}{h_k \omega^2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Как следует из (3.53) величины скоростей и ускорений прямо пропорциональны удалению точек тела от оси вращения, а коэффициент пропорциональности зависит от угловой скорости и углового ускорения тела. То есть чем больше угловая скорость и угловое ускорение тела и чем дальше находится точка от оси вращения, тем больше ее скорость и ускорение. При этом вектор полного ускорения любой точки тела образуют с соответствующим радиусом вращения один и тот же угол μ , величина которого однозначно зависит от угловой скорости и углового ускорения тела.

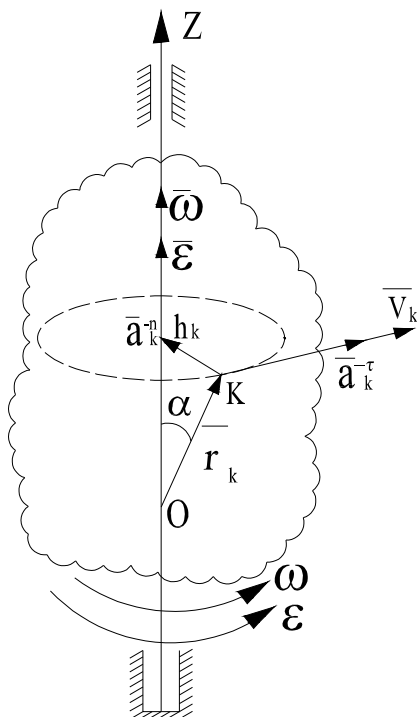


Рис. 3.14. К выводу формул (3.55) и (3.56)

Векторные формулы скорости и ускорения точки вращающегося тела. Линейная скорость точки тела вращающегося вокруг неподвижной оси равна векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор точки (рис. 3.14)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.55)$$

Эта формула называется формулой Эйлера.

Вектор ускорения точки определяется как

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_k, \quad (3.56)$$

где $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ – касательное ускорение;

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}_k$ – нормальное ускорение.

3.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

3.3.1. Уравнения плоскопараллельного движения

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости H (рис. 3.15).

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела.

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью Π (рис. 3.15), параллельной плоскости H при плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой M_1M_2 , перпендикулярной к сечению S движутся тождественно. Поэтому для изучения движения всего тела достаточно изучить движение сечения S в плоскости Π [2]. В дальнейшем будем плоскость Π совмещать с плоскостью рисунка и рассматривать движение плоской фигуры в плоскости Π .

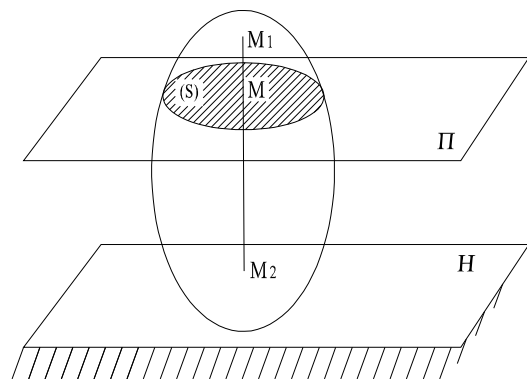


Рис. 3.15. К определению понятия плоскопараллельного движения твердого тела

Положение сечения S в плоскости Π определяется положением какого-нибудь проведенного в этом сечении отрезка AB . В свою очередь, зная координаты (X_A, Y_A) точки A и угол φ , который отрезок AB образует с осью X , можно для каждого момента времени определить положение движущегося сечения в ее плоскости (рис. 3.16).

Точку A , выбранную для определения положения сечения S , будем в дальнейшем называть *полюсом*.

При вращении тела величины X_A , Y_A , φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения тела, то есть знать его положение в пространстве в любой момент времени, надо знать зависимости:

$$\begin{aligned}x_A &= f_1(t), \\y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t).\end{aligned}\tag{3.57}$$

Эти уравнения называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*.

3.3.2. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельное движение тела состоит из суммы поступательного и вращательного движений [3]. Из рис. 3.17 видно, что сечение S можно привести из положения 1 в положение 2 следующим образом. Переместить сначала тело поступательно так, чтобы полюс A_1 , двигаясь вдоль своей траектории, перешел в положение A_2 , а затем повернем сечение вокруг полюса A_2 на угол φ_1 . Аналогично за полюс можно принять точку B и переместить тело поступательно так, что точка B_1 перейдет в положение B_2 , а затем повернем сечение на угол φ_2 вокруг полюса B_2 .

Таким же путем можно переместить тело из положения 2 в положение 3 и т.д. отсюда заключаем, что *плоскопараллельное движение можно рассматривать как бесконечную последовательность бесконечно малых перемещений, поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса*.

Основными кинетическими характеристиками рассмотренного движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса, также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса. Значения этих характеристик в любой момент времени t можно найти по уравнениям. При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку тела, при этом кинетические характеристики поступательной части движения изменяют-

ся, а вращательная часть движения не изменится: $\varphi_1 = \varphi_2$ (рис. 3.17). Следовательно, вращательная часть движения от выбора полюса не зависит, то есть $\omega_1 = \omega_2$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

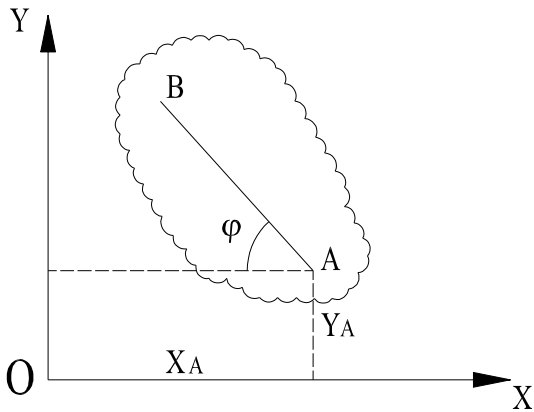


Рис. 3.16. К определению уравнений плоскопараллельного движения твердого тела

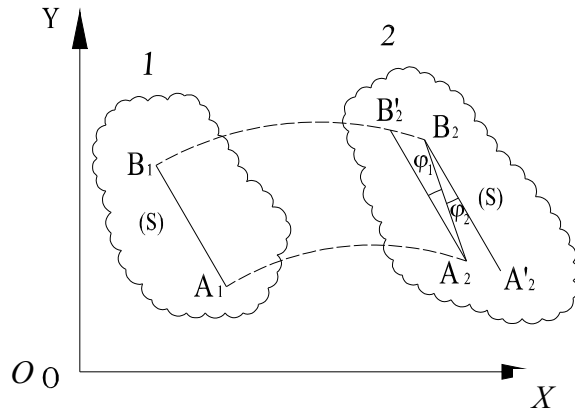


Рис. 3.17. О разложении плоскопараллельного движения на простейшие движения

3.3.3. Определение скоростей точек

Скорость любой точки при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости точки, принятой за полюс и скорости во вращательном движении этой точки относительно полюса (рис. 3.18)

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (3.58)$$

где $\vec{V}_A$ – скорость точки принятой за полюс;

$\vec{V}_{BA}$ – вращательная скорость точки B относительно точки A ;

$V_{BA} = \omega \cdot AB$ и $\vec{V}_{BA} \perp AB$ направлена в сторону вращения плоской фигуры.

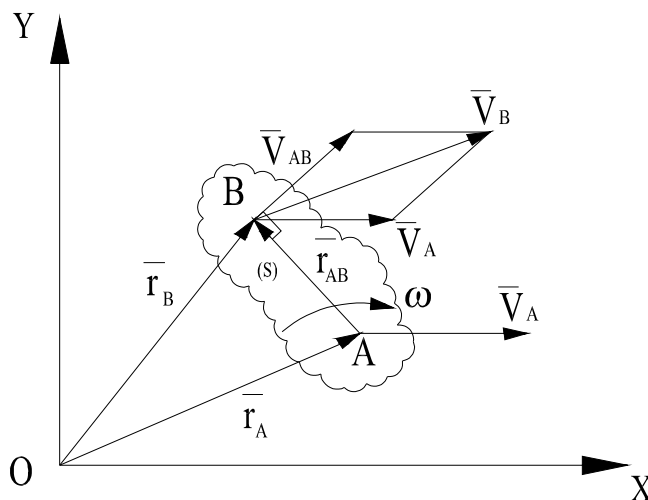


Рис. 3.18. К определению скорости точки B при плоскопараллельном движении

Проекции скоростей двух точек на прямую, соединяющую эти точки, равны (рис. 3.19):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

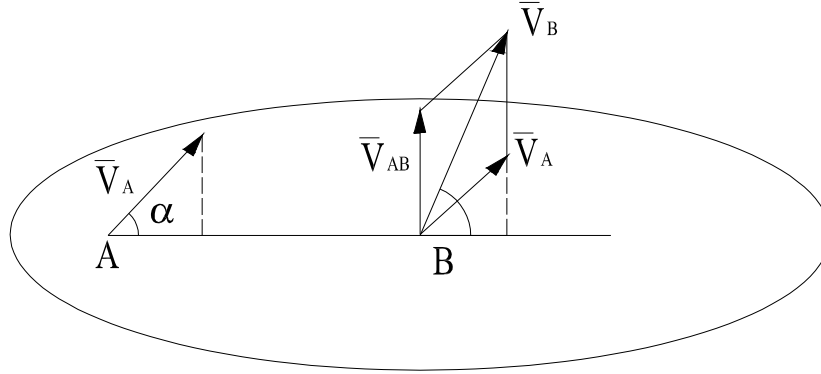


Рис. 3.19. Проекция скоростей двух точек на соединяющую их прямую

Если спроецировать это равенство на прямую AB , учитывая, что $V_{BA} = \omega \cdot AB$ и $\vec{V}_{AB} \perp AB \rightarrow \omega$, получаем

$$\vec{V}_B \cos \beta = \vec{V}_A \cos \alpha. \quad (3.59)$$

3.3.4. Определение ускорений точек при плоском движении тела

Ускорение любой точки при движении равно геометрической сумме векторов ускорений точки, принятой за полюс и ускорения во вращательном движении этой точки вместе с плоской фигурой относительно полюса (рис. 3.20)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad (3.60)$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение точки принятой за полюс,

$\vec{a}_{BA}$ – вращательное ускорение точки B вокруг A .

Вращательное ускорение точки определяется по формуле

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (3.61)$$

где $a_{BA}^\tau = \epsilon AB$ – касательное ускорение точки B относительно A .

Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^\tau \perp AB$ и направлен в сторону углового ускорения ϵ .

Вектор нормального ускорения точки B относительно A равен

$$a_{AB}^n = \omega^2 AB \quad (3.62)$$

и направлен от B к A .

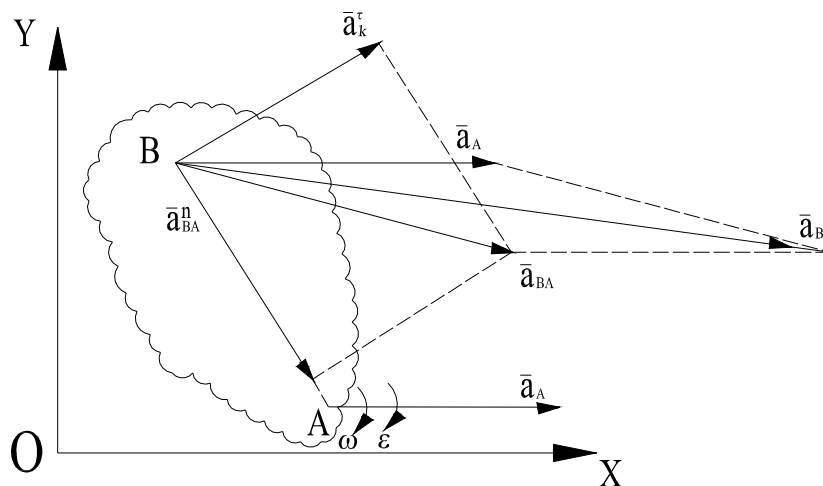


Рис. 3.20. К определению ускорения точки при плоском движении

3.4. Сложное движение точки

3.4.1. Определения

Движение точки M называется *сложным*, если эта точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях [4].

Выберем неподвижную систему отсчета O, X, Y, Z . Подвижную систему отсчета связываем с движущимся телом (рис. 3.21).

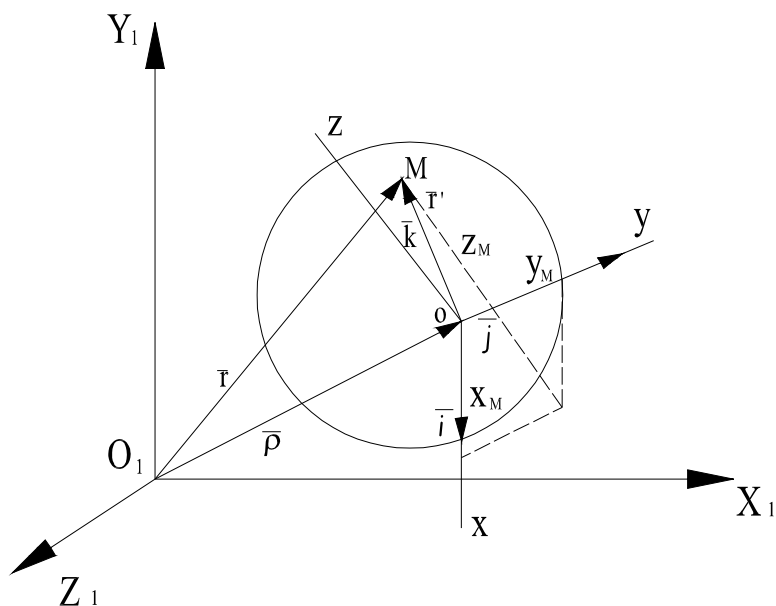


Рис. 3.21. К определению понятий переносное, относительное и абсолютное движение точки

Радиус-вектор $\vec{r}$ характеризует движение точки относительно подвижной системы отсчета. При изменении этого вектора с течением времени координаты точки изменяются x_M, y_M, z_M (координаты точки M в подвижной системе отсчета) и единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ подвижных осей координат остаются постоянными (см. рис. 3.21).

Радиус-вектор $\vec{\rho}$ характеризует движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной. При этом единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ изменятся по направлению за счет движения подвижной системы отсчета, координаты точки x_M, y_M, z_M останутся неизменными (см. рис. 3.21).

Радиус-вектор $\vec{r}$ характеризует движение точки относительно неподвижной системы отсчета, при этом изменяются координаты точки и единичные векторы по направлению.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета, когда изменяются координаты x_M, y_M, z_M , – относительное движение.

Скорость и ускорение точки в относительном движении *относительные* ($\vec{V}_{отн}, \vec{a}_{отн}$).

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета – переносное движение. При этом движении изменяются единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ по направлению, а координаты точки x_M, y_M, z_M остаются постоянными. Скорость и ускорение точки в этом движении *переносные* ($\vec{V}_{пер}, \vec{a}_{пер}$).

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета (участвующий одновременно в двух и более движениях) – сложное или абсолютное. Скорость и ускорение точки в этом движении *абсолютные* ($\vec{V}_{абс}, \vec{a}_{абс}$).

Скорость точки в абсолютном движении (рис. 3.22) равна векторной сумме ее скоростей в переносном и относительном движениях

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}, \quad (3.63)$$

где $\vec{V}_{пер}$ – скорость точки в переносном движении;

$\vec{V}_{отн}$ – скорость точки в относительном движении.

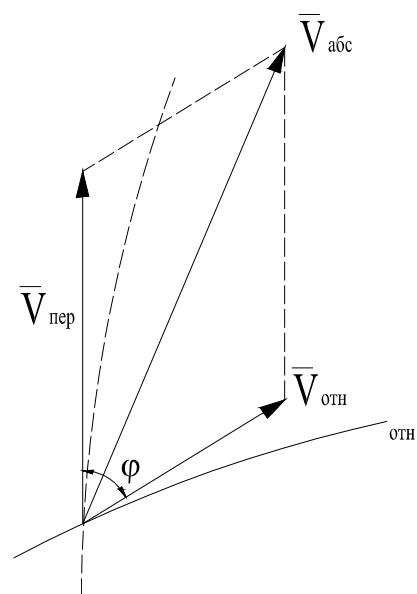


Рис. 3.22. О нахождении вектора абсолютной скорости

Модуль абсолютной скорости равен

$$V_{абс} = \sqrt{V_{пер}^2 + V_{отн}^2 + 2 \cdot V_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \cos \varphi}. \quad (3.64)$$

3.4.2. Определение ускорения точки в сложном движении

Ускорение точки в абсолютном движении равно геометрической сумме ее ускорений в переносном, относительном движении и ускорения Кориолиса.

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}, \quad (3.65)$$

где $\vec{a}_{пер}$ – переносное ускорение в общем случае переносного движения:

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^n + \vec{a}_{пер}^\tau;$$

$\vec{a}_{отн}$ – относительное ускорение в криволинейном относительном движении: $\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{отн}^n + \vec{a}_{отн}^\tau$;

$\vec{a}_{кор}$ – ускорение Кориолиса:

$$\vec{a}_{кор} = 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{V}_{отн}. \quad (3.66)$$

Таким образом,

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер}^n + \vec{a}_{пер}^\tau + \vec{a}_{отн}^n + \vec{a}_{отн}^\tau + \vec{a}_{кор}.$$

3.4.3. Ускорение Кориолиса (модуль и направление)

Вектор ускорения Кориолиса равен удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости и вектора относительной скорости:

$$\vec{a}_{кор} = 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{V}_{отн}.$$

Модуль ускорения Кориолиса

$$a_{кор} = 2 \cdot \omega \cdot V_{отн} \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega} \vec{V}_{отн}}). \quad (3.67)$$

Ускорение Кориолиса обращается в ноль:

1. $\omega = 0$ и при поступательном переносном движении;
2. $V_{отн} = 0$;
3. $\vec{V}_{отн} // \vec{\omega}$.

Если переносное движение по виду поступательное, то $a_{кор} = 0$ и

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн}.$$

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо спроектировать вектор относительной скорости в плоскость перпендикулярную вектору вращения и повернуть проекцию (в этой плоскости) в сторону $\vec{\omega}$ на 90° (правило Жуковского) (рис. 3.23).

Если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{V}_{отн}$ взаимно перпендикулярны, то направление ускорения Кориолиса можно определить поворотом $\vec{V}_{отн}$ в сторону вращения на 90° (рис. 3.24).

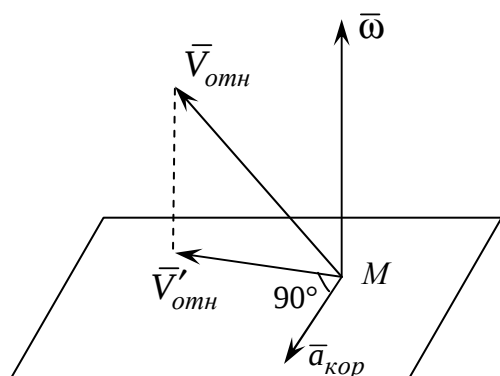


Рис. 3.23. К нахождению направления ускорения Кориолиса

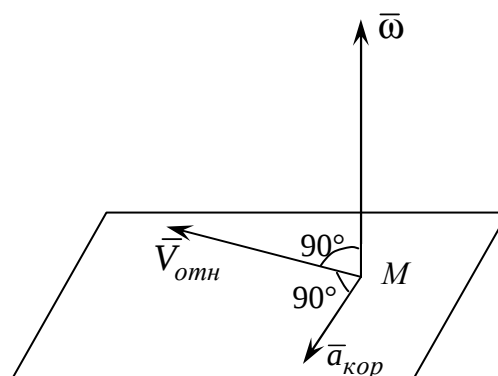


Рис. 3.24. К нахождению направления $\vec{a}_{кор}$, если $\vec{\omega} \perp \vec{V}_{отн}$

3.5. Сложное движение твердого тела

Движение тела называется *сложным*, если оно одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

3.5.1. Сложение поступательных движений

Если тело движется поступательно со скоростью $\vec{V}_1$ и вместе с подвижной системой отсчета движется поступательно со скоростью $\vec{V}_2$, то, очевидно, что результирующее движение будет тоже поступательным [2], со скоростью:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (3.68)$$

3.5.2. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Рассмотрим случай относительного вращения тела с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси Aa' , укрепленной на кривошипе ba (рис. 3.25), а переносное движение – вращение кривошипа вокруг оси Bb' , параллельной оси Aa' с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Движение тела будет плоскопараллельным.

3.5.3. Вращения тела вокруг параллельных осей

Здесь возможны три случая:

1. Вращения направлены в одну сторону (рис. 3.26).

Определяя скорости V_A и V_B , получаем

$$V_A = \omega_2 AB, \quad V_B = \omega_1 AB,$$

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_B + V_A}{AC + BC} = \frac{\omega_1 AB + \omega_2 AB}{AB} = \omega_1 + \omega_2. \quad (3.69)$$

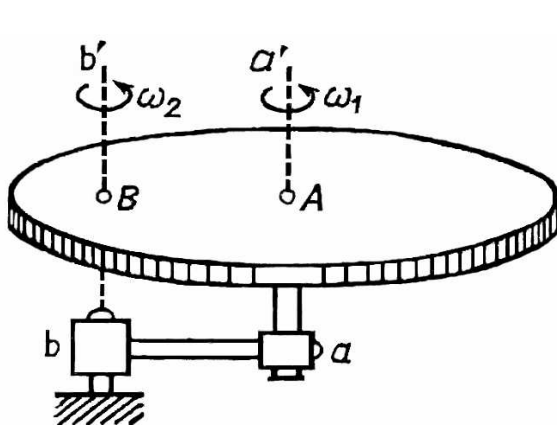


Рис. 3.25. К сложению вращений вокруг параллельных осей

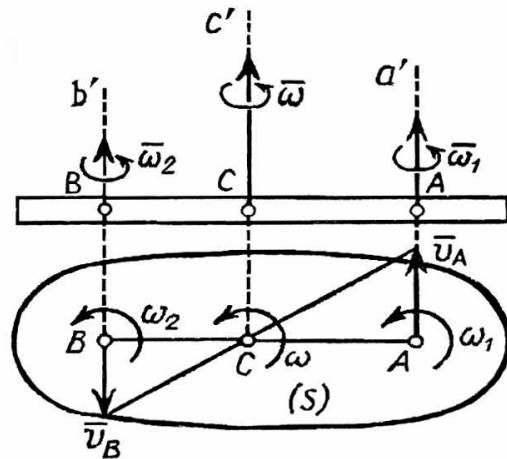


Рис. 3.26. О сложении вращений вокруг параллельных осей, направленных в одну сторону

При сложении вращений вокруг параллельных осей, происходящих в одном направлении, результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг параллельной оси с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей.

Направление ω против хода часовой стрелки.

2. Вращения направлены в разные стороны (рис. 3.27)

Принимаем $\omega_1 > \omega_2$. Определяем скорости точек A и B , находящихся на осях вращения:

$$V_A = \omega_2 AB, \quad V_B = \omega_1 AB,$$

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_B - V_A}{BC - AC} = \omega_1 - \omega_2. \quad (3.70)$$

При сложении вращений вокруг параллельных осей, происходящих в противоположных направлениях с ω_1 и ω_2 при $\omega_1 > \omega_2$, результирующее движение будет мгновенным вращением относительно параллельной оси с

угловой скоростью, равной разности $(\omega_1 - \omega_2)$ слагаемых вращений и направленной в сторону большей угловой скорости.

3. Сложное вращение относительно параллельных осей, происходящее в противоположных направлениях, при $\omega_1 = \omega_2$ (рис. 3.28), $V_A = \omega_2 AB$, $V_B = \omega_1 AB$

$$V_A = V_B, V_A \parallel V_B,$$

$$\omega = 0.$$

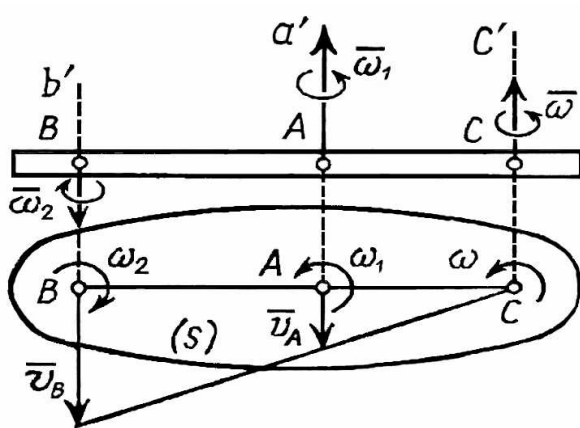


Рис. 3.27. О сложении вращений вокруг параллельных осей, направленных в разные стороны

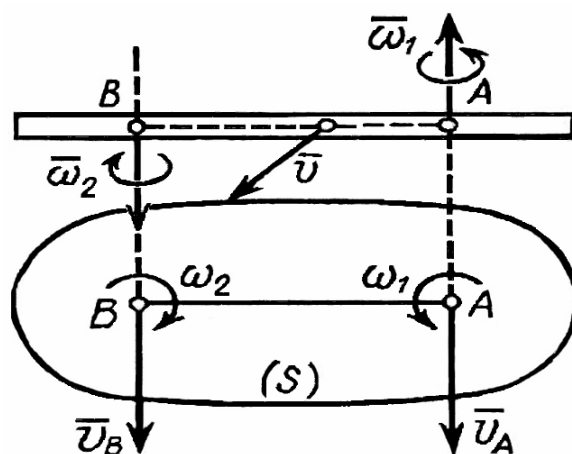


Рис. 3.28. К иллюстрации сложного вращения (случай 3)

При сложении вращении относительно параллельных осей с одинаковыми угловыми скоростями, направленными в разные стороны, результирующим будет поступательное движение со скоростью

$$V = V_A = V_B = \omega_1 AB = \omega_2 AB. \quad (3.71)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое кинематика и какие задачи решают кинематика точки и кинематика твердого тела?
2. Назовите способы задания движения точки. В чем сущность векторного, координатного и естественного способов задания движения точки?
3. Дайте определения основных кинематических характеристик движения.
4. Как определить скорость точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения?

5. Как определить ускорение точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения?
6. В чем отличие естественных осей координат от декартовых?
7. Что характеризуют нормальное и касательное ускорения?
8. Какое движение твердого тела называется поступательным и вращательным?
9. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение при вращательном движении твердого тела?
10. Как направляются векторы угловой скорости и углового ускорения при вращательном движении твердого тела?
11. Опишите картину распределения скоростей и ускорений точек при вращательном движении твердого тела.
12. Как связаны между собой линейные и угловые скорости и ускорения при вращательном движении твердого тела.
13. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
14. Из каких простейших движений складывается плоское движение твердого тела?
15. Как определяются скорости и ускорения точек при плоском движении тела?
16. Какое движение точки называется сложным?
17. Дайте определения абсолютного, относительного и переносного движений.
18. Как определяются скорость и ускорение точки при сложном движении?
19. Как определяются модуль и направление ускорения Кориолиса?
20. Как выполняется сложение поступательных и вращательных движений твердого тела?

Литература

1. Попов, М.В. Теоретическая механика. Краткий курс / М.В. Попов. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
2. Теоретическая механика: учебн.-метод. комплекс для студентов техн. спец. / В.Э. Завистовский [и др.]; под общ. ред. В.Э. Завистовского. – Новополюк: ПГУ, 2006. – 204 с.
3. Завистовский, В.Э. Техническая механика / В.Э. Завистовский, Н.М. Захаров. – Мн.: Амалфея, 2000. – 416 с.
4. Никитин, Е.М. Краткий курс теоретической механики для втузов / Е.М. Никитин. – М.: Наука, 1971. – 400 с.

Тема 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ И ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Динамикой называется раздел механики, в котором движение материальных тел изучается в связи с механическим взаимодействием последних. Существенным отличием динамики от кинематики является то, что в динамике учитывается масса движущихся тел и рассматривается зависимость параметров движения от сил, действующих на эти тела.

В качестве движущихся объектов в динамике рассматриваются материальная точка и механическая система. При динамических исследованиях *материальная точка* – это абстрактный образ реального тела (или его части), который имеет вид геометрической точки с массой, равной массе данного тела (или части этого тела). *Механической системой или системой материальных точек* называется совокупность материальных точек, связанных между собой так, что движение каждой из них зависит от движения остальных.

4.1. Основные понятия, законы и задачи динамики

Различные тела по-разному реагируют на действие приложенных к ним сил: тяжелое массивное тело труднее разогнать, но и труднее остановить, чем легкое. Способность тел сохранять состояние своего движения называется *инертностью*.

Величина, зависящая от количества вещества в данном теле и определяющая его инертность, называется *массой* тела.

Динамика основывается на ряде положений, которые являются аксиомами и называются законами динамики [2]. Сформулируем эти законы динамики.

1-й закон динамики (закон инерции) – *изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения*. Под изолированной материальной точкой будем понимать такую точку, на которую не действуют другие материальные точки.

2-й закон динамики (основной) – *ускорение, получаемое материальной точкой под действием приложенной к ней силы, имеет направление силы и по величине пропорционально ей*:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (4.1)$$

Коэффициентом пропорциональности служит масса точки. Из формулы (4.1) видно, что чем больше масса точки, тем меньше ее ускорение, то есть масса точки является мерой ее инертности.

3-й закон динамики (аксиома действия и противодействия) – два материальных тела взаимодействуют друг с другом с силами, равными по величине и направленными по одной прямой в противоположные стороны (рис. 4.1):

$$F_{12} = m_1 a_1; \quad F_{12} = m_2 a_2; \quad F_{12} = F_{21}; \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

то есть величины ускорений точек обратно пропорциональны их массам, если действующие на них силы равны между собой.

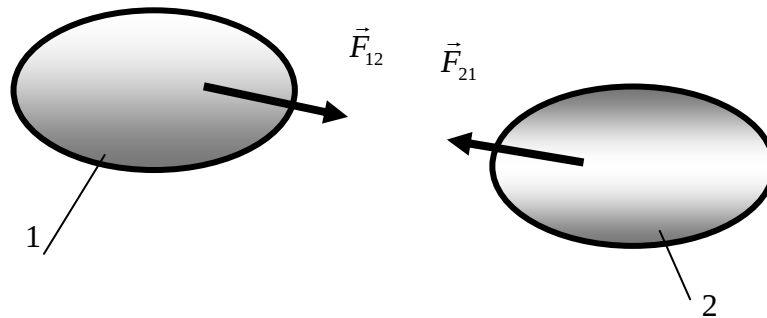


Рис. 4.1. Иллюстрация 3-го закона динамики

4-й закон динамики (аксиома независимости действия сил) – ускорение, получаемое материальной точкой при действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы она при действии каждой силы в отдельности, то есть действие каждой силы не зависит от действия других сил, и каждая из них вносит свой вклад в создание общего ускорения точки.

Объединяя второй и четвертый законы динамики, получаем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m\vec{a} = \sum_{n=1}^k \vec{F}_n. \quad (4.2)$$

С помощью уравнения (4.2) решаются две основные задачи динамики точки:

- по заданному движению материальной точки найти силу, обуславливающую это движение (*прямая задача*);
- по известным силам, действующим на материальную точку, требуется определить закон ее движения (*обратная задача*).

В тех случаях, когда при решении задачи имеем дело с несвободной материальной точкой, необходимо применить принцип *освобожденности от связей*, то есть отбросить связи, заменить их реакциями и в дальнейшем учитывать их в уравнениях движения наравне с действующими на точку активными силами.

На все частицы материального тела действуют силы притяжения к Земле. Их равнодействующая называется *силой тяжести* тела. Численное значение силы тяжести равно той силе, с которой тело давит на неподвижную опору в состоянии равновесия, если при этом другие силы на него не действуют. Эта сила называется *весом* тела. Под действием силы тяжести все свободные тела вблизи земной поверхности падают с одинаковым ускорением, которое называется *ускорением свободного падения*. Если известны сила тяжести P и ускорение свободного падения g , то согласно 2-му закону динамики можно записать $P = mg$, откуда $m = \frac{P}{g}$, то есть масса тела равна его весу, деленному на ускорение свободного падения.

4.2. Силы инерции и метод их определения

Рассмотрим движение несвободной материальной точки. Пусть на нее действует заданная, активная сила $\vec{F}$, и сила реакции связи $\vec{R}$ [2] (рис. 4.2). Под действием этих сил точка получает ускорение $\vec{a}$, определяемое по основному уравнению динамики: $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$. Перепишем это уравнение в виде

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0.$$

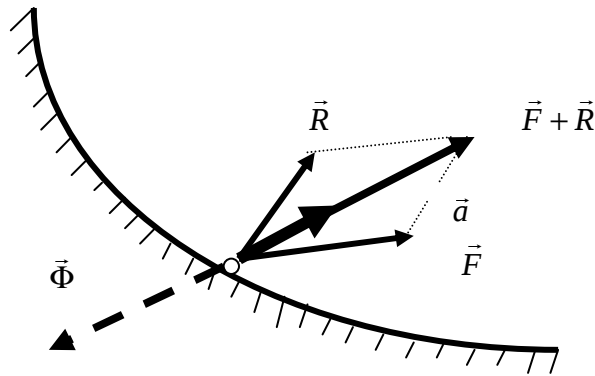


Рис. 4.2. К иллюстрации принципа Д'Аламбера

Выражение в скобках, обозначим $\vec{\Phi}$ и назовем силой инерции:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \quad (4.3)$$

тогда получаем следующее уравнение равновесия:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \quad (4.4)$$

Следовательно, если к точке, движущейся с ускорением под действием каких-то сил, дополнительно приложить и силу ее инерции, то она при-

дет в состояние равновесия. Это равенство является математическим выражением принципа Д'Аламбера: *активные и реактивные силы, действующие на материальную точку, вместе с силами инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющую всем условиям равновесия.*

В действительности никакого равновесия нет, и это искусственный прием. Сила инерции материальной точки пропорциональна ее ускорению и направлена противоположно этому ускорению. На саму точку она не действует и приложена к ускоряющему телу. Но если мысленно силу инерции приложить к точке, то наступит ее равновесие. Искусственный прием, позволяющий рассматривать равновесие точки вместо ее движения, называется *методом кинетостатики*, в основе которого лежит принцип Д'Аламбера.

При криволинейном движении точки ее полное ускорение состоит из касательного и нормального ускорений. Соответственно, и сила инерции представляется в виде двух составляющих $\vec{\Phi}_\tau = m\vec{a}_\tau$; $\vec{\Phi}_n = m\vec{a}_n$, которые направлены противоположно касательному и нормальному ускорению точки.

При решении задач методом кинетостатики, рекомендуется следующая последовательность действий:

- 1) изобразить точку в заданном положении и показать ее ускорение;
- 2) приложить силы, действующие на точку (активные и реактивные) и показать их графически;
- 3) приложить дополнительно силу инерции, направив ее противоположно ускорению точки;
- 4) составить и решить уравнения равновесия.

4.3. Работа и мощность

Для характеристики и измерения механической силы вводят понятия работы и мощности силы [2].

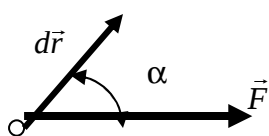


Рис. 4.3. К понятию элементарной работы силы

Если точка приложения силы $\vec{F}$ получила бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ (рис. 4.3), то скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения называется элементарной работой силы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.5)$$

Так как скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$, то

$$dA = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r}). \quad (4.6)$$

4.3.1. Работа силы

Рассмотрим материальную точку M , к которой приложена сила $\vec{F}$. Пусть точка переместилась прямолинейно из положения M_0 в положение M_1 , пройдя при этом путь S (рис. 4.4). Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{N}$ и $\vec{R}$. Так как сила $\vec{N}$ не может двигать точку или сопротивляться ее движению в направлении S , то действие силы $\vec{F}$ на пути S определится произведением $\vec{R} \cdot S$. Эта величина называется *работой* A

$$A = \vec{R} \cdot S = F \cdot S \cdot \cos \alpha, \quad (4.7)$$

то есть, *работа силы на прямолинейном участке пути равна произведению ее модуля на путь и косинус угла между направлением силы и направлением перемещения.*

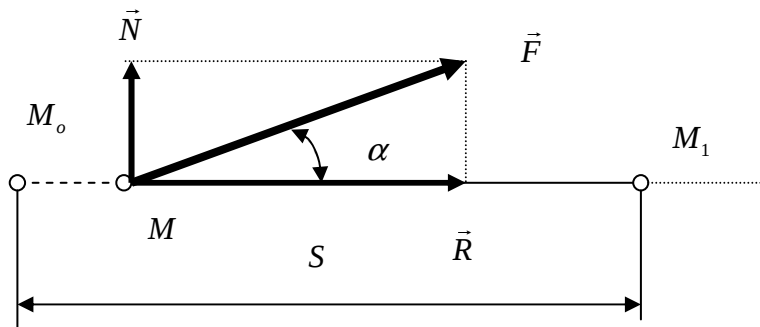


Рис. 4.4. Работа силы на прямолинейном участке пути

Если $\alpha = 0$, то работа $A = F \cdot S$; $\alpha = 90^\circ$, то $A = 0$; $\alpha = 180^\circ$, то $A = -F \cdot S$.

Работа положительна, если направления силы и направление перемещения совпадают ($\alpha < 90^\circ$); работа отрицательная, если направления силы и перемещения противоположны ($\alpha > 90^\circ$); работа равна нулю, когда направления силы и перемещения взаимно перпендикулярны.

Силы, совершающие положительную работу – *движущие силы*, отрицательную – *силы сопротивления*.

Единица работы – джоуль – $[Дж] = [Н \cdot м]$. 1 Дж – это работа силы в 1 Н на пути в 1 м.

Если необходимо определить *работу переменной силы на криволинейном участке пути AB* (рис. 4.5), то на бесконечно малом участке dS криволинейный путь можно считать прямолинейным, а силу – постоянной. Тогда элементарная работа dA на пути dS равна

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos(\vec{F}, \vec{v}).$$

Работа на конечном перемещении равна сумме элементарных работ:

$$A = \int_0^S F \cdot \cos(\vec{F}, \vec{v}) dS. \quad (4.8)$$

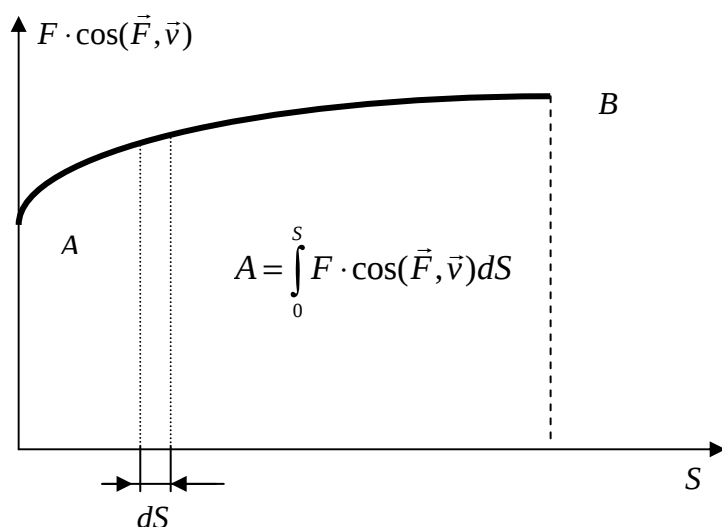


Рис. 4.5. Работа силы на криволинейном участке пути

Если сила совпадает с направлением перемещения и возрастает от нуля пропорционально пути, то работа равняется половине произведения силы на путь:

$$A = \frac{F \cdot S}{2}. \quad (4.9)$$

Работа равнодействующей силы на каком-то участке пути равна алгебраической сумме работ сил составляющих на том же участке пути.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения (рис. 4.6). Если материальная точка M движется под действием одной лишь силы тяжести G и за какой-то промежуток времени перемещается из положения M_1 в положение M_2 , отстоящим по вертикали на расстоянии h , то работа силы тяжести будет равна:

$$A = G \cdot h. \quad (4.10)$$

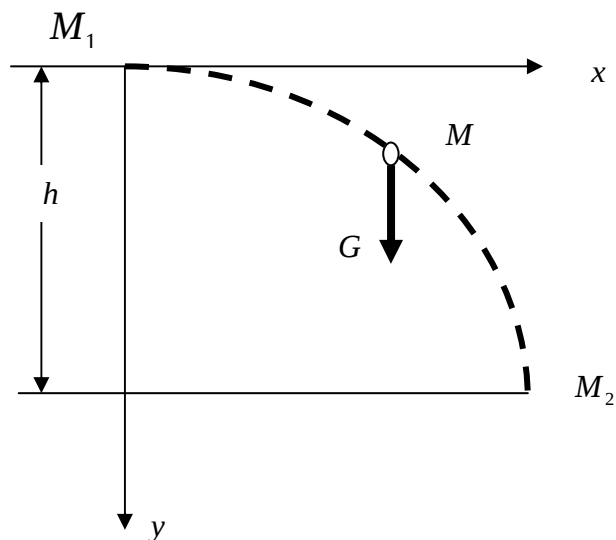


Рис. 4.6. Работа силы тяжести

Силы, работа которых не зависит от вида траектории, называются *потенциальными*. К числу таких сил относятся, например, силы тяжести, силы всемирного тяготения, натяжение пружины.

Работа силы упругости равна:

$$A_{\text{упр}} = \frac{c}{2} (f_1^2 - f_2^2), \quad (4.11)$$

где c – коэффициент жесткости; f_1 и f_2 – величины деформации при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2.

Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угловое перемещение:

$$A = T \cdot \varphi, \quad (4.12)$$

где T – вращающий момент или момент силы относительно оси вращения; φ – угловое перемещение.

4.3.2. Мощность силы

Работа, совершаемая какой-то силой, может быть осуществлена за различные промежутки времени. Чтобы охарактеризовать, насколько быстро совершается работа, вводится понятие *мощности*.

Мощностью силы называется работа, совершаемая в единицу времени:

$$P = \frac{A}{t}. \quad (4.13)$$

Если направление силы и направление перемещения совпадают, то

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v. \quad (4.14)$$

Мощность силы равна произведению модуля силы на скорость точки ее приложения.

Единица мощности:

$$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{ватт (Вт)}.$$

Если работа совершается силой, приложенной к вращающемуся телу равномерно, то мощность вычисляется по формуле

$$P = \frac{A}{t} = \frac{T \cdot \varphi}{t} = T \cdot \omega. \quad (4.15)$$

Относительное количество энергии, используемой в машине по прямому назначению, характеризуется *коэффициентом полезного действия (КПД)*, который обозначается η (эта).

Коэффициентом полезного действия называется отношение полезной работы или мощности к затраченной:

$$\eta = \frac{A_n}{A_3} = \frac{P_n}{P_3}. \quad (4.16)$$

Если коэффициент полезного действия учитывает только механические потери, то он называется *механическим КПД*.

Чем ближе *КПД* к единице, тем производительнее машина.

Приведем сравнительные ориентировочные значения *КПД* для некоторых механизмов и машин:

<i>Кривошипно-ползунный механизм</i>	0,95
<i>Червячная передача</i>	до 0,92
<i>Тепловые двигатели</i>	до 0,40
<i>Турбины</i>	0,95
<i>Электродвигатели</i>	0,92

Если ряд механизмов соединен *последовательно*, то есть каждый последующий механизм получает движение от ведомого звена предыдущего механизма, то, в этом случае, *общий КПД равен произведению КПД всех механизмов:*

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n, \quad (4.17)$$

где $\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n$ — *КПД* каждого механизма в отдельности.

4.4. Общие теоремы динамики

Общие теоремы динамики материальной точки устанавливают зависимость между изменением динамических мер движения материальной точки и мерами действия сил, приложенных к этой точке [1].

4.4.1. Импульс силы, количество движения и кинетическая энергия точки

Импульсом J постоянной силы F называется вектор, равный произведению силы на время ее действия. Импульс силы есть мера ее действия во времени.

$$\text{Единица импульса силы } [J] = [F] \cdot [t] = [m] \cdot [a] \cdot [t] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right].$$

Количеством движения mV материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на ее скорость и имеющий направление скорости. Количество движения есть динамическая мера движения материальной точки.

$$\text{Единица количества движения } [mV] = [m] \cdot [V] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right].$$

Импульс силы и количество движения выражаются в одинаковых единицах и связь между ними устанавливает **теорема об изменении количества движения**, формулируемая так: *изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу приложенной к ней силы за тот же промежуток времени:*

$$mV - mV_0 = F \cdot t = J \quad (4.18)$$

где в левой части равенства имеем изменение количества движения за время t , а в правой – импульс силы за тот же промежуток времени.

Если движение замедленное ($V < V_0$) то вектор силы направлен в сторону, противоположную вектору скорости, и, следовательно, в формулу (4.18) силу надо подставлять с отрицательным знаком.

В случае криволинейного движения материальной точки под действием переменной по модулю и направлению силы весь промежуток времени t необходимо разбить на бесконечно малые промежутки, в пределах которых вектор силы можно считать постоянным, а путь – прямолинейным и тогда математическое выражение теоремы об изменении количества движения приобретает следующий вид:

$$mV - mV_0 = \int_0^t F \cdot dt \quad (4.19)$$

Если к материальной точке приложено несколько постоянных сил, то изменение количества движения будет равно сумме импульсов данных сил:

$$mV - mV_0 = \sum_{i=1}^n F_i t \quad (4.20)$$

Механической энергией называют энергию перемещения и взаимодействия тел. Механическая энергия бывает двух видов: кинетическая и потенциальная.

Кинетической энергией, или энергией движения, называется энергия, которой обладает всякая материальная точка при движении. Кинетическая энергия есть динамическая мера движения материальной точки. Кинетическая энергия – величина скалярная и всегда положительная.

Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$K = \frac{mV^2}{2} \quad (4.21)$$

Единица кинетической энергии:

$$[K] = [m] \cdot [V^2] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \text{м} \right] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Связь между кинетической энергией и работой устанавливает **теорема об изменении кинетической энергии**, формулируемая так: *изменение кинетической энергии материальной точки на некотором пути равно работе силы, приложенной к точке, на том же пути:*

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A. \quad (4.22)$$

4.4.2. Основные положения динамики системы материальных точек

Механической системой материальных точек называется совокупность материальных точек, каким-то образом связанных между собой. Всякое твердое тело можно считать неизменяемой механической системой материальных точек.

Пусть твердое тело массой m движется под действием силы F поступательно с ускорением a (рис. 4.7). Разобьем тело на ряд материальных точек с массами m_i и применим принцип Д'Аламбера. К каждой ма-

териальной точке приложим силу инерции $\vec{\Phi}_i = -m \cdot \vec{a}$ и составим уравнение равновесия:

$$\sum F_x = 0; \quad F - \sum \Phi_i = 0,$$

откуда

$$F = \sum \Phi_i = \sum (m \cdot a).$$

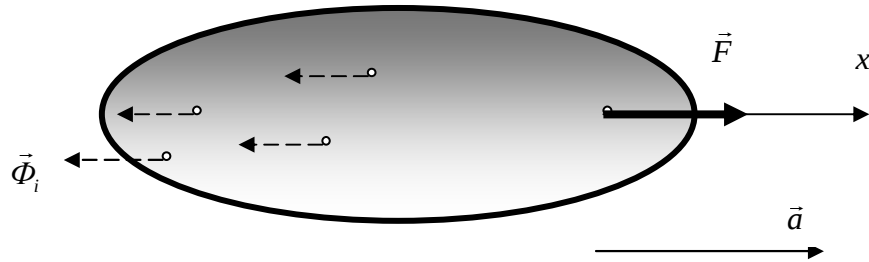


Рис. 4.7. К выводу уравнения поступательного движения твердого тела

Так как при поступательном движении все точки тела имеют одинаковые ускорения, то a можно вынести за знак суммы, то есть

$$F = a \sum m_i = a \cdot m.$$

Согласно второму закону Ньютона, векторы силы $\vec{F}$ и ускорения $\vec{a}$ совпадают по направлению, поэтому можно записать:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \quad (4.23)$$

Выражение (4.23) представляет собой *уравнение поступательного движения твердого тела*.

Это уравнение ничем не отличается от основного уравнения динамики материальной точки, следовательно, все формулы динамики точки применимы и для твердого тела, движущегося поступательно.

Теперь пусть твердое тело под действием системы сил вращается вокруг неподвижной оси z с угловым ускорением ϵ (рис. 4.8). Разобьем тело на ряд материальных точек с массами m_i и применим принцип Д'Аламбера. К каждой материальной точке приложены касательная и нормальная силы инерции. Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_z = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}) - \sum M_z(\vec{\Phi}_i) = 0..$$

Моменты реакций подшипника и подпятника, а также силы инерции относительно оси z равны нулю, так как линии действия этих сил пересе-

кают ось; сумма моментов внешних сил относительно оси вращения называется *вращающим* или *скручивающим* моментом.

$$\sum M_z(F_i) = T = \sum M_z(\Phi_i) = \sum (m \cdot r_i^2 \cdot \varepsilon) = \varepsilon \sum (m_i \cdot r_i^2).$$

Выражение $\sum (m_i \cdot r_i^2)$ называют моментом инерции тела относительно оси и обозначают I :

$$I = \sum (m_i \cdot r_i^2). \quad (4.24)$$

Момент инерции тела относительно оси есть сумма произведений масс материальных точек, составляющих это тело, на квадрат расстояний их до этой оси.

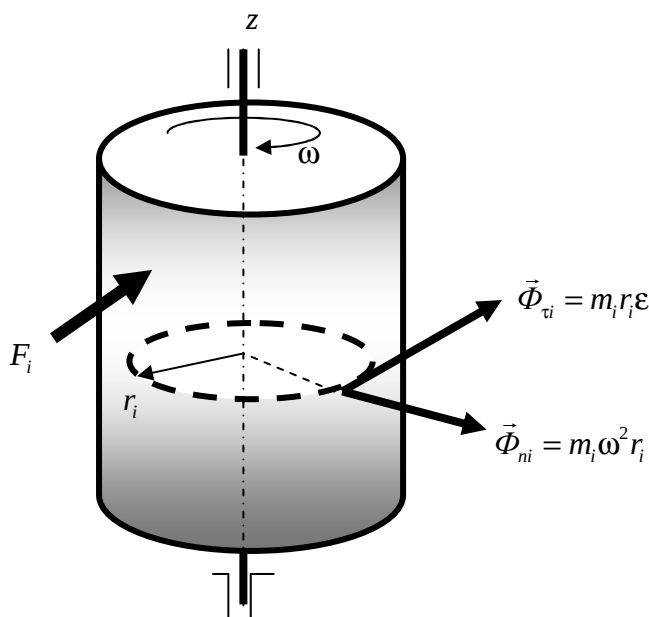


Рис. 4.8. К выводу уравнения вращательного движения твердого тела

В результате получаем формулу

$$T = I \cdot \varepsilon, \quad (4.25)$$

которая называется *уравнением вращательного движения твердого тела*.

Момент инерции играет во вращательном движении такую же роль, как масса играет в поступательном движении, следовательно, *момент инерции есть мера инертности вращающегося тела*.

Моменты инерции некоторых простых тел, относительно оси, проходящей через центр тяжести, имеют следующие значения:

— тонкий однородный сплошной диск радиусом R и массой m , относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр

$$I = \frac{mR^2}{2}; \quad (4.26)$$

– однородный сплошной прямой круговой цилиндр радиусом R и массой m относительно оси, перпендикулярной плоскости сечения цилиндра и проходящей через его центр

$$I = \frac{mR^2}{2}; \quad (4.27)$$

– шар массой m , радиусом R относительно диаметра

$$I = \frac{2}{5} m \cdot R^2; \quad (4.28)$$

– тонкий стержень массой m , длиной l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец

$$I = \frac{m \cdot l^2}{3}; \quad (4.29)$$

– тонкая сферическая оболочка массой m , радиусом R относительно диаметра

$$I = \frac{2m \cdot R^2}{3}; \quad (4.30)$$

– пустотелый вал массой m , наружным радиусом R и радиусом отверстия r относительно оси

$$I = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}. \quad (4.31)$$

Момент инерции I_z тела относительно какой-либо оси z , параллельной центральной, равен центральному моменту инерции I_c плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между этими осями:

$$I_z = I_c + m \cdot a^2. \quad (4.32)$$

Иногда момент инерции определяется по формуле

$$I = m \cdot r_u^2, \quad (4.33)$$

где r_u – радиус инерции тела;

$$r_u = \sqrt{\frac{I}{m}}. \quad (4.34)$$

Удвоенный радиус инерции называется *диаметром инерции*:

$$D_u = 2r_u. \quad (4.35)$$

На практике иногда вместо момента инерции используют *маховый момент* GD_u .

Маховым моментом называется произведение силы тяжести вращающегося тела G на квадрат его диаметра инерции.

Между маховым моментом и моментом инерции существует следующая зависимость

$$GD_u mg(2r_u)^2 = 4gmr_u^2 = 4g \cdot I = 39,24I. \quad (4.36)$$

4.4.3. Кинетическая энергия твердого тела

Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий материальных точек, составляющих это тело:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i V_i^2}{2}. \quad (4.37)$$

Определим выражения для кинетической энергии твердого тела при следующих случаях его движения:

– тело *движется поступательно* и, учитывая, что все точки имеют одинаковые скорости, получим:

$$K_{пост} = \frac{mV^2}{2}; \quad (4.38)$$

– тело *вращается* вокруг неподвижной оси:

$$K_{вр} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}; \quad (4.39)$$

– тело *движется плоскопараллельно*:

$$K_{nn} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (4.40)$$

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося плоскопараллельно, равна сумме кинетических энергий в поступательном движении вместе с центром тяжести и вращательном движении вокруг центральной оси, перпендикулярной основной плоскости.

Теорема об изменении кинетической энергии системы тел формулируется так: изменение кинетической энергии системы тел при некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действовавших на систему при указанном перемещении:

$$K_2 - K_1 = \sum_{i=1}^n A_i^{внеш} + \sum_{i=1}^n A_i^{внутр}. \quad (4.41)$$

4.5. Приложение общих теорем динамики к механике жидкости

Одно из наиболее интересных приложений теорем динамики дают системы с бесконечным числом частиц, образующие некоторую сплошную среду, например жидкость, газ и др. [1]. Будем предполагать эту жидкость несжимаемой. Данное предположение удовлетворяется в капельных жидкостях (вода, масло) и достаточно близко к действительности при движении газов со скоростями далекими от скорости звука.

4.5.1. Формула Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объем ΔV , ограниченный поверхностью σ , и будем изучать движение этого объема. Силы, приложенные к этому объему, классифицируем как внешние и внутренние, причем, внутренние силы не играют роли при изучении изменения количества движения выделенного объема.

Внешние силы, действующие на объем ΔV (взаимодействие жидкого объема с частицами остальной жидкости, а также и другими внешними телами), можно разделить на две группы:

- силы *массовые* или *объемные*, такие, которые действуют на все частицы объема ΔV , как внутренние, так и находящиеся на поверхности, например, силы веса частиц;

- силы *поверхностные*, действующие только на частицы, лежащие на поверхности объема ΔV – таковы силы давления на поверхность σ , со стороны окружающей ее жидкости или твердых стенок (русла), между которыми происходит движение. Так же к этой группе относятся силы трения нашего объема об окружающую жидкость или твердые стенки.

Обозначим главный вектор внешних объемных сил $\vec{R}_{об}^e$, а внешних поверхностных сил – $\vec{R}_{нов}^e$.

Если количество движения жидкого объема равно $\vec{K}$, то по теореме количеств движения имеем

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}_{об}^e + \vec{R}_{нов}^e.$$

Предположим, что жидкость двигается в некоторой трубе переменного сечения (рис. 4.9). Рассмотрим объем жидкости между двумя какими-нибудь сечениями S_1 и S_2 , причем, отвлекаясь от разницы скоростей вблизи стенок и в середине трубы, обозначим через V_1 скорость жидкости в сече-

нии S_1 , и V_2 – скорость жидкости в сечении S_2 . Векторы скоростей $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$

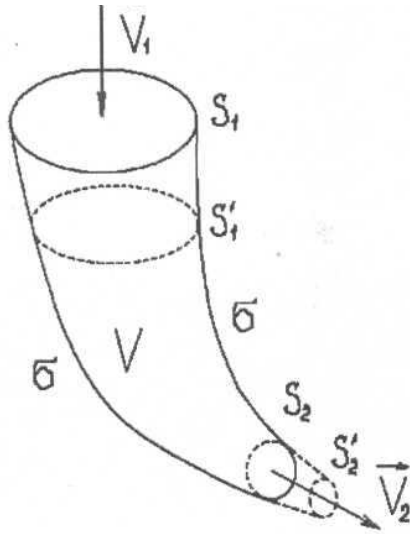


Рис. 4.9. К выводу формулы Эйлера

можно представить как средние скорости в сечениях S_1 и S_2 , перпендикулярных к ним.

Произведение $S_1 \cdot V_1$ определит объем жидкости, протекающий в единицу времени сквозь сечение S_1 . Поскольку жидкость несжимаема, этот же объем будет протекать и сквозь сечение S_2 , то есть

$$S_1 V_1 = S_2 V_2.$$

Если этот объем жидкости, протекающий в единицу времени через любое сечение трубы, умножим на плотность жидкости ρ , то получим массу жидкости, протекающую в единицу времени через любое сечение трубы. Эту массу обозначим через M :

$$M = \rho S_1 V_1 = \rho S_2 V_2 = \rho S V.$$

Вычислим теперь изменение количества движения $d\vec{K}$ выделенного объема за время dt . Для этого заметим, что за время dt частицы объема V сместятся по трубе и изменят свои скорости в связи с переходом в другие сечения. Если средняя скорость в любом сечении трубы от времени не зависит, то есть в данном сечении скорость все время одинакова (такое движение называют установившимся), то за время dt в объеме между сечениями S_1' и S_2 останутся частицы прежнего объема ΔV , и количество движения в этой части объема будет то же, что и раньше. Таким образом, изменение количества движения произойдет за счет потери количества движения в объеме между сечениями S_1 , S_1' и прибавления количества движения в объеме между сечениями S_2 , S_2' . Определяя количество движения в бесконечно малом объеме, как произведение массы на вектор скорости, получим

$$d\vec{K} = M(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)dt,$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = M(\vec{V}_2 - \vec{V}_1).$$

Подставляя значение изменения количества движения в основное уравнение, получим

$$M\vec{V}_1 - M\vec{V}_2 = \vec{R}_{об}^e + \vec{R}_{нов}^e. \quad (4.42)$$

Эта формула была выведена Эйлером.

Теорема Эйлера. Главные вектора объемных и поверхностных сил и вектора количеств движения масс жидкости, входящих и выходящих сквозь сечения трубы в единицу времени, направленные внутрь выделенного объема, образуют замкнутый многоугольник.

Обращаем особое внимание на необходимость, при применении теоремы Эйлера, направлять вектор количества движения массы, проходящей в единицу времени, через *нижнее* (по течению) сечение, всегда внутрь выделенного объема жидкости в трубе (рис. 4.10).

Из формулы Эйлера можно найти и действие жидкости на трубу. Для этого достаточно по закону равенства действия и противодействия заменить главный вектор поверхностных сил, приложенных к жидкости, на равный ему и прямо противоположный по направлению вектор.

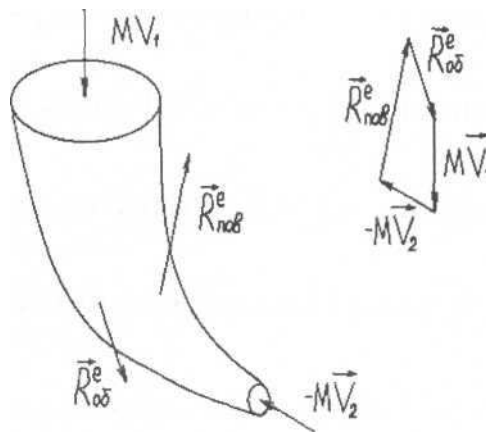


Рис. 4.10. К выводу формулы Эйлера

4.5.2. Давление жидкости на неподвижный сосуд

Предположим, что некоторый объем жидкости находится в сосуде.

Если жидкость неподвижна в сосуде, то полное давление равно весу жидкости. Откроем кран, тогда жидкость начнет выливаться с некоторой скоростью V_2 , а уровень в сосуде будет понижаться со скоростью V_1 (рис. 4.11). Добавочное давление $\vec{R}$ на сосуд получим, складывая геометрически количества движения $M\vec{V}_1$ и $-M\vec{V}_2$ (силами трения и давления воздуха пренебрегаем). Проекции этого давления на горизонтальную и вертикальную ось будут равны:

$$R_x = -MV_2 \cos \alpha; R_y = -MV_1 - MV_2 \sin \alpha.$$

Если жидкость в сосуде поддерживается на постоянном уровне, и отверстие истечения мало по сравнению с площадью свободной поверхности в сосуде, то исходя из формулы Торричелли можно положить

$$V_2 = \sqrt{2gh}, V_1 = 0,$$

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} R_x &= -M\sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha; \\ R_y &= -M\sqrt{2gh} \sin \alpha. \end{aligned} \tag{4.43}$$

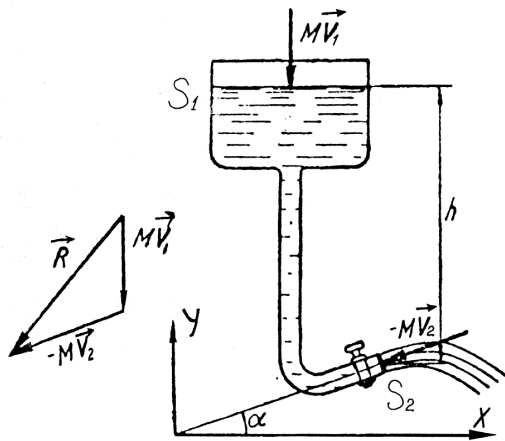


Рис. 4.11. К выводу формулы (4.43)

Чтобы оценить реакцию выходящей струи заметим, что проекции давления жидкости на площадку S_2 нижнего конца при закрытом кране были бы равны:

$$\begin{aligned} R'_x &= gphS_2 \cos \alpha, \\ R'_y &= gphS_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.44)$$

Заменяя в выражении (4.43) M на $\rho V_2 S_2 = \rho S_2 \sqrt{2gh}$ и сравнивая с (4.44), получим:

$$\begin{aligned} R_x &= -\rho S_2 \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha = -2\rho gh S_2 \cos \alpha = -2R'_x, \\ R_y &= -\rho S_2 \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \sin \alpha = -2\rho gh S_2 \sin \alpha = -2R'_y, \end{aligned}$$

то есть реакция выходящей струи по величине в два раза превосходит статическое давление на сечение и направлена в сторону, противоположную этому давлению.

$$\vec{R} = -2\vec{R}'. \quad (4.45)$$

Искусственно создавая большое давление на поверхность S_1 , можно получить очень значительные скорости в выходном отверстии и, таким образом, значительные реакции вылетающей струи.

4.5.3. Давление струи на пластинку

Теорема об изменении количества движения позволяет определять давление струи, падающей на пластинку, если только размеры пластинки значительно превосходят диаметр струи.

Если струя падает перпендикулярно на пластинку (рис. 4.12), то, предполагая, что скорость оттекания (a , следовательно, и площадь сечения струи) мало изменяется, сможем, не учитывая веса, определить силу давления на пластинку

$$\vec{R} = -M\vec{V}_1,$$

так как вектора количеств движения растекающейся по поверхности пластинки жидкости равны и прямо противоположны. Заменяя расход M его значением $\rho S V_1$, получим известную формулу Даниила Бернулли

$$R_x = \rho S V_1^2, \quad (4.46)$$

где S – площадь сечения струи у выхода из трубки;

V_1 – скорость выхода;

ρ – массовая плотность жидкости.

Если пластинка наклонена к направлению струи под углом α (рис. 4.13), то, предполагая, что размеры пластинки велики по сравнению с диаметром струи, получим вектора $M\vec{V}_1, -M_2\vec{V}_2, -M'_2\vec{V}'_2$ давление $\vec{R}$ пластинки на жидкость, которые образуют замкнутый четырехугольник. Давление жидкости на пластинку или пластинки на жидкость будем считать нормальным к пластинке, так как трением жидкости о пластинку можно пренебречь.

В предыдущем п. 4.5.2 в силу симметрии мы считали, что секундные количества движения жидкости, оттекающей по пластинке в обе стороны одинаковы. Теперь мы не можем сделать этого предположения, как видно из диаграммы рис. 4.13.

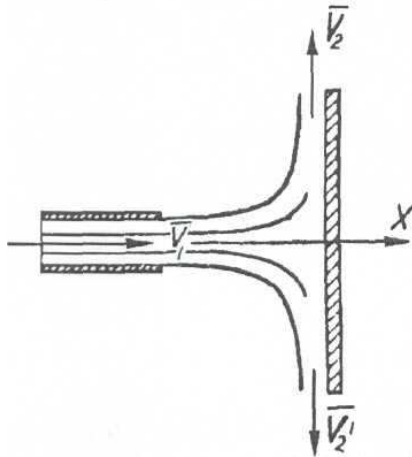


Рис. 4.12. К выводу формулы (4.46)

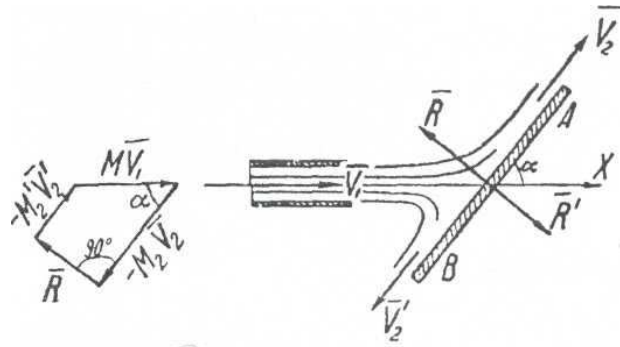


Рис. 4.13. К вопросу определения давления струи на плоскую пластинку

Обозначим массу жидкости, протекающую через сечение струи в верхней части пластинки $A - M'_2$, а через сечение струи в нижней части $B - M'_2$.

Проектируя вектора, образующие замкнутый четырехугольник, на направление нормали к пластинке, будем иметь

$$R_1 = M V_1 \sin \alpha = \rho S V_1^2 \sin \alpha.$$

Здесь опять S обозначает площадь сечения струи у выхода из трубы. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получим формулу (4.46). Проектируя тот же четырехугольник на направление пластинки, получим

$$M V_1 \cos \alpha + M'_2 \cdot V'_2 - M_2 V_2 = 0.$$

Кроме того, из условия одинаковости расхода массы жидкости вдоль струи

$$M_2 + M_2' = M.$$

Из этих двух уравнений можно вычислить массы жидкости, растекающиеся в единицу времени в обе стороны пластинки. Обыкновенно считают, что скорости растекания струи одинаковы со скоростью струи при выходе из трубы, то есть $V_2 = V_2' = V_1$ так что различие значений M_2 и M_2' происходит за счет разных сечений струи в точках A и B . При таком предположении будем иметь

$$M_2 - M_2' = M \cos \alpha,$$

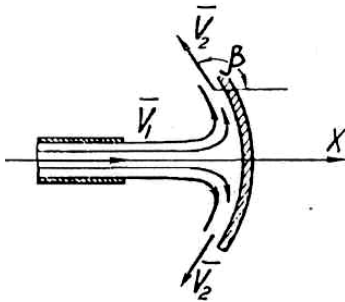
$$M_2 + M_2' = M,$$

откуда находим

$$M_2 = M \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad M_2' = M \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Подобно тому, как мы вычислили давление струи на плоскую пластинку, точно так же можно найти и давление на криволинейную пластинку. Например, если струя ударяется о лопатку формы дуги круга (рис. 4.14), то давление

$$R_x = MV_1 - 2 \frac{M}{2} V_2 \cos \beta,$$



или, полагая $V_2 = V_1$, найдем

$$R_x = \rho S V_1^2 (1 - \cos \beta).$$

Если, например, лопатка имеет форму полуокружности, то $\beta = \pi$, и мы получим максимальное давление:

$$R_x = 2 \rho S V_1^2,$$

Рис. 4.14. К вопросу определения давления струи на криволинейную пластинку

то есть в два раза большее давление, чем при натекании на перпендикулярную плоскую пластинку.

4.5.4. Уравнение Бернулли

Выделим в жидкости отдельную струйку (рис. 4.15), и обрежем её двумя перпендикулярными к линии тока сечениями A и B .

За момент времени dt масса жидкости AB перейдет в новое положение $A'B'$, причем количество жидкости, заключенное в каждом из заштри-

хованных элементов, будет равно mdt , где m – масса жидкости, проходящая через поперечное сечение струйки за единицу времени. Изменение кинетической энергии, выделенной массы жидкости, будет равно работе сил веса и гидродинамического давления (работой сил внутреннего трения пренебрегаем, считая жидкость идеальной).

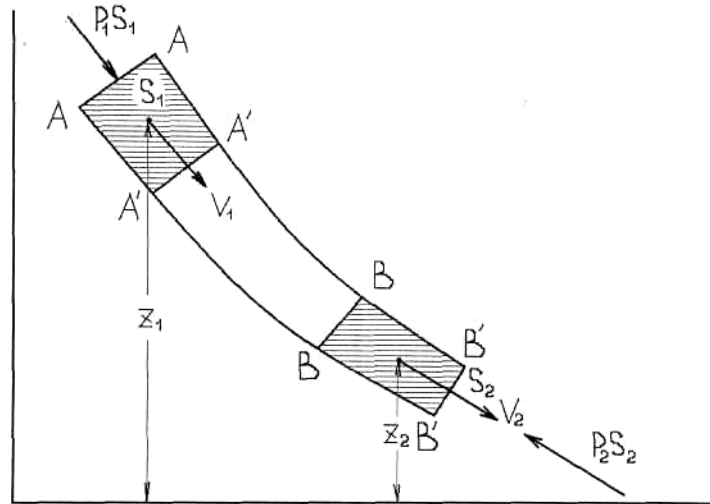


Рис. 4.15. К выводу уравнения Бернулли

В момент времени t выделенная масса жидкости, занимая объем AB , имеет кинетическую энергию T_1 , которую можно представить состоящей из двух слагаемых: кинетической энергии T_1' жидкости в объеме AA' и кинетической энергии T_1'' жидкости, занимающей остальную часть $A'B$ объема струйки.

Пусть V_1 – скорость в сечении A , тогда:

$$T_1' = mdt \frac{V_1^2}{2}$$

и, следовательно,

$$T_1 = mdt \frac{V_1^2}{2} + T_1''.$$

Аналогично в момент времени $(t + dt)$, получим

$$T_2 = mdt \frac{V_2^2}{2} + T_2'',$$

где T_2'' – кинетическая энергия жидкости в объеме $A'B$ в момент $(t + dt)$;
 V_2 – скорость в сечении B .

Считая движение жидкости установившемся, то есть, принимая, что скорость, меняясь от сечения к сечению, остается в данном месте постоянной (не изменяется во времени), имеем

$$T_1'' = T_2''$$

и, следовательно,

$$T_2 - T_1 = mdt \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right).$$

Напишем теперь сумму работ сил гидродинамического давления и силы веса, действующих на выделенную часть струйки за время dt .

Работа гидродинамического давления. Пусть p_1 и p_2 – давления в сечениях A и B ; S_1 и S_2 – соответствующие площади сечения струи. Тогда силы давления на площадки A и B соответственно будут $p_1 S_1$ и $p_2 S_2$. Сила $p_1 S_1$ направлена по движению жидкости, а $p_2 S_2$ – против него. Следовательно, искомая работа равна

$$p_1 S_1 V_1 dt - p_2 S_2 V_2 dt.$$

Зная, что $S_1 V_1 = S_2 V_2$ есть объем жидкости, проходящей в единицу времени через сечение струйки, имеем

$$S_1 V_1 \frac{\gamma}{g} = S_2 V_2 \frac{\gamma}{g} = m,$$

где γ – вес единицы объема жидкости.

Тогда выражение для работы сил гидродинамического давления примет вид

$$(p_1 - p_2) \frac{mg}{\gamma} dt.$$

Работа силы веса. Для её определения составим разность потенциальных энергий сил веса в моменты времени t и $(t + dt)$. Потенциальная энергия Π_1 веса массы жидкости, занимающей в момент времени t объем AB , может быть представлена как сумма потенциальных энергий Π_1' веса объема AA' и потенциальной энергии Π_1'' веса объема $A'B$. Получаем

$$\Pi_1 = mdtgz_1 + \Pi_1''$$

и аналогично для объема $A'B'$ в момент $(t + dt)$

$$\Pi_2 = mdtgz_2 + \Pi_2'',$$

где Π_2'' – потенциальная энергия веса объема $A'B$, равная Π_1'' .

Получаем $\Pi_1 - \Pi_2 = mgdt(z_1 - z_2)$.

Подставляя найденные выражения в уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии, получим

$$mdt\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}\right) = (p_1 - p_2)\frac{mg}{\gamma}dt + mgdt(z_1 - z_2),$$

или после преобразования

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g},$$

то есть

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{const.} \quad (4.47)$$

Три слагаемых формулы (4.47) имеют размерность длины. Член z называется высотой относительно горизонта, или нивелирной высотой, член $\frac{p}{\gamma}$ – пьезометрической высотой, член $\frac{V^2}{2g}$ – скоростной высотой.

При выводе уравнения Бернулли не принимают в расчет потерь энергии, а величины $\frac{V^2}{2g}$, $\frac{p}{\gamma}$ и z – это составные части полной кинетической энергии H единицы веса жидкости, которая остается при отсутствии потерь постоянной.

4.6. Понятие о балансировке вращающихся тел

Балансировкой называется уравнивание вращающихся движущихся масс механизмов с тем, чтобы уничтожить влияние сил инерции.

Ротором называют любое звено механизма, совершающее вращательное движение. Балансировка роторов приобретает особое значение в связи с повышением частоты вращения звеньев, приводящим к резкому увеличению сил и моментов сил инерции от неуравновешенных масс.

Для полного устранения динамических нагрузок на опоры ротора необходимо, чтобы главный вектор и главный момент сил инерции были равны нулю в любой момент движения:

$$\vec{\Phi} = 0; \quad \vec{M}_\phi = 0.$$

Решение задачи уравнивания вращающихся звеньев заключается в подборе их масс, обеспечивающем полное или частичное гашение добавочных инерционных нагрузок на опоры.

Для полного уравнивания вращающегося звена необходимо и достаточно выполнить два условия:

- *центр масс звена должен находиться на геометрической оси вращения;*
- *ось вращения должна быть одной из главных осей инерции.*

Выполнение первого условия называют *статической балансировкой*, выполнение обоих условий – *динамической балансировкой*.

Причинами неуравновешенности могут быть неточности в изготовлении и сборке деталей, неравномерность распределения материала, деформация деталей, большие зазоры во вращательных парах и т.д.

Устраняют неуравновешенность, удаляя избыток металла в более тяжелой части детали или добавляя корректирующую массу в более легкой его части. При значительной неуравновешенности ставят противовесы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под инертностью?
2. Сформулируйте законы динамики.
3. В чем заключается прямая и обратная задачи динамики материальной точки?
4. Сформулируйте принцип Д'Аламбера. В чем заключается метод кинетостатики?
5. Дайте определение работы сил на прямолинейном и криволинейном участке пути.
6. Как определяется работа сил тяжести?
7. Как определяется работа сил упругости?
8. Что называется мощностью силы?
9. Что характеризует коэффициент полезного действия? Как определяется коэффициент полезного действия механической системы?
10. Дайте определение импульса силы.
11. В чем отличие количества движения от импульса силы?
12. Сформулируйте теорему об изменении количества движения.
13. Дайте определение кинетической энергии.
14. Как определяется кинетическая энергия?
15. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии.
16. Запишите уравнение поступательного движения твердого тела.
17. Дайте определение момента инерции тела относительно оси.

18. Запишите уравнение вращательного движения твердого тела.
19. Что называется маховым моментом?
20. Из чего складывается кинетическая энергия твердого тела, движущегося плоскопараллельно?
21. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии системы тел.
22. Что называется балансировкой и в чем заключается статическая и динамическая балансировки?
23. Запишите формулу Эйлера для движущегося объема жидкости.
24. Запишите формулу Торричелли.
25. Чему равна реакция выходящей струи жидкости?
26. Запишите формулу Д. Бернулли.
27. Как определяется давление струи на плоскую и криволинейную пластину?
28. Какие понятия связывают между собой уравнение Бернулли?

Литература

1. Теоретическая механика: учеб.-метод. комплекс для студентов техн. спец. / В.Э. Завистовский и др. ; под общ. ред. В.Э. Завистовского. – Новополюцк: ПГУ, 2006. – 204 с.
2. Завистовский, В.Э. Техническая механика / В.Э. Завистовский, Н.М. Захаров. – Мн.: Амалфея, 2000. – 416с.

Тема 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

Основным назначением механизма является выполнение требуемых движений, которые описываются кинематическими характеристиками. Структура механизма и действующие на его звенья силы влияют на движение. Поэтому, чтобы выбрать механизм, который бы обеспечивал требуемое движение, необходимо знать основные виды механизмов и их возможности, а также их кинематические характеристики.

5.1. Структура механизмов

Для облегчения труда человека и повышения производительности используют **машины** – устройства для обработки, преобразования материалов, энергии и информации с помощью определенных механических движений, носителем которых является механизм.

Механизмом называют искусственно созданную систему подвижно соединенных тел (звеньев), предназначенную для преобразования *заданного движения* одного или нескольких из них в *требуемое движение* остальных [1]. Машина состоит из сочетания механизмов.

Подвижно соединенные между собой части механизма называют *звеньями*. Звеном может быть одна или несколько неподвижно соединенных между собой деталей. *Деталь* – простейшая часть механизма, выполненная из материала одной марки без применения сборочных операций.

В состав любого механизма входят подвижные и неподвижные звенья. Неподвижное звено принято называть *стойкой*. К стойке относят элементы неподвижной системы механизма, например, корпус и детали, жестко связанные с ним. *Подвижное звено* независимо от количества входящих в него деталей *образует жесткую систему*, для которой характерен *одинаковый вид движения*.

В механизме различают *ведущие* звенья, которые получают движение от внешних источников, и *ведомые* – все остальные подвижные звенья, получающие определенное движение от ведущих звеньев. Закон движения ведущих звеньев обычно задан. Ведомое звено, совершающее требуемое движение, которое получают с помощью механизма, называют *рабочим*.

Звенья механизмов обладают различными физическими свойствами. Наряду с абсолютно твердыми звеньями в механизмах используются упругие и гибкие звенья, характеризующиеся возможностью изменения своей формы и размеров. В качестве упругих звеньев применяют пружины, мембраны, металлорезиновые элементы. К гибким звеньям относят ремни, ленты, пассики, нерастяжимые нити и др.

Основными признаками механизма являются подвижность звеньев и определенность в преобразовании их движений. Подвижные звенья входят в соединение друг с другом или с неподвижным звеном так, что имеется возможность движения одного звена относительно другого. Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется *кинематической парой*. Поверхности, линии, точки, по которым одно звено соприкасается с другим, образуя кинематическую пару, называют *элементами пары*.

Кинематические пары налагают на относительные движения звеньев ограничения, зависящие от способа соединения звеньев пары. Всякое свободное тело, как известно, имеет шесть степеней свободы, которые можно представить в виде простейших движений: три вращения вокруг координатных осей и три поступательных движения вдоль этих осей (рис. 5.1). При соединении звеньев механизма друг к другу ограничиваются некоторые из указанных движений. Ограничения, налагаемые на относительные движения звеньев, входящих в кинематическую пару, называются *условиями связи*.

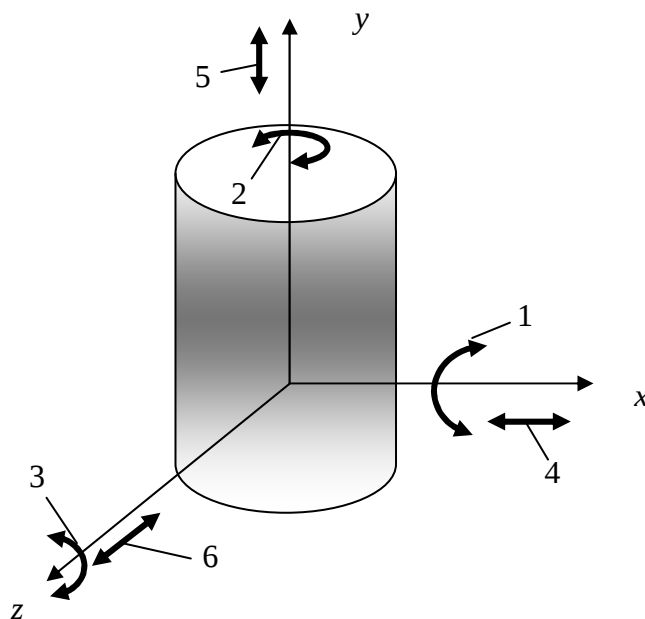


Рис. 5.1. Степени свободы свободного тела

Очевидно, что число ограничений может быть только целым числом меньше 6, т.к. в противном случае звенья теряют относительную подвижность и кинематическая пара переходит в неподвижное соединение звеньев. Число условий связи не может быть меньше 1, иначе звенья не соприкасаются и кинематическая пара перестает существовать. Таким образом, количество степеней свободы кинематической пары может принимать значения от 1 до 5.

Кинематические пары классифицируют по следующим признакам [1, 2]:

- по числу отнятых кинематической парой независимых возможных перемещений;
- по характеру относительного движения звеньев;
- по характеру соприкосновения звеньев;
- по способу замыкания.

В зависимости *от числа отнятых кинематической парой независимых возможных перемещений*, т.е. от числа отнятых степеней свободы, пары делятся на 5 (пять) классов; порядок класса соответствует числу ограничений движения (рис. 5.2).

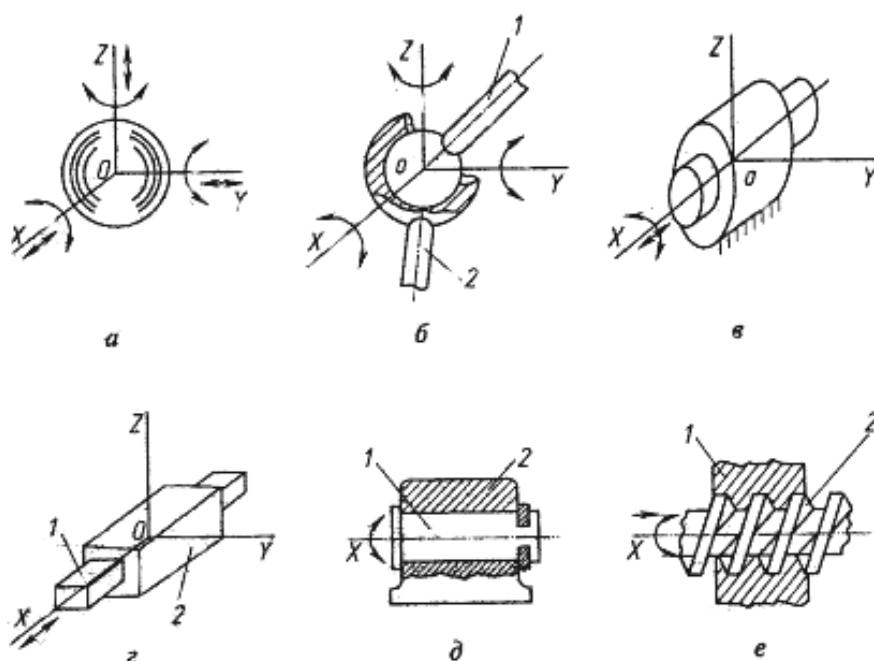


Рис. 5.2. Примеры кинематических пар: *а* – простейшие движения твердого тела; *б* – кинематическая пара 3-го класса; *в* – кинематическая пара 4-го класса; *г* – кинематическая поступательная пара 5-го класса; *д* – кинематическая вращательная пара 5-го класса; *е* – кинематическая винтовая пара 5-го класса

Кинематические пары 5-го класса имеют наибольшее распространение, поскольку являются основой направляющих движений: поступательного и вращательного.

По *характеру относительного движения звеньев* кинематические пары делят на *плоские и пространственные*. Точки звеньев, входящих в плоские пары, могут двигаться в одной или параллельных плоскостях. К плоским относятся кинематические пары только 5-го и 4-го классов, т.к. свободное тело, совершающее плоское движение, имеет только три степе-

ни свободы, три возможных простейших движения: два поступательных вдоль координатных осей плоскости и вращательное в плоскости движения. Точки звеньев пространственных пар при движении описывают пространственные кривые.

По **характеру соприкосновения звеньев** в кинематической паре они делятся на *низшие и высшие*. Низшими называются такие пары, в которых соприкосновение звеньев происходит по поверхности. В высших кинематических парах соприкосновение звеньев происходит по линии или в точке. Достоинством низших пар является способность их элементов воспринимать и передавать значительные нагрузки при минимальном износе. Преимущества высших пар – возможность воспроизводить достаточно сложные относительные движения и уменьшить потери на трение. Высшие пары образуются боковыми поверхностями зубьев колес, находящихся в зацеплении, роликами фрикционных передач, кулачком и толкателем.

По **способу замыкания**, т.е. обеспечения постоянного соприкосновения элементов, кинематические пары классифицируют на *геометрически незамкнутые (силовые) и замкнутые*. Во-первых, кинематическая пара существует за счет прижатия одного звена к другому силами тяжести, упругости пружин, электромагнитного притяжения; во-вторых, соприкосновение звеньев обеспечивается геометрическими формами элементов.

При изучении механизмов все звенья и кинематические пары принято на схемах изображать упрощенно. Условное изображение наиболее часто используемых кинематических пар 5-го и 4-го классов приведено на рис. 5.3.

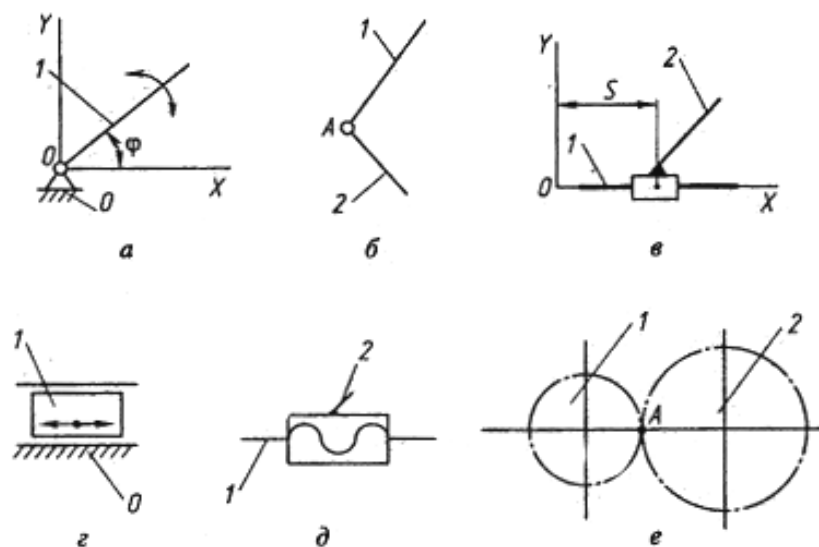


Рис. 5.3. Условное изображение кинематических пар: *a, б* – вращательные пары с подвижными 1, 2 и неподвижным 0 звеньями; *в, г* – поступательная пара; *д* – винтовая пара; *е* – зацепление зубчатых колес 1 и 2 в точке *A*

Звенья соединяются с помощью кинематических пар в кинематические цепи.

Кинематические цепи классифицируются по следующим признакам:

- в зависимости от характера движения звеньев;
- по количеству кинематических пар в цепи;
- на открытые и замкнутые.

В зависимости от характера движения звеньев различают **плоские** и **пространственные** кинематические цепи. Плоские цепи образуются звеньями, совершающими плоское движение; точки звеньев пространственных цепей описывают пространственные траектории.

По количеству кинематических пар в цепи они делятся на **простые** и **сложные**. В простой цепи каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 5.4). Сложной называется кинематическая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары (рис. 5.5).

Незамкнутыми (открытыми) называют такие кинематические цепи, в которых имеются звенья, образующие только одну кинематическую пару (рис. 5.4). В **замкнутой** цепи все звенья входят не менее чем в две кинематические пары (рис. 5.6).

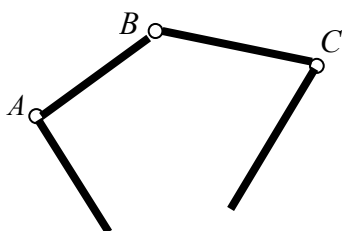


Рис. 5.4. Простая кинематическая цепь

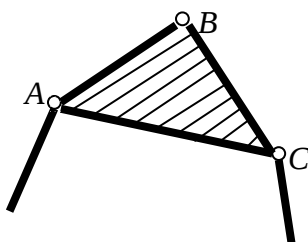


Рис. 5.5. Сложная кинематическая цепь

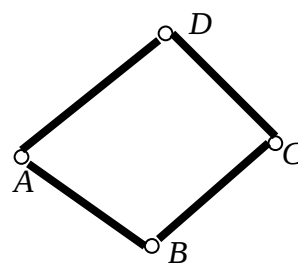


Рис. 5.6. Замкнутая кинематическая цепь

Механизм можно представить в виде кинематической цепи, обязательно имеющей одно неподвижное звено – стойку. Но не любая кинематическая цепь может быть механизмом. Важнейшим свойством любого механизма является его подвижность, которая оценивается *степенью подвижности механизма*. Она равна числу независимых движений, которые можно задать ведущему звену механизма, чтобы получить вполне определенное движение всех остальных подвижных звеньев. Степень подвижности механизма W должна быть не менее единицы и равна числу обобщенных координат механизма, т.е. числу независимых кинематических пара-

метров. В плоских механизмах ведущие звенья совершают обычно одно простое движение – вращательное или поступательное, поэтому для таких механизмов степень подвижности равна числу ведущих звеньев, которых может быть одно или несколько. Если ведущее звено совершает вращение вокруг неподвижной оси, его положение определяется обобщенной координатой – углом поворота звена. Если же ведущее звено совершает поступательное движение, то его положение определяется координатой линейного перемещения звена (рис. 5.3, в).

Степень подвижности механизма можно определить из его структурной формулы, связывающей подвижность с числом звеньев, числом и классом кинематических пар. Например, механизм состоит из K -звеньев. Так как одно из звеньев (стойка) является неподвижным, то количество подвижных звеньев механизма будет $n = K - 1$.

Рассмотрим пространственный механизм в общем виде. Если бы звенья механизма не были связаны кинематическими парами, то общее количество простейших движений всех его подвижных звеньев равнялось бы $6n$. Пусть в механизм входят: p_1 пар 1-го класса; p_2 пар 2-го класса; p_3 пар 3-го класса; p_4 пар 4-го класса и p_5 пар 5-го класса. Каждая кинематическая пара 1-го класса ограничивает одно простейшее движение, а все пары 1-го класса делают невозможными $1 \cdot p_1$ движений. Каждая пара 2-го класса ограничивает два простейших движения, а все пары 2-го класса – $2 \cdot p_2$ движений. По аналогии, кинематические пары 3, 4 и 5-го классов исключают соответственно $3 \cdot p_3$, $4 \cdot p_4$ и $5 \cdot p_5$ простейших движений подвижных звеньев механизма.

Число независимых возможных движений пространственного механизма, состоящего из n подвижных звеньев будет

$$W = 6n - 1p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5. \quad (5.1)$$

Формула (5.1) носит название *формулы Малышева*.

Определим степень подвижности плоских механизмов. В плоском движении подвижные звенья, не связанные кинематическими парами, имели бы $3n$ степеней подвижности. Каждая кинематическая пара 5-го класса отнимает у звена два простейших движения, а каждая кинематическая пара 4-го класса – одно. Следовательно, кинематические пары 5-го класса отнимают у каждой плоской кинематической цепи $2 \cdot p_5$ а 4-го класса – $1 \cdot p_4$ степеней свободы. Тогда степень подвижности плоского механизма определится по формуле

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) носит название *формулы Чебышева*.

Так, для механизма, изображенного на рис. 5.7, имеем:

$n = 2$ (подвижные звенья 1 и 2) и три низшие кинематические пары вращения 5-го класса $\{B(0-1), A(1-2), C(2-3)\}$ и $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$.

Равенство нулю означает, что данная кинематическая цепь не может быть использована для преобразования движения.

Степень подвижности четырехзвенного механизма, изображенного на рис. 5.8, определится следующим образом:

$n = 3$ (подвижные звенья 1, 2 и 3);

$p_5 = 4 \{A(0-1), B(1-2), C(2-3), D(3-0)\}$; $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Равенство $W = 1$ означает, что число ведущих звеньев должно быть равно единице.

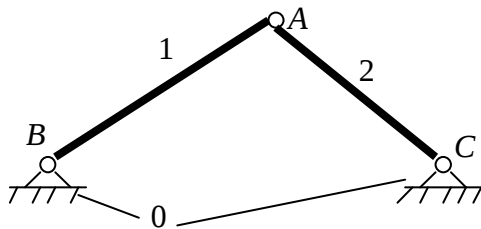


Рис. 5.7. Плоский шарнирный трехзвенный механизм

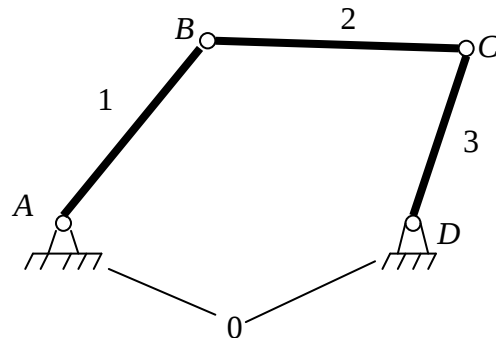


Рис. 5.8. Плоский шарнирный четырехзвенный механизм

Степень подвижности пятизвенного механизма (рис. 5.9) определится так:

$n = 4$;

$p_5 = 5 \{A(0-1), B(1-2), C(2-3), D(3-4), E(4-0)\}$; $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$.

Равенство $W = 2$ означает, что число ведущих звеньев должно быть равно двум.

Наибольшее распространение получили механизмы с одной или двумя степенями подвижности. Встречаются плоские механизмы, число степеней подвижности которых не соответствуют уравнению (5.2). В общем число наложенных ограничений может войти некоторое число повторных (лишних) связей, введенных в механизм по различным причинам. Например, в механизме шарнирного параллелограмма, имеющего $W = 1$, для увеличения жесткости к звену 2 и стойке присоединено дополнительное звено 4 (рис. 5.10). Это звено 4 и кинематические пары D и E , в действитель-

ности, не изменили кинематику механизма, но, согласно формуле (5.2), уменьшили степень подвижности до нуля:

$$n = 4; \quad p_5 = 6; \quad W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0.$$

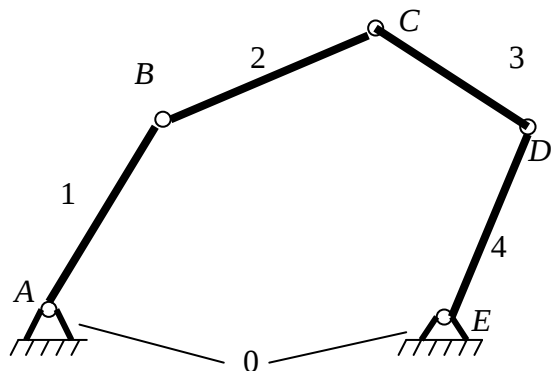


Рис. 5.9. Плоский шарнирный пятизвенный механизм

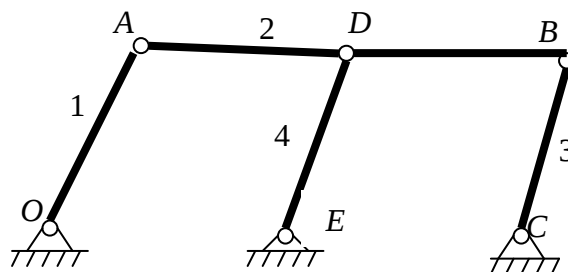


Рис. 5.10. Механизм шарнирного параллелограмма с пассивными связями

Связи, не влияющие на кинематику механизма, а формально уменьшающие степень его подвижности, называются *пассивными*.

5.2. Классификация механизмов

Дадим определение механизма на основании понятия о кинематической цепи. *Механизмом* называется кинематическая цепь с одним неподвижным звеном (стойкой), в которой при заданном законе движения одного или нескольких ведущих звеньев все остальные ведомые звенья движутся вполне определенным образом.

Рассмотрим условия, при которых кинематическая цепь будет механизмом [2]:

- чтобы положения всех звеньев кинематической цепи относительно стойки были вполне определены, необходимо задать столько параметров, сколько степеней подвижности имеет кинематическая цепь;
- чтобы движения ведомых звеньев кинематической цепи были вполне определены, необходимо, чтобы количество ведущих звеньев цепи было равно степени подвижности этой цепи.

Механизмы, входящие в состав любой машины, прибора или аппарата, весьма разнообразны.

По функциональному назначению они подразделяются на следующие виды [1 – 3]:

- механизмы двигателей и преобразователей;
- передаточные механизмы;

- исполнительные механизмы;
- механизмы настройки, подачи, транспортирования;
- механизмы контроля, управления и регулирования.

Механизмы решают задачи преобразования одних видов движения в другие. Если механизм служит для понижения угловой скорости, то его называют *редуктором*; если он служит для повышения угловой скорости – то это *мультипликатор*.

Механизмы, служащие для передачи вращательного движения с преобразованием скорости называют также *передачами*.

В зависимости от конструктивных особенностей и способа передачи движения между подвижными звеньями механизмы делят на:

- шарнирно-рычажные;
- фрикционные;
- зубчатые;
- кулачковые;
- винтовые;
- с гибкими звеньями;
- прерывистого движения.

Шарнирно-рычажные механизмы. В них жесткие звенья типа стержней, рычагов соединяются вращательными и поступательными кинематическими парами. Они применяются для преобразования вращательного или поступательного движения в любое движение с требуемыми параметрами.

Из механизмов с низшими парами наибольшее распространение имеет механизм шарнирного четырехзвенника (см. рис. 5.8). В этом механизме четыре звена: стойка 0, вращающиеся звенья 1 и 3 и звено 2, которое образует кинематические пары только с подвижными звеньями и называется *шатун*ом. Вращающееся звено, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси, называется *кривошипом*, а звено, совершающее качательное движение, – *коромыслом*.

В зависимости от наличия или отсутствия кривошипа шарнирный четырехзвенник может быть трех видов:

- кривошипно-коромысловый;
- двухкривошипный;
- двухкоромысловый.

Кривошип – это звено, имеющее наименьшую длину. В кривошипно-коромысловом механизме углы между стойкой и кривошипом, а также между шатуном и кривошипом изменяются от 0 до 360°. Следовательно,

если в кривошипно-коромысловом механизме сделать стойкой звено 1, то получится двухкривошипный механизм. Во всех остальных случаях кривошипа нет, т.е. механизм будет двухкоромысловым. Заменяя в шарнирном четырехзвеннике одну или две вращательные пары на поступательные, получаем кривошипно-ползунный, кулисный, синусный и другие механизмы (рис. 5.11). Если стойкой сделать звено, входящее в поступательную пару, то в механизме будет *ползун*, т.е. звено, которое входит только в низшие пары и совершает прямолинейно-поступательное движение, а вращающееся звено в зависимости от соотношений между длинами звеньев будет или *кривошипом*, или *коромыслом*. Соответственно механизм будет называться или *кривошипно-ползунным*, или *коромыслово-ползунным* (рис. 5.11, а).

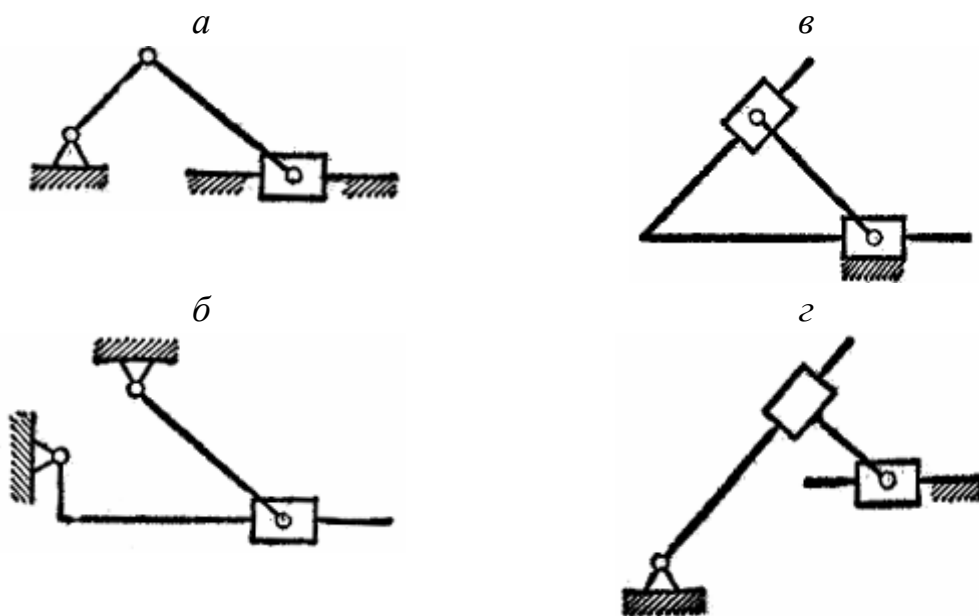


Рис. 5.11. Шарнирные четырехзвенники: а – кривошипно-ползунный механизм; б – кулисный механизм; в – синусный механизм; г – тангенсный механизм

Если стойкой сделать звено, входящее в две вращательные пары, то в механизме будет *кулиса*, т.е. звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном поступательную пару. Соответственно механизм называется *кулисным* (рис. 5.11, б).

Из четырехзвенной кинематической цепи с двумя смежными поступательными парами можно получить *синусный* механизм, в котором ползун перемещается пропорционально синусу угла поворота кривошипа, если угол между осями поступательных пар равен 90° (рис. 5.11, в).

Из четырехзвенной кинематической цепи с двумя несмежными поступательными парами получается *тангенсный механизм* (рис. 5.11, *г*), названный так потому, что перемещение ползуна пропорционально тангенсу угла поворота кулисы.

Фрикционные механизмы. Механизмы, в которых для передачи движения между соприкасающимися звеньями используется трение, называются *фрикционными*. Например, передача вращения с постоянным отношением угловых скоростей (*передаточным отношением*) достигается путем создания трения на цилиндрических поверхностях фрикционных колес 1 и 2 (рис. 5.12, *а*). Передаточное отношение можно регулировать в некоторых пределах, если применить *лобовую фрикционную передачу*, в которой ролик 1 может устанавливаться на различных расстояниях от оси вращения звена 2 (рис. 5.12, *б*). Механизмы, в которых передаточное отношение может регулироваться, называется *бесступенчатыми передачами*

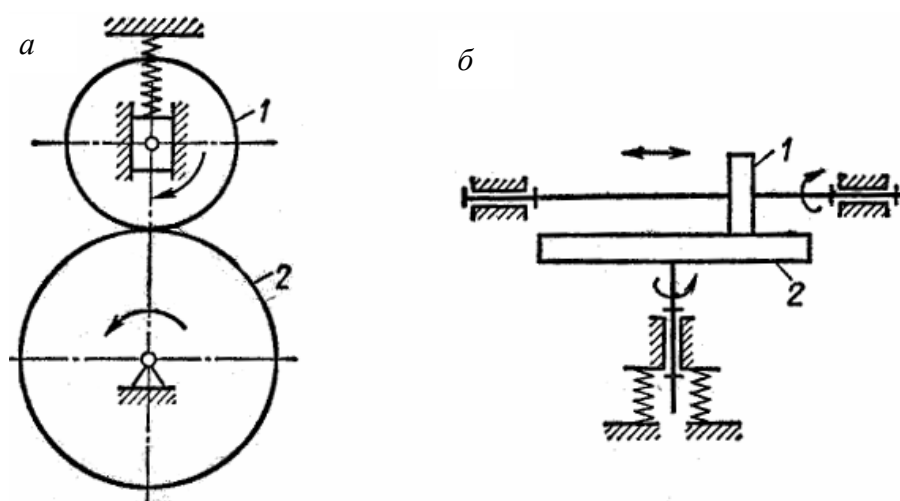


Рис. 5.12. Фрикционные механизмы: *а* – передача с постоянным передаточным отношением; *б* – передача с регулируемым передаточным отношением

Кулачковые механизмы. Кулачком называется звено, которому принадлежит элемент высшей пары, выполненный в виде поверхности переменной кривизны. Механизм, в состав которого входит кулачок, называется *кулачковым механизмом*. На рисунке 5.13, *а* показана схема плоского кулачкового механизма. Кулачок 1, напоминающий по форме сжатый кулак, имеет поверхность переменной кривизны, которая соприкасается с роликом, образуя высшую пару. Постоянное соприкосновение элементов высшей пары обеспечивается пружиной, помещенной между стойкой и выходным звеном (*толкателем*) 3.

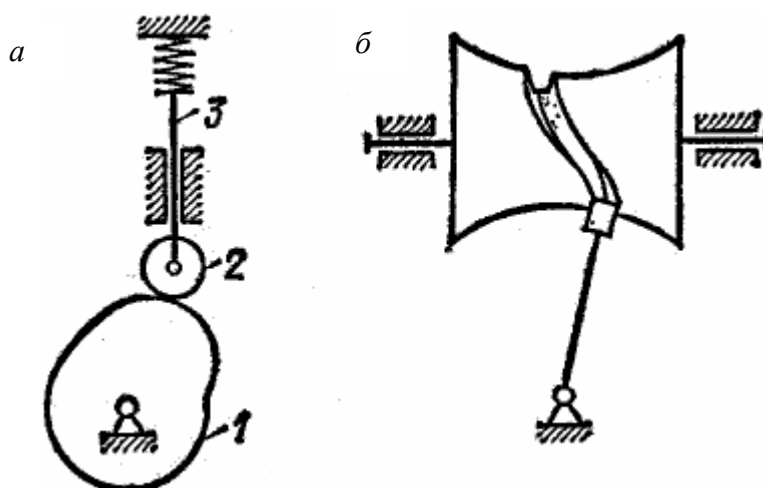


Рис. 5.13. Кулачковые механизмы: а – плоский; б – пространственный

Кулачковые механизмы могут быть не только плоскими, но и пространственными (рис. 5.13, б). Разнообразие форм, которые можно придать кулачку, определяет чрезвычайное разнообразие возможных преобразований движения, выполняемых кулачковыми механизмами. Кулачковые механизмы применяются в устройствах управления, прерывистого движения. Они позволяют получать любой закон движения ведомого звена, отличаются простотой, компактностью, малыми габаритами.

Зубчатые механизмы. *Зубчатым механизмом называется механизм, в состав которого входят зубчатые звенья. Зубчатое звено – это звено, имеющее выступы (зубья) для передачи движения посредством взаимодействия с выступами другого звена (тоже зубчатого). Каждый зуб может рассматриваться как кулачок, а весь зубчатый механизм – как многократно повторенный кулачковый механизм.*

Вращающееся зубчатое звено называется *зубчатым колесом*. В зубчатой передаче звено, имеющее меньшее число зубьев, называется *шестерней*, а сопряженное с ним зубчатое звено – *зубчатым колесом*.

Зубчатые механизмы получили наибольшее распространение благодаря ряду достоинств – компактности, высокому КПД, надежности работы, простоте ухода, возможности применения в широком диапазоне скоростей и передаточных отношений, сохранению с большой точностью заданного передаточного отношения. Недостатки зубчатых механизмов – сложность и высокая точность изготовления и сборки звеньев, шум при больших окружных скоростях колес.

Зубчатые передачи служат для изменения скорости вращательного движения, преобразования возвратно-вращательного движения в возвратно-поступательное, и наоборот.

Простейший одноступенчатый зубчатый механизм состоит из стойки и двух подвижных звеньев – зубчатых колес. Колеса образуют со стойкой вращательные пары 5-го класса, а друг с другом – высшую кинематическую пару 4-го класса, называемую *зубчатым зацеплением*.

На схеме механизма зубчатые колеса изображаются окружностями, которые перекатываются без скольжения. На рисунке 5.14 показан зубчатый планетарный механизм, в котором колесо 2 (сателлит) вращается вокруг своей оси и одновременно движется вокруг оси центрального (солнечного) колеса 1, т.е. совершает движение, подобное движению планеты (отсюда название механизма).

Иногда зубчатые механизмы комбинируются с шарнирными, например, шарнирно-зубчатый механизм, составленный из кривошипно-коромыслового шарнирного четырехзвенника и двух зубчатых колес, одно из которых неподвижно соединено с шатуном, а другое имеет ось вращения, совпадающую с осью вращения коромысла.

Винтовые механизмы. В состав винтовых механизмов входят винтовые пары. Они состоят из винта и гайки и предназначены для преобразования вращательного движения в прямолинейное, и наоборот. Они обеспечивают высокую точность поступательных перемещений, большой выигрыш в силе. Недостатки – большие потери на трение в паре винт-гайка, низкий КПД. Применяются винтовые механизмы в измерительных приборах, механизмах точных перемещений, регулирования и настройки, в подъемно-транспортных устройствах.

При вращении винта 1 (рис. 5.15) гайка 2 поступательно перемещается в направляющих стойки 3. Возможно использование схемы, в которой ведущим звеном является зафиксированная в осевом направлении вращающаяся гайка, а ведомым – винт, движущийся поступательно в направляющих стойки.

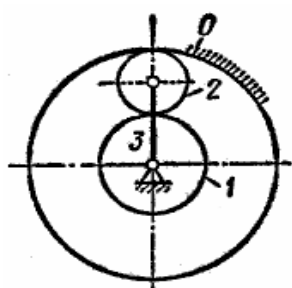


Рис. 5.14. Зубчатый планетарный механизм:
0 – стойка (эпициклическое колесо);
1 – солнечное колесо; 2 – сателлит; 3 – водило

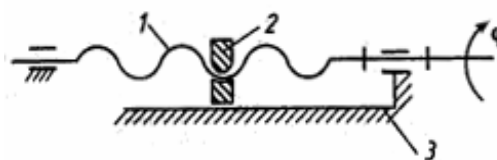


Рис. 5.15. Винтовой механизм:
1 – винт; 2 – гайка; 3 – стойка

Механизмы с гибкими звеньями. Под гибкими звеньями понимают обычно *ремни, канаты, цепи, нити*, которые охватывают два звена или более и устанавливают определенную связь между перемещениями этих звеньев. На рисунке 5.16 показан простейший механизм с гибким звеном 3, который в отличие от зубчатых и фрикционных механизмов может служить для передачи вращения от одного звена, ведущего 1 к ведомому звену 2 при значительных расстояниях между осями их вращения. В зависимости от типа гибкого звена этот механизм называется *ременной, канатной* или *цепной передачей*.

По характеру соединения гибкого звена с ведущим и ведомым звеньями рассматриваемые механизмы подразделяются на передачи трением, передачи зацеплением и передачи с жестким креплением гибкого звена к другим звеньям.

Механизмы прерывистого движения. Данные механизмы предназначены для преобразования непрерывного движения ведущего звена в прерывистое движение ведомого звена. На рисунке 5.17 приведен мальтийский механизм, предназначенный для преобразования непрерывного вращения звена 1 в движение звена 2 с периодическими остановками, во время которых звено 2 предохраняется от самопроизвольного поворота соприкосновением цилиндрических поверхностей на звеньях 1 и 2. Число остановок равно числу пазов на звене 2, в которые последовательно входит ролик (цевка) звена 1. Во время движения звена 2 механизм по структуре и по кинематическим свойствам тождествен кулисному механизму. Число пазов в мальтийских механизмах обычно лежит в пределах от 4 до 20. Свое название механизм получил от сходства его с крестом мальтийского ордена при числе пазов, равном 4.

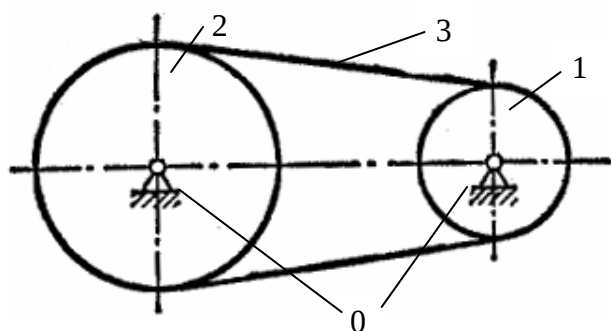


Рис. 5.16. Механизм с гибким звеном:
1 – ведущее звено; 2 – ведомое звено;
3 – гибкое звено; 0 – стойка

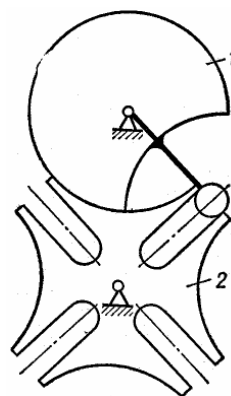


Рис. 5.17. Мальтийский механизм:
1 – ведущее звено; 2 – ведомое звено;
3 – ролик; 0 – стойка

К этой группе механизмов относят храповые и некоторые кулачковые механизмы. Они широко используются в машинах – автоматах по обработке изделий в стационарных позициях (автоматические линии для розлива жидкостей в мерные емкости, автоматы для упаковки и т.п.).

5.3. Методы кинематического исследования механизмов

Звенья механизмов выполняют определенные движения. Для изучения этих движений необходимо знать их *характеристики*, называемые *кинематическими*.

К основным кинематическим характеристикам относят:

- траектории точек;
- перемещения точек и звеньев;
- скорости точек и звеньев;
- ускорения точек и звеньев.

В общем случае кинематические характеристики зависят от закона движения ведущего звена и строения механизма. Такие характеристики, как функция положения и передаточная функция, определяются только строением механизма.

Всякое подвижное звено механизма – это заданной формы твердое тело, точки которого и звено в целом совершают определенные движения. Общие методы кинематического исследования движения материальных точек и твердых тел изложены в теме 3 настоящего учебно-методического комплекса.

При кинематическом исследовании механизма решаются следующие основные задачи [2]:

- определение положений звеньев механизма и построение траекторий отдельных точек звеньев;
- нахождение линейных скоростей точек механизма и угловых скоростей звеньев;
- определение линейных ускорений точек механизма и угловых ускорений звеньев;
- определение передаточных отношений.

Исходными данными для кинематического исследования являются:

- кинематическая схема механизма;
- размеры всех звеньев;
- законы движения ведущих звеньев.

При этом используют следующие методы исследований:

- аналитические;
- графоаналитические;
- графические.

5.3.1. Аналитический метод

Определение положений звеньев и траекторий точек производится с помощью кинематической схемы механизма, отражающей только те размеры, которые определяют относительное положение кинематических пар.

Функция положения. Под функцией положения механизма понимают зависимость $q_k = q_k(q)$, связывающая положение ведомого (k -того) и ведущего звеньев механизма. Здесь q_k – параметр, определяющий положение ведомого звена; q – независимая переменная, определяющая положение ведущего звена. *Функция положения является геометрической характеристикой механизма.* Ее можно использовать при кинематическом исследовании, если задать закон движения ведущего звена – $q = q(t)$. Зависимость $q_k = q_k(t)$ выражает закон движения ведомого звена.

Если ведущее звено входит во вращательную пару со стойкой (см. рис. 5.3, а), то функция положения задается в виде $q_k = q_k(\varphi)$, где φ – угол поворота ведущего звена.

Если ведущее звено входит в поступательную пару (рис. 5.3, в), то функция положения задается в виде $q_k = q_k(S)$, где S – перемещение произвольно выбранной точки ведущего звена относительно неподвижной системы координат, связанной со стойкой.

Передаточная функция. Передаточная функция представляет собой первую производную от функции положения ведомого звена по углу поворота или линейному перемещению ведущего звена: $\frac{dq_k}{d\varphi}; \frac{dq_k}{dS}; \frac{d\varphi_k}{d\varphi}; \frac{d\varphi_k}{dS}$.

Мгновенное значение передаточной функции определяется отношением мгновенных скоростей ведомого и ведущего звеньев. Если угол поворота φ_k задан в виде функции $\varphi_k = \varphi_k(\varphi)$, то угловая скорость ω_k этого звена может быть представлена так:

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \omega_\varphi = \omega \cdot i_{k\varphi}, \quad (5.3)$$

где ω – угловая скорость ведущего звена $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$; $\omega_\varphi = \frac{d\varphi_k}{d\varphi}$ – передаточная функция или аналог угловой скорости k -того звена.

При одинаковых видах движения ведомого и ведущего звеньев передаточная функция обозначается i_{kn} и называется передаточным отношением от звена k к звену n .

Дифференцируя уравнение (5.3) по времени, получаем угловое ускорение ε_k k -того звена:

$$\varepsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \omega_\varphi) = \omega \frac{d\omega_\varphi}{dt} + \omega_\varphi \frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \omega_\varphi \frac{d\omega}{dt} = \omega^2 \varepsilon_\varphi + \varepsilon \omega_\varphi, \quad (5.4)$$

где $\varepsilon_\varphi = \frac{d\omega_\varphi}{d\varphi}$ – аналог углового ускорения k -того звена; ε – угловое ускорение ведущего звена.

Аналогично могут быть получены уравнения для скорости и ускорения любой точки звена.

Таким образом, скорости и ускорения звеньев и их точек могут быть всегда выражены через соответствующие аналоги скоростей и ускорений и угловые скорость и ускорение ведущего звена механизма.

5.3.2. Графический метод

Используется для построения плана положения механизма. *Планом положения механизма* называют выполненное в масштабе графическое изображение взаимного расположения звеньев в соответствующий момент времени. Реализуется при помощи способа засечек. Алгоритм построения следующий:

- выбрать масштаб;
- нанести положения неподвижных центров вращательных пар;
- определить положения кинематических пар и звеньев групп, присоединенных к ведущему звену для выбранного положения ведущего звена.

Для получения траектории какой-либо точки необходимо соединить плавной кривой положения этой точки при различных положениях ведущего звена.

Обычно строят план для 12 или 24 положений ведущего звена механизма.

5.3.3. Графоаналитический метод

Примером графоаналитического метода кинематического исследования механизмов является метод планов скоростей и ускорений. *Планом скоростей (ускорений) механизма* называется фигура, образованная век-

торами скоростей (ускорений) точек звеньев при заданном положении механизма.

В качестве исходных данных для построения планов скоростей и ускорений необходимо иметь план механизма при определенном положении ведущего звена и знать скорость этого звена. Планы скоростей и ускорений строятся по векторным соединениям к ведущему звену и к другим звеньям механизма.

Основные свойства плана скоростей:

- векторы абсолютных скоростей точек механизма относительно стойки всегда направлены от полюса P ;
- векторы относительных скоростей точек одного звена соединяют концы векторов абсолютных скоростей этих точек;
- прямые линии, соединяющие концы векторов абсолютных скоростей точек одного звена на плане скоростей, образуют фигуру, подобную фигуре на схеме механизма, но повернутую на угол 90° в направлении угловой скорости данного звена.

Третье свойство называется теоремой подобия для скоростей.

План скоростей кривошипно-ползунного механизма приведен на рис. 5.18, б. Выражения для скорости $\vec{V}_B$ точки B запишется в виде векторного уравнения

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (5.5)$$

где $\vec{V}_{BA}$ – вектор относительной скорости, получаемой точкой B во вращательном движении звена 2 относительно точки A .

Вектор скорости точки C находим путем совместного графического решения двух векторных уравнений:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}; \quad \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}. \quad (5.6)$$

Отметим основные свойства плана ускорений:

- векторы абсолютных ускорений точек механизма всегда направлены от точки, выбранной за полюс плана, например, точки π ;
- векторы полных относительных ускорений точек одного звена соединяют концы векторов абсолютных ускорений этих точек;
- прямые линии, соединяющие концы векторов абсолютных ускорений точек одного звена на плане ускорений, образуют фигуру, подобную фигуре звена на схеме механизма, но повернутую на угол $180^\circ - \beta$ в направлении углового ускорения звена. Угол β измеряется между вектором полного ускорения точки звена и нормальной составляющей этого ускорения.

Третье свойство называется теоремой подобия для ускорений.

Ускорение точки B (рис. 5.18, a) находим, решая графически следующее уравнение

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (5.7)$$

Ускорение точки C определяем, решая совместно уравнения:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau. \quad (5.8)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau. \quad (5.9)$$

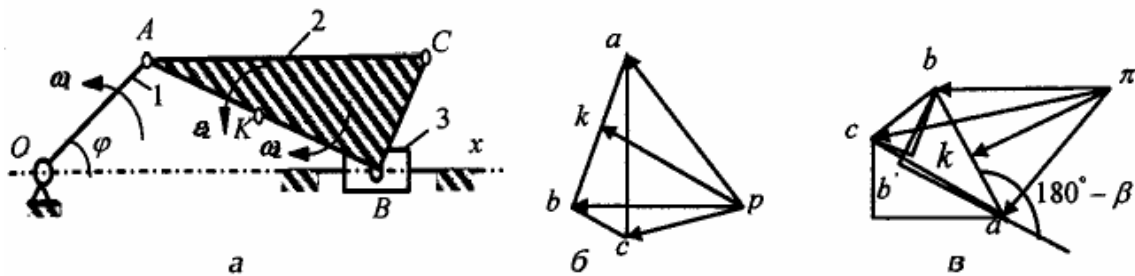


Рис. 5.18. Иллюстрация графоаналитического метода исследования:
 a – кривошипно-ползунный механизм; b – план скоростей; c – план ускорений

5.4. Силы, действующие в механизмах

Во время работы механизма к его звеньям приложены силы, определяющие их движение. В общем случае все силы, действующие в механизме, подразделяются на задаваемые и реакции связей [1]. К задаваемым силам в механизме относятся силы: движущие, полезного сопротивления, собственного веса звеньев, инерции и вредного сопротивления.

Движущие силы и моменты. Силы, приложенные к ведущим звеньям и направленные в сторону перемещений их точек приложения или составляющие с этими перемещениями острые углы, называются движущими (рис. 5.19).

Силы полезного сопротивления. Силы, приложенные к исполнительным или рабочим звеньям механизма, направленные против перемещений их точек приложения или составляющие с этими перемещениями тупые углы, называются силами полезного сопротивления, так как назначение механизма состоит в преодолении действия этих сил (рис. 5.20). Работа этих сил отрицательна.

Силы вредного сопротивления. К ним относят силы трения, возникающие при относительном движении элементов кинематических пар, на преодоление которых расходуется дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления сил полезного сопротивления.

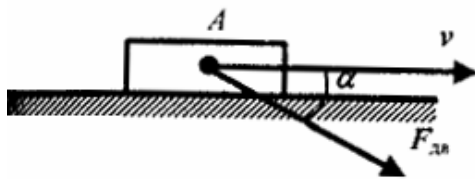


Рис. 5.19. Движущие силы

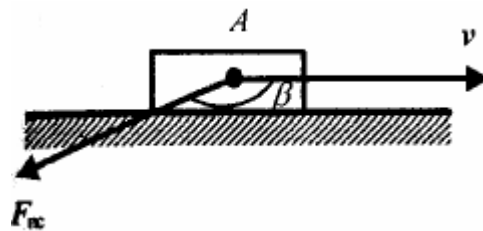


Рис. 5.20. Силы полезного сопротивления

Силы собственного веса звеньев. Работа сил собственного веса может быть положительной, если центр масс звеньев опускается; отрицательной, если он поднимается, и равной нулю, если движется горизонтально. При циклическом движении работа этих сил за цикл равна нулю.

Силы инерции звеньев. Эти силы обусловлены массой и движением звеньев с ускорением. Работа, совершаемая силами инерции, может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

Силы реакций. Под реакцией понимают давление, возникающее в кинематических парах при работе механизма. Касательные составляющие этих реакций (силы трения) отнесены к задаваемым силам.

Изучение влияния сил на движение механизма предполагает знание природы самих сил, а также методов определения условий равновесия звеньев, находящихся под их действием, изложенных выше в темах 2 и 4.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение звена, детали. Что называется механизмом?
2. Какое звено механизма называется стойкой? Какие звенья в механизме называются ведущими, а какие – ведомыми? Какое звено механизма называют рабочим?
3. Что является основными признаками механизма?
4. Что называется кинематической парой? Что понимается под условиями связи?
5. По каким признакам классифицируются кинематические пары? Кинематические пары какого класса имеют наибольшее распространение в механизмах?
6. Дайте определения плоских и пространственных кинематических пар. Какие кинематические пары считаются низшими, а какие – высшими?
7. В чем отличие силовых кинематических пар от замкнутых?
8. Что такое кинематическая цепь? По каким признакам классифицируются кинематические цепи?
9. Что понимается под степенью подвижности механизма?

10. Запишите формулу Малышева.
11. Запишите формулу Чебышева. Для каких механизмов она применяется?
12. Какие связи называются пассивными?
13. При каких условиях кинематическая цепь становится механизмом?
14. Приведите классификацию механизмов по функциональному назначению.
15. Чем отличается редуктор от мультипликатора? Какие механизмы называют передачами?
16. Приведите классификацию механизмов от конструктивных особенностей и способа передачи движения.
17. Дайте определения основных звеньев шарнирно-рычажных механизмов.
18. Приведите область применения шарнирно-рычажных механизмов.
19. Какие механизмы называются фрикционными и приведите область их применения.
20. Дайте определения основных звеньев кулачковых механизмов. Для чего служат кулачковые механизмы?
21. Приведите достоинства и недостатки зубчатых механизмов.
22. Для чего служат винтовые механизмы?
23. Приведите примеры механизмов с гибкими связями.
24. Где находят применение механизмы прерывистого движения?
25. Назовите основные кинематические характеристики механизмов?
26. В чем заключается аналитический метод исследования механизмов?
27. Сформулируйте сущность графического метода исследования механизмов.
28. Что называется планом скоростей и планом ускорений?
29. В чем сущность графоаналитического метода исследования механизмов?
30. Приведите классификацию сил, действующих в механизме.

Литература

1. Сурин, В.М. Прикладная механика / В.М. Сурин. – Мн.: Новое знание, 2005. – 388 с.
2. Вышинский, Н.В. Техническая механика / Н.В. Вышинский. – Мн: ИВЦ Минфина, 2006. – 251 с.
3. Завистовский, В.Э. Прикладная и техническая механика: лабораторный практикум / В.Э. Завистовский, СВ. Якубовская, Л.Г. Кроман. – Новополоцк: ПГУ, 2006. – 103 с.

Тема 6. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

6.1. Основные положения и определения

Основное требование, предъявляемое к любой конструкции, заключается в обеспечении ее надежности, т.е. в безопасности и долговечности при эксплуатации. Для достижения этого требования необходимо, чтобы все элементы конструкции были прочны, жестки и устойчивы.

Наука, рассматривающая вопросы расчета элементов конструкции на прочность, жесткость и устойчивость, называется *сопротивлением материалов*.

В отличие от теоретической механики, где все тела рассматриваются как абсолютно твердые, в сопротивлении материалов учитывается, что элементы конструкций под действием нагрузок изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются, а в некоторых случаях и разрушаются.

Под *прочностью* понимается способность элементов конструкций сопротивляться внешнему воздействию, не разрушаясь. Расчеты на прочность позволяют определить форму и размеры элементов при заданных нагрузках с наименьшей затратой материала.

Под *жесткостью* понимается способность элементов конструкций противостоять образованию деформаций. Расчеты на жесткость показывают, в каких пределах возможно изменение формы и размеров элементов и конструкции в целом при внешнем воздействии.

Устойчивостью называется способность элементов конструкций сохранять определенную начальную форму упругого равновесия. Расчеты на устойчивость предотвращают возможность искривления и внезапной потери устойчивости длинных и тонких элементов.

6.1.1. Классификация внешних нагрузок

Все рабочие элементы конструкций воспринимают *внешние нагрузки* (внешние силы) и передают их действие друг другу. Внешние силы делятся на *объемные* и *поверхностные*.

Объемные силы (отнесенные к единице объема) или *массовые* (отнесенные к единице массы) приложены в каждой точке объема, и, следовательно, непрерывно распределены по объему тела. К ним относятся собственный вес, магнитные силы, силы инерции, центробежные силы и др.

Поверхностные силы – это силы контактного взаимодействия между элементами тела или между элементом и прилегающей средой (вода, воздух, пар, снег и др.).

Они могут быть:

- *непрерывно распределенными по поверхности* (ветровые либо снежные нагрузки, давление жидкости или газа и др.). Их интенсивность измеряется нагрузкой, приходящейся на единицу площади, Па;

- *непрерывно распределенными по линии* (собственный вес балки перекрытия и др.). Их интенсивность измеряется нагрузкой, приходящейся на единицу длины, Н/м;

- *сосредоточенные силы* – те, которые передаются на элемент конструкции через бесконечно малые площадки (действие веса трамвая на рельсы и др.). Их размерность – Н. Из-за очень малых размеров площадки соприкосновения сосредоточенную силу считают приложенной в точке.

По времени действия сил бывают *постоянные* и *временные* нагрузки. *Постоянные* нагрузки действуют на протяжении всего времени работы конструкции (собственный вес). *Временные* нагрузки действуют лишь некоторое время (вес снега, ветровая нагрузка, вес автомобиля, проезжающего по мосту и др.).

По характеру приложения сил во времени различают *статические* и *динамические* нагрузки. *Статические* нагрузки прикладываются к конструкции постепенно, ускорения элементов конструкций при этом отсутствуют, они не меняются или меняются незначительно. Такие нагрузки преобладают в гидротехнических сооружениях. Кроме того, примерами такой нагрузки могут служить кладка фундамента и стен по мере их возведения, снеговая нагрузка на кровлю и т.д.

Динамические нагрузки вызывают ускорения в элементах конструкций. Они подразделяются:

- на внезапно приложенные (нагрузка на мост при прохождении железнодорожного состава);

- на ударные (действие копрового молота на забиваемую им сваю);

- на повторно-переменные и циклические, многократно действующие на элементы конструкций (нагрузка на шатун двигателя, нагрузка на зубья зубчатых колес).

К внешним силам, действующим на элементы конструкций, кроме нагрузок – *активных* сил, относятся также реакции связей – *реактивные* силы.

В процессе эксплуатации аппараты подвергаются воздействию следующих внешних сил:

- внутреннему или наружному давлению;

- нагрузкам от веса трубопроводов и металлоконструкций;

- нагрузкам от усилий, возникающих в трубопроводах при их работе (тепловых и гидравлических);

- нагрузкам от собственного веса и веса изоляции;
- ветровым нагрузкам;
- действию сил инерции при установке в сейсмически неблагоприятных районах;
- нагрузкам, возникающим в результате температурных изменений по длине или высоте аппарата, обусловленных ведением технологического процесса.

6.1.2. Линейные и угловые деформации

Под действием нагрузки конструкция деформируется, т.е. ее размеры и форма изменяются. Рассмотрим, что представляют собой линейные и угловые деформации.

Мысленно через точку a тела в направлениях осей x и y проведем бесконечно малые отрезки ab и ac , длина которых dx и dy (рис. 6.1).

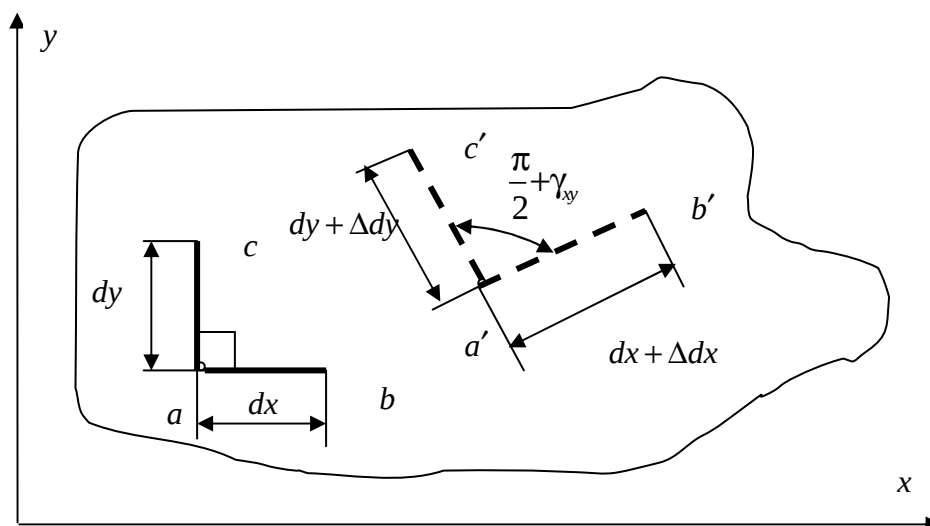


Рис. 6.1. К понятию линейных и угловых деформаций

Обозначим Δdx и Δdy абсолютные изменения длин этих отрезков после приложения нагрузки к телу (когда точки a , b , c переместятся в положения a' , b' , c'). Отношение $\frac{\Delta dx}{dx}$ представляет собой *относительную линейную деформацию* ϵ_x (эпсилон) в точке a , т.е. $\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$. Аналогично

$$\epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \text{ и } \epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Изменение первоначально прямого угла между отрезками ab и ac после приложения нагрузки к телу, выраженное в радианах, представляет собой угловую деформацию γ_{xy} (гамма) в точке a в плоскости xy . Аналогично γ_{yz} и γ_{zx} представляют собой угловые деформации в плоскостях yz и zx .

Деформации конструкции в каждой ее точке по любым направлениям известны, если определены *относительные линейные деформации* ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z в направлениях осей x , y , z прямоугольной системы координат и *угловые деформации* γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} в плоскостях xy , yz , zx .

Относительные линейные и угловые деформации – величины безразмерные. Деформацию ϵ часто называют *относительной линейной деформацией*, а деформацию γ – *относительным сдвигом*.

Совокупность линейных деформаций ϵ по различным направлениям и угловых деформаций γ по различным плоскостям, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой *деформированное состояние* в этой точке.

6.1.3. Основные свойства материалов

Материалы, применяемые при изготовлении элементов конструкций, обладают очень важным свойством: под действием приложенных к ним сил они деформируются, но после удаления внешних сил восстанавливают свою первоначальную форму.

Способность тела восстанавливать свою первоначальную форму после удаления внешних сил называют упругостью, а деформации, исчезающие при этом – *упругими*. Тело называется *совершенно упругим*, если оно полностью восстанавливает свою первоначальную форму. В природе таких материалов не существует, но многие материалы (сталь, дерево и др.) в пределах допустимых нагрузок можно рассматривать как упругие тела.

Тело может и не восстанавливать свою первоначальную форму, если действующие на него силы превысят некоторый предел. В этом случае, после снятия внешней нагрузки в теле появляются, так называемые, *остаточные или пластические деформации*.

Свойство тела получать значительные остаточные деформации, не разрушаясь, называется *пластичностью*. Многие конструкции в эксплуатации испытывают большие нагрузки (оболочка реактора, корпус танкера, фюзеляж самолета и др.), поэтому изучению остаточных деформаций придается особенное значение.

Пластические свойства некоторых конструкционных материалов (алюминий, титан, медь и др.) эффективно используются при изготовлении элементов конструкций методами пластического деформирования.

6.1.4. Допущения и ограничения, принятые в сопротивлении материалов

Реальные тела обладают многообразием физических и механических свойств, а в некоторых случаях и случайными пороками. Для построения теории в сопротивлении материалов прибегают к определенной схематизации явлений, принимают некоторые гипотезы и допущения, которые позволяют при рассмотрении реальной конструкции выделить наиболее существенные ее особенности, а второстепенные отбросить [1, 2]. В результате получают расчетные схемы, которые являются практически общими для большинства инженерных конструкций.

Рассмотрим эти допущения.

– *Гипотеза об однородности и изотропности материала.* Материал предполагается однородным и изотропным, т.е. в любом объеме и в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми.

– *Гипотеза о «сплошности» материала.* Предполагается, что материал полностью заполняет весь объем тела без каких-либо пустот, т.е. тело рассматривается как сплошная среда. Это допущение можно рассматривать как следствие гипотезы об однородности материала.

– *Гипотеза о совершенной (идеальной) упругости материала.* Все тела предполагаются абсолютно упругими, хотя реальные тела обладают упругостью только до определенных величин нагрузок.

– *Гипотеза о малости деформаций.* Деформации малы по сравнению с размерами деформируемого тела.

– *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и напряжениями.* Предполагается, что деформации материала в каждой его точке прямо пропорциональны механическим напряжениям в этой точке. Эта гипотеза носит название *закона Гука*. Она справедлива для большинства материалов, но для каждого из них лишь при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности.

– *Гипотеза плоских сечений.* Поперечные сечения, проведенные в теле, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

– *Принцип независимости действия сил.* Эффект от суммы воздействий равен сумме эффектов от каждого воздействия. В соответствии с этим принципом перемещения и деформации нагруженного тела считаются не зависящими от порядка приложения сил.

– *Принцип Сен-Венана.* В точках тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, внутренние силы весьма мало зависят от способа приложения этих нагрузок.

6.1.5. Внутренние силовые факторы и метод их определения

Под действием внешних сил в твердом теле возникают внутренние силы, стремящиеся восстановить его первоначальную форму и размеры. Величина внутренних сил растет с увеличением деформации до тех пор, пока не уравниваются внутренние и внешние силы. Если не будет равновесия между внутренними и внешними силами, то взаимная связь между частицами твердого тела нарушится и произойдет его разрушение.

Величины внутренних усилий определяются с применением *метода сечений*, суть которого заключается в следующем [1]. Если при действии внешних сил тело находится в состоянии равновесия, то любая отсеченная часть тела вместе с приходящимися на нее внешними и внутренними силами также находится в равновесии, следовательно, к ней применимы уравнения равновесия.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса (рис. 6.2, *а*). Пусть к нему приложена система внешних сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$), удовлетворяющая условиям равновесия, т.е. при действии указанных внешних сил тело находится в состоянии равновесия.

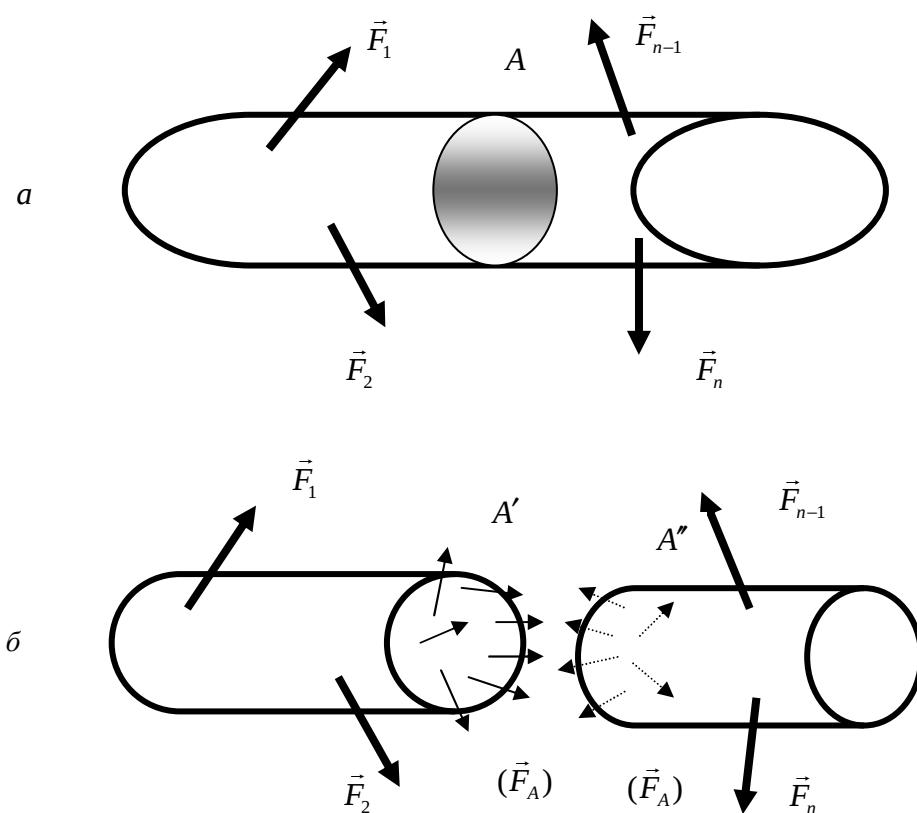


Рис. 6.2. Иллюстрация метода сечений (*а, б*)

Если рассечь брус сечением A на две части и правую часть отбросить, то, т.к. связи между частями тела устранены, необходимо действие правой (отброшенной) части на левую заменить некоей системой внутренних сил ($\vec{F}_A$), действующей в сечении A (рис. 6.2, б).

Обозначим через $F_{лев}$ и $F_{прав}$ суммы внешних сил, приложенных соответственно к левой и правой частям бруса (относительно сечения A), и учитывая, что

$$F_{лев} + F_{прав} = 0,$$

для отсеченных частей бруса получим следующие очевидные соотношения:

$$F_{лев} + F_A = 0; \quad F_{прав} - F_A = 0.$$

Последние соотношения показывают, что равнодействующая внутренних сил $\vec{F}_A$ в сечении A может определяться с равным успехом из условий равновесия либо левой, либо правой частей рассеченного тела. В этом заключается суть метода сечений.

Внутренние усилия должны быть так распределены по сечению, чтобы деформированные поверхности сечения A при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Это требование носит название *условие неразрывности деформации*.

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил ($\vec{F}_A$) к центру тяжести сечения A в соответствии с правилами теоретической механики. В результате получим главный вектор сил $\vec{R}$ и главный вектор момента $\vec{M}$ внутренних сил (рис. 6.3). Далее выбираем прямоугольную систему координат x, y, z с началом координат, совпадающим с центром тяжести сечения A . Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в плоскости сечения. Спроектировав главный вектор сил $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}$ на координатные оси x, y, z , получаем шесть составляющих: три силы N, Q_x, Q_y и три момента M_z, M_x, M_y , называемых *внутренними силовыми факторами* в сечении бруса.

Составляющая N называется нормальной, или продольной силой в сечении. Силы Q_x и Q_y называются поперечными усилиями. Момент M_z называется

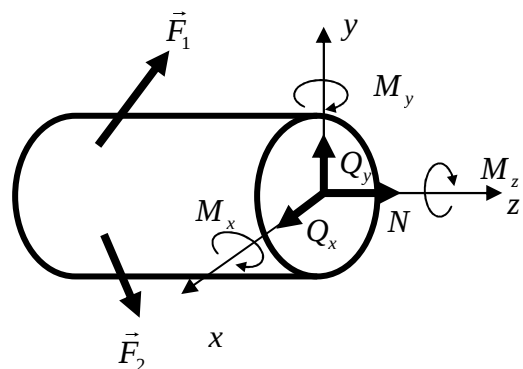


Рис. 6.3. К определению внутренних силовых факторов

крутящим моментом, а моменты M_x и M_y – изгибающими относительно осей x и y , соответственно.

При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов в сечении определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(F_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_y(F_k) = 0; \sum_{k=1}^n M_z(F_k) = 0.$$

Если неизвестные внутренние силы могут быть определены только из уравнений статики, то задачу называют *статически определимой*.

Учитывая важность значения метода сечений, применяемого при изучении всех разделов сопротивления материалов, повторим краткое содержание и последовательность действий:

- рассекаем мысленно тело на две части;
- отбрасываем одну из частей;
- заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями;
- составляем уравнения равновесия статики для оставшейся части.

В общем случае в сечении могут иметь место все шесть внутренних силовых факторов. Однако достаточно часто на практике встречаются случаи, когда некоторые внутренние усилия отсутствуют. Такие виды нагружения бруса получили специальные названия (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Простейшие случаи сопротивления

Вид напряженного состояния	N	Q_x	Q_y	M_z	M_x	M_y
Растяжение / сжатие	+	0	0	0	0	0
Кручение	0	0	0	+	0	0
Чистый изгиб относительно оси x	0	0	0	0	+	0
Чистый изгиб относительно оси y	0	0	0	0	0	+
Поперечный изгиб относительно оси x	0	0	+	0	+	0
Поперечный изгиб относительно оси y	0	+	0	0	0	+
Примечание. – Знак «+» означает наличие усилия; «0» – его отсутствие						

Сопротивления, при которых в поперечном сечении бруса действует один внутренний фактор, условно называются *простыми*. При одновре-

менном действии в сечении бруса двух и более внутренних усилий сопротивление бруса называется *сложным*.

6.1.6. Понятие о напряженном состоянии в точке тела

Внутренние силы распределены по сечению тела сплошным образом и их величина и направление в отдельных точках сечения различны. Для оценки интенсивности внутренних сил в точках сечения тела вводится понятие «напряжение».

Рассмотрим внутренние силы в произвольном поперечном сечении тела, используя метод сечений (рис. 6.4). Выделим малую площадку ΔA . Какой бы эта площадка малой ни была, к ней приложены силы, заменяющие действие отброшенной части. Результирующая внутренних сил, действующих на эту площадку, может быть представлена силой ΔF (рис. 6.4, а).

Тогда отношение $\frac{\Delta F}{\Delta A} = p_{cp}$ выразит силу, приходящуюся в среднем на единицу площадки ΔA . Эту величину называют *средним напряжением* на площадке ΔA .

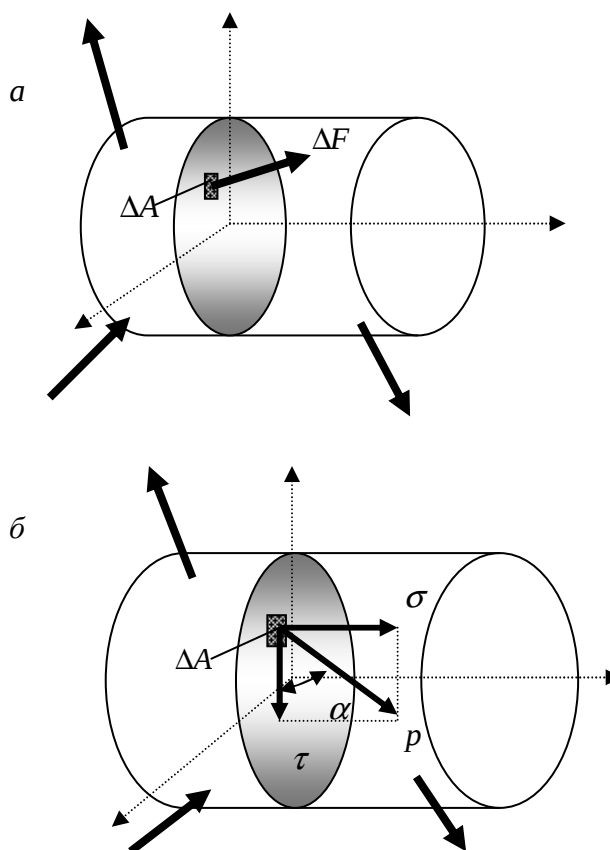


Рис. 6.4. К понятию напряжения:
а – среднее напряжение; б – полное напряжение

При дальнейшем уменьшении площадки ΔA , последняя стягивается в точку. Если взять предел этого отношения при уменьшении площадки ΔA до нуля, то получим напряжение в данной точке сечения:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right). \quad (6.1)$$

Для случая равномерного распределения внутренних сил по сечению напряжение можно определить путем деления равнодействующей внутренних сил на всю площадь сечения:

$$p = \frac{F}{A}.$$

Таким образом, *напряжением в рассматриваемой точке называется величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади сечения*. Напряжение, как и сила, имеет направление, т.е. она есть величина векторная.

Единица напряжения:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{[H]}{[M^2]} = \text{Па (паскаль)}.$$

Поскольку эта единица напряжения очень мала, то применяют более крупную единицу, в частности, мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

Числовые значения напряжения, выраженного в МПа и $\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$, совпадают.

Поскольку, через каждую точку можно провести сколько угодно сечений, может быть определено и множество векторов напряжений в данной точке. В общем случае напряжение p составляет с рассматриваемым сечением некоторый угол α (рис. 6.4, б). Если разложить напряжение p по нормали (перпендикуляру) к площадке ΔA и по направлению плоскости сечения, то получим *нормальное напряжение*, действующее перпендикулярно к данному сечению, и *касательное напряжение*, действующее в плоскости сечения. Напряжение p называется *полным* напряжением.

Нормальное напряжение обозначается греческой буквой σ (*сигма*), а касательное – греческой буквой τ (*тау*). Из рисунка 6.4, б видно, что величины этих напряжений можно вычислить по формулам:

$$\sigma = p \cdot \sin \alpha; \quad \tau = p \cdot \cos \alpha. \quad (6.2)$$

Так как угол между нормальным и касательным напряжениями всегда равен 90° , то модуль полного напряжения p определяется по формуле

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (6.3)$$

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет вполне определенный физический смысл. Нормальные напряжения при растяжении, как силы сопротивления, стремятся воспрепятствовать отделению частиц друг от друга, а при сжатии – сближению их. Касательные напряжения также являются силами сопротивления и препятствуют сдвигу одной частицы тела относительно другой. Таким образом, в поперечном сечении бруса при растяжении, сжатии и чистом изгибе действуют только нормальные напряжения, а при сдвиге и кручении – только касательные напряжения.

6.1.7. Классификация элементов конструкций по их геометрическим признакам

Все конструкции, сооружения, машины и аппараты состоят из элементов различной формы, которые условно можно классифицировать как брус, пластинка, оболочка и массив.

Брусом называется тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других размера в плоскости поперечного сечения. Брус с прямолинейной осью при растяжении или сжатии принято называть *стержнем*, при кручении – *валом*, при изгибе – *балкой*, при расчетах на устойчивость – *стойкой* или *колонной*.

Брусья могут быть прямыми и кривыми. Линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений бруса, называется его *осью*. Вдоль своей оси брус может иметь как постоянное, так и переменное поперечное сечение. Примерами брусьев могут служить валы, болты, штифты, шатуны, шпонки и др. (рис. 6.5).

Пластинкой называется тело призматической формы, высота которого мала по сравнению с размерами основания. Примерами пластинок могут служить мембраны, плоские крышки и днища аппаратов (рис. 6.6), обшивка корабля и др.

Оболочка представляет собой тело, ограниченное криволинейными поверхностями, у которого один из размеров (толщина) значительно меньше двух других размеров. Например, стенки резервуаров и реакторов (рис. 6.7), трубы, кровли современных спортивных и других сооружений, обшивки подводных лодок и др.

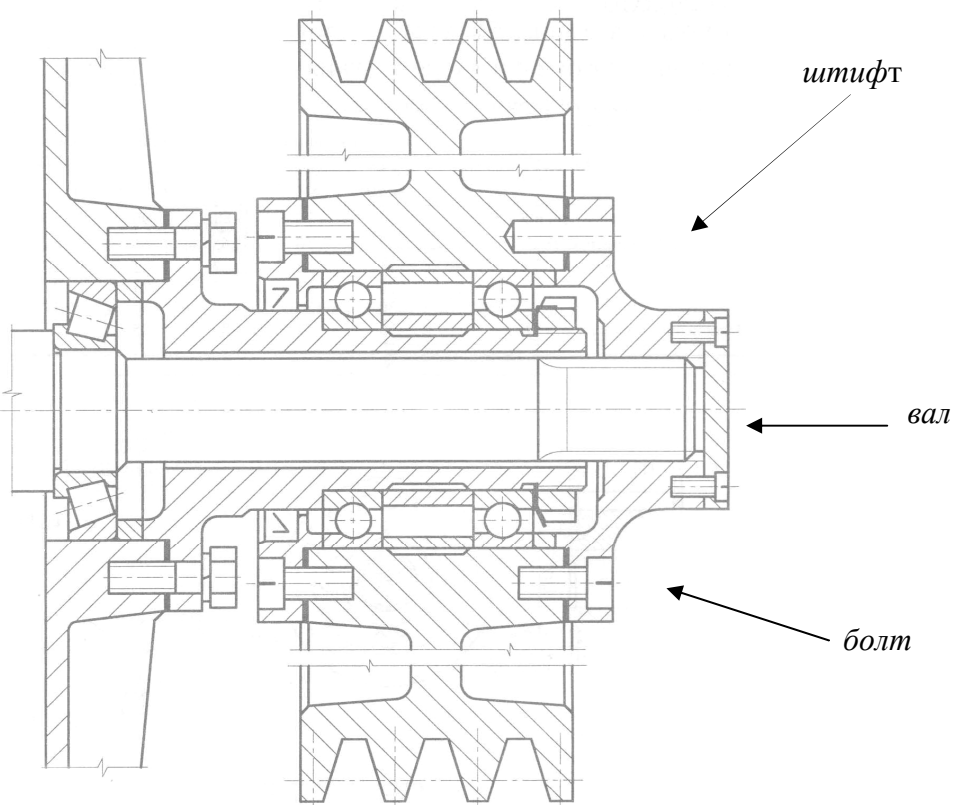


Рис. 6.5. Разгрузочное устройство, включающее вал, болты и штифты

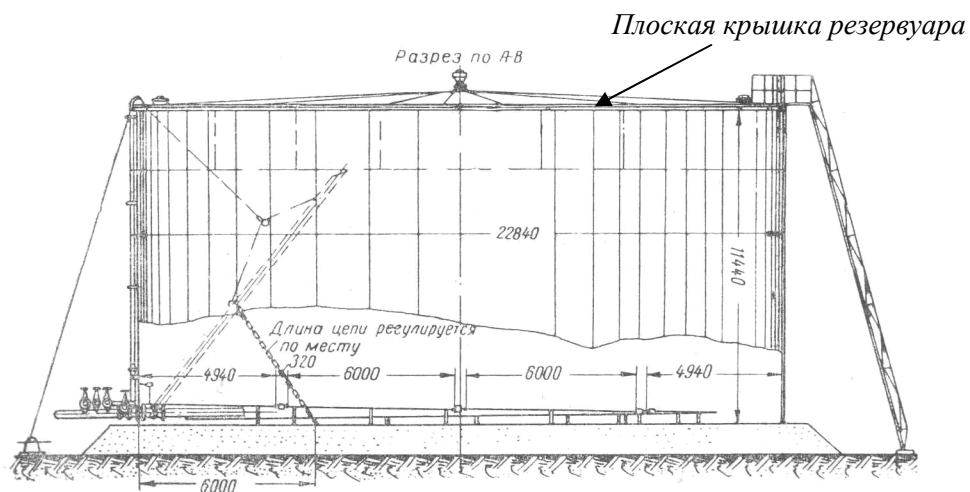


Рис. 6.6. Конструкция вертикального стального резервуара для хранения жидкостей

Массивом принято называть тело, имеющего три больших по величине размера одного порядка, например, фундамент здания, станина металлорежущего станка (рис. 6.8), опора моста и др.

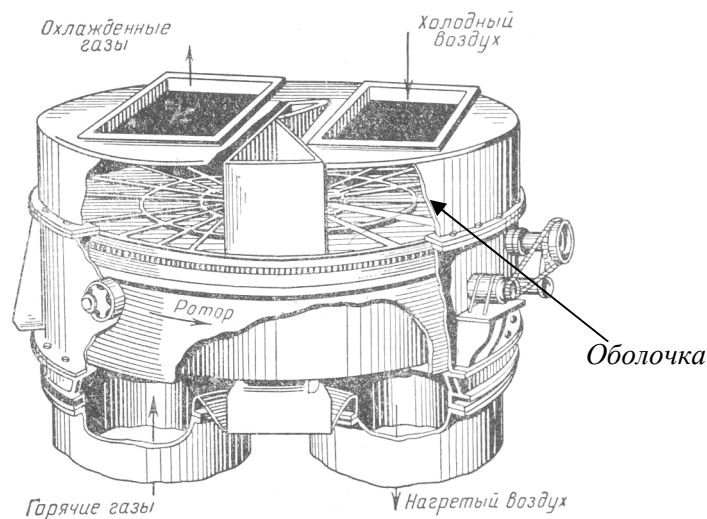


Рис. 6.7. Цилиндрический корпус регенеративного воздухоподогревателя

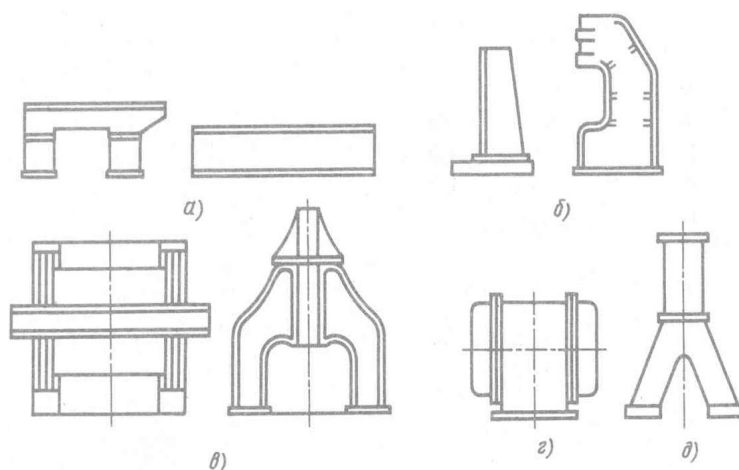


Рис. 6.8. Корпусные детали (массивы): *а* – станины; *б* – стойки; *в* – портальные станины; *г* – кольцевая станина; *д* – блоки цилиндров

6.2. Центральное растяжение и сжатие

Растяжение и сжатие весьма часто встречаются в нагруженных элементах конструкций. Например, растяжение возникает в тросе подъемника, в проводах линий электропередач; сжатие возникает в колоннах, поддерживающих перекрытия зданий, в заводской трубе от собственного веса и т.п.

6.2.1. Продольные силы и нормальные напряжения и их эпюры

В зависимости от способов закрепления бруса и характера воздействия нагрузок могут возникнуть различные виды растяжения и сжатия. Если все внутренние силы в поперечном сечении бруса сводятся только к одно-

му силовому фактору – продольной силе N , а все остальные внутренние силы равны нулю, то имеет место *центральное растяжение* или *сжатие*.

Для определения внутренних сил в поперечных сечениях бруса применяем метод сечений. Сечением $n - n$ мысленно рассечем брус на две части и одну из них, например правую, отбросим (рис. 6.9). Действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренними силами упругости, которые, в данном случае, будут нормальны сечению и могут быть приведены к равнодействующей N , направленной по оси бруса в сторону, противоположную действию внешней силы F .

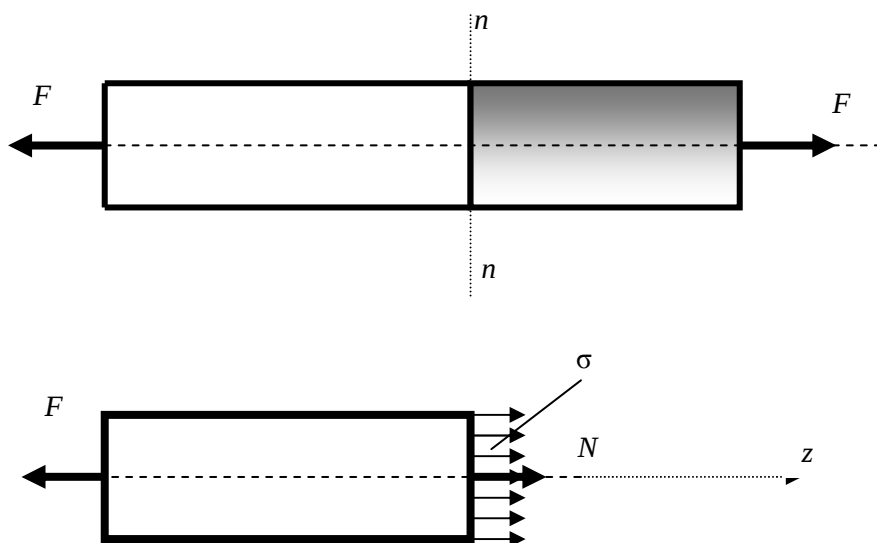


Рис. 6.9. К определению внутренних сил при растяжении

Из условия равновесия оставшейся части бруса получим:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad N - F = 0; \quad N = F.$$

Равнодействующая внутренних нормальных сил упругости в поперечном сечении бруса называется *продольной силой* и обозначается N . Условимся силу N считать положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения) и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

В тех случаях, когда направление силы N неизвестно, целесообразно принять ее положительной. Если при решении уравнения равновесия сила N получится со знаком плюс, то брус в данном сечении будет растянут, если со знаком минус, то сжат.

Закон распределения нормальных напряжений по сечению растягиваемого или сжимаемого бруса устанавливается на основе гипотезы пло-

ских сечений. Сила N является равнодействующей внутренних сил $\sigma \cdot dA$, действующих на бесконечно малые площадки поперечного сечения и равна:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (6.4)$$

Если предположить, что все продольные элементы, на которые можно мысленно разделить брус, находятся в одинаковых условиях и нормальные напряжения на всех площадках поперечного сечения будут распределены равномерно, то получим:

$$N = \sigma \cdot A \text{ и} \\ \sigma = \frac{N}{A}. \quad (6.5)$$

Полученная формула позволяет вычислить напряжение σ по сечениям, перпендикулярным к оси бруса, если известны растягивающая (сжимающая) сила и размеры поперечного сечения. С другой стороны, если задается величина нормальных напряжений σ и известна растягивающая (сжимающая) сила, можно найти необходимую площадь поперечного сечения A .

При действии на брус нескольких внешних сил, приложенных в разных точках по его оси, полезно строить графики, называемые *эпюрами* продольных сил и нормальных напряжений. Они дают наглядное представление об изменении величины продольных сил и нормальных напряжений в поперечных сечениях по длине бруса. Приведем примеры построения эпюр продольных сил N и нормальных напряжений σ .

Пример 6.1. Для прямого бруса, находящегося под действием сил F_1 , F_2 , F_3 построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ . Принять $F_2 = 50\text{кН}$, $F_1 = 40\text{кН}$, $F_3 = 80\text{кН}$, $A = 100\text{мм}^2$. Собственный вес бруса не учитывать (рис. 6.10).

Решение. Условно разбиваем брус на отдельные участки. Границами участков будут сечения, в которых приложены силы и изменяется площадь поперечного сечения. Следовательно, заданный брус имеет четыре участка, которые обозначены на рис. 6.10, *а* римскими цифрами.

Для определения значений продольных сил воспользуемся методом сечений. В границах первого участка проведем условное сечение и отбросим левую часть бруса (рис. 6.10, *б*). К отсеченному сечению оставшейся части бруса приложим продольную силу N_1 , равную сумме внутренних сил в сечении и заменяющую действие отброшенной части бруса на оставшуюся. Составим уравнение равновесия для правой части бруса:

$$\sum Z = 0; \sum Z = F_1 - N_1 = 0; N_1 = F_1 = 40\text{кН}.$$

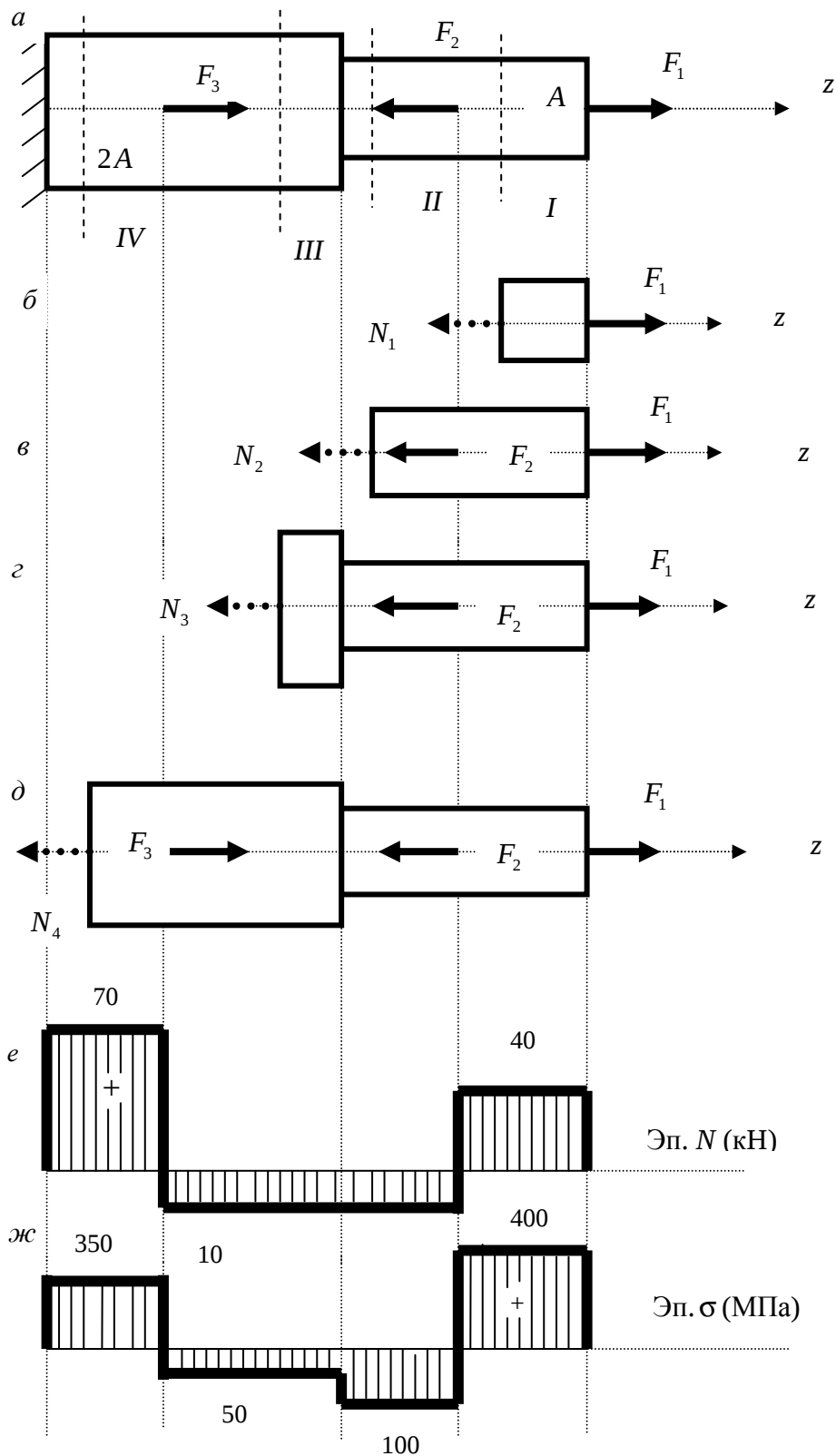


Рис. 6.10. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

Продольная сила N_1 будет растягивающей, так как ее значение положительное.

Очевидно, что тоже значение продольной силы будет в любом сечении участка I, вплоть до сечения, в котором приложена внешняя сила $F_2 = 50 \text{ кН}$.

Отбросим левую часть бруса от произвольного сечения в границах второго участка (рис. 6.10, в), составим уравнение равновесия для оставшейся правой части и вычислим величину продольной силы в этом сечении:

$$\sum Z = 0; \sum Z = F_1 - F_2 - N_2 = 0; N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 50 = -10 \text{ кН}.$$

Сила в этом сечении будет сжимающей, так как ее значение отрицательное.

В сечении, проведенном в границах третьего участка (рис. 6.10, з), значение продольной силы не изменится, так как величина продольной силы не зависит от площади поперечного сечения, а характер приложения внешних нагрузок не изменился. Тогда $N_3 = N_2 = -10 \text{ кН}$.

Соответственно, отбрасывая левую часть бруса в произвольном сечении в границах четвертого участка (рис. 6.10, д), получим величину продольной силы на IV участке:

$$\sum Z = 0; \sum Z = F_1 - F_2 + F_3 - N_4 = 0;$$

$$N_4 = F_1 - F_2 + F_3 = 40 - 50 + 80 = 70 \text{ кН}.$$

Для построения эпюры продольных сил (рис. 6.10, е), проведем линию, параллельную оси бруса (ось эпюры), и отложим, в произвольном масштабе, определенные ранее продольные силы на участках, по перпендикулярам к оси эпюры. Положительные значения откладываем по одну сторону от оси эпюры, отрицательные – по другую сторону. Контур эпюры обводим жирной линией. Построенная эпюра плотно штрихуется тонкими линиями, перпендикулярными оси эпюры. Каждая линия штриховки представляет собой значение величины продольной силы в данном сечении вдоль оси бруса в принятом масштабе.

Теперь определим величину нормальных напряжений в сечении каждого из участков по известной формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

$$\text{На участке I: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{40}{100} = 0,4 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = 400 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 400 \text{ МПа}.$$

$$\text{На участке II: } \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{-10}{100} = -0,1 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = -100 \text{ МПа}.$$

На участке III: $\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{-10}{2 \cdot 100} = -0,05 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = -50 \text{ МПа}.$

На участке IV: $\sigma_4 = \frac{N_4}{2A} = \frac{70}{2 \cdot 100} = 0,35 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} = 350 \text{ МПа}.$

Порядок построения эпюры нормальных напряжений σ аналогичен порядку построения эпюры продольных сил N (рис. 6.10, ж).

Величины N и σ можно вычислять и строить их эпюры, начиная и от крайнего левого сечения бруса, от опоры, предварительно определив реакции в заделке.

Пример 6.2. Для стального бруса квадратного поперечного сечения сжатого силой F с учетом собственного веса (рис. 6.11) требуется:

- составить аналитические выражения для продольных сил N_k , нормальных напряжений σ_k и вычислить их значения для каждого из участков с учетом их собственных весов;
- построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ .

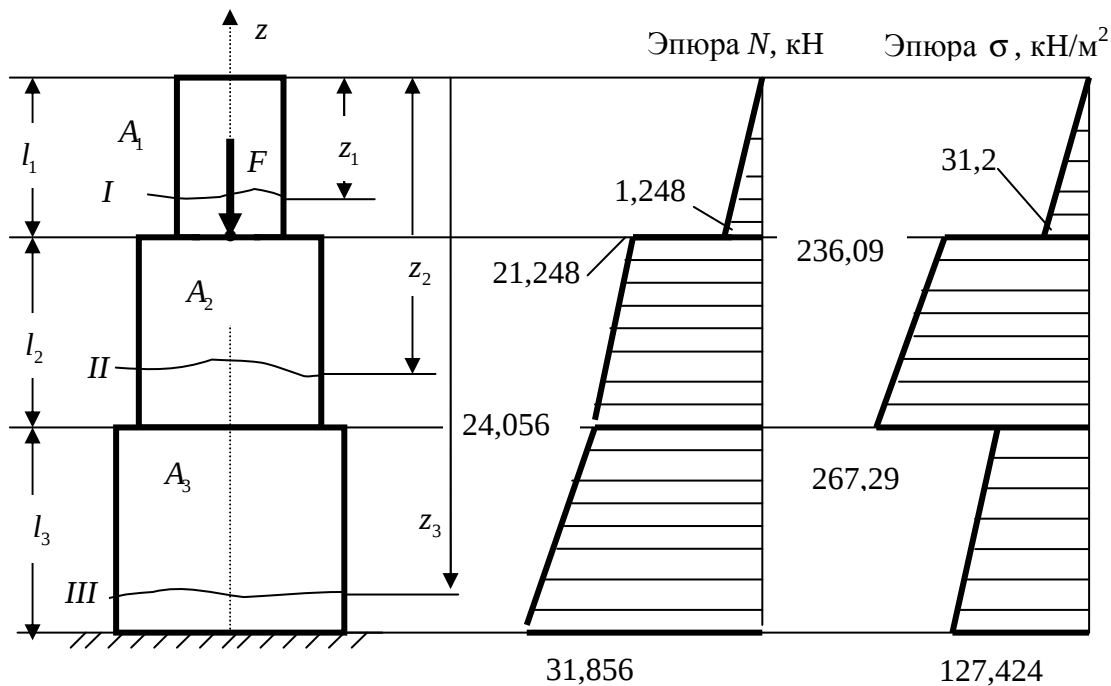


Рис. 6.11. Эпюры продольных сил и нормальных напряжений в сечениях бруса с учетом собственного веса

Принять для расчета: удельный вес стали $\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$; модуль упругости стали

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; F = 20 \text{ кН}; l_1 = l_2 = l_3 = 0,4 \text{ м};$$

$$A_1 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; A_2 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; A_3 = 25 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Решение. Так как продольная сила N зависит от величин внешних сил, в данном случае включающих в себя и собственный вес колонны, а последний, в свою очередь, от размеров поперечного сечения A_k и объемного веса γ , то границами участков следует назначать те сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы и где происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения или объемного веса материалов конструкции [6].

Составим аналитические выражения для продольных сил и нормальных напряжений для каждого из участков, с учетом их собственных весов. Для этого воспользуемся уже известным методом сечений

I участок ($0 \leq z_1 \leq 0,4 \text{ м}$)

Проводим условное сечение I на расстоянии z_1 от свободного конца бруса и рассмотрим равновесие верхней части. При этом к рассматриваемой части прикладывается собственный вес в центре ее тяжести и нормальная сила N_1 , заменяющая действие отброшенной нижней части на рассматриваемую верхнюю. Составим уравнение равновесия рассматриваемой верхней части бруса по оси Z .

$$\sum Z = 0; -N_1 - G_3 = 0; N_1 = -G_3.$$

Собственный вес верхней части бруса определяется следующим образом:

$$G_3 = \gamma \cdot A_1 \cdot z_1 = 78 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 = 312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 \text{ кН}.$$

Тогда выражение для нормальной силы будет иметь вид:

$$N_1 = -312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 \text{ кН},$$

а для нормальных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1}{4 \cdot 10^{-2}} = -78 \cdot z_1 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Так как, N_1 и σ_1 линейно зависят от z_1 , то для построения эпюр достаточно определить значения этих величин на границах участка, т.е.

при $z_1 = 0$ $N_1(0) = 0; \sigma_1(0) = 0;$

$$N_1(0,4) = -312 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 = -1,248 \text{ кН};$$

при $z_1 = 0,4 \text{ м}$

$$\sigma_1(0,4) = -78 \cdot 0,4 = -31,2 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

II участок ($0,4 \leq z_2 \leq 0,8\text{м}$)

Аналогично предыдущему, в границах второго участка, проводим условное сечение на расстоянии z_2 . Составляем уравнение равновесия для верхней оставшейся части бруса. В это уравнение войдут: собственный вес первого участка G_1 ; собственный вес отсеченной части второго участка G_{z2} ; сосредоточенная сила F и искомая сила N_2 .

$$\sum Z = 0; \quad -G_1 - G_{z2} - F - N_2 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N_2 &= -G_1 - F - G_{z2} = \\ &= -78 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 - 20 - 78 \cdot 9 \cdot 10^{-2} (z_2 = 0,4) = 7,02(z_2 + 2,62678) \text{кН}. \end{aligned}$$

Учитывая, что площадь поперечного сечения на втором участке постоянна, выражение для нормального напряжения будет следующим:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -7,02 \frac{z_2 + 2,62678}{9 \cdot 10^{-2}} = -78(z_2 + 2,62678) \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Вычислим значения величин продольной силы N_2 и нормального напряжения σ_2 в граничных сечениях второго участка:

$$\begin{aligned} N_2(0,4) &= -7,02(0,4 + 2,62678) = -21,248 \text{кН}, \\ \text{при } z_2 &= 0,4\text{м} \quad \sigma_2(0,4) = -78(0,4 + 2,62678) = -236,09 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; \\ N_2(0,8) &= -7,02(0,8 + 2,62678) = -24,056 \text{кН}, \\ \text{при } z_2 &= 0,8\text{м} \quad \sigma_2(0,8) = -78(0,8 + 2,62678) = -267,29 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}. \end{aligned}$$

III участок ($0,8 \leq z_3 \leq 1,2\text{м}$)

Аналогично предыдущему, в границах третьего участка, проводим условное сечение на расстоянии z_3 . Составляем уравнение равновесия для верхней части бруса:

$$\sum Z = 0; \quad -G_1 - G_2 - F - G_{z3} - N_3 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} N_3 &= -F - G_1 - G_2 - \gamma \cdot A(z_3 - l_1 - l_2) = \\ &= -20 - 78 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 - 78 \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 - 78 \cdot 25 \cdot 10^{-2} (z_3 - 0,8) = \\ &= -19,5(z_3 + 0,43364) \text{кН}. \end{aligned}$$

Выражение для напряжения:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{19,5(z_3 + 0,43364)}{25 \cdot 10^{-2}} = -78(z_3 + 0,43364) \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Вычислим значения величин продольной силы N_3 и нормального напряжения σ_3 в граничных сечениях третьего участка:

$$\begin{aligned} N_3(0,8) &= -19,5(0,8 + 0,43364) = -24,056 \text{кН}, \\ \text{при } z_3 &= 0,8 \text{м} \end{aligned}$$

$$\sigma_3(0,8) = -78(0,8 + 0,43364) = -96,224 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2};$$

$$\begin{aligned} N_3(1,2) &= -19,5(1,2 + 0,43364) = -31,856 \text{кН}, \\ \text{при } z_3 &= 1,2 \text{м} \end{aligned}$$

$$\sigma_3(1,2) = -78(1,2 + 0,43364) = -127,424 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

По полученным значениям продольных сил и нормальных напряжений строим эпюры N и σ (см. рис. 6.11).

Правильность построения указанных эпюр определяется следующими требованиями:

- скачок на эпюре N должен находиться в точке приложения сосредоточенной силы и равен величине этой силы;
- скачки на эпюре σ должны совпадать с точками приложения внешней силы и изменения площади поперечного сечения бруса.

6.2.2. Продольные и поперечные деформации

Опыты показывают, что при действии растягивающих сил по оси бруса длина его увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. При сжатии же – поперечные размеры стержня почти у всех материалов увеличиваются, а длина стержня уменьшается. Например, при растяжении картину деформирования можно представить следующим образом (рис. 6.12).

Увеличение длины бруса называется *абсолютным удлинением*, а уменьшение ее – *абсолютным укорочением*:

$$\Delta l = l_1 - l, \quad (6.6)$$

где l – первоначальная длина бруса;

l_1 – длина бруса после деформирования.

Абсолютное удлинение (укорочение) измеряется в единицах длины – мм, см, м. При растяжении оно будет положительным, а при сжатии – отрицательным.

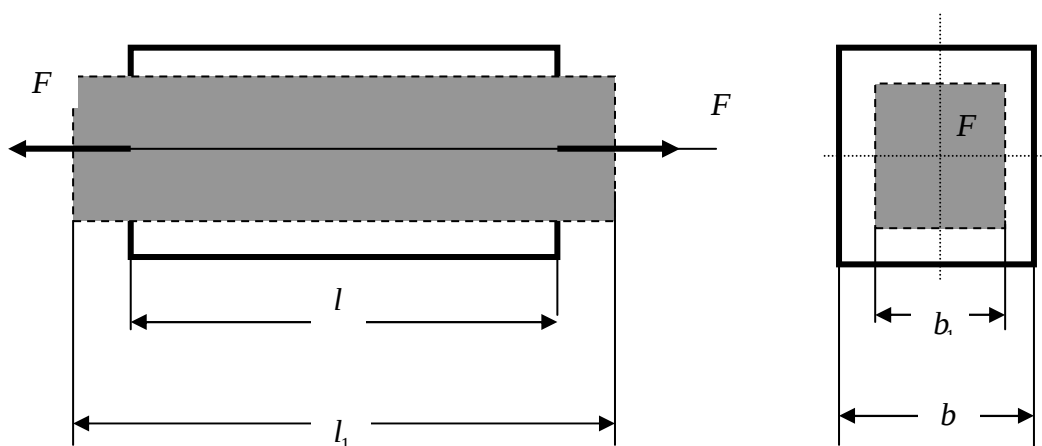


Рис. 6.12. Продольные и поперечные деформации стержня

Величина абсолютного удлинения или укорочения, зависящая от длины бруса, не дает общего представления о значительности продольной деформации. Поэтому за характеристику продольной деформации принимается величина относительной деформации.

Относительным удлинением или *укорочением* называется отношение величины абсолютного удлинения или укорочения к первоначальной длине бруса:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (6.7)$$

При растяжении бруса его размер в поперечном сечении b уменьшается, происходит *сужение*, и он становится равным b_1 . Тогда *абсолютное сужение* бруса в поперечной плоскости будет равно

$$\Delta b = b_1 - b. \quad (6.8)$$

Относительное сужение бруса в поперечной плоскости будет

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (6.9)$$

Частное от деления относительной поперечной деформации на относительную продольную деформацию при осевом растяжении (сжатии), взятое по абсолютной величине, называется *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (6.10)$$

Коэффициент Пуассона показывает, какую часть составляет поперечная деформация от его продольной деформации. Это постоянный физи-

ческий коэффициент, характеризующий упругие свойства материала. Величина μ – безразмерная. Для различных материалов он колеблется от 0 до 0,5. Например, для стали он равен 0,25 – 0,33, для бетона – 0,08 – 0,18, для пробки – 0, а для парафина – 0,5. Значения коэффициента Пуассона постоянны только для изотропных материалов.

6.2.3. Закон Гука

Брусья из различных материалов деформируются неодинаково. Пока растягивающее (или сжимающее) напряжение σ не достигло некоторого определенного для каждого материала предела, брус остается упругим, т.е. его деформации исчезают после удаления растягивающих (или сжимающих) сил. В этих пределах напряжения и деформации связаны между собой определенной зависимостью, которая называется *законом Гука – нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению*:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (6.11)$$

Коэффициент пропорциональности E , неодинаковый для различных материалов и характеризующий упругие свойства материала, называется *модулем упругости первого рода* или модулем Юнга. Модуль упругости и напряжения выражаются в одинаковых единицах (Па). Его значения для некоторых материалов следующее: сталь – $(1,96 - 2,16) \cdot 10^5$ МПа, чугун – $(1,5 - 1,6) \cdot 10^5$ МПа, стеклопластики – $(0,18 - 0,40) \cdot 10^5$ МПа, резина – $0,00008 \cdot 10^5$ МПа.

Представим формулу закона Гука в следующем виде:

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l},$$

откуда абсолютное удлинение (укорочение) будет равно

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (6.12)$$

Следовательно, абсолютное удлинение (укорочение) прямо пропорционально силе и длине бруса и обратно пропорционально модулю упругости и площади поперечного сечения бруса. Из последней формулы видно, что чем больше ее знаменатель, тем менее податлив или тем более жесток брус. Поэтому произведение $E \cdot A$ называют *жесткостью* бруса при растяжении (сжатии).

Закон Гука можно выразить и графически. Для этого по оси абсцисс отложим в некотором масштабе величину относительной деформации ε , а по оси ординат – соответствующее ей напряжение σ (рис. 6.13). Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = E, \quad (6.13)$$

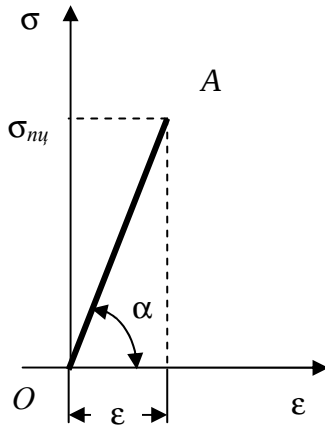


Рис. 6.13. Графическое выражение закона Гука

то есть тангенс угла наклона прямой OA к горизонтальной оси может быть представлен как модуль продольной упругости E . Прямая пропорциональность между напряжением σ и относительной деформацией ε представляется прямой линией OA , графически выражающей закон Гука при одноосном растяжении (сжатии). Однако линейная зависимость между σ и ε сохраняется только до некоторого предельного значения напряжения, называемого *пределом пропорциональности* $\sigma_{нц}$.

6.2.4 Напряжения в наклонных сечениях бруса

Возьмем прямой брус (рис. 6.14), растягиваемый силой F , и определим напряжения в нем по наклонному сечению, составляющему с поперечным сечением угол α . Внешняя нормаль K (перпендикуляр к этому сечению) составит с осью бруса также угол α , который отсчитывается в направлении против хода часовой стрелки от линии действия силы F до нормали к плоскости наклонного сечения.

Рассечем условно брус сечением $m - m$, отбросим верхнюю его часть и заменим действие отброшенной части на нижнюю часть внутренними силами, параллельными оси бруса и равномерно распределенными по всему наклонному сечению. Равнодействующая этих сил будет равна растягивающей силе F .

Обозначим площадь поперечного сечения бруса $n - n$ через A , тогда площадь наклонного сечения $m - m$ будет $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$, а полное напряжение

$$\text{в наклонном сечении} - p = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha.$$

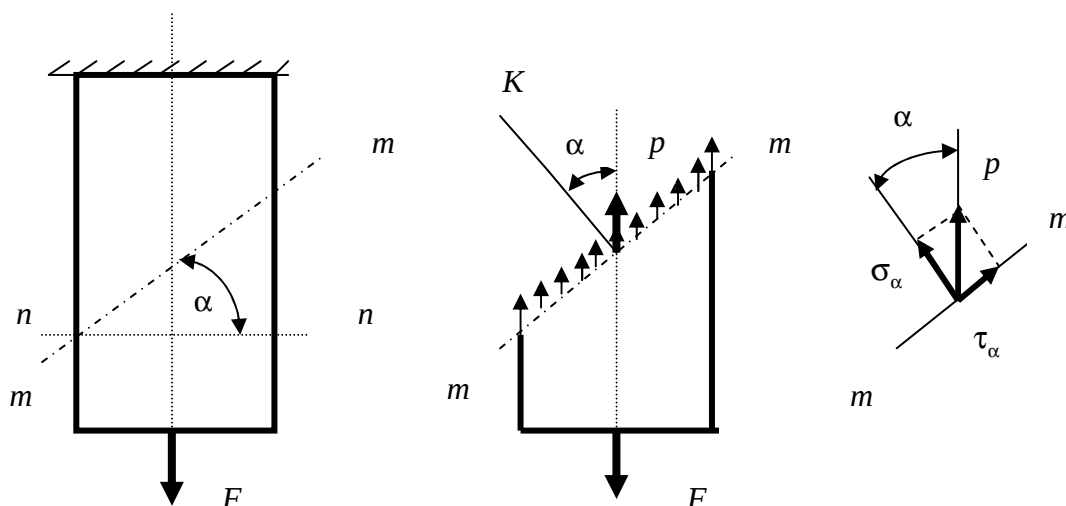


Рис. 6.14. Напряжения в наклонных сечениях бруса

Разложим полное напряжение p в наклонном сечении на составляющие:

- в плоскости $m - m$;
- перпендикулярно к плоскости $m - m$.

Составляющая, нормальная к площадке $m - m$, представляет собой *нормальное напряжение по наклонной площадке* σ_α , а составляющая в самой площадке $m - m$ – *касательное напряжение в наклонной площадке* τ_α .

Величина нормального напряжения

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad (6.14)$$

а величина касательного напряжения

$$\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.15)$$

Наибольшие нормальные напряжения возникают по площадкам, перпендикулярным к оси бруса, а наибольшие касательные напряжения – по площадкам, расположенным под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси бруса и равные половине нормального напряжения, т.е.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}. \quad (6.16)$$

По площадкам, параллельным оси бруса (при $\alpha = 90^\circ$) $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$, т.е. в продольных плоскостях бруса не возникает ни нормальных и касательных напряжений.

6.2.5 Перемещения поперечных сечений бруса

При растяжении или сжатии поперечные сечения бруса перемещаются в направлении оси. Продольная деформация бруса определяется по формуле $\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}$. Но эта формула применима лишь тогда, когда в пределах участка бруса длиной l продольные силы и жесткость EA поперечных сечений бруса постоянны.

Рассмотрим ступенчатый брус, нагруженный растягивающей силой F (рис. 6.15). Определим продольное перемещение δ_k произвольной точки K оси бруса (собственный вес бруса не учитываем). Оно равно абсолютной деформации части бруса OK , заключенного между жесткой заделкой и сечением, проведенным через точку K , т.е. $\delta_k = \Delta l_{ok}$.

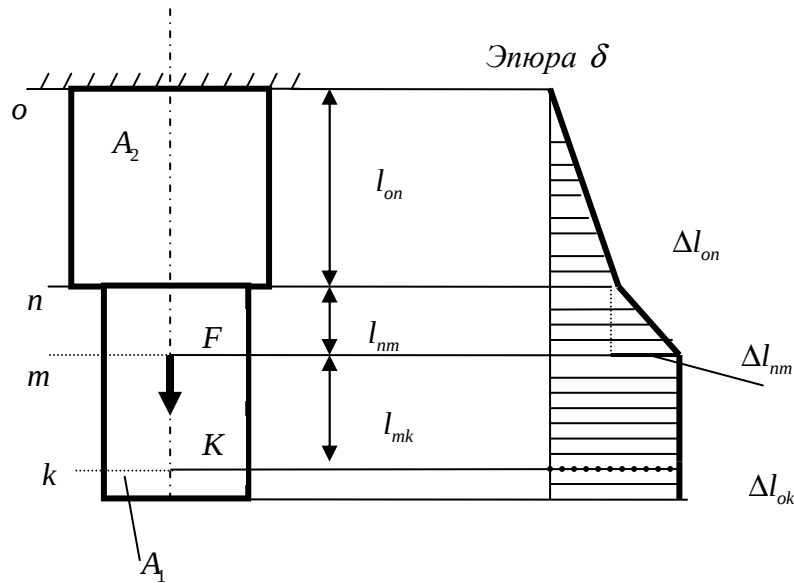


Рис. 6.15. Перемещение сечений бруса

Разобьем брус на три участка on , nm , mk для которых значения продольной силы N и жесткость EA постоянны по всей их длине:

$$\Delta l_{ok} = \Delta l_{on} + \Delta l_{nm} + \Delta l_{mk}.$$

Продольные силы в рассматриваемых участках бруса равны:

$$N_{km} = 0; \quad N_{nm} = N_{on} = F.$$

Абсолютные удлинения участков равны:

$$\Delta l_{mk} = 0; \quad \Delta l_{nm} = \frac{F \cdot l_{nm}}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_{on} = \frac{F \cdot l_{on}}{E \cdot A_2};$$

$$\delta_k = \Delta l_{ok} = \frac{F}{E} \left(\frac{l_{nm}}{A_1} + \frac{l_{on}}{A_2} \right).$$

Аналогично можно определить перемещение δ любых точек оси бруса. График, изображающий изменение продольных перемещений по длине оси бруса (см. рис. 6.15) ., называется *эпюрой перемещений*.

6.2.6. Расчеты на прочность

В результате расчета нужно получить ответ на вопрос, удовлетворяет или нет конструкция тем требованиям прочности и жесткости, которые к ней предъявляются. При этом используют различные критерии при оценке прочности и жесткости. Наиболее распространенным методом расчета деталей машин и элементов конструкций на прочность является *расчет по напряжениям*. В основу этого метода положено предположение, что определяющим параметром прочности конструкции является напряжение. Если необходимо добиться наименьших изменений формы конструкции, то производится расчет по *допускаемым перемещениям*. Кроме указанных методов, расчеты производят по *предельным нагрузкам*, а также используют *вероятностные методы* расчета.

Методы расчета конструкций выбираются в зависимости от условий работы конструкции и требований, которые к ней предъявляются. Для деталей механизмов, машин и аппаратов, по условиям эксплуатации которых допустимы лишь весьма малые упругие деформации, наиболее часто применяется метод расчета по *допускаемым напряжениям*.

Условие прочности по этому методу заключается в том, чтобы наибольшие напряжения в материале конструкции не превышали допускаемого напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (6.17)$$

Из данного условия прочности можно выполнять следующие расчеты:

– *проверочный расчет* выполняется тогда, когда размеры поперечных сечений выбираются из конструктивных соображений и заключается в том, что определяются действующие напряжения в опасных сечениях и сравнивают их с допускаемыми напряжениями для выбранного материала:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]; \quad (6.18)$$

– *проектный расчет* служит для определения безопасных размеров поперечного сечения:

$$A = \frac{N_{\max}}{[\sigma]}; \quad (6.19)$$

– *расчет на грузоподъемность* (определение допускаемой нагрузки) выполняется для определения безопасной для прочности конструкции допускаемой нагрузки:

$$[F] = A \cdot [\sigma]. \quad (6.20)$$

Стержни, испытывающие деформацию сжатия, кроме расчета на прочность, необходимо рассчитывать и на устойчивость.

6.2.7. Статические неопределимые системы с элементами, работающими на растяжение (сжатие)

Статически неопределимыми задачами в сопротивлении материалов называют такие задачи, в которых внутренние усилия нельзя определить, используя только метод сечений. Для их решения необходимо составлять дополнительные уравнения, учитывающие картину деформации механической системы и носящие название уравнения совместности деформаций. Количество таких дополнительных уравнений определяется степенью статической неопределимости системы, которая устанавливается как алгебраическая разность между возможным для данной задачи числом уравнений равновесия статики и числом неизвестных внутренних усилий.

Методику решения таких статически неопределимых задач рассмотрим на примерах [2].

Пример 6.3. Определить продольные силы и построить их эпюру для бруса постоянного поперечного сечения, жестко заделанного двумя концами и нагруженного продольной силой F (рис 6.16, а).

Решение. Отбросим одну из заделок, например, нижнюю и заменим ее действие неизвестной реактивной силой Y_B (рис. 6.16, б).

Составим возможные уравнения равновесия статики. Оно может быть только одно:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \quad Y_A - F + Y_B = 0; \\ Y_A + Y_B &= F. \end{aligned} \quad (6.21)$$

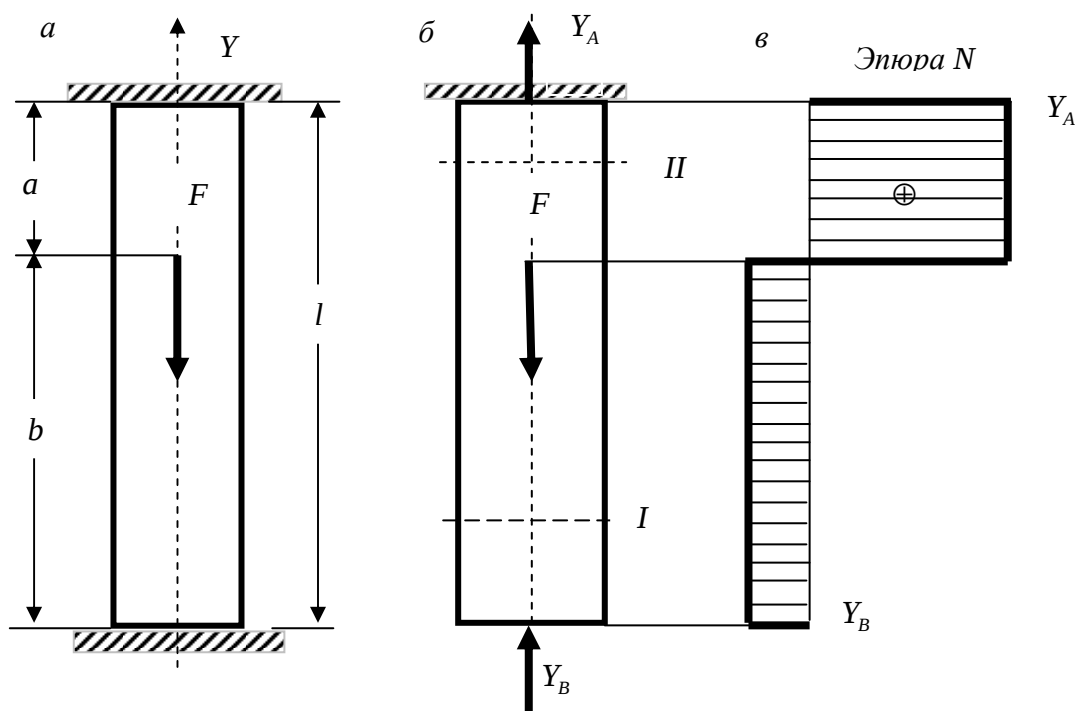


Рис. 6.16. К примеру 6.3: *a* – схема нагружения и закрепления бруса; *б* – схема раскрытия статической неопределенности; *в* – эпюра продольных сил

Уравнение (6.21) содержит два неизвестных усилия Y_A и Y_B , которые невозможно определить из этого уравнения.

Число неизвестных усилий – два, число возможных уравнений статики – одно. Задача является один раз статически неопределимой. Следовательно, необходимо составить дополнительно одно уравнение совместности деформаций. Это уравнение может быть составлено, если представить общую картину деформации бруса, а именно – общая длина бруса не может измениться, т.е.

$$\Delta l = 0. \quad (6.22)$$

Уравнение (6.22) и есть недостающее уравнение совместности деформации.

Общее удлинение Δl можно выразить как сумму удлинений двух участков бруса, длиной b и a , соответственно. Выполнив в пределах указанных участков условные сечения *I* и *II*, получим

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -\frac{N_1 b}{EA} + \frac{N_2 a}{EA} = -\frac{Y_B b}{EA} + \frac{(F - Y_B) a}{EA} = 0.$$

Отсюда можно получить значение неизвестного усилия Y_B :

$$Y_B = F \frac{a}{l}.$$

Из уравнения (6.21) находим второе неизвестное усилие Y_A :

$$Y_A = F \frac{b}{l}.$$

Определив неизвестные усилия, можно легко построить эпюру продольных сил (рис. 6.16, в).

Пример 6.4. Определить напряжения в брусе постоянного поперечного сечения, жестко заделанного двумя концами (рис. 6.17, а), при равномерном нагреве всего бруса на температуру Δt .

Решение. На основании гипотезы об однородности и изотропности материала, при повышении температуры брус стремится удлиниться и оказывает давление на жесткие заделки, в которых возникают равные по величине и противоположно направленные реакции. Отбросим одну из заделок, например, правую (рис. 6.17, б). Тогда брус свободно удлинится на величину

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t, \quad (6.23)$$

где α – коэффициент линейного расширения материала бруса.

Оказывая давление на заделки, в брусѣ возникают внутренние силы N , равные опорным реакциям. Под действием этих сил брус должен сократиться на ту же величину, т.к. длина между заделками не может измениться, т.е.

$$\Delta l_N = \Delta l_t. \quad (6.24)$$

Уравнение (6.24) представляет собой уравнение совместности деформаций.

Тогда

$$\Delta l_N = \frac{Nl}{EA} = \alpha l \Delta t,$$

отсюда

$$N = \alpha \Delta t EA.$$

Нормальные температурные напряжения будут равны

$$\sigma_t = \frac{N}{A} = \alpha \Delta t E. \quad (6.25)$$

Так как материалы, применяемые для изготовления нефтеаппаратуры, работают в условиях повышенных температур, то при проектировании элементов конструкций (статически неопределимых систем) необходимо учитывать и дополнительные температурные напряжения.

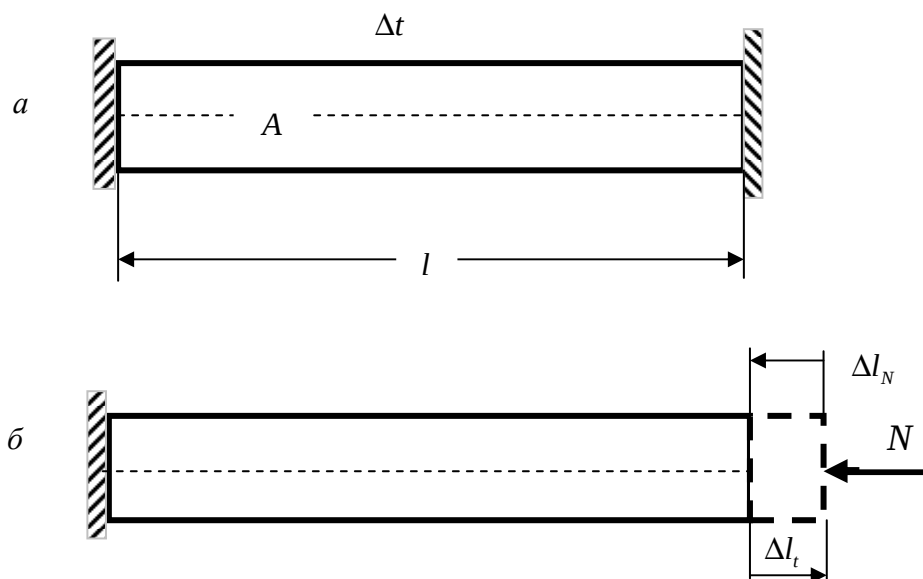


Рис. 6.17. К примеру 6.4 : *a* – схема бруса;
б – схема раскрытия статической неопределимости

6.3. Испытания материалов

6.3.1. Материалы, применяемые при изготовлении нефтеаппаратуры

Выбор материалов. Выбор материалов для изготовления нефтезаводской аппаратуры и оборудования определяется рядом факторов [8], которые можно разделить на две группы:

- зависящие от внешних рабочих условий;
- связанные со свойствами данного материала.

К факторам *первой группы* относятся температура, давление и свойства среды.

Температура влияет на механические свойства материала. При повышении температуры ухудшаются механические свойства металлов. Например, при температуре выше 500°C механические свойства углеродистых сталей настолько снижаются, что применение их становится нерациональным. Механические свойства легированных сталей при повышении температуры ухудшаются менее резко, поэтому их используют в этих условиях. При повышении температуры интенсифицируются коррозионные явления. Так, высокотемпературная сернистая коррозия становится заметной, начиная с температуры 250°C . Снижение температуры также вызывает изменение механических свойств материалов.

При повышенных давлениях предъявляют более жесткие требования к качеству стали. Например, углеродистые стали обыкновенного качества

разрешается применять для аппаратов, работающих под давлением до 5 МПа, при больших давлениях следует использовать стали с лучшими механическими свойствами. Увеличение давления обычно приводит к интенсификации коррозии.

При выборе материалов необходимо учитывать коррозионное и эрозийное воздействие среды. В ряде случаев, особенно в процессах нефтехимических производств, в условиях агрессивных сред целесообразно применять неметаллические материалы.

Ко второй группе факторов относятся физико-механические и технологические свойства материалов.

Наиболее важными характеристиками механических свойств при выборе материалов являются предел прочности или временное сопротивление σ_b , предел текучести σ_m , относительное удлинение δ , относительное сужение ψ , модуль упругости при растяжении E (модуль продольной упругости), коэффициент Пуассона μ , ударная вязкость a_n .

Кроме указанных механических характеристик, при выборе сталей для изготовления элементов аппаратуры, работающих при повышенных температурах, необходимо знать такие свойства, как ползучесть и длительная прочность материала, склонность к тепловой хрупкости, релаксации, чувствительность к старению, стабильность структуры, а для аппаратуры, работающей при пониженных температурах – склонность к хладноломкости.

Большая часть аппаратов на нефтеперерабатывающих заводах работает при повышенных температурах. Изменение механических свойств сталей при повышенных температурах следует учитывать при выборе допускаемых напряжений. Так, при повышении температуры предел текучести сталей падает, а поскольку рабочие напряжения не должны превышать предел текучести, и их выбирают с определенным запасом, то при повышении температуры допускаемые напряжения уменьшают.

Изменение механических свойств различных углеродистых сталей с содержанием углерода до 0,4 % при повышенных температурах носит примерно одинаковый характер и может быть представлено в относительных единицах (табл. 6.2).

Как видно из табл. 6.2 предел прочности с ростом температуры изменяется, увеличиваясь на 20 % при температуре 200 °С и падая при дальнейшем увеличении температуры до 60 % при 500 °С. Следует отметить, что увеличение прочности при 200 °С в расчет не принимают.

Таблица 6.2

**Механические свойства (%) углеродистых сталей
с содержанием углерода до 0,4%**

Температура, °С	σ_s	σ_m	δ	ψ	E	a_n
20	100	100	100	100	100	100
100	100	95	80	95	98	110
200	120	85	55	80	95	115
300	115	70	80	90	90	110
400	90	58	100	100	85	85
500	60	40	110	110	75	60

Поведение сталей при повышенных и пониженных температурах.

При воздействии высоких температур в условиях напряженного состояния в сталях возникают ползучесть и релаксация, протекающие с различной интенсивностью в зависимости от химического состава стали, ее структуры, внутренних напряжений, температуры и др. Некоторые стали проявляют склонность к нарушению стабильности структуры.

Ползучестью называют способность стали медленно, непрерывно, пластически деформироваться под действием постоянной нагрузки при высоких температурах. Испытания на ползучесть проводят в специальных электропечах, где образец выдерживают длительное время при определенной температуре под действием постоянной нагрузки. При испытании измеряют деформацию образца. По результатам испытаний вычисляют скорость ползучести.

Относительной скоростью ползучести называют скорость деформации образца в мм/(мм·ч):

$$v_n = \frac{\Delta l}{l\tau}, \quad (6.26)$$

где Δl – абсолютная деформация образца;

l – расчетная длина образца;

τ – время.

При небольших напряжениях (кривая 1) пластические деформации с течением времени затухают (рис. 6.18). При высоких напряжениях (кривая 2) процесс ползучести разделяют на три стадии – I, II и III: ab – участок начальной ползучести, которая появляется непосредственно за упругой деформацией образца – скорость пластической деформации изменяется от начального максимального значения до постоянной величины ($v_n \rightarrow \text{tg}\alpha$); bc – участок с постоянной скоростью ползучести ($v_n = \text{tg}\alpha$); cd – участок

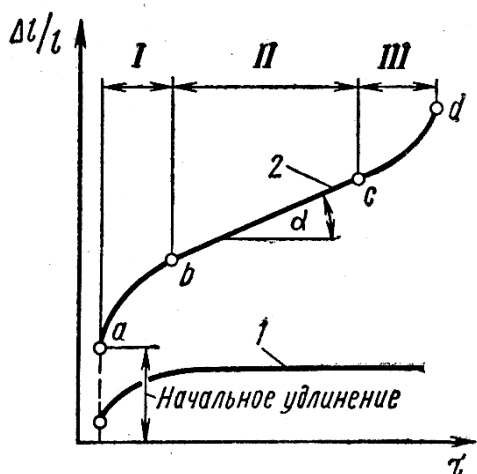


Рис. 6.18. Кривые ползучести

для выбора значения допускаемого напряжения является *предел длительной прочности*. Пределом длительной прочности называют отношение к начальной площади поперечного сечения образца нагрузки, под действием которой образец доводится до разрыва за определенный промежуток времени при заданной температуре.

Релаксацией называют самопроизвольное снижение напряжений при высокой температуре в образцах или деталях при их неизменной деформации. Релаксация, например, характерна для болтов или шпилек различных напряженных соединений, пружин предохранительных клапанов, работающих при высокой температуре.

Явления релаксации и ползучести различаются тем, что при релаксации общая деформация детали постоянна, а напряжение в ней падает, в то время как при ползучести напряжение постоянно при непрерывно нарастающей деформации.

Явление релаксации заключается в перерастании упругой деформации ϵ_y в пластическую ϵ_n при неизменной общей начальной деформации ϵ_0 , т. е. закон релаксации можно записать в виде

$$\epsilon_0 = \epsilon_y + \epsilon_n. \quad (6.27)$$

При выборе материалов для работы в условиях таких процессов, как, например, депарафинизация масел, сернокислотное алкилирование, низкотемпературная ректификация газов, которые ведут при температурах ниже нуля, необходимо знать механические свойства материалов в области пониженных температур.

С понижением температуры для сталей предел прочности, предел текучести и модуль упругости возрастают; относительное удлинение и отно-

конечной ползучести до момента разрыва в точке d , характеризующийся обычно ростом скорости ползучести.

Для углеродистых сталей явление ползучести необходимо учитывать при температуре выше 380°C , для легированных сталей — выше 420°C , для высоколегированных хромоникелевых сталей — выше 525°C .

В случаях, когда общая деформация ползучести незначительна, а деталь работает под напряжением при высокой температуре, определяющей величиной

сительное сужение уменьшаются незначительно, а ударная вязкость резко уменьшается. Явлению падения ударной вязкости (хладноломкости) подвержены как углеродистые, так и легированные стали.

6.3.2. Классификация испытаний

Характер нагружения и условия работы деталей нефтеаппаратуры и элементов конструкций весьма разнообразны. В связи с этим, и при механических испытаниях образцы материалов, по возможности, должны подвергаться тем же внешним воздействиям, что и в производстве. Полученные при этом механические характеристики свойств материалов условны, так как они зависят от условий испытаний. С целью получения сопоставимых данных виды испытаний классифицируют по следующим признакам.

По виду нагружения:

- статические;
- динамические;
- испытания на выносливость.

По характеру воздействия:

- кратковременные;
- длительные.

По виду деформации:

- испытания на растяжение;
- испытания на сжатие;
- испытания на сдвиг;
- испытание на кручение;
- испытание на изгиб;
- испытания в условиях сложного напряженного состояния.

По температурному режиму:

- при нормальной температуре (200 °С);
- при высоких температурах;
- при низких температурах.

По наличию агрессивной среды:

- в нейтральной среде;
- в агрессивной среде.

Специальные испытания.

Испытания деталей нефтеаппаратуры и элементов конструкций проводят:

- на экспериментальных установках, позволяющих испытывать относительно дешевые образцы, ускорять режимы и проводить точные измерения;

- в натурных узлах, позволяющих выполнять испытания в условиях, близких к эксплуатационным.

Среди экспериментальных методов исследования деформаций и напряжений, возникающих в материалах, широко используются следующие:

- *метод тензометрии*, состоящий в замере малых деформаций в отдельных точках с последующим переходом к напряжениям с использованием закона Гука;

- *метод лаковых покрытий*, применяемый для выявления общего распределения деформаций и напряжений, а также для определения наиболее нагруженных зон поверхности детали;

- *поляризационно-оптический метод*, основанный на интерференции света, прошедшего модель из прозрачного оптически чувствительного материала;

- *рентгеновский метод* позволяет определить упругие деформации в металлах с кристаллической решеткой;

- *метод полос муара* применим для исследования напряженного состояния на деталях плавных форм, в частности, листовых.

Материалы по их механическим качествам можно разделить:

- на *пластичные*, разрушение которых происходит только при больших остаточных деформациях. К таким материалам можно отнести медь, алюминий, бронзы, мягкую углеродистую сталь и др.;

- на *хрупкие*, разрушение которых происходит уже при малых остаточных деформациях. К ним относят закаленную сталь, чугун, стекло, бетон и др.

Условно материал считается пластичным, если его относительное удлинение превышает 5 %, хрупким – если это удлинение менее 5 %.

Хрупкие материалы разрушаются, главным образом, в результате нарушения сопротивления отрыву между частицами, пластичные материалы – вследствие нарушения сопротивления сдвигу.

В отдельных случаях хрупкие материалы могут находиться в пластичном состоянии и наоборот. Например, мягкая углеродистая сталь при наличии надрезов, иногда ведет себя как хрупкий материал, а при отсутствии надрезов – как пластичный материал. Та же сталь обладает хорошими пластичными свойствами при нормальной температуре, а при низких температурах она приобретает хрупкие свойства.

6.3.3. Диаграммы растяжения

Для подробного изучения поведения различных материалов под нагрузкой производятся лабораторные испытания образцов, изготовленных из этих материалов, на специальных испытательных машинах. Эти испытания проводятся для определения числовых характеристик, позволяющих оценить прочность и пластичность материала. Такие характеристики называют *механическими* [9].

Вид образцов и методы испытаний регламентированы государственными стандартами. При этом получают диаграмму растяжения $F = f(\Delta l)$. Исключив влияние размеров образца путем деления силы на начальную площадь, а удлинения – на начальную длину образца, получим диаграмму деформирования $\sigma = f(\epsilon)$. Типичная диаграмма деформирования при растяжении приведена на рис. 6.19.

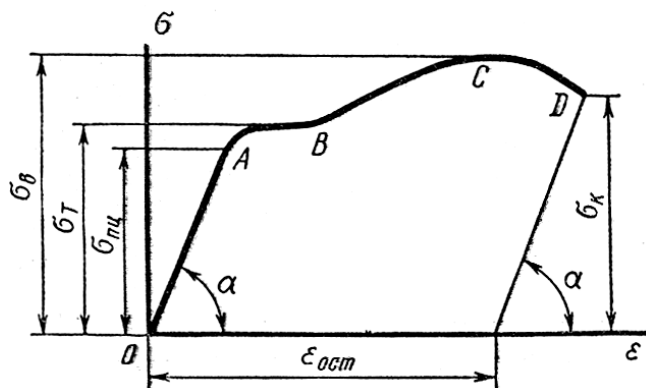


Рис. 6.19 Типичная диаграмма деформирования пластичного материала при растяжении

На диаграмме выделяются характерные участки:

- OA – участок пропорциональности;
- AB – участок текучести;
- BC – участок упрочнения;
- CD – участок местной пластической деформации (образование «шейки»).

На участке ABC деформации равномерны. Разрушение происходит в точке D . Соответствующие этим характерным участкам значения напряжений называют: $\sigma_{пл}$ – предел пропорциональности; σ_T – предел текучести; σ_v – предел прочности; σ_k – напряжение в момент разрушения.

Пределом пропорциональности $\sigma_{пл}$ называется наибольшее напряжение, при котором справедлив закон Гука.

Пределом текучести σ_T называется напряжение, при котором деформации растут без увеличения нагрузки.

Соответственно горизонтальный участок диаграммы называют площадкой текучести.

Пределом прочности (или временным сопротивлением) σ_b называется отношение наибольшей нагрузки, выдерживаемой образцом, к первоначальной площади его поперечного сечения.

Эти напряжения являются условными, так как при их вычислении не учитывают изменения поперечных размеров за счет эффекта Пуассона.

Если материал не имеет выраженной площадки текучести (среднеуглеродистая сталь, медь, дюралюмин), то предел текучести назначается по допуску на пластические деформации. Наиболее распространенным значением предела текучести, в этом случае, является $\sigma_{0,2}$, где 0,2 означает, что остаточная деформация равна 0,2%. При повторном нагружении кривая деформирования идет, как показано на рис. 6.20.

Наблюдаемое повышение предела текучести называется упрочнением или наклепом. Указанная способность материалов повышать сопротивление после предварительной пластической деформации широко используется для упрочнения деталей (стальная арматура и др.).

На рисунке 6.21 показан для сравнения вид диаграмм растяжения сталей с различным содержанием углерода. Из рисунка видно, что с повышением процента содержания углерода увеличивается прочность стали и уменьшается ее пластичность.

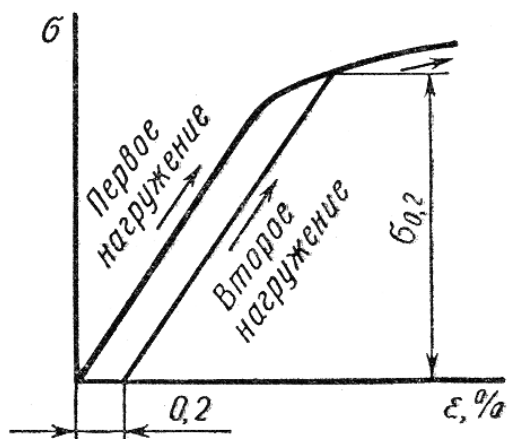


Рис. 6.20. Определение предела текучести по диаграмме деформирования при заданном допуске на остаточную деформацию

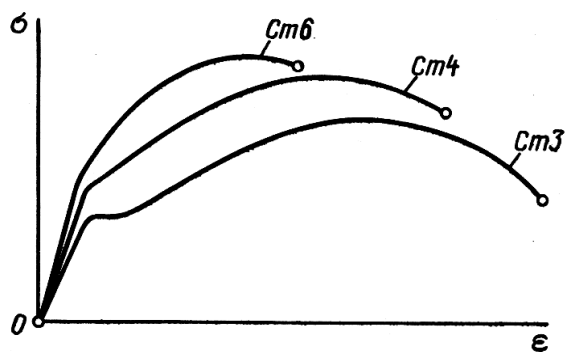


Рис. 6.21. Сравнительные диаграммы растяжения сталей, с разным содержанием углерода

Хрупкие материалы, например чугун, характерны тем, что их разрушение происходит при очень малых остаточных деформациях. На рисунке 6.22 приведены диаграммы растяжения различных материалов. В частности, для чугуна (СЧ), видно, что уже даже в начальной стадии растяжения обнаруживается отклонение от закона Гука. При расчетах это отклонение не учитывают.

Пределы пропорциональности $\sigma_{пц}$, текучести σ_T и прочности σ_b называют *характеристиками прочности* материала, так как они характеризуют его прочность. В качестве *характеристик пластичности* используют относительное удлинение и относительное сужение, так как они характеризуют деформационную способность материала, доведенного до разрушения:

$$\delta = \frac{\Delta l}{l} \%;$$

$$\psi = \frac{\Delta A}{A} \%.$$
(6.28)

С повышением температуры характер диаграммы растяжения углеродистой стали изменяется: явление текучести становится менее явным (рис. 6.23) и при температуре примерно 300 °С площадка текучести исчезает [8]. В этом случае свойства оценивают по так называемому условному пределу текучести, который определяют как напряжение, вызывающее заданную степень остаточной деформации (обычно 0,2 %). Предел текучести и предел прочности при нормальной температуре для низкоуглеродистых сталей связаны соотношением $\sigma_T = (0,55 - 0,60) \sigma_b$.

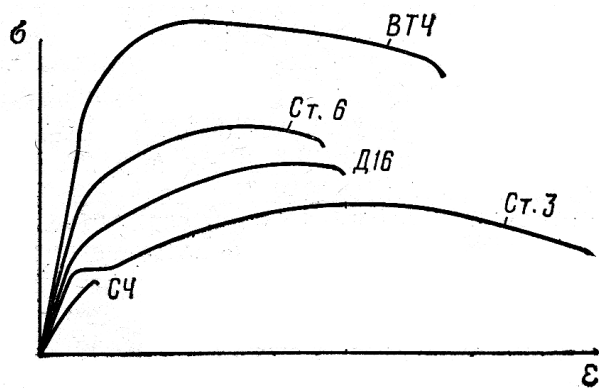


Рис. 6.22. Диаграммы растяжения различных материалов

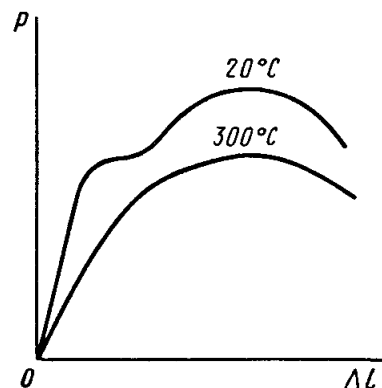


Рис. 6.23. Диаграмма растяжения стали (P — сила; Δl — деформация)

При повышении температуры предел текучести падает в большей степени, чем предел прочности, поэтому допускаемое напряжение следует выбирать с учетом предела текучести.

Характер изменения пластических свойств стали (относительного удлинения δ и относительного сужения ψ) при повышении температуры противоположен изменению предела прочности. С ростом температуры δ и ψ вначале уменьшаются одновременно с некоторым увеличением предела прочности, а затем увеличиваются; сталь становится более пластичной, чем при нормальных условиях.

Характеристика упругих свойств стали – модуль упругости при растяжении и сдвиге – с повышением температуры падает (табл. 6.3), а коэффициент Пуассона увеличивается.

Таблица 6.3

Модуль упругости при растяжении E

Сталь	Значения $E \cdot 10^{-5}$, МПа, при температуре °С				
	20	100	250	450	550
Углеродистая	1,99	1,91	1,76	1,40	--
Легированная аустенитного класса	2	2	1,94	1,75	1,61

Значения модуля упругости материала при различных температурах, в частности, необходимы при определении температурных напряжений в элементах аппаратуры, расчете на устойчивость формы аппаратов и их частей и в других случаях.

Твердость материала тесно связана с такими основными характеристиками металлов и сплавов, как прочность, износостойкость и является важной характеристикой металла.

Твердость (Н) – способность материала оказывать сопротивление проникновению в него другого, более твердого тела. При вдавливании в материал инородного тела возникают местные пластические деформации, сопровождающиеся при дальнейшем увеличении нагрузки местным разрушением. Показатель твердости непосредственно связан с показателями прочности и пластичности. Твердость материала тесно связана также с его обрабатываемостью: чем тверже материал, тем хуже он обрабатывается. От твердости зависит и износостойкость.

Существует несколько методов определения твердости. Выбор метода зависит от твердости испытуемого материала, толщины, размеров и формы изделия.

Метод Бринелля заключается в том, что шарик из закаленной стали, под действием нагрузки F вдавливается в зачищенную поверхность образца. *Числом твердости по Бринеллю* называется отношение нагрузки F к

площади сферического отпечатка A , т.е. $\frac{F}{A}$. Твердость по Бринеллю обозначается цифрами, характеризующими число твердости, и буквами НВ (например, 180НВ где 180 – число твердости, $\frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} \cdot \text{НВ}$ – твердость по Бринеллю).

Имеются таблицы перевода диаметра отпечатка в число твердости НВ. Чтобы исключить деформацию изгиба, минимальная толщина испытуемого образца должна быть не менее десятикратной глубины отпечатка. Методом Бринелля испытывают материалы с твердостью до 450НВ. Этим методом нельзя определить твердость пленок.

Измерение твердости по *методу Роквелла* производится вдавливанием стандартного алмазного конуса или стального стандартного шарика в образец под действием двух последовательно приложенных нагрузок: предварительной и общей, равной сумме предварительной и основной нагрузок. Для определения числа твердости применяют три шкалы. Шкала *B* соответствует вдавливанию шарика для мягких металлов и сплавов, и число твердости обозначается HRB. Для более твердых материалов применяются шкалы *A* и *C*, соответствующие вдавливанию алмазного конуса. По шкалам *A*, *B* и *C* устанавливаются следующие пределы измерения твердости: шкала *A* – 70 ... 85 ед. (твердые сплавы и др.); шкала *C* – 20 ... 67 ед. (термообработанная сталь); шкала *B* – 25 ... 100 ед. (мягкие сплавы).

В определенном интервале чисел твердости имеет место следующее отношение между твердостью по Бринеллю и Роквеллу: $1\text{HRC} \approx 10\text{НВ}$.

Метод Виккерса заключается во вдавливании в испытуемый материал правильной четырехгранной алмазной пирамиды. Число твердости по Виккерсу вычисляется путем деления нагрузки на площадь поверхности пирамидального отпечатка. Твердость по Виккерсу обозначается буквами НV и цифрами, характеризующими число твердости.

Числа твердости по Виккерсу НV и по Бринеллю НВ имеют одинаковую размерность и для материалов твердостью до 450 НВ практически совпадают.

Пластмассы испытывают большей частью на растяжение. У некоторых пластмасс предел прочности выше, чем у стали 3, но характеристики пластичности у них невелики. Некоторые пластмассы в местах наибольшей деформации меняют свой первоначальный цвет, и это позволяет судить о наиболее напряженных участках при испытании образцов сложной конфигурации [2].

На рисунках 6.24 и 6.25 приведены диаграммы растяжения некоторых пластмасс.

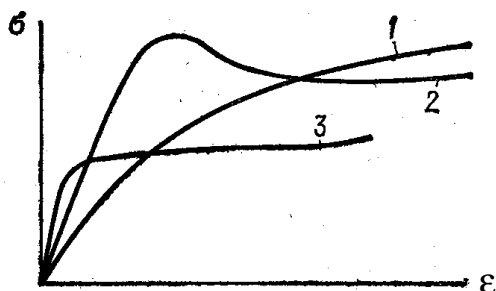


Рис. 6.24. Диаграммы растяжения термопластов: 1 – полиэтилен; 2 – полипропилен; 3 – поливинилхлорид

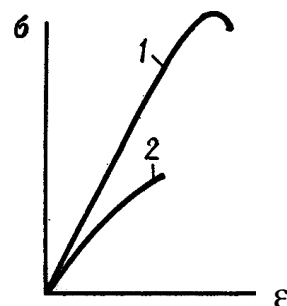


Рис. 6.25. диаграммы растяжения пластмасс: 1 – СВАМ; 2 – реактопласты

6.3.4. Диаграммы сжатия

Хрупкие материалы, такие как бетон, цемент, различные естественные камни, испытывают в основном на сжатие. Древесину испытывают на сжатие как вдоль, так и поперек волокон. Сталь испытывают на сжатие значительно реже, чем на растяжение.

Испытания металлов на сжатие производят на образцах в виде цилиндров, высота которых равна их диаметру; для других материалов применяются образцы в виде кубиков.

Рассмотрим диаграммы сжатия стали и чугуна. Для наглядности изобразим их на одном рисунке с диаграммами растяжения этих материалов (рис. 6.26). В первой четверти изображены диаграммы растяжения, а в третьей – сжатия.

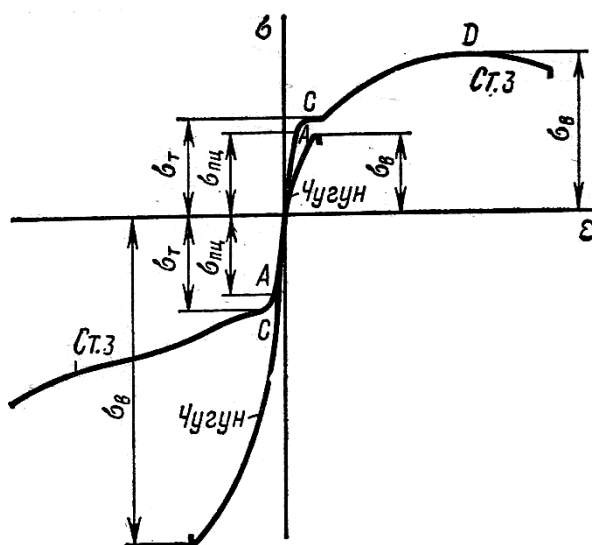


Рис. 6.26. Сравнительные диаграммы растяжения и сжатия стали и чугуна

Пределы пропорциональности $\sigma_{mц}$ и текучести σ_T для стали при сжатии приблизительно такие же, как и при растяжении. Стальной образец при сжатии укорачивается, а поперечные размеры его увеличиваются, особенно в средней части (рис. 6.27). Условно принимают при сжатии такой же предел прочности, как при растяжении.

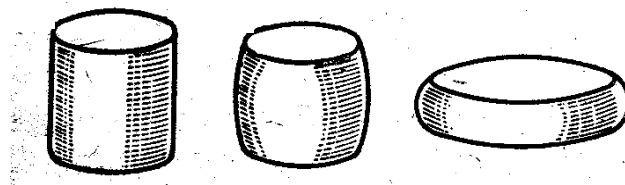


Рис. 6.27. Стадии деформирования стального образца при сжатии

Медь, алюминий и другие пластичные материалы при сжатии деформируются так же, как стальные образцы, и имеют аналогичную диаграмму напряжений при сжатии.

Диаграмма сжатия чугуна по форме похожа на диаграмму растяжения чугуна, однако, ординаты диаграммы напряжений при сжатии в несколько раз больше, чем при растяжении. Предел прочности чугуна на сжатие в 4...5 раз больше, чем при растяжении. При сжатии чугунного образца продольные деформации его незначительны. Образец несколько выпучивается в средней части, принимая слегка бочкообразную форму, а после чего в нем появляются трещины под углом, примерно 45° к оси по площадкам с наибольшими касательными напряжениями. В момент разрушения боковые части образца отделяются и он принимает вид двух усеченных конусов (рис. 6.28).

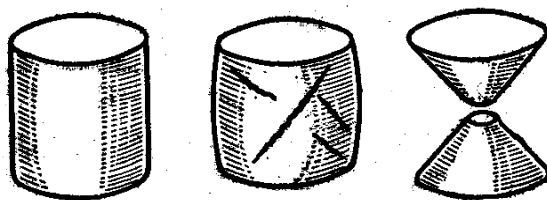


Рис. 6.28. Стадии деформирования чугунного образца при сжатии

При испытании древесины на сжатие приходится учитывать, что древесина – материал анизотропный и по-разному работает вдоль и поперек волокон. Диаграммы напряжений при сжатии древесины вдоль 1 и поперек 2 волокон показаны на рис. 6.29.

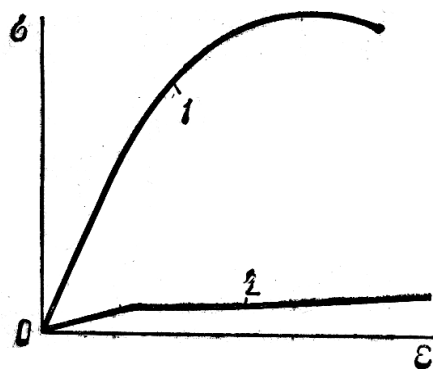


Рис. 6.29. Диаграммы сжатия древесины вдоль 1 и поперек 2 волокон

Многие породы древесины при сжатии вдоль волокон выдерживают значительные напряжения и разрушение происходит при сдвиге одной части кубика по другой (рис. 6.30, *а*). При сжатии древесины поперек волокон древесина не разрушается, а сильно прессуется (рис. 6.30, *б*).

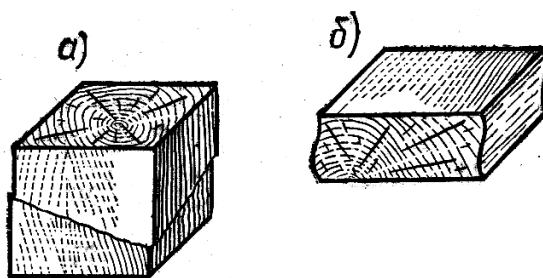


Рис. 6.30. Характер деформирования древесины при сжатии:
а – вдоль волокон; *б* – поперек волокон

6.3.5. Допускаемые напряжения и выбор коэффициента запаса прочности

Допускаемым напряжением принято называть напряжение, превышение которого приводит к возникновению в материале конструкции опасного состояния.

Принято получать допускаемое напряжение следующим образом:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{on}}{n}, \quad (6.29)$$

где $[\sigma]$ или σ_{adm} – допускаемое напряжение; σ_{on} или σ_{dan} – опасное напряжение; n – коэффициент запаса прочности, показывающий, во сколько раз допускаемое напряжение меньше опасного.

Выбор величины коэффициента запаса прочности n зависит от вида нагружения, однородности материала и его хрупкости и от ряда других факторов.

Для пластичных материалов при статическом нагружении опасным следует считать предел текучести σ_T , так как при его достижении в материале детали появляются остаточные деформации и допускаемые напряжения определяются по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (6.30)$$

Коэффициент запаса n в расчетах принимается равным $n = 1,4 - 1,6$.

Для хрупких материалов при статической нагрузке опасным напряжением является предел прочности σ_b и

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}. \quad (6.31)$$

Коэффициент запаса прочности для таких материалов принимают равным $n = 2,5 - 3,0$.

Допускаемые напряжения – величины нормируемые, ими пользуются в расчетах элементов конструкций. В таблице 6.4 приведены ориентировочные величины основных допускаемых напряжений для материалов, испытывающих растяжение и сжатие.

Таблица 6.4

Допускаемые напряжения, принимаемые в расчетах элементов конструкций

Материал детали	Допускаемое напряжение, МПа	
	растяжение	Сжатие
Чугун	28,0 ... 80,0	120,0 ... 150,0
Сталь конструкционная углеродистая	60,0 ... 250,0	60,0 ... 250,0
Сталь конструкционная легированная	100,0 ... 400,0	100,0 ... 400,0
Алюминий	30,0 ... 80,0	30,0 ... 80,0
Сосна вдоль волокон	7,0 ... 10,0	10,0 ... 12,0
Бетон	0,1 ... 0,7	1,0 ... 9,0

6.4. Геометрические характеристики плоских сечений

Сопротивление твердого тела различным видам деформации зависит не только от материала и размеров тела, но и от формы и расположения поперечных сечений по отношению к действующим силам. При растяжении – сжатии геометрической характеристикой поперечного сечения является площадь поперечного сечения A , которая полностью определяет сопротивляемость элемента конструкции деформации.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения. Если представить, что поперечное сечение состоит из бесконечного множества элементарных площадок dA (рис. 6.31), то площадь всего сечения будет равна

$$A = \int_A dA. \quad (6.32)$$

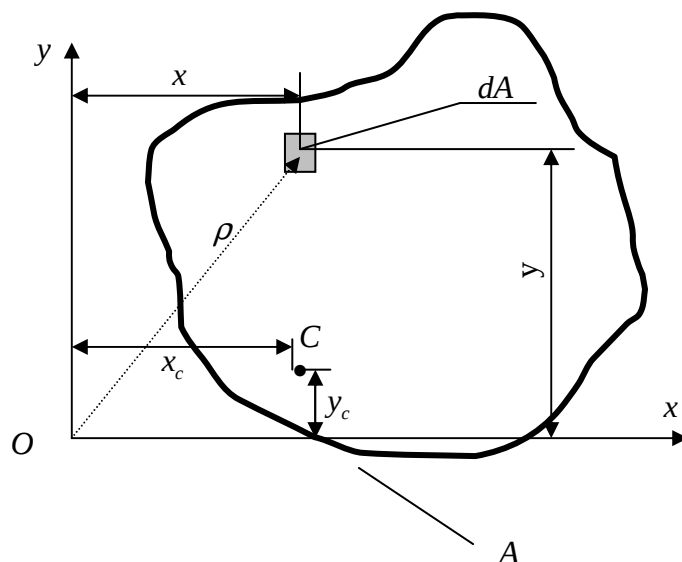


Рис. 6.31. К определению геометрических характеристик плоских сечений

При изучении же изгиба балок по величине площади поперечного сечения нельзя судить о степени их сопротивляемости изгибу, так как одна и та же балка в зависимости от положения осей поперечного сечения в направлении действия силы будет деформироваться по-разному. На рисунке 6.32 изображен стержень с поперечным сечением $A = h \cdot b$. В первом случае (рис. 6.32, а) сечение, к которому приложена сила P , переместится на величину f_1 . Если стержень повернуть на 90° вокруг его оси (рис. 6.32, б) то под действием той же силы исследуемое сечение стержня опустится на величину f_2 , значительно большую, чем f_1 . Таким образом, при одной и той же площади поперечного сечения в зависимости от ее ориентации стержень по-разному сопротивляется действию силы. Следовательно, площадь поперечного сечения не может характеризовать сопротивляемость стержня изгибу.

Отсюда следует, что при изучении изгиба, кручения и других случаев деформации стержня необходимо привлекать более сложные геометрические характеристики: статические моменты площади, моменты инерции и моменты сопротивления, радиусы инерции.

Статические моменты площади и методы определения положения центров тяжести плоских фигур, рассмотрены в разделе 2.7.

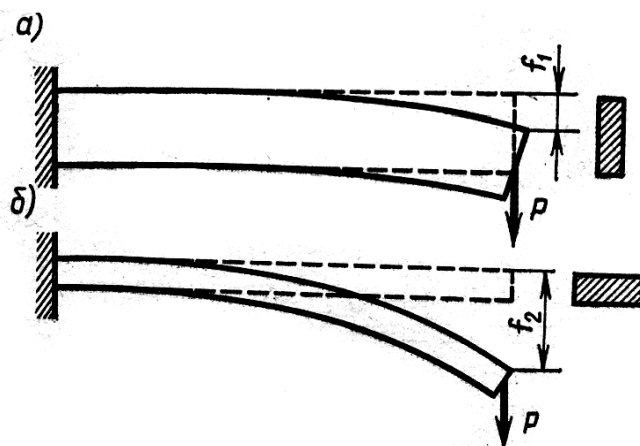


Рис. 6.32. Картина деформирования стержня при различной ориентации его поперечного сечения под действием изгибающей силы

6.4.1. Моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции плоских сечений

Моменты инерции плоских сечений используются при определении деформаций и напряжений в каком-либо произвольном сечении твердого тела. Плоское сечение характеризуется тремя типами моментов инерции: осевым, полярным и центробежным [1, 5].

Осевым, или экваториальным, моментом инерции плоского сечения называют сумму произведений элементарных площадок на квадрат их расстояний до рассматриваемой оси. Моменты инерции произвольного плоского сечения (рис. 6.31), относительно осей Ox и Oy определяются выражениями:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA; \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA. \quad (6.33)$$

Полярным моментом инерции плоского сечения относительно полюса, лежащего в той же плоскости, точка O на рис. 6.26, называется сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояний до полюса:

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA. \quad (6.34)$$

Если полюс совпадает с началом системы прямоугольных координат, из которого исходят оси Ox и Oy , то $\rho^2 = x^2 + y^2$ и

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_y + I_x,$$

т.е. момент инерции плоского сечения относительно полюса равен сумме моментов инерции относительно взаимно-перпендикулярных осей Ox и Oy .

Центробежным моментом инерции плоского сечения называется сумма произведений элементарных площадок на их расстояния до координатных осей Ox и Oy :

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA. \quad (6.35)$$

Размерность моментов инерции – [длина⁴], т.е. их измеряют в мм⁴, см⁴.

Следует отметить, что осевые и полярный моменты плоского сечения всегда положительны и не равны нулю; центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Осевым моментом сопротивления плоского сечения называется отношение осевого момента инерции относительно данной оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки поперечного сечения вдоль этой оси:

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{I_x}{y_{\max}}; \\ W_y &= \frac{I_y}{x_{\max}}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Размерность моментов сопротивления – [длина³], т.е. их измеряют в мм³, см³.

Величины, равные

$$\pm \sqrt{\frac{I_x}{A}} = i_x; \quad \pm \sqrt{\frac{I_y}{A}} = i_y, \quad (6.37)$$

называются *радиусами инерции* плоского сечения.

Размерность радиуса инерции – [длина], т.е. их измеряют в мм, см.

6.4.2. Изменение моментов инерции плоских сечений при параллельном переносе и при повороте осей

Пусть известны моменты инерции плоского сечения относительно центральных осей Ox и Oy :

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA; \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA; \quad I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA.$$

Требуется определить моменты инерции заданного плоского сечения, относительно осей O_1x_1 и O_1y_1 , параллельных центральным и находящихся от них на расстояниях a и b соответственно (рис. 6.33).

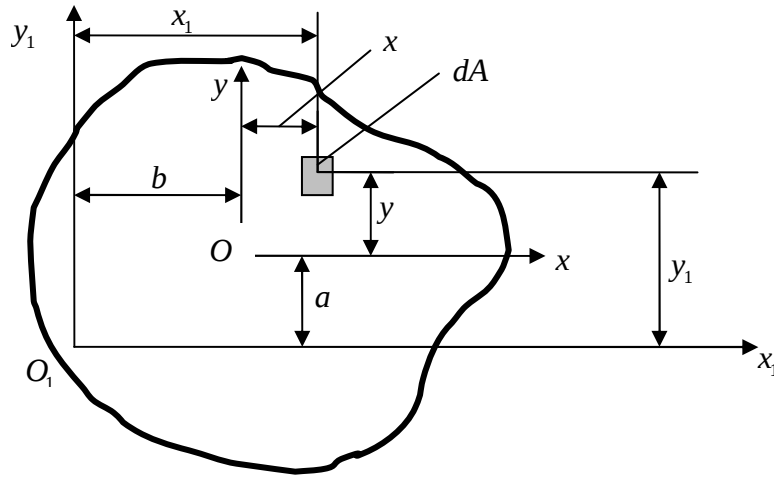


Рис. 6.33. К определению моментов инерции плоского сечения при параллельном переносе осей

Определим координаты любой площадки dA в новой системе координат $O_1x_1y_1$, выразив их через координаты в осях Ox и Oy :

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a.$$

Момент инерции, например, относительно оси Ox_1 будет:

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + a)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2a \int_A y \cdot dA + a^2 \int_A dA = I_x + 0 + a^2 \cdot A,$$

то есть

$$I_{x_1} = I_x + a^2 \cdot A. \quad (6.38)$$

Интеграл $2a \int_A y \cdot dA = 2a \cdot S_x = 0$ как статический момент площади относительно центральной оси.

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y + b^2 \cdot A; \\ I_{x_1y_1} &= I_{xy} + a \cdot b \cdot A. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Таким образом:

– осевой момент инерции плоского сечения относительно любой оси, параллельной данной, равен моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади плоского сечения на квадрат расстояния между осями;

– центробежный момент инерции плоского сечения относительно любой системы взаимно-перпендикулярных осей, параллельных данным,

равен центробежному моменту относительно системы центральных осей плюс произведение площади плоского сечения на координаты ее центра тяжести в новых осях.

Если систему координат Oxy (рис. 6.34) повернуть на угол α против хода часовой стрелки, считая такое направление поворота положительным, то моменты инерции плоского сечения относительно нового положения осей Ox_1y_1 (рис. 6.30) будут равны:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{y_1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{x_1y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Складывая моменты инерции плоского сечения относительно повернутых осей Ox_1 и Oy_1 , получаем, что

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p, \quad (6.41)$$

то есть при повороте прямоугольных осей сумма моментов инерции плоского сечения не изменяется и равна полярному моменту инерции относительно начала системы координат.

При повороте системы взаимно-перпендикулярных осей на угол 90° , получаем:

$$I_{x_1} = I_y; \quad I_{y_1} = I_x; \quad I_{x_1y_1} = -I_{xy}.$$

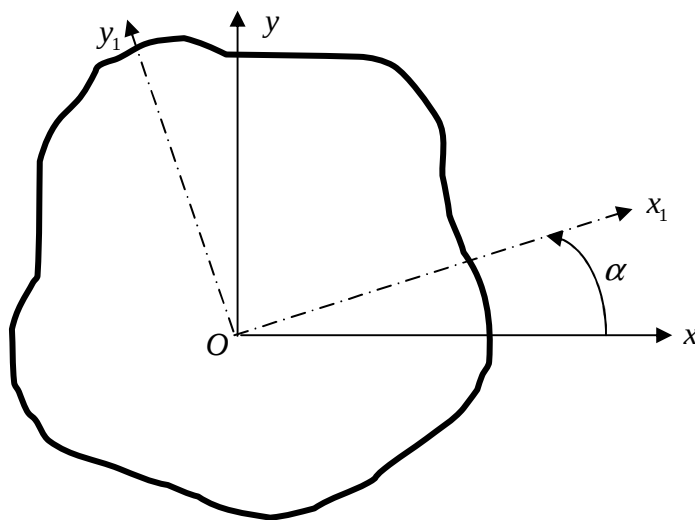


Рис. 6.34. К определению моментов инерции плоского сечения относительно осей, повернутых на угол α

6.4.3. Главные моменты инерции. Определение направления главных осей инерции

Максимальные и минимальные значения осевых моментов инерции плоского сечения относительно данных осей называются главными моментами инерции и равны:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}; \\ I_{\min} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Оси, относительно которых осевые моменты инерции плоского сечения имеют экстремальные значения, называются главными осями инерции. Направление главных осей инерции определяют по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \quad (6.43)$$

где α_0 – угол, на который надо повернуть координатные оси Ox и Oy , чтобы они совпали с главными осями.

Если просуммировать максимальный и минимальный моменты инерции плоского сечения, то получим

$$I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y, \quad (6.44)$$

то есть:

- сумма моментов инерции плоского сечения не меняется при повороте осей и равна сумме главных моментов инерции;
- центробежный момент инерции плоского сечения относительно главных осей равен нулю.

Взаимно-перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна совпадает с осью симметрии плоского сечения, всегда являются главными осями инерции.

Ось, относительно которой осевой момент инерции плоского сечения максимален, является осью максимум (U), а другая ось, относительно которой осевой момент инерции сечения минимален – осью минимум (V) (рис. 6.35). Ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей Ox или Oy , относительно которой осевой момент инерции плоского сечения имеет большее значение.

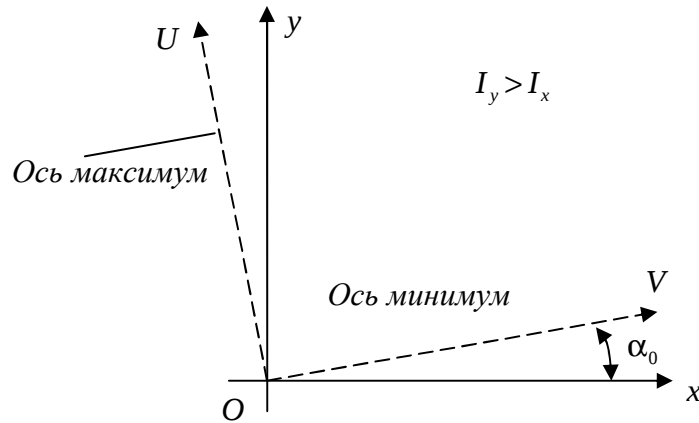


Рис. 6.35. К определению осей максимума и минимума

Практическое значение для расчетов элементов конструкций имеют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести плоского сечения, т.е. главные центральные оси инерции. Моменты инерции плоского сечения относительно этих осей принято называть *главными центральными моментами инерции*.

6.4.4. Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

В приложениях 1 – 6 кн. 2 ч. 1 приведены геометрические характеристики некоторых плоских сечений и стандартных профилей [3].

6.4.5. Способы вычисления центробежного момента инерции

Для определения положения главных осей и величины главных моментов инерции необходимо знать величину центробежного момента инерции сечения [7].

Если известны величины главных моментов инерции I_x и I_y и положение осей Ox_1 и Oy_1 относительно главных осей, то *центробежный момент инерции* может быть найден по формуле

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.45)$$

Если известны величины осевых моментов инерции $I_x, I_y, I_{x_1}, I_{y_1}$ относительно главных осей Ox и Oy и относительно осей Ox_1 и Oy_1 , то центробежный момент инерции относительно осей Ox_1 и Oy_1 может быть вычислен по одной из следующих формул:

$$I_{x_1y_1} = \pm \sqrt{I_{x_1} \cdot I_{y_1} - I_x \cdot I_y};$$

$$I_{x_1 y_1} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 - (I_{x_1} - I_{y_1})^2};$$

$$I_{x_1 y_1} = \pm \sqrt{(I_x - I_y)(I_{x_1} - I_{y_1})}. \quad (6.46)$$

Знак в правой части этих формул перед радикалом зависит от знака центробежного момента инерции.

Если известно расположение главных осей инерции, то знак центробежного момента определяется по следующему правилу: *центробежный момент инерции положителен, если ось с максимальным моментом проходит через 2-й и 4-й квадранты, и отрицателен, если эта ось проходит через 1-й и 3-й квадранты.*

На рисунке 6.36 дано четыре варианта расположения равнополочного уголка с указанием знака для центробежного момента инерции.

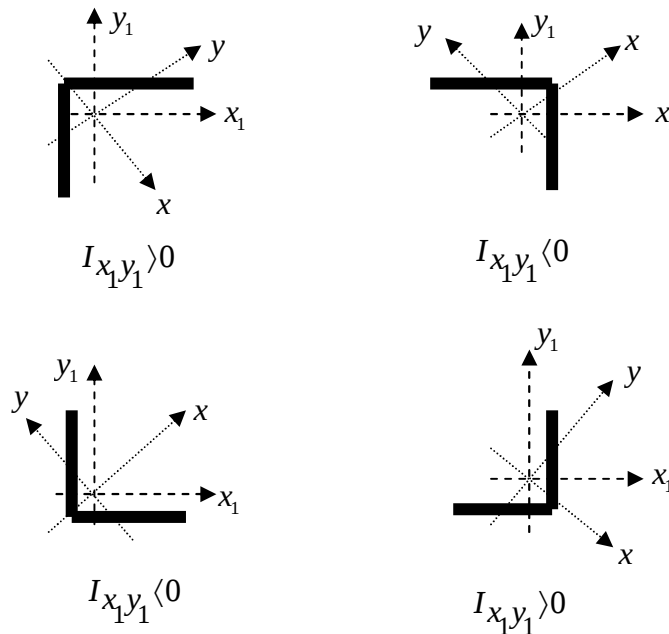


Рис. 6.36. Знак центробежного момента инерции равнополочного уголка при различном его расположении

6.5. Сдвиг и смятие

При простом растяжении две части стержня, разделенные наклонным сечением, стремятся не только оторваться, но и сдвинуться относительно друг друга. Сдвигу противодействуют касательные напряжения, действующие в плоскостях сечения. Деформация сдвига может быть реализована в случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных

сторон на очень близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные к оси бруса и направленные в противоположные стороны (рис. 6.37).

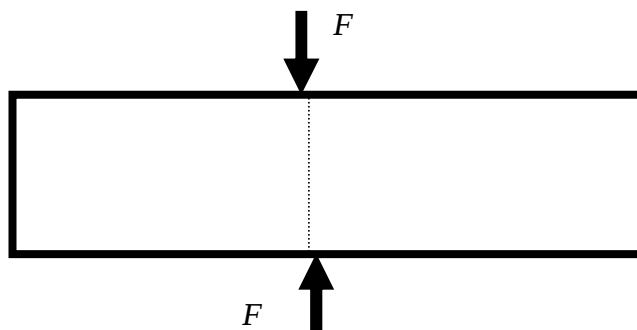


Рис. 6.37. Иллюстрация деформации сдвига

Под действием внешних сил F в поперечных сечениях бруса возникает внутренняя поперечная сила Q , которая может быть определена из условия равновесия одной из условно отсеченных частей, например левой, при помощи метода сечений (рис. 6.38), $Q = F$.

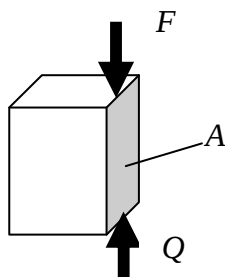


Рис. 6.38. К определению поперечной силы Q при сдвиге

Таким образом, *сдвигом называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только поперечная сила.*

Связь между поперечной силой Q и касательными напряжениями τ , действующими в рассматриваемом сечении при предположении их равномерного распределения, представлена следующей формулой $Q = F = \tau \cdot A$, откуда

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \quad (6.47)$$

Особенностью деформаций при сдвиге является то, что происходит искажение элементарных параллелепипедов, выделенных из бруса, т.е. возникают угловые деформации, приводящие к искажению первоначально прямых углов (рис. 6.39). Под действием внутренних сил, интенсивность которых определяется величиной касательных напряжений, грань bc сдвинется параллельно грани ad на некоторую величину $bb_1 = cc_1$, которую назовем *абсолютным сдвигом*. Элемент $abcd$ перекосялся и занял положение ab_1c_1d . Первоначально прямые углы, исказились на величину γ . Этот угол γ

назовем *относительным сдвигом*. Его можно определить как $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{l}$, но, учитывая, что в конструкциях наблюдаются, в основном, упругие деформации и угол γ весьма мал, можно $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ и записать

$$\gamma = \frac{\Delta S}{l}. \quad (6.48)$$

При упругих деформациях экспериментально установлена и теоретически обоснована пропорциональная зависимость между величиной касательных напряжений τ и соответствующей величиной относительного сдвига γ :

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (6.49)$$

Величина G носит название *модуля сдвига* или модуля упругости второго рода, а зависимость (6.49) принято считать *законом Гука при сдвиге*.

Используя формулы (6.47) – (6.49), представим закон Гука при сдвиге в следующем виде:

$$\Delta S = \frac{Q \cdot l}{G \cdot A}, \quad (6.50)$$

то есть *абсолютный сдвиг прямо пропорционален сдвигающей силе, расстоянию между сдвигаемыми гранями и обратно пропорционален жесткости при сдвиге GA* .

Упругие постоянные материала E , G , μ связаны между собой следующей зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (6.51)$$

Значения модуля сдвига для различных материалов приведены в табл. 6.5.

Деформация сдвига, доведенная до разрушения бруса называется *срезом*.

Условие прочности при сдвиге (срезе) имеет следующий вид:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau], \quad (6.52)$$

где τ – расчетное напряжение сдвига (среза) в поперечном сечении рассматриваемого элемента; Q – поперечная сила (при наличии нескольких

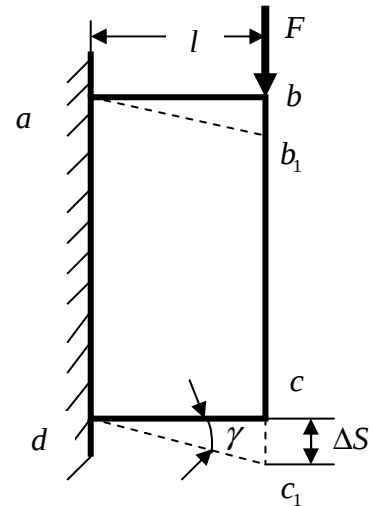


Рис. 6.39. К иллюстрации деформаций при сдвиге

одинаковых соединительных элементов $Q = \frac{F}{i}$; F – действующая внешняя нагрузка; i – число одинаковых соединительных элементов); A – площадь поперечного сечения сдвигаемого элемента (при наличии нескольких одинаковых соединительных элементов – площадь поперечного сечения одного элемента); $[\tau]$ – допускаемое напряжение на сдвиг (срез), зависящее от материала соединительных элементов и условий работы конструкции (для хрупких материалов $[\tau] = (0,8 \dots 1,0)[\sigma]$; для пластичных материалов $[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]$).

Таблица 6.5

Значение модуля сдвига G для некоторых конструкционных материалов

Материал	G , МПа
Сталь	$(7,8 \dots 8,3) \cdot 10^4$
Чугун	$(4,4 \dots 6,8) \cdot 10^4$
Медь	$4,8 \cdot 10^4$
Алюминий	$2,7 \cdot 10^4$
Свинец	$0,69 \cdot 10^4$
Стекло	$(2,1 \dots 2,3) \cdot 10^4$
Дерево	$(4,4 \dots 6,4) \cdot 10^4$

Деформация *смятия* представляет собой разновидность деформации сжатия при действии сжимающей силы на небольшой площади элемента конструкции. Возникающие при этом местные напряжения носят название *напряжения смятия*.

При практических расчетах напряжения смятия принимают за обычные сжимающие напряжения, а допускаемые напряжения на смятие назначают на основе специальных опытных данных.

Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (6.53)$$

где F – сжимающая сила; $A_{см}$ – площадь смятия; $[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение на смятие.

Допускаемые напряжения на смятие назначают в несколько раз большими допускаемых напряжений, принимаемых для случая простого сжатия, например, для стали $[\sigma_{см}] = (2,0 \dots 2,5)[\sigma]$.

Некоторые конструкции, рассчитываемые на сдвиг [5], показаны на рис. 6.40.

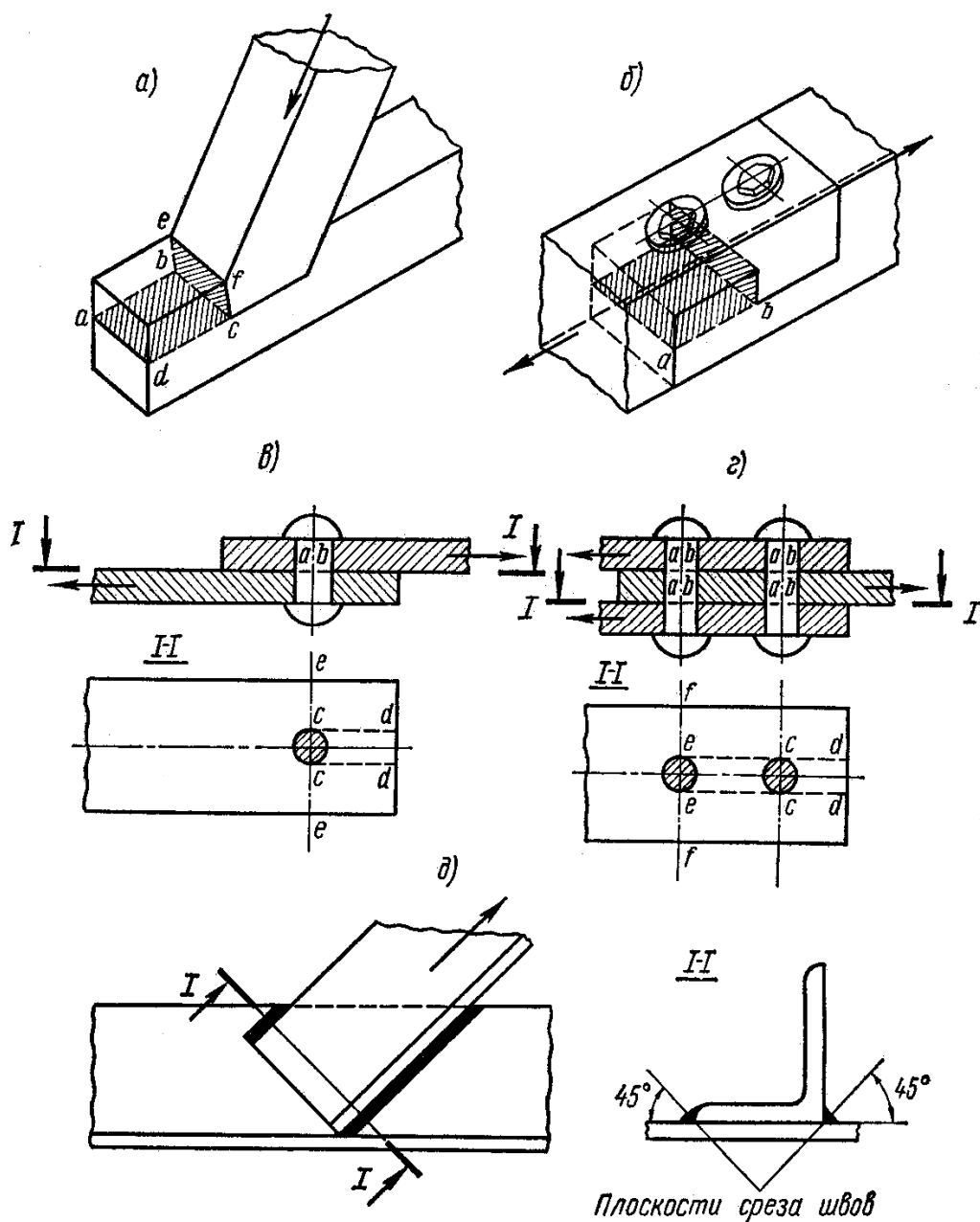


Рис. 6.40. Конструкции, рассчитываемые на сдвиг: *а, б* – деревянная врубка; *в, г* – заклепочное соединение; *д* – сварное соединение.

Разрушение лобовой врубки (рис. 6.40, *а*) может произойти в результате скалывания дерева вдоль волокон по плоскости *abcd*, а разрушение врубки, показанной на рис. 6.40, *б* – в результате скалывания по плоскости *аб*. Разрушение заклепочного соединения (рис. 6.40, *в* и *г*) может произойти в результате среза заклепок по плоскости *аб*, среза листов за крайними заклепками по плоскости *cd* или между заклепками по плоскости *ес*. Причиной разрушения заклепочного соединения может быть смятие лис-

тов по цилиндрической поверхности контакта их с заклепками (рис. 6.41) или разрыв листов по сечению se на рис. 6.40, $в$ и сечению ef на рис. 6.40, $г$. Разрушение сварного соединения (рис. 6.40, $д$) может произойти в результате среза сварных швов по наименьшей площади, расположенной в биссекторной плоскости прямого угла.

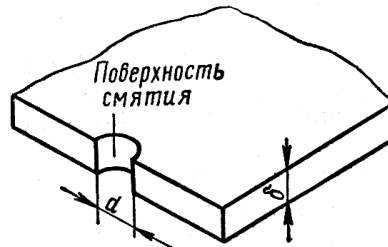


Рис. 6.41. Смятие листа заклепочного соединения

Расчет заклепочных соединений. Для образования заклепочного соединения в обоих листах просверливают или продавливают отверстия, в которые закладывают нагретый *стержень*, диаметром d , с одной *головкой*, называемый *заклепкой* (рис. 6.42). Другой конец стержня расклепывают ударом молота или давлением прессы. Мелкие заклепки ($d \leq 8\text{мм}$) ставят в отверстия в холодном состоянии. Обычно заклепки изготавливаются из более податливого материала, чем соединяемые листы.

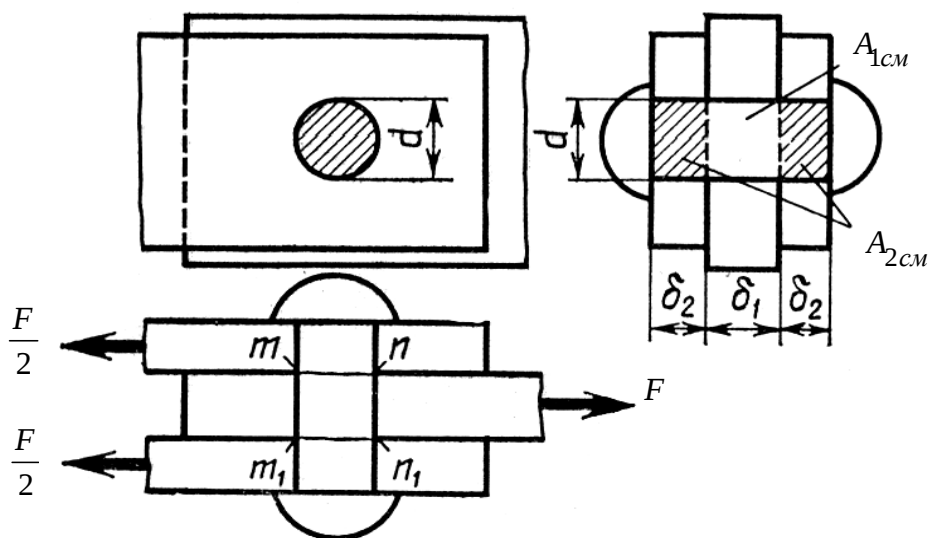


Рис. 6.42. К расчету заклепочного соединения

Минимальное расстояние от центра заклепки до края соединяемого листа по направлению воспринимаемого усилия принимают равным $2d$, а

поперек направления усилия – $1,5 d$. Минимальный размер шага заклепок равен $3d$, а максимальный – $8d$.

Любое заклепочное соединение работает на четыре вида деформации: срез заклепок; срез листа; разрыв листа и смятие заклепок.

Приведем формулы, необходимые для расчета заклепочного соединения.

1. *Условие прочности на срез заклепок* имеет вид (рис. 6.43):

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2 \cdot i \cdot n} \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (6.54)$$

где d – диаметр заклепки; I – число заклепок в шве; n – число плоскостей среза.

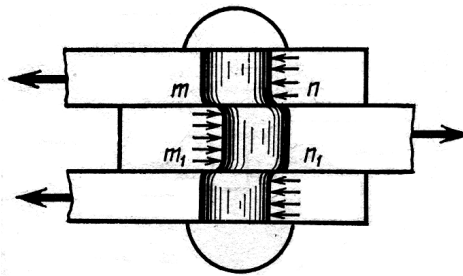


Рис. 6.43. Срез заклепки по сечениям $m - n$ и $m_1 - n_1$

2. Срез листа может произойти в том случае, когда заклепки будут установлены близко к краю листа. *Условие прочности листа на срез:*

$$\tau_{\text{ср.л.}} = \frac{F}{n \cdot e \cdot i \cdot \delta} \leq [\tau_{\text{ср.л.}}], \quad (6.55)$$

где δ – толщина листа; e – расстояние от центра заклепки до края листа.

3. *Условие прочности листа на разрыв:*

$$\sigma_p = \frac{F}{(b - i \cdot d) \delta} \leq [\sigma_p], \quad (6.56)$$

где b – ширина листа.

4. *Условие прочности на смятие заклепок* имеет вид

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{d \cdot b \cdot i} \leq [\sigma_{\text{см}}]. \quad (6.57)$$

Деформации смятия будет подвергаться верхняя и нижняя часть заклепок высотой δ (рис. 6.44). В расчет на смятие заклепки [4] подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а площадь диаметрального сечения (условная площадь смятия) – $d \cdot \delta$.

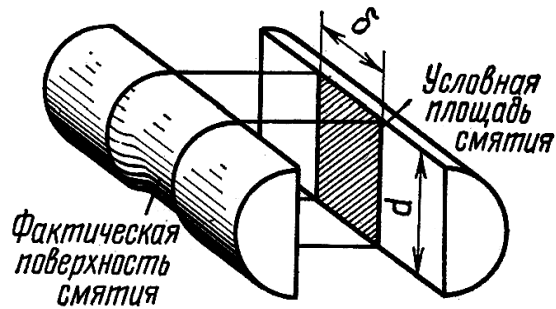


Рис. 6.44. К определению условной площади смятия заклепки

В представленные четыре условия прочности входят: нагрузка, действующая на заклепочный шов F ; диаметр заклепки d ; число заклепок i ; толщина листа δ ; ширина листа b ; расстояние от края листа до центра заклепки e , т.е. шесть неизвестных величин. Для обеспечения прочности заклепочного соединения задаются двумя величинами, например, F и b . Решая совместно эти уравнения, находят остальные размеры заклепочного шва.

Расчет сварных соединений. При изготовлении металлических конструкций и аппаратов часто применяют сварку. Типичными конструкциями сварных соединений являются: встык, лобовые и фланговые. Хотя при сварке присадочный материал часто принимается близкий к материалу соединяемых деталей, наплавленный материал уменьшает прочность сварного шва и может иметь различные дефекты: непровары, раковины и др., и поэтому является наиболее слабым местом сварного соединения.

5. *Расчет сварного шва встык.* Такие швы работают на растяжение – сжатие и изгиб (рис. 6.45).

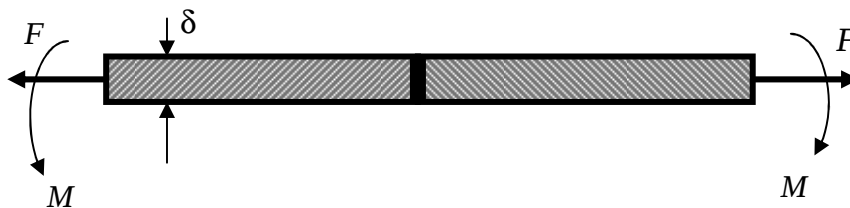


Рис. 6.45. Схема нагружения сварного соединения встык

Используя *принцип независимости действия сил*, определим действующие напряжения в материале сварного шва отдельно от силы F и изгибающего момента M :

- от растягивающей силы F $\sigma_p = \frac{F}{b \cdot \delta}$;
- от изгибающего момента M $\sigma_M = \frac{6M}{b \cdot \delta^3}$.

Тогда максимальное напряжение будет равно: $\sigma_{\max} = \sigma_p + \sigma_M$ и условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{b \cdot \delta} + \frac{6M}{b \cdot \delta^3} \leq [\sigma_p^3], \quad (6.58)$$

где $[\sigma_p^3]$ – допускаемое напряжение материала сварного шва; b – ширина сварного листа; δ – толщина листа.

6. Расчет углового лобового сварного шва. Лобовые швы (рис. 6.46) работают на срез. Практика показывает, что такой шов разрушается по плоскости, составляющей примерно 45° по отношению к плоскости соединяемых деталей. Из рисунка 6.46 видно, что площадь опасного сечения будет равна $A_{on} = b \cdot \delta \cdot \cos 45^\circ = 0,7b \cdot \delta$.

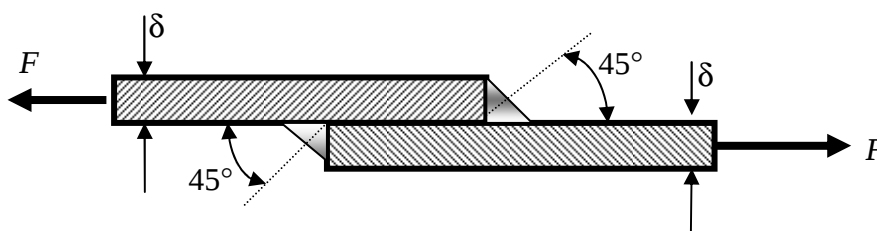


Рис. 6.46. Схема нагружения углового лобового сварного шва

Условие прочности для лобового сварного шва записывается в виде:

$$\tau_{cp} = \frac{F}{2A_{on}} = \frac{F}{1,4b \cdot \delta} \leq [\tau_{cp}^3], \quad (6.59)$$

где $[\tau_{cp}^3]$ – допускаемое напряжение материала сварного шва на срез.

Допускаемые напряжения для сварных швов устанавливаются в долях от допускаемых напряжений для основного материала металлической конструкции: $[\sigma_p^3] = (0,6 \dots 0,9)[\sigma_p]$; $[\tau_{cp}^3] = (0,5 \dots 0,65)[\tau_{cp}]$.

6.6. Кручение

Кручением называют такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты; нормальная сила, изгибающие моменты и поперечные силы отсутствуют. Кручение возникает под действием пары сил, действующей в плоскостях поперечных сечений стержня. Момент этой пары T и будет искомым крутящим моментом M_z (рис. 6.47).

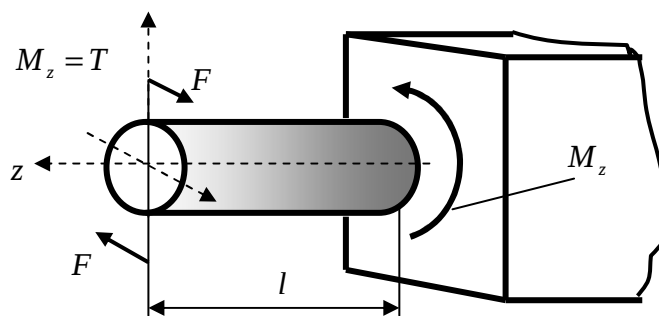


Рис. 6.47. К понятию крутящего момента

Деформации кручения подвергаются многие детали машин и сооружений: валы двигателей и станков, винтовые пружины, элементы пространственных конструкций и т.п. Характер деформации скручиваемого стержня зависит от формы его поперечного сечения.

Стержень, испытывающий деформации кручения, принято называть *валом*.

6.6.1. Крутящие моменты и их эпюра

Рассмотрим случай, когда к стержню приложены несколько внешних взаимно уравновешенных моментов, плоскость действия которых перпендикулярна оси стержня (трением в опорах пренебрегаем) (рис. 6.48, а):

$$T_1 - T_2 - T_3 = 0.$$

Крутящий момент, приложенный к торцовому сечению, будем считать положительным, если, глядя на рассматриваемое сечение со стороны внешней нормали, видим момент, стремящийся скручивать стержень по направлению хода часовой стрелки.

Для определения крутящего момента в произвольном сечении, например III, используя метод сечения, мысленно рассечем вал по этому сечению и приложим к каждой части крутящие моменты M_z , (рис. 6.48, б). Величину крутящего момента можно найти из условия равновесия любой из отсеченных частей вала. Для этого необходимо приравнять к нулю сумму внешних скручивающих моментов и крутящего момента относительно продольной оси рассматриваемой части вала.

Например, для левой части вала (рис. 6.48, б), из условия равновесия, имеющего вид $\sum T_i = 0$, находим

$$T_1 - T_2 + M_z = 0,$$

откуда

$$M_z = T_2 - T_1.$$

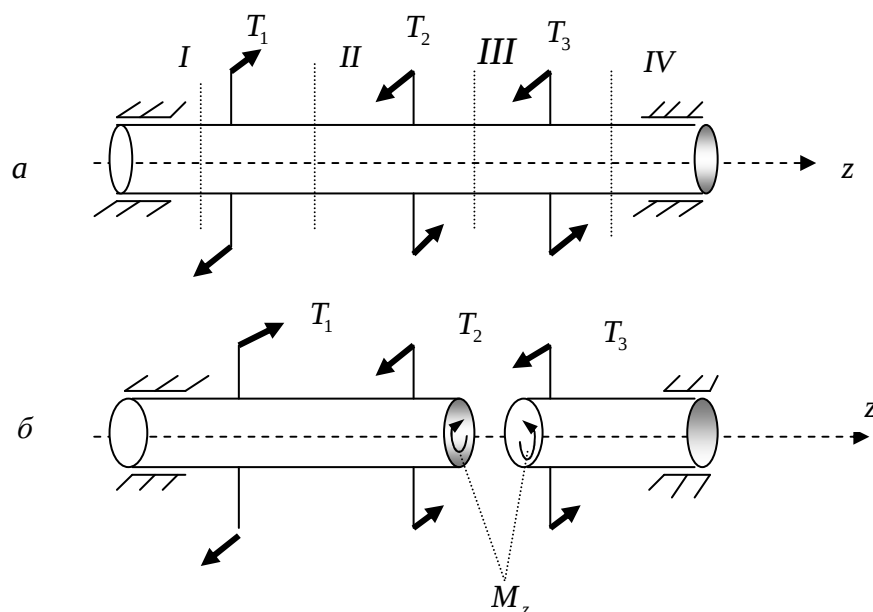


Рис. 6.48. К определению величины крутящего момента: *а* – схема нагружения вала; *б* – применение метода сечений к определению крутящего момента

Если рассматривать равновесие правой части, то получаем

$$M_z + T_3 = 0$$

и, следовательно,

$$M_z = -T_3.$$

Анализируя полученные равенства видно, что оба значения крутящего момента M_z равны между собой.

Таким образом, *крутящий момент M_z в поперечном сечении вала равен алгебраической сумме моментов всех внешних пар сил, действующих на часть вала по одну сторону от условного сечения.*

Если найти значения крутящих моментов в ряде сечений вдоль оси вала, то можно построить график изменения M_z по длине вала, называемый *эпюрой крутящих моментов*. Эпюру крутящих моментов строят по участкам, границами которых являются сечения, в которых приложены внешние скручивающие моменты. Для каждого участка записывается уравнение равновесия и вычисляется значение крутящего момента M_{z_i} . Будем считать, что в поперечном сечении, где приложен внешний скручивающий момент, значение крутящего момента изменяется скачкообразно.

Положительные значения крутящего момента откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные – вниз.

Порядок построения эпюры крутящих моментов рассмотрим на примере.

Пример 6.5. Построить эпюру крутящих моментов для трансмиссионного вала, изображенного на рис. 6.49, а. Трением в опорах вала пренебрегаем. $T_1 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $T_2 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $T_3 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $T_4 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Решение. Разбиваем вал на участки от I до V. Используя метод сечения, из равновесия левой отсеченной части найдем значения M_{z_i} на каждом участке.

- участок 0 – 1, сечение I: $M_{z_1} = 0$;
- участок 0 – 2, сечение II: $M_{z_2} = T_1 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$;
- участок 0 – 3, сечение III: $M_{z_3} = T_1 + T_2 + 100 + 50 = 150 \text{ Н} \cdot \text{м}$;
- участок 0 – 4 сечение IV: $M_{z_4} = T_1 + T_2 - T_3 = 100 + 50 - 200 = -50 \text{ Н} \cdot \text{м}$;
- участок 0 – 5 сечение V: $M_{z_5} = T_1 + T_2 - T_3 + T_4 = 100 + 50 - 200 + 50 = 0$.

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов M_z (рис. 6.49, б).

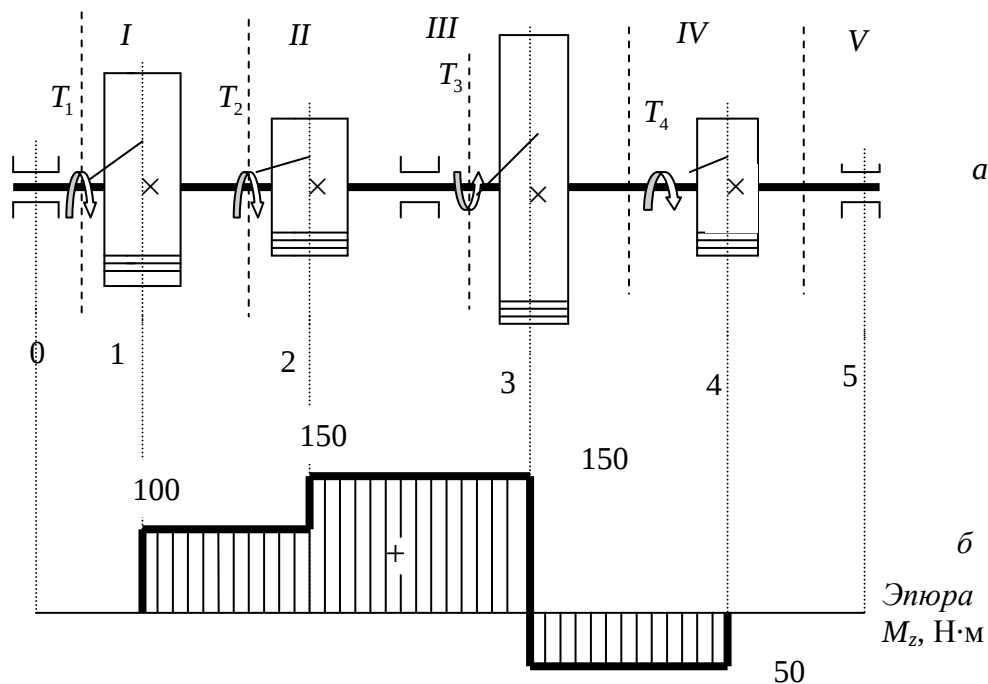


Рис. 6.49. Схема нагружения вала (а) и эпюра крутящих моментов M_z (б)

На эпюре крутящих моментов M_z «скачок» численно равен значению внешнего скручивающего момента T_i , приложенного в рассматриваемом сечении.

6.6.2. Напряжения и деформации при кручении бруса круглого поперечного сечения

Напряжения и деформации при кручении в значительной степени зависят от формы поперечного сечения стержня. Гипотеза плоских сечений справедлива только для стержня с круглым сплошным или кольцевым поперечным сечением. У стержней, имеющих другую форму поперечного сечения, при кручении происходит искривление.

Теория кручения круглых стержней основана на следующих предположениях:

- все поперечные сечения в процессе деформации остаются плоскими, и радиусы, проведенные в них, остаются прямыми;
- ось стержня после деформации остается прямой линией, и расстояния между проведенными сечениями не изменяются;
- любое поперечное сечение поворачивается относительно другого вокруг оси стержня на некоторый угол, называемым *углом закручивания*, который пропорционален крутящему моменту и расстоянию между сечениями;
- все образующие цилиндры поворачиваются на один и тот же угол;
- в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения.

На основании принятых допущений кручение круглого стержня можно представить как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга.

Рассмотрим стержень радиуса r , жестко заделанный одним концом (рис. 6.50). На его свободном конце приложим пару сил с моментом T . На боковую поверхность стержня нанесем риску в виде образующей AB , которая после скручивания займет положение AB_1 . В результате кручения стержня сечение I, взятое на расстоянии z от жесткой заделки, повернется на угол φ , а сечение II – на угол $\varphi + d\varphi$. Следовательно, сечение II повернется по отношению к сечению I на угол $d\varphi$.

Рассмотрим отдельно часть стержня, расположенного между сечениями I и II, длина которого равна dz . Для наглядности и удобства рассмотрения будем считать, что сечение I неподвижно (рис. 6.51). Риска CD отклонится на малый угол γ и займет положение CD_1 . Угол сдвига волокна, лежащего на поверхности стержня, ввиду его малости, определяется равенством

$$\gamma = \frac{DD_1}{CD} = \frac{r \cdot d\varphi}{dz}.$$

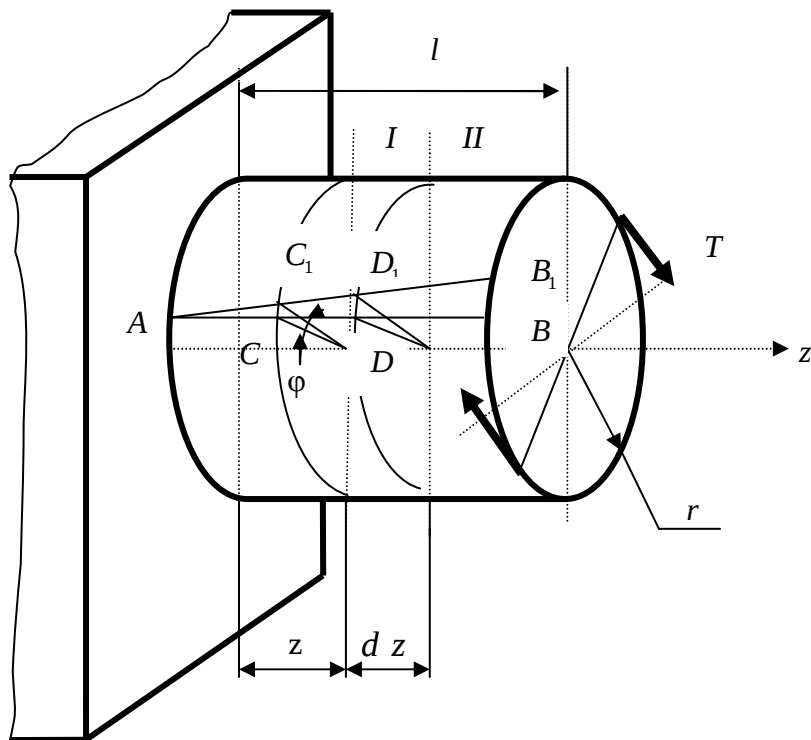


Рис. 6.50. К иллюстрации деформации при кручении

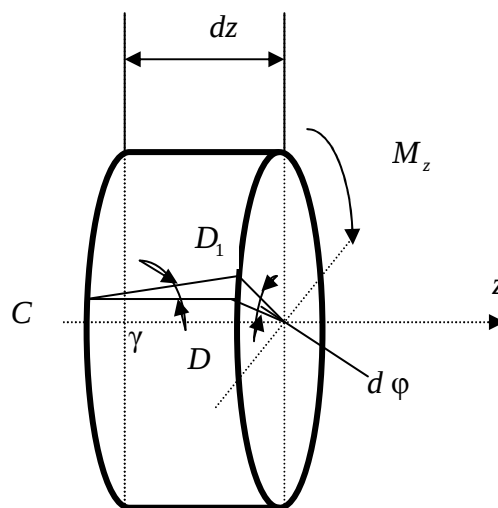


Рис. 6.51. К определению угла сдвига при кручении

Для произвольного волокна, отстоящего от центра сечения на расстоянии ρ (рис. 6.50, 6.51), будем иметь

$$\gamma_{\rho} = \frac{KK_1}{CD} = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

На основании закона Гука при сдвиге можно записать:

$$\tau = G \cdot \gamma = C \frac{d\phi}{dz} r. \quad (6.60)$$

Анализ полученных формул позволяет сделать вывод о том, что касательные напряжения в точках поперечного сечения изменяются пропорционально расстоянию этих точек от оси. Максимальные касательные напряжения будут в точках, наиболее удаленных от центра стержня, т.е. при $\rho = r$.

Выделим вокруг произвольной точки, отстоящей от центра поперечного сечения на расстоянии ρ , элементарную площадку dA (рис. 6.52). На эту площадку будет действовать элементарная касательная сила $\tau_\rho \cdot dA$.

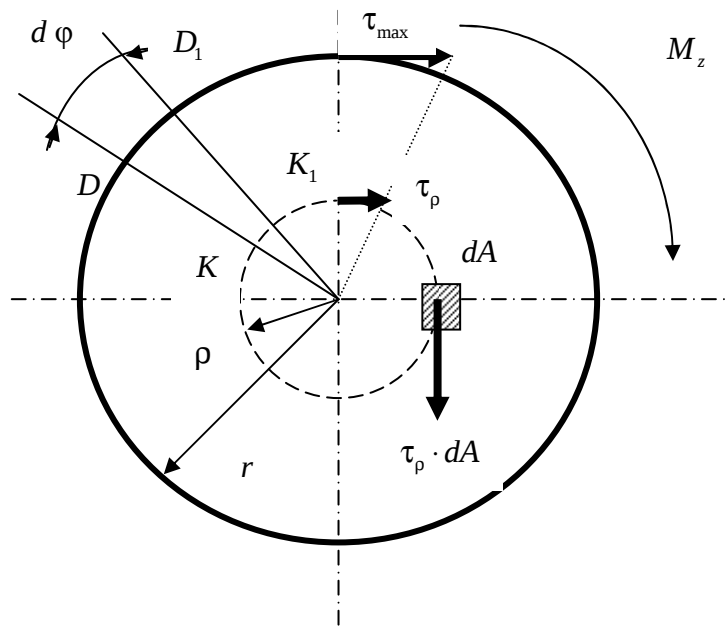


Рис. 6.52. К определению касательных напряжений при кручении

Касательные силы, действующие по поперечному сечению стержня, приводятся к паре сил, момент которой, равен крутящему моменту M_z . Момент элементарной касательной силы относительно центральной оси стержня равен: $dM_z = \tau_\rho \cdot dA \cdot \rho$. Тогда полный крутящий момент будет равен:

$$M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA \quad \text{Подставим вместо } \tau_\rho \text{ его значение } M_z = \int_A G \cdot \rho \frac{d\phi}{dz} \cdot dA.$$

Величина $G \frac{d\phi}{dz}$ для всех точек поперечного сечения одинакова, поэтому

вынесем ее за знак интеграла: $M_z = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 \cdot dA$. Выражение $\int_A \rho^2 \cdot dA = I_\rho$ представляет собой полярный момент инерции круглого сечения. Тогда

$$M_z = G \cdot I_\rho \frac{d\varphi}{dz} \text{ или } \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Для нахождения величины касательных напряжений в произвольной точке круглого сечения подставим найденное значение $\frac{d\varphi}{dz}$ в выражение для касательных напряжений в произвольном волокне поперечного сечения и получим

$$\tau_\rho = \frac{M_z \cdot \rho}{I_y}. \quad (6.61)$$

Максимальное напряжение в крайних точках поперечного сечения определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} r = \frac{M_z}{W_\rho}. \quad (6.62)$$

Величина $W_\rho = \frac{I_\rho}{r}$ называется *полярным моментом сопротивления* круглого сечения. Для сплошного круглого сечения $W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2d^3$; для кольцевого сечения $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$, где $\alpha = \frac{d}{D}$.

Для определения угла закручивания, воспользуемся ранее полученным уравнением, из которого находим

$$d\varphi = \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} dz.$$

Если стержень имеет постоянный по длине диаметр, то после интегрирования получим

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} dz = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_\rho}. \quad (6.63)$$

Величину $G \cdot I_\rho$ называют *жесткостью* стержня при кручении. Он характеризует сопротивление стержня закручиванию.

Полный угол закручивания не всегда не всегда может в полной мере характеризовать жесткость стержня при кручении, т.к. на протяжении длины стержня крутящие моменты могут иметь разные знаки и при небольшом полном угле закручивания отдельные участки могут скручиваться значительно. Поэтому для оценки жесткости стержня при *кручении* *вводится относительный угол закручивания*

$$\Theta = \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} \cdot \left[\frac{1}{m} \right]. \quad (6.64)$$

6.6.3. Расчет на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности бруса при кручении заключается в том, что возникшие в нем максимальные касательные напряжения не должны превышать допускаемых напряжений. Величину допускаемого касательного напряжения $[\tau]$ принимают равную 0,5...0,6 допускаемого напряжения на растяжение $[\sigma]$ для данного материала.

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau = \frac{M_{z_{\max}}}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (6.65)$$

Из условия прочности при кручении можно решать три рода задач:

1) определение действующих касательных напряжений в поперечном сечении бруса и сравнение их с допускаемыми напряжениями (*проверочный расчет*)

$$\tau = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau]; \quad (6.66)$$

2) определение допускаемой величины крутящего момента (*расчет на грузоподъемность*)

$$[M_z] = W_\rho \cdot [\tau]; \quad (6.67)$$

3) подбор сечения вала (*проектный расчет*)

$$W_\rho = \frac{M_z}{[\tau]}. \quad (6.68)$$

Чаще всего приходится выполнять проектные расчеты. Для сплошного круглого вала $W_\rho \approx 0,2d^3$, поэтому его диаметр найдем из выражения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2 \cdot [\tau]}} = 0,172 \sqrt[3]{\frac{M_z}{[\tau]}}, \text{ мм.} \quad (6.69)$$

При этом диаметр вала находится для наиболее нагруженного участка.

Для расчета наружного диаметра пустотелого вала используем выражение

$$D = 0,172 \sqrt[3]{\frac{M_z}{(1 - \alpha^4) \cdot [\tau]}}, \text{ мм.} \quad (6.70)$$

Условие жесткости заключается в том, что угол закручивания единицы длины вала не должен превышать определенной допускаемой величины. Это условие необходимо учитывать, чтобы избежать явления пружинения при остановках валов.

Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах и обозначается $[\varphi_0]$.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\varphi_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} \leq [\varphi_0]. \quad (6.71)$$

Величины допускаемых углов закручивания зависят от материала и служебного назначения вала и принимаются в пределах $[\varphi_0] = 0,25 - 1,00 \frac{\text{град}}{\text{м}}$.

Аналогично прочностным расчетам при расчетах на жесткость выполняют три вида расчетов: проверочный расчет, расчет на грузоподъемность и проектный расчет.

Длинные и ответственные валы рассчитывают на прочность и жесткость и окончательно принимают большее из полученных значений найденных величин.

6.6.4. Расчет цилиндрических витых пружин

Винтовые пружины являются одним из наиболее широко распространенных упругих элементов современных механизмов и машин. Их используют главным образом в качестве амортизаторов – для смягчения ударов и толчков. В нефтеперерабатывающем оборудовании пружины используются в качестве аккумуляторов энергии, для приведения в движение отдельных деталей или механизмов.

По форме винтовые пружины делят на цилиндрические, конические и фасонные. Приведем упрощенный расчет цилиндрических винтовых пружин растяжения и сжатия (рис. 6.53, *а* и *б*), изготовленных из проволоки круглого поперечного сечения.

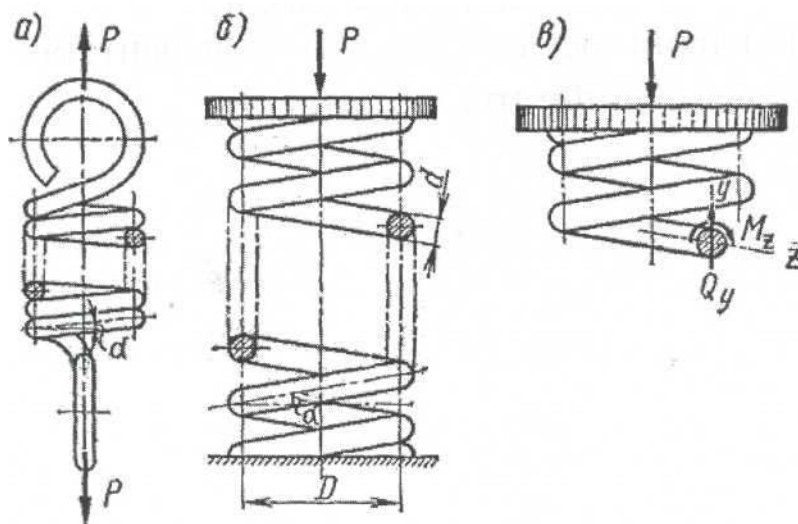


Рис. 6.53. К расчету цилиндрической витой пружины

Расчет пружин растяжения и сжатия на прочность и жесткость одинаков, но для пружин сжатия при $\frac{H}{d} \geq 2,6$ (H – высота пружины в свободном состоянии; D – средний диаметр) возникает опасность потери устойчивости (выпучивания). Для предотвращения этого негативного явления сравнительно высокие пружины монтируют в гильзах или на оправках, препятствующих выпучиванию пружин.

Угол наклона α витков пружины будем считать небольшим ($\alpha \leq 15^\circ$).

Рассечем виток пружины плоскостью, проходящей через ее ось [4]. Учитывая введенное ограничение, можем считать, что это сечение является для витка поперечным, т.е. принимаем $\alpha = 0$ и рассматриваем пружину как бы состоящей из колец, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к ее продольной оси. Рассматривая условие равновесия отсеченной части пружины (рис. 6.49, в) при данном ограничении, можно считать, что в поперечном сечении витка возникают два внутренних силовых фактора:

- поперечная сила $Q_y = P$;
- крутящий момент $M_z = P \frac{D}{2}$.

Таким образом, в поперечном сечении витка возникают только касательные напряжения. Для их определения введем следующие допущения:

1. Касательные напряжения, связанные с наличием крутящего момента, определяются так же, как и при кручении прямого бруса круглого поперечного сечения. Эпюра этих напряжений для точек горизонтального диаметра приведена на рис. 6.54, а.

2. Касательные напряжения, связанные с наличием поперечной силы, распределены по сечению равномерно. Эпюра этих напряжений приведена на рис. 6.54, б.

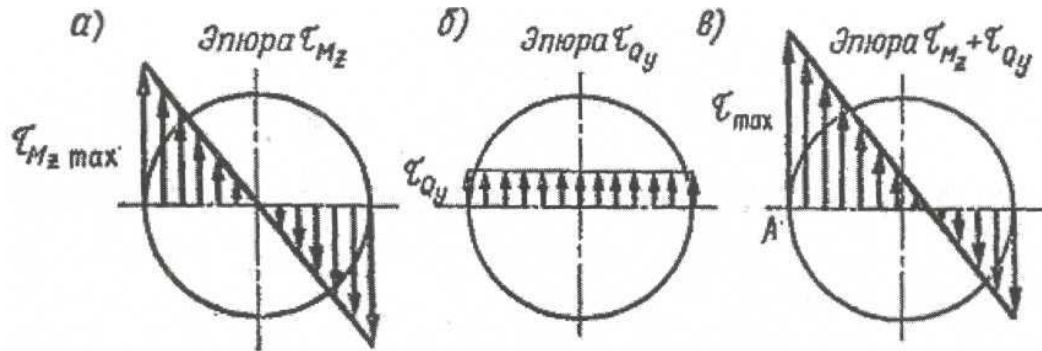


Рис. 6.54. Эпюры напряжений в витке пружины

Суммируя касательные напряжения, возникающие в точках горизонтального диаметра сечения витка, получаем результирующую эпюру, показанную на рис. 6.54, в. Очевидно, что опасной оказывается точка A , ближайшая к оси пружины. Для этой точки имеем

$$\tau_A = \tau_{\max} = \tau_{M_z \max} + \tau_{Q_y}$$

или, учитывая, что

$$\tau_{M_z \max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (6.72)$$

и

$$\tau_{Q_y} = \frac{Q_y}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}, \quad (6.73)$$

получаем

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right). \quad (6.74)$$

Отношение среднего диаметра пружины D к диаметру проволоки d обозначим c :

$$c = \frac{D}{d}, \quad (6.75)$$

тогда вместо формулы (6.74) имеем

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{1}{2c} \right). \quad (6.76)$$

Отношение c называют *индексом пружины*; обычно $c = 5 \dots 12$.

При указанных значениях c второе слагаемое в скобках в формуле (6.76) составляет не более 0,1 от первого. Если пренебречь вторым слагаемым и ввести поправочный коэффициент k , зависящий от индекса пружины и угла подъема ее витка, условие прочности пружины можно записать в виде

$$\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (6.77)$$

Для практических расчетов значение поправочного коэффициента k получают по формуле

$$k = \frac{4c + 1}{4c - 4}. \quad (6.78)$$

Пружины изготавливают из высококачественных сталей и допускаемые напряжения имеют весьма высокие значения: $[\tau] = 200 \dots 1000$ МПа.

Осадка (изменение высоты пружины под нагрузкой) λ определяется по формуле

$$\lambda = \frac{8\pi D^3 n}{Gd^4}. \quad (6.79)$$

где n — число витков.

Пользуясь понятием о коэффициенте жесткости, можно представить формулу (6.79) в виде

$$\lambda = \frac{P}{C}, \quad (6.80)$$

где $C = \frac{Gd^4}{8D^3 n}$ — *коэффициент жесткости пружины*, численно равный силе, вызывающей осадку, равную единице длины.

Если вместо коэффициента жесткости ввести величину, ему обратную, — *коэффициент податливости* $\beta = \frac{8D^3 n}{Gd^4}$, то получим

$$\lambda = \beta P. \quad (6.81)$$

Зависимость между нагрузкой пружины и изменением ее высоты, задаваемая в виде графика, называется *характеристикой пружины*.

6.7. Изгиб прямого бруса

Изгиб – один из видов деформации бруса, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны оси кривого бруса. Этот вид деформации часто встречается в многочисленных инженерных конструкциях и узлах машин. Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса изгибающих моментов и часто, одновременно с ними, поперечных сил.

Изгибающий момент – внутренний силовой фактор, возникающий в поперечном сечении бруса, а именно: момент относительно оси, расположенной в плоскости поперечного сечения и проходящей через его центр тяжести; он действует в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению бруса.

Брусья, работающие преимущественно на изгиб, принято называть *балками*.

6.7.1. Основные понятия

Изгиб называют *чистым*, если в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты. Если же совместно с изгибающими моментами в сечениях балки возникают и поперечные силы, то *изгиб* называют *поперечным*.

Деформация изгиба имеет место при воздействии на балку внешних сил, приложенных перпендикулярно к ее оси, и пар сил, плоскость действия которых проходит через ее ось.

Плоскости поперечного сечения балки, в которых лежат главные центральные оси инерции, называют *главными плоскостями* балки.

Плоскость, проходящая через ось балки, в которой действуют внешние силы, называется *силовой плоскостью*. Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения балки называется *силовой линией*. Если силовая плоскость проходит через одну из главных плоскостей балки и ось балки искривляется в этой же плоскости, то изгиб называют *прямым* или *плоским*. Если силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки и изогнутая ось не лежит в силовой плоскости, то изгиб называют *косым*.

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями. На практике применяют три основных типа опор.

1. *Шарнирно-неподвижная опора*, (рис. 6.55, *а*). Эта опора допускает свободный поворот сечения балки над опорой в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира, но не дает возможности смещаться ни по вертикали, ни по горизонтали. В такой опоре возникают две составляющие опорной реакции: X и Y (рис. 6.55, *б*).

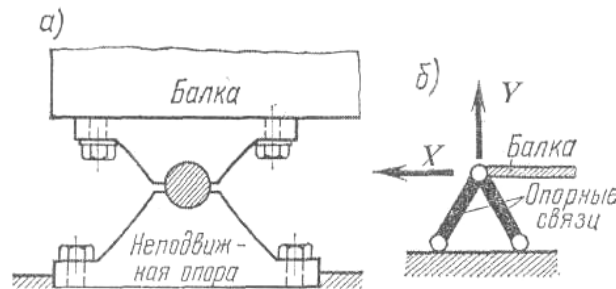


Рис. 6.55. Шарнирно-неподвижная опора: *а* – вид опоры;
б – схематичное изображение и составляющие опорной реакции

2. *Шарнирно-подвижная опора* (рис. 6.56, *а*). Эта опора допускает перемещение в одном направлении, например по горизонтали, и поворот сечения над опорой вокруг шарнира. Реакция опоры направлена вдоль опорной связи или перпендикулярно плоскости опирания катков (рис. 6.56, *б*).

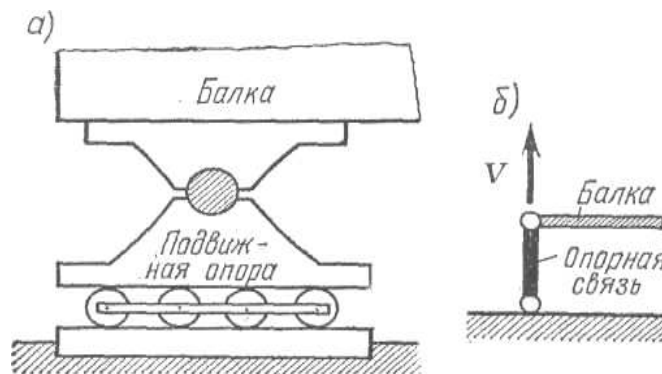


Рис. 6.56. Шарнирно-подвижная опора: *а* – вид опоры;
б – схематичное изображение и составляющие опорной реакции

3. *Заделка* (рис. 6.57, *а*). Такая опора не допускает поворота и перемещения по двум направлениям сечения балки, примыкающего к заделке. Реакции в заделке состоят из вертикальной силы Y , горизонтальной силы X и момента M (рис. 6.57, *б*). Иногда заделку представляют в виде трех линейных связей (рис. 6.57, *в*).

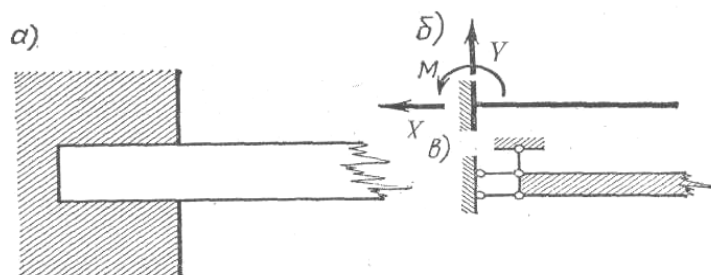


Рис. 6.57. Заделка: *a* – вид опоры; *б* – схематичное изображение и составляющие опорной реакции; *в* – иное изображение заделки

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузку, расположенную в одной плоскости, ее необходимо закрепить в этой плоскости с помощью описанных выше связей. Наименьшее число связей, обеспечивающее неподвижность балки по отношению к основанию в одной плоскости, равно трем.

Как отмечалось выше, в общем случае, в поперечных сечениях балки возникают изгибающий момент и поперечная сила. Для того чтобы определить внутренние силовые факторы в произвольном поперечном сечении используют метод сечения.

На рисунке 6.58 показана балка, рассеченная плоскостью A_0 . Воздействие правой части, изображенной пунктиром, на левую часть заменено поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_x .

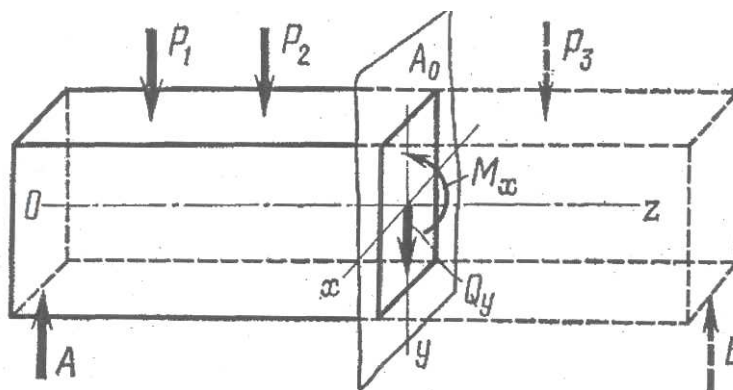


Рис. 6.58. К определению внутренних силовых факторов при изгибе балки

Установим для изгибающего момента и поперечной силы следующее правило знаков: *изгибающий момент будем считать положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки. Поперечную силу будем считать положительной, если она стремится повернуть вырезанный из балки элемент бесконечно малой длины по ходу часовой стрелки* (рис. 6.59).

На рисунке 6.59, б показана балка, которая двумя сечениями, проведенными нормально к оси, разрезана на три части. Действие изгибающего момента и поперечной силы на эти три части показано в положительном направлении.

На рисунке 6.59, а видно, что деформация изгиба сопровождается растяжением одних волокон и сжатием других. Очевидно, что между ними есть волокно, которое не подверглось ни деформации сжатия, ни деформации растяжения. Это волокно принято называть *нейтральным слоем* балки.

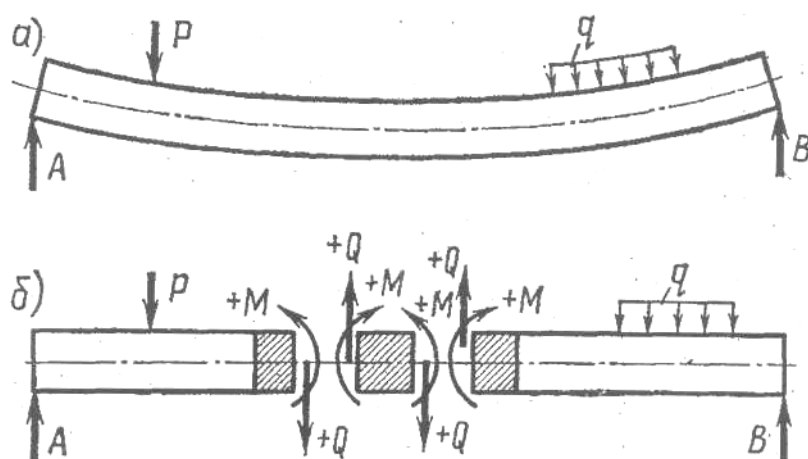


Рис. 6.59. Изогнутая балка (а) и правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента (б)

6.7.2 Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Графики, выражающие законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов по длине балки, называются *эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов*. Каждая ордината соответствующей эпюры представляет собой поперечную силу или изгибающий момент в соответствующем сечении балки.

Построение эпюр производится следующим образом [1,5]. Прежде всего, по заданной нагрузке и схеме опирания балки определяют опорные реакции. Поперечные силы и изгибающие моменты зависят от положения сечения, в котором они определяются, поэтому, балку необходимо разбить на условные участки, в пределах которых они будут иметь свои законы изменения.

При построении эпюр следует придерживаться определенных правил:

- ось, на которой строится эпюра, проводят параллельно оси балки;
- ординаты эпюры откладывают в выбранном масштабе от оси эпюры по перпендикуляру (положительные – вверх, отрицательные – вниз);

- концы отложенных ординат соединяем толстой линией;
- эюру штрихуем тонкими вертикальными линиями;
- числовое значение ординат проставляем в характерных точках эюры;

- в поле эюры ставим знак (плюс или минус, обведенные кругом).

Эюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной сосредоточенной силой. Дана однопролетная балка, нагруженная сосредоточенной силой F , (рис. 6.60, a).

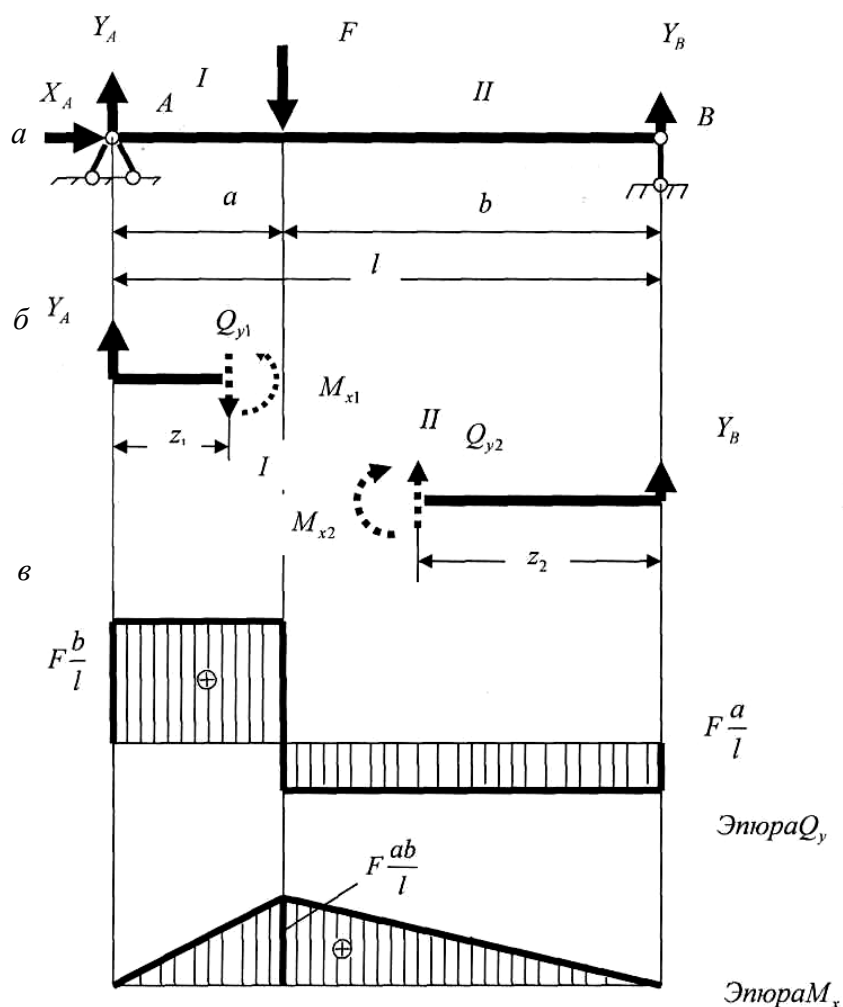


Рис. 6.60. Схема нагружения однопролетной балки (a), применение метода сечений ($б$), эюры поперечных сил ($в$) и изгибающих моментов ($г$)

1. Определяем величины опорных реакций A и B . Условно направляем составляющие опорных реакций следующим образом: Y_A , Y_B – вертикально вверх, X_A – горизонтально направо (рис. 6.60, a).

Составляем уравнения равновесия и находим искомые величины:

$$\sum F_x = 0; \quad X_A = 0.$$

$$\sum M_A = 0; \quad F \cdot a - Y_B \cdot l = 0; \quad Y_B = F \frac{a}{l}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad Y_A \cdot l - F \cdot b = 0; \quad Y_A = F \frac{b}{l}.$$

Правильность определения опорных реакций оцениваем следующим уравнением статики:

$$\sum F_y = F \frac{b}{l} - F + F \frac{a}{l} = 0.$$

Равенство нулю говорит о том, что опорные реакции определены верно.

2. Разбиваем балку на два участка (I, II), границами которых будут сечения, в которых приложены сосредоточенные силы, включая и реактивные.

На расстоянии z_1 от опоры A (участок I) проведем условное сечение и используя правила знаков, составим выражения для определения поперечной силы Q_{y1} и изгибающего момента M_{x1} (рис. 6.60, б).

Для левой части I участка балки имеем:

Сумма проекций на ось Y всех сил, действующих на отсеченную часть должна равняться нулю.

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A - Q_{y1} = 0; \quad Q_{y1} = Y_A = F \frac{b}{l}.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

Сумма моментов относительно центра тяжести отсеченного сечения левой части балки должна равняться нулю.

$$\sum M_{o1} = 0; \quad M_{x1} - Y_A \cdot z_1 = 0; \quad M_{x1} = Y_A \cdot z_1 = F \frac{b}{l} z_1.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой линии, следовательно, изгибающий момент на этом участке изменяется по линейному закону, z_1 изменяется в пределах I участка от 0 до a .

$$\text{Тогда, при } z_1 = 0 \quad M_{x1} = 0; \quad z_1 = a \quad M_{x1} = F \frac{b}{l} a.$$

На расстоянии z_2 от опоры B (участок II) проведем условное сечение и составим аналогичные выражения для определения Q_{y2} и M_{x2} .

$$\sum M_{o2} = 0; \quad M_{x2} - Y_B \cdot z_2 = 0; \quad M_{x2} = Y_B \cdot z_2 = F \frac{a}{l} z_2.$$

$$\sum F_y = 0; \quad Y_B = Q_{y2} = 0; \quad Q_{y2} = -Y = -F \frac{a}{l}.$$

Величину z_2 можно принимать в пределах II участка от 0 до b .

При $z_2 = 0$ $M_{x2} = 0$; $z_2 = b$

$$M_{x2} = F \frac{a}{l} b.$$

По полученным значениям строим эпюру Q_y . В удобном масштабе откладываем полученные значения Q_{y1} и Q_{y2} , обводим контур эпюры толстой линией, выполняем штриховку и проставляем соответствующие знаки (рис. 6.60, в).

Аналогично строим эпюру изгибающих моментов M_x (рис. 6.60, г).

Выполним анализ построенных эпюр.

Эпюра поперечных сил Q_y имеет три скачка в сечениях, в которых приложены сосредоточенные силы, включая и реактивные. Абсолютная величина скачка равна величине приложенной в этом сечении силы. При положительной поперечной силе изгибающий момент возрастает, а при отрицательной – убывает. В границах участков поперечная сила имеет постоянное значение, т.к. распределенная нагрузка отсутствует.

На эпюре изгибающих моментов M_x в сечениях, в которых приложены сосредоточенные силы, наблюдается перегиб эпюры. На участках, где поперечная сила имеет постоянное значение, изгибающий момент меняется по линейному закону. В сечении балки, в котором эпюра поперечных сил меняет знак, на эпюре изгибающих моментов наблюдается экстремум.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной парой сил с моментом M (рис. 6.61). Реакции опор определяются аналогичным способом, рассмотренным выше. Балка разбивается на два участка и все действия по нахождению значений поперечных сил и изгибающих моментов аналогичны.

Анализ представленных эпюр показывает, что нагрузка в виде сосредоточенной пары сил не влияет на очертание эпюры поперечных сил Q_y ; она имеет постоянный характер и два скачка в сечениях, в которых приложены сосредоточенные реактивные силы Y_A и Y_B . На эпюре изгибающих моментов в сечениях, в которых приложены реактивные силы, наблюдаем

перегиб эпюры, а в сечении, в котором приложена пара сил, – скачок на величину момента пары.

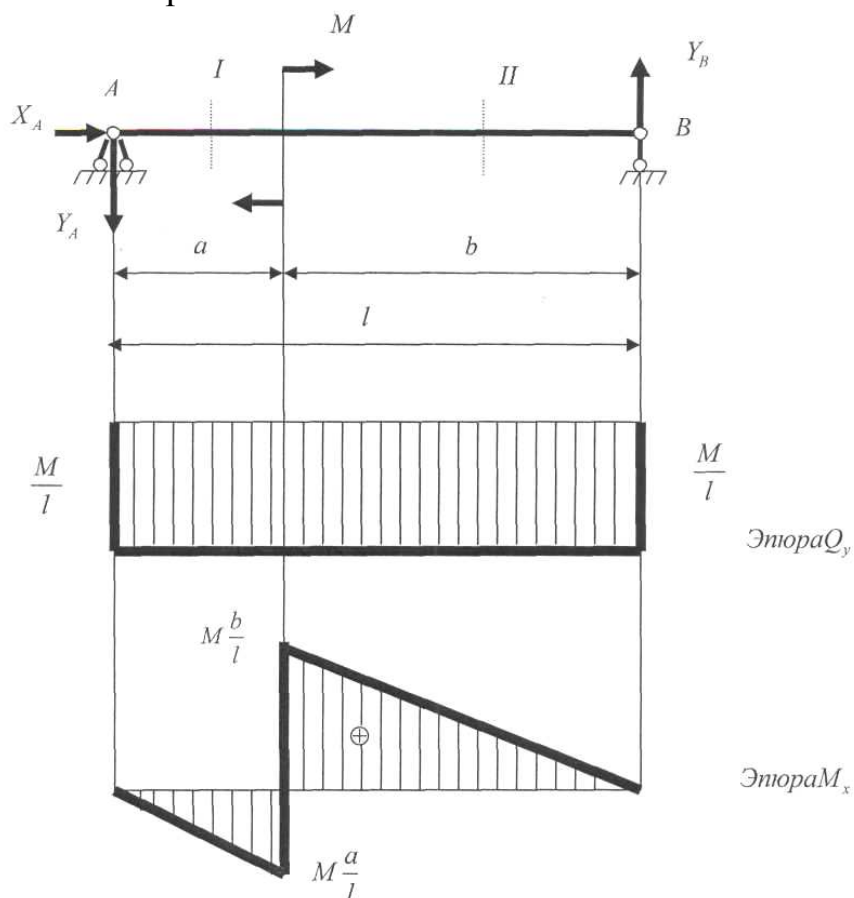


Рис. 6.61. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной парой сил с моментом M

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 6.62). Алгоритм определения поперечных сил и изгибающих моментов тот же, что и рассмотренный выше. Внешний вид эпюр внутренних силовых факторов при этом способе нагружения и закрепления балки представлен на рис. 6.62. Анализ построенных эпюр показывает, что на пролете балки, на который действует равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила меняется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы. Скачки на эпюре поперечных сил Q_y имеют место в сечениях, в которых действуют реактивные силы Y_A и Y_B . На эпюре изгибающих моментов M_x в сечениях, где приложены реактивные силы Y_A и Y_B , наблюдается перегиб эпюры и при положительном значении поперечной силы изгибающий момент возрастает, а при отрицательном значении – убывает.

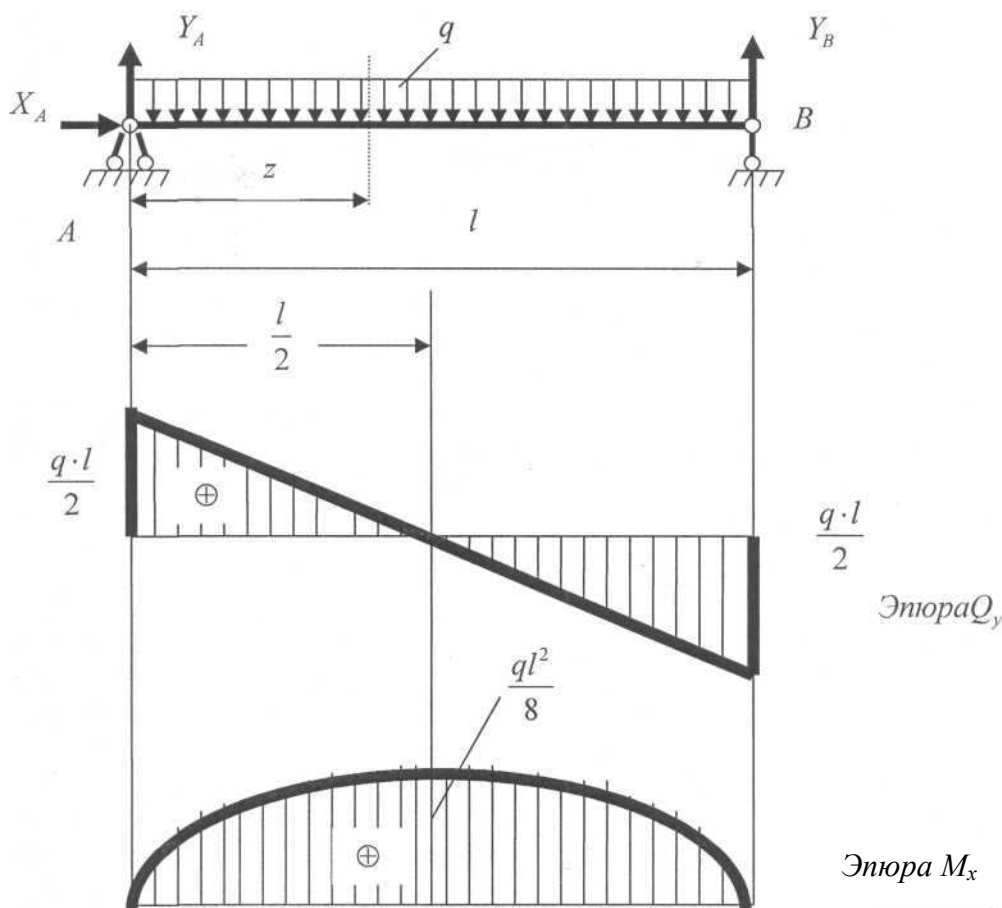


Рис. 6.62. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой F (рис. 6.63). В жесткой заделке под действием вертикальной силы F возникает вертикальная составляющая Y_A и реактивный момент m_A . Горизонтальная составляющая жесткой заделки X_A будет равна нулю.

Из уравнений равновесия определяем:

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A - F = 0; \quad Y_A = F.$$

$$\sum M_A = 0; \quad m_A - F \cdot l = 0; \quad m_A = F \cdot l.$$

Для консольных балок (жестко заделанных одним концом) предварительно реакции опор можно и не определять. Это связано с тем, что правый конец балки, в данном случае, свободен и для определения выражений внутренних силовых факторов и построения их эпюр всю балку можно рассматривать как условно отсеченную правую часть и, при $z = l$, значения поперечной силы и изгибающего момента будут равны значениям реактивных составляющих жесткой заделки.

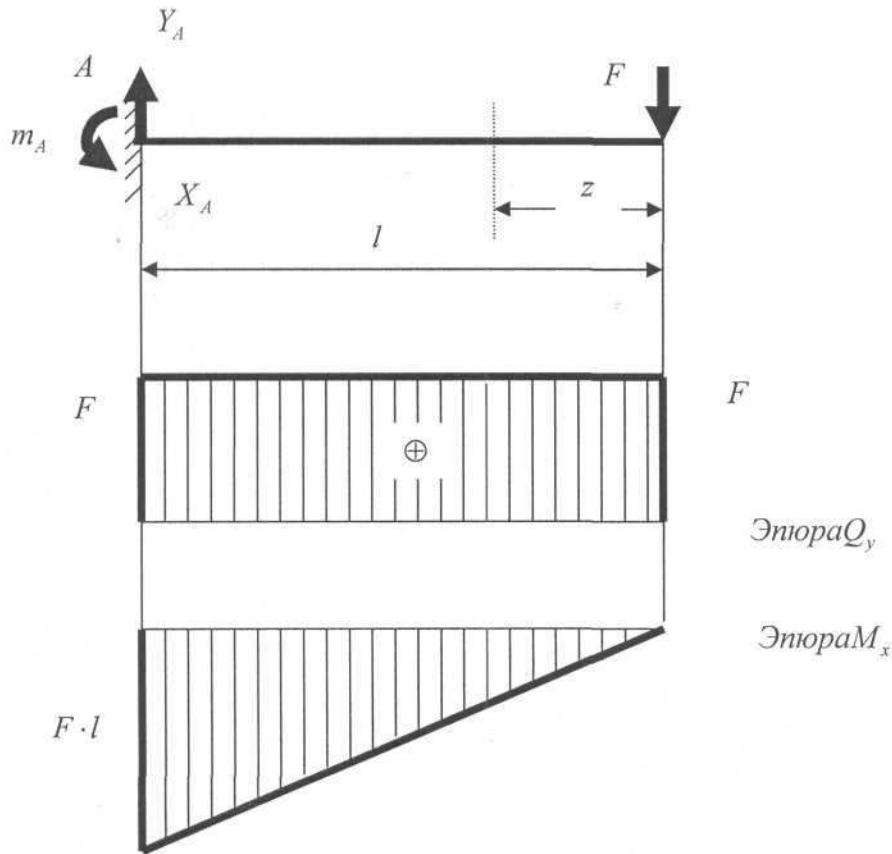


Рис. 6.63. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой F

6.7.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки

Изгибающий момент M_x , поперечная сила Q_y и интенсивность внешней распределенной нагрузки q связаны между собой определенной зависимостью.

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y;$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = q.$$

Из этих двух дифференциальных зависимостей вытекает следующая:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q. \quad (6.82)$$

Производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки в том же сечении, а производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том

же сечении. Полученная дифференциальная зависимость известна как теорема Д.И. Журавского.

6.7.4. Нормальные и касательные напряжения при изгибе

При определении напряжений при изгибе принимают следующие основные допущения:

- поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;
- продольные соседние волокна балки не давят друг на друга, т.е. они испытывают только простое растяжение или сжатие;
- напряжения и деформации в балке связаны между собой законом Гука.

При чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения (рис. 6.64), которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (6.83)$$

где σ – нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения;

M_x – изгибающий момент в исследуемом поперечном сечении;

I_x – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

y – расстояние от нейтральной оси до данной точки исследуемого поперечного сечения.

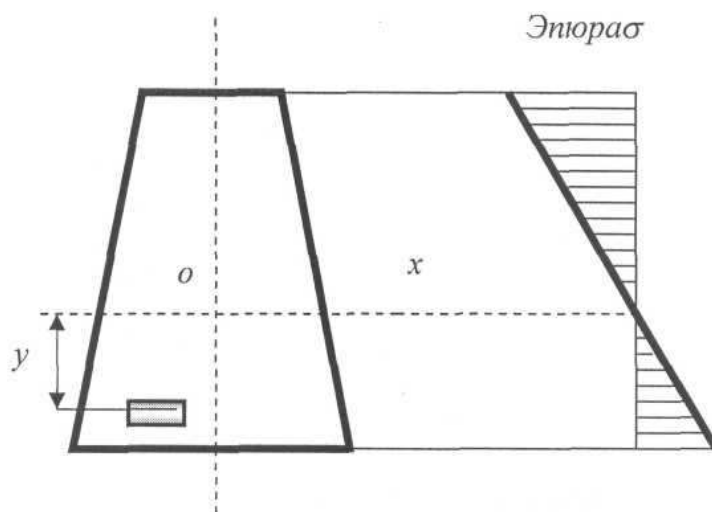


Рис. 6.64. Эпюра нормальных напряжений при изгибе

Нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения и перпендикулярна к силовой плоскости.

Знак эпюры нормальных напряжений определяется знаком изгибающего момента в исследуемом сечении.

Максимальные нормальные напряжения будут возникать в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (6.84)$$

где $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$ – осевой момент сопротивления поперечного сечения.

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают не только нормальные, но и касательные напряжения (рис. 6.65), которые определяются по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b_y}, \quad (6.85)$$

где τ – касательное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки;

Q_y – поперечная сила в исследуемом поперечном сечении;

S_x^{omc} – статический момент относительно нейтральной оси Ox части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси;

I_x – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

b_y – ширина поперечного сечения балки на уровне рассматриваемой точки (для прямоугольного сечения $b = \text{const}$).

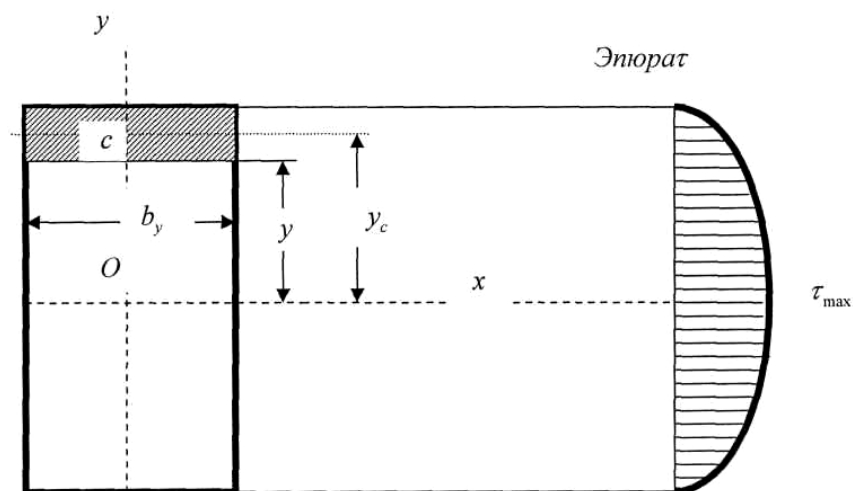


Рис. 6.65. Эпюра касательных напряжений для заданного поперечного сечения балки

Знак эпюры касательных напряжений определяется знаком поперечной силы, действующей в исследуемом поперечном сечении балки.

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения. Для крайних слоев поперечного сечения значения касательных напряжений будут равны нулю, так как статический момент отсеченной части равен нулю. В волокнах нейтрального слоя там, где статический момент отсеченной части наибольший, касательные напряжения достигают максимального значения.

6.7.5. Расчет балок на прочность

Расчет балок на прочность обычно ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. Обозначив эти напряжения $\sigma_{\max}$, получаем условие прочности при изгибе в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (6.86)$$

Зная условие прочности, можно решать три рода задач.

1. *Проверочный расчет.* По известным изгибающему моменту и моменту сопротивления поперечного сечения определяют нормальное напряжение σ и сравнивают его с допустимым значением $[\sigma]$. Разница между ними не должна превышать $\pm 5\%$.

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (6.87)$$

2. *Проектный расчет.* По известным изгибающему моменту и допускаемому напряжению находится момент сопротивления сечения, по которому подбираются рациональная форма и размеры поперечного сечения балки.

$$W_x = \frac{M_{x_{\max}}}{[\sigma]}. \quad (6.88)$$

3. *Расчет грузоподъемности.* По известному моменту сопротивления поперечного сечения и допускаемому напряжению определяют допустимую величину изгибающего момента для рассчитываемой балки.

$$[M_x] = W_x [\sigma]. \quad (6.89)$$

Максимальный изгибающий момент определяют либо расчетом, либо из эпюры изгибающих моментов.

Так как вблизи нейтральной оси материал балки напряжен незначительно, то целесообразно больше материала располагать дальше от нейтрального слоя. Поэтому цельнометаллические балки прямоугольного поперечного сечения применяются крайне редко, а весьма распространены прокатные профильные балки двутаврового, таврового, швеллерного, замкнутого и других сечений, геометрические характеристики которых приводятся в стандартах.

Если возникает необходимость проверки прочности балки в ряде характерных точек поперечного сечения, то расчет производят по главным напряжениям, которые учитывают величины нормальных и касательных напряжений, действующих в этих точках:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.90)$$

Для балок постоянного поперечного сечения расчет на прочность выполняется по сечению, в котором возникает наибольший изгибающий момент. Это *опасное* сечение и по условию прочности наибольшие нормальные напряжения в опасных точках сечения не должны превышать допускаемых. Во всех остальных точках этого сечения и во всех сечениях балки в целом упругие свойства материала используются не полностью, так как материал работает при напряжениях, более низких, чем допускаемые. С целью облегчения конструкции и экономии материала, по возможности, необходимо стремиться к тому, чтобы наибольшие нормальные напряжения во всех сечениях были одинаковы, т.е. чтобы все сечения были *равноопасны*. Балку, удовлетворяющую этому условию, называют *балкой равного сопротивления изгибу*.

Рассмотрим простую консоль прямоугольного поперечного сечения, нагруженную силой P на свободном конце (рис. 6.66). Выясним, как должна меняться ширина сечения при постоянной его высоте, если наибольшие нормальные напряжения во всех поперечных сечениях одинаковы.

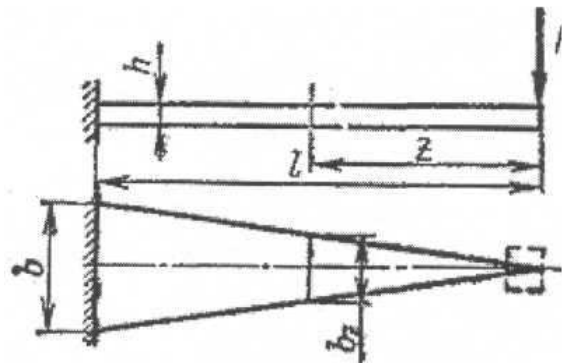


Рис. 6.66. К расчету балки равного сопротивления изгибу по ширине

Для балки постоянного сечения опасное сечение расположено в заделке; условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} = \frac{P \cdot l}{\frac{b \cdot h^2}{6}} \leq [\sigma].$$

Для произвольного сечения, отстоящего на расстоянии z от свободного конца, условие прочности запишется так

$$(\sigma_{\max})_z = \frac{P \cdot z}{\frac{b_z \cdot h^2}{6}} \leq [\sigma],$$

где b_z – ширина рассматриваемого сечения.

По условию равнопрочности $(\sigma_{\max})_z = \sigma_{\max}$ или $\frac{P \cdot z}{\frac{b_z \cdot h^2}{6}} = \frac{P \cdot l}{\frac{b \cdot h^2}{6}},$

откуда

$$b_z = b \frac{z}{l}. \quad (6.91)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае *ширина* сечения должна меняться по *линейному* закону (см. рис. 6.66).

Аналогично можно получить значение переменной высоты при постоянной ширине для равнопрочной балки

$$h_z = h \sqrt{\frac{z}{l}}. \quad (6.92)$$

В этом случае *высота* сечения должна изменяться по *параболическому* закону. Балка равного сопротивления изгибу, имеющая прямоугольное сечение переменной высоты, показана на рис. 6.67.

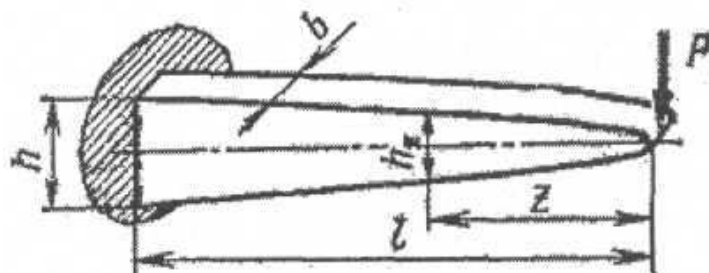


Рис. 6.67. Балка равного сопротивления изгибу по высоте сечения

6.7.6. Деформации линейные и угловые. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

При изгибе (рис. 6.68) ось балки Oz искривляется (пунктирная линия) и точка, лежащая на ней, например m , получает некоторое перемещение mm_1 , которые принято называть *прогибом*. Так как эти перемещения малы по сравнению с размерами балки, то их направления можно считать перпендикулярными по отношению к первоначальному положению оси балки. Кривая линия, в которую превращается первоначально прямолинейная ось балки после приложения к ней внешней нагрузки, называется *изогнутой осью* балки или ее *упругой линией*.

При деформации балки сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются по отношению к своему прежнему положению. Угол, на который поворачивается каждое сечение по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота* сечения.

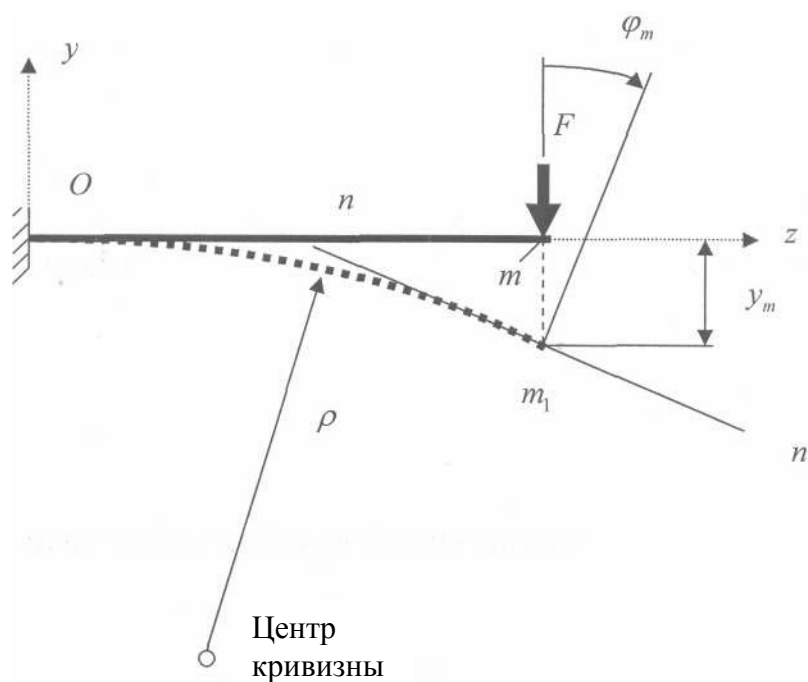


Рис. 6.68. Линейные и угловые перемещения сечений балки при изгибе

Таким образом, при плоском изгибе линейные и угловые перемещения сечений балки характеризуются двумя величинами:

- *прогибом* y центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки;
- *углом поворота сечения* ϕ относительно первоначального положения.

Касательная линия $n - n$, проведенная к изогнутой оси балки в произвольной точке, m_1 составляет с осью Oz угол, равный углу поворота сечения φ . Для балок угол φ обычно не превышает 1° .

Максимальный прогиб называют *стрелой прогиба*.

При чистом изгибе кривизна изогнутой оси определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad (6.93)$$

где $E \cdot I_x$ – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Если ось Oy направлена вверх, а прогиб mm_1 вниз, то правая часть приведенного равенства берется со знаком минус.

При малых перемещениях упругая линия представляет собой весьма пологую кривую, и с достаточной точностью можно принять, что кривизна упругой линии равна второй производной от ее уравнения:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2} = y''.$$

Таким образом, приближенное *дифференциальное уравнение изогнутой оси* имеет вид

$$y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad (6.94)$$

Практически полученным уравнением можно пользоваться, если $\frac{y_{\max}}{l} \leq 0,05$, где l – пролет балки.

После первого интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки получается *уравнение углов поворота* поперечных сечений:

$$\varphi = y' = \frac{1}{E \cdot I_x} \left[\int M_x dz + C \right]; \quad (6.95)$$

после второго интегрирования – *уравнение прогибов*:

$$y = \frac{1}{E \cdot I_x} \left[\int dz \int M_x dz + C \cdot z + D \right]. \quad (6.96)$$

В полученных уравнениях C и D – постоянные интегрирования, которые определяются из условий на опорах и на границах ее участков:

– каждая подвижная или неподвижная опоры дает *одно опорное условие* – равенство нулю прогиба в сечении балки на опоре;

– жесткая заделка дает *два опорных условия* – равенство нулю прогиба и угла поворота в сечении заделки;

– на границе двух смежных участков получаем *два граничных условия* – равенство между собой прогибов и углов поворота общих сечений на границе обоих участков.

При определении перемещений методом непосредственного интегрирования необходимо для каждого участка балки составлять выражения изгибающих моментов и производить интегрирование основного дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Поэтому при двух и большем числе участков балки применение изложенного метода становится затруднительным. Существует ряд методов определения линейных и угловых перемещений сечений балки при изгибе, не требующих прямого интегрирования основного дифференциального уравнения изогнутой оси балки: метод начальных параметров, метод фиктивной нагрузки, метод Мора, энергетический метод и др.

Достаточно часто балки, хотя и удовлетворяют условиям прочности, не удовлетворяют необходимой жесткости, т.е. изогнутая ось имеет значительную кривизну и ее прогибы недопустимо велики. Такие прогибы могут нарушить нормальную эксплуатацию конструкции. Поэтому для строительных конструкций, перекрытий, ферм, мостов и др. большое значение имеет соблюдение допускаемых значений прогибов, т.е. помимо расчетов на прочность, возникает необходимость выполнять *расчет на жесткость*,

для чего задаются величиной наибольшего допускаемого прогиба $[y] = \frac{l}{m}$,

где l – величина пролета балки; m – число, устанавливаемое нормами проектирования. Обычно m устанавливается в пределах от 200 до 1000. Для ответственных сооружений, например железнодорожных мостов, величина m принимается около 1000.

Условие жесткости выражается формулой

$$y_{\max} \leq [y], \quad (6.97)$$

т.е. *наибольший прогиб балки не должен превышать допускаемого значения.*

При расчете на жесткость в формулу прогибов для заданной схемы балки и нагрузки подставляют значения величины допускаемого прогиба и определяют величину требуемого момента инерции, по которому и принимают необходимое сечение балки.

6.8. Основные положения теории напряженного состояния

Взаимодействие между частями элемента конструкции можно охарактеризовать величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке элемента. Эти величины зависят от направления сечения, проведенного через данную точку.

6.8.1. Понятие напряженного состояния в точке

Напряженным состоянием в данной точке тела называют совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.

Центральное растяжение или сжатие бруса является простейшим видом деформации тела, когда напряженное состояние всех его точек одинаково (однородное напряженное состояние). В общем случае в теле напряженное состояние неоднородно – оно меняется от точки к точке и поэтому по любому сечению этого тела напряжения распределены неравномерно.

Для изучения напряженного состояния в какой-либо точке мысленно выделяют бесконечно малый элементарный параллелепипед [3]. Ввиду малости параллелепипеда можно считать, что напряженное состояние во всех его точках одинаково и совпадает с напряженным состоянием в исследуемой точке. Будем считать, что напряжения, возникающие на его гранях, известны. Каждое из этих напряжений может быть разложено на три составляющих, параллельных координатным осям. Таким образом, в общем случае на трех исходных площадках возникают девять составляющих напряжений, показанных на рис. 6.69 (напряжения на невидимых гранях элемента не изображаем). Указанные девять величин называют *компонентами напряженного состояния* в данной точке.

Из условия равновесия выделенного элемента следует, что *составляющие касательных напряжений, возникающих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные к общему ребру этих площадок, равны по абсолютной величине, т.е.*

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (6.98)$$

Это положение называют *законом парности касательных напряжений*. Следовательно, из девяти компонентов напряженного состояния независимы лишь шесть.

Напряженное состояние в точке тела задано, если известны напряжения на любых трех проходящих через нее взаимно перпендикулярных площадках.

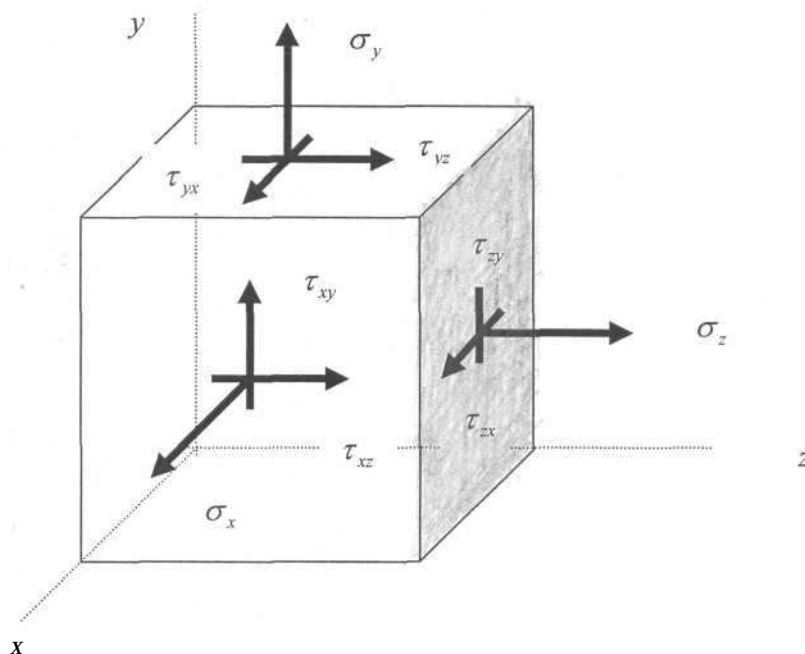


Рис. 6.69. Компоненты напряженного состояния в точке тела

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через исследуемую точку, имеются три взаимно перпендикулярные площадки, касательные напряжения на которых отсутствуют. *Эти площадки и возникающие на них нормальные напряжения называют главными.*

Главные напряжения обозначают σ_1 , σ_2 , σ_3 ; при этом индексы про- ставляются лишь после того, как эти напряжения вычислены, так, чтобы выполнялись алгебраические неравенства $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Для данной точки тела σ_1 – наибольшее (в алгебраическом смысле), а σ_3 – наименьшее напряжение. Напряжения растяжения считают положи- тельными.

Если главные напряжения в данной точке известны, то наиболее удобно принять их за исходные.

6.8.2. Виды напряженного состояния

Классификацию видов напряженного состояния ведут по главным напряжениям.

Если все три главных напряжения отличны от нуля, напряженное со- стояние называется *объемным* или *трехосным*. В случае если одно из главных напряжений равно нулю, напряженное состояние *называют пло- ским* или *двухосным*; если лишь одно из главных напряжений отлично от нуля, напряженное состояние называют *линейным* или *одноосным*.

Элементы, выделенные главными площадками, для разных частных случаев напряженного состояния показаны на рис. 6.70.

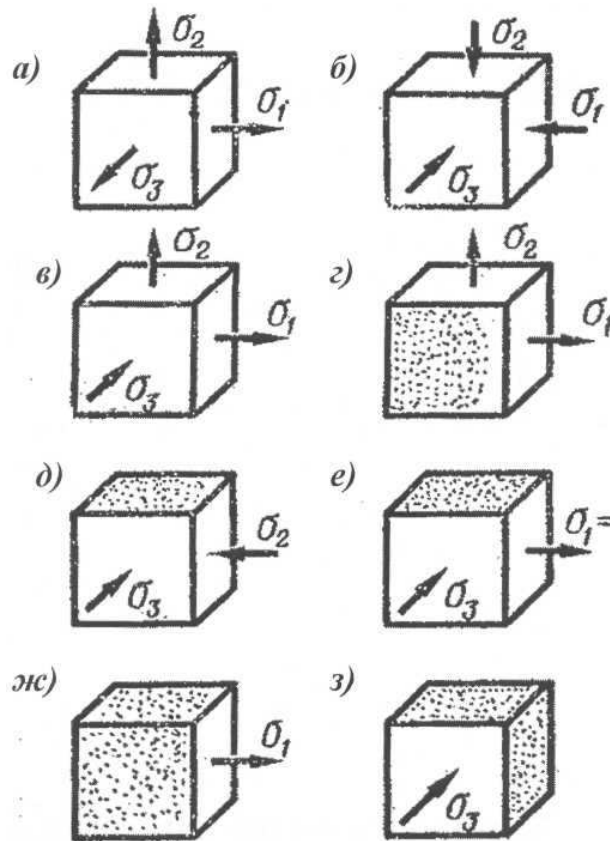


Рис. 6.70. Виды напряженного состояния: *a* – трехосное растяжение; *б* – трехосное сжатие; *в* – трехосное смешанное напряженное состояние; *г* – двухосное растяжение; *д* – двухосное сжатие; *е* – чистый сдвиг; *жс* – одноосное растяжение; *з* – одноосное сжатие

Максимальное для данной точки тела касательное напряжение $\tau_{\max}$ возникает на площадке, параллельной вектору σ_2 и делящей пополам прямой угол между площадками действия σ_1 и σ_3 . Это напряжение равно полуразности максимального и минимального главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (6.99)$$

На произвольной площадке, перпендикулярной к плоскости, в которой лежат векторы двух главных напряжений, например, σ_1 и σ_2 , нормаль к которой составляет угол α (рис. 6.71), нормальное и касательное напряжения определяют по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (6.100)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.101)$$

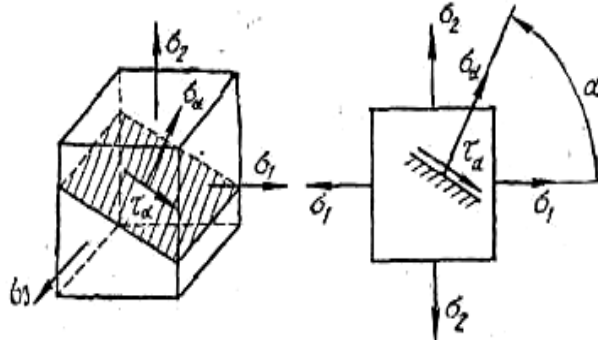


Рис. 6.71. Напряжения на произвольной площадке

При плоском напряженном состоянии в окрестности точки всегда можно выделить элементарный параллелепипед таким образом, чтобы две его грани были свободны от напряжений (рис. 6.72, а). Нормальное и касательное напряжения на площадке, нормаль к которой составляет угол α с осью z (рис. 6.72, б), определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha; \quad (6.102)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (6.103)$$

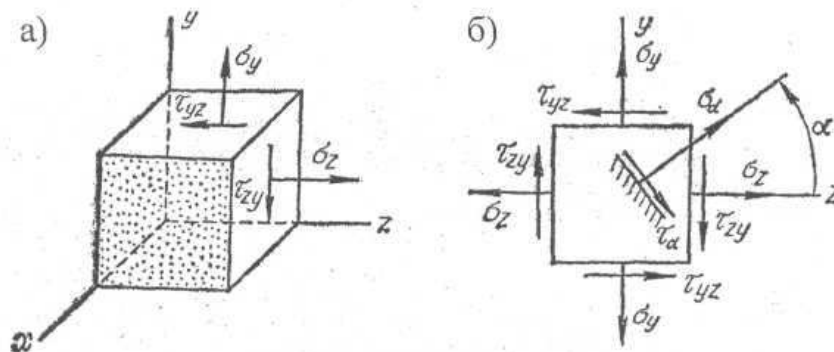


Рис. 6.72. Характер напряжений при плоском напряженном состоянии

Величины главных напряжений находят по формуле

$$\sigma_{\pm l} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (6.104)$$

Индексы у главных напряжений устанавливают после вычисления этих напряжений.

Положение главных площадок определяется через углы α_0 и $\alpha_0 + 90^\circ$ по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (6.105)$$

6.8.3. Понятие о теориях прочности

Важнейшей задачей, решением которой занимается наука о сопротивлении материалов, является оценка прочности конструкции по известному напряженному состоянию. Эта задача решается с помощью теорий прочности, которые устанавливают решающие факторы опасного для прочности состояния материала. Та или иная теория прочности на основе определенных предпосылок указывает, когда наступает опасное состояние материала, и дает общее теоретическое условие, связывающее предельное напряжение по прочности с наибольшим действующим в конструкции напряжением. За критерий прочности принимают напряжение, деформации, энергию деформации и т.д.

Существуют различные взгляды на причины, вызывающие опасное состояние материала. Одни считают, что опасное состояние наступает при достижении нормальными напряжениями предельного значения. Другие рекомендуют за критерий опасного состояния принимать наибольшую относительную деформацию, третьи – величины касательных напряжений. Предлагаемые критерии позволяют сравнивать разнотипные напряженные состояния с опасным состоянием материала при наиболее изученной деформации – простом растяжении. Напряженные состояния считают *равнопрочными*, если при пропорциональном увеличении действующих на конструкцию нагрузок в одно и то же число раз это приводит к опасному состоянию материала. Сравнение напряженных состояний материала проводят по величине эквивалентного напряжения при растяжении. Под *эквивалентным* понимают напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равнопрочным заданному напряженному состоянию.

Физические процессы, происходящие при переходе в опасные состояния, сильно различаются для пластичных и хрупких материалов, поэтому существенно могут различаться и условия перехода в эти состояния.

Рассмотрим несколько классических теорий прочности [1 – 5].

Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений): опасное состояние материала наступает в тот момент, когда

наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигнет опасного значения σ_0 . Условие нарушения прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{k}, \quad (6.106)$$

где k – коэффициент запаса; σ_0 – опасное значение напряжения, устанавливаемое при простом растяжении для данного материала.

Эта теория прочности приемлема лишь для весьма хрупких материалов (кирпич, керамика и др.) и является непригодной для большинства материалов.

Вторая теория прочности (теория наибольших деформаций): нарушение прочности наступает при достижении наибольшей линейной деформацией своего опасного значения ϵ_0 , которое определяется при простом растяжении. Условие нарушения прочности имеет вид

$$\epsilon_{\max} \leq [\epsilon] = \frac{\epsilon_0}{k}, \quad (6.107)$$

Эта теория прочности дает удовлетворительные результаты только для хрупкого состояния материала и для большинства пластичных материалов непригодна.

Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений): нарушение прочности наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение $\tau_{\max}$ достигает своего предельного значения τ_0 , которое определяется в момент появления больших пластических деформаций при простом растяжении. Условие нарушения прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_0}{k}, \quad (6.108)$$

Условие прочности материала по этой теории, выраженное в эквивалентных напряжениях при растяжении, имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (6.109)$$

где σ и τ – соответственно нормальное и касательное действующие напряжения.

Эта теория хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, и является непригодной для хрупких материалов.

Четвертая теория прочности (энергетическая теория формоизменения): опасное состояние наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего предельного значения $U_{\phi 0}$. Условие нарушения прочности имеет вид

$$U_{\phi 0} \leq [U_{\phi}]. \quad (6.110)$$

При простом растяжении в момент наступления текучести материала $U_{\phi 0} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2$. Условие прочности материала по этой теории, выраженное в эквивалентных напряжениях при растяжении, имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Энергетическая теория прочности хорошо согласуется с опытными данными для пластичных материалов.

Пятая теория прочности (теория прочности предельных состояний Мора): нарушение прочности происходит тогда, когда на некоторой площадке материала, испытывающего напряженное состояние, возникает неблагоприятная комбинация нормального и касательного напряжений. В теории прочности Мора в отличие от изложенных теорий не рассматриваются отдельные гипотезы, а на основе экспериментальных данных устанавливается определенная зависимость прочностных свойств материала от вида напряженного состояния. Для плоского напряженного состояния расчетная формула имеет вид

$$\sigma_{\text{расч}} = \sigma_1 - K\sigma_3 \leq [\sigma], \quad (6.111)$$

где K – коэффициент, учитывающий различные сопротивления материала растяжению и сжатию.

Эта теория прочности пригодна как для хрупких, так и для пластичных материалов. Для практических расчетов следует рекомендовать:

- четвертую и третью теории прочности – для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие;
- теорию прочности Мора – для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

При выборе той или иной теории прочности следует иметь в виду, что хрупкое или пластичное состояние материала определяется не только его характером, но и видом напряженного состояния, температурой, скоростью нагружения и т.д.

6.9. Сложное сопротивление

6.9.1. Одновременное действие изгиба и продольной силы

Очень многие конструкции работают одновременно как на изгиб, так и на сжатие или растяжение. Простейший случай приведен на рис. 6.73, когда на колонну действует нагрузка, вызывающая в любом сечении изгибающий момент, продольную и поперечную силы. Предполагая, что колонна обладает большой жесткостью, можно пренебречь ее деформациями и не учитывать изгибающие моменты от силы P , считая, что сечения колонны не перемещаются по горизонтали [4].

В этом случае можно применить принцип независимости действия сил и определить напряжение в точке C как сумму напряжений от сжатия и изгиба:

$$\sigma = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y. \quad (6.112)$$

Если нагрузка вызывает моменты относительно двух главных осей инерции сечения (рис. 6.74), то нормальное напряжение определяется как сумма трех напряжений:

$$\sigma = +\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (6.113)$$

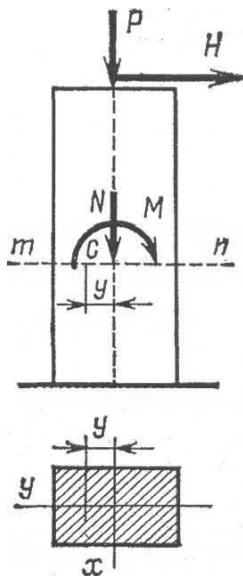


Рис. 6.73. Совместное действие изгиба и продольной силы

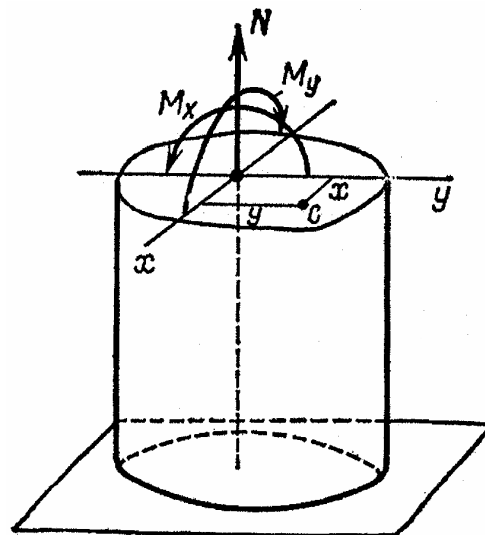


Рис. 6.74. Сложное нагружение колонны продольной силой и двумя изгибающими моментами

Если поперечное сечение имеет простую форму, то для определения наибольшего напряжения следует вычислить значения напряжений для ряда характерных точек. Если же сечение имеет сложную форму, то предварительно нужно найти положение нулевой линии и отыскать наиболее удаленную точку сечения от этой линии, в ней и будет наибольшее напряжение. Для того чтобы найти положение нулевой линии, необходимо в приведенные формулы положить $\sigma = 0$.

6.9.2. Внецентренное сжатие (растяжение)

Рассмотрим случай внецентренного сжатия массивных колонн (рис. 6.75). Такая схема очень часто встречается при расчете опор мостовых конструкций и при расчете колонн промышленных и других зданий и сооружений [2].

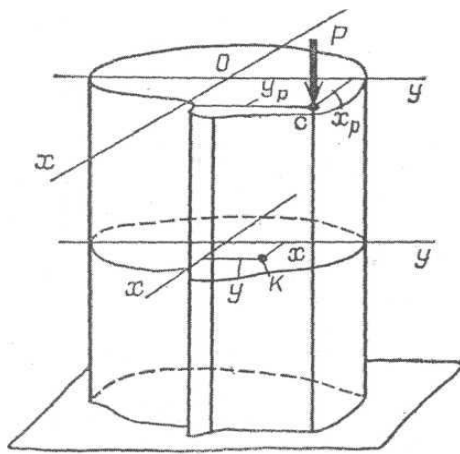


Рис. 6.75. Внецентренное действие продольной силы

Предположим, что сжимающая сила P приложена в точке c , которая имеет координаты x_p и y_p , отсчитанные относительно главных центральных осей инерции.

От этой силы, в общем случае, в произвольном сечении стержня возникают продольная сжимающая сила $N = -P$ и два изгибающих момента $M_x = \pm P y_p$ и $M_y = \pm P x_p$.

От этой силы, в общем случае, в произвольном сечении стержня возникают продольная сжимающая сила $N = -P$ и два изгибающих момента $M_x = \pm P y_p$ и $M_y = \pm P x_p$.

Напряжения в произвольной точке K , в общем случае, будет равно:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x. \quad (6.114)$$

Нулевая линия делит поперечное сечение на две части: в одной из них напряжения сжимающие, а в другой – растягивающие. Для того чтобы определить положение нулевой линии, преобразуем формулу для определения напряжений. Подставляя в эту формулу значения силы и моментов, в общем случае, получаем:

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{P \cdot y_p}{I_x} y + \frac{P \cdot x_p}{I_y} x = -\frac{P}{A} \left[1 + \frac{y_p}{\left(\frac{I_x}{A} \right)} y + \frac{x_p}{\left(\frac{I_y}{A} \right)} x \right].$$

Величины, стоящие в знаменателе второго и третьего слагаемых, представляют собой квадраты радиусов инерции сечения, т.е.

$$\frac{I_x}{A} = i_x^2; \quad \frac{I_y}{A} = i_y^2.$$

Следовательно,

$$\sigma = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p}{i_x^2} y + \frac{x_p}{i_y^2} x \right). \quad (6.115)$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат (рис. 6.76), будут равны:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}. \quad (6.116)$$

Положение нулевой линии не зависит от величины приложенной силы, а зависит от размеров и формы сечения, а также от координат точки приложения силы.

Ядром сечения называется область, очерченная вокруг центра тяжести и характерная тем, что всякая продольная сила, приложенная внутри этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака. Для того чтобы построить ядро сечения, необходимо рассмотреть всевозможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные представляют собой нулевые линии, найти по отношению к главным осям сечения соответствующие координаты граничных точек ядра сечения, а затем по этим точкам очертить само ядро (рис. 6.77).

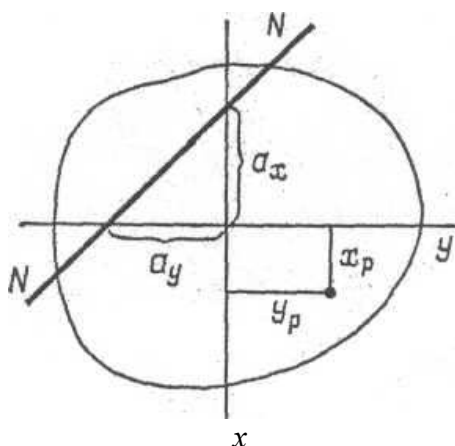


Рис. 6.76. Положение нулевой линии

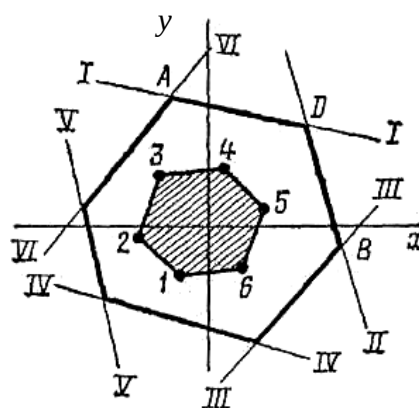


Рис. 6.77. Положение ядра сечения многоугольной колонны

6.9.3. Одновременное действие кручения с изгибом

Совместной деформации кручения и изгиба подвергаются все валы, встречающиеся в машинах. Применяв метод сечений, найдем, что в поперечных сечениях вала одновременно возникают крутящий момент M_z , и изгибающий момент M_x .

Нормальные напряжения от изгиба достигают наибольшего значения в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии и равны:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}.$$

Касательные напряжения от кручения достигают наибольшего значения во всех точках контура круглого сечения:

$$\tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{2W_x}.$$

Любое из полученных напряжений, в отдельности, может оказаться меньшим соответствующему ему допускаемому напряжению, но их одновременное действие может быть критическим для вала. Поэтому расчет ведут по эквивалентным напряжениям, которые по третьей теории прочности будут равны:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Тогда условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (6.117)$$

где $M_{\text{экв}}$ – эквивалентный момент, равный $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$, определяемый из эпюр соответствующих моментов в опасном сечении вала.

6.9.4. Кручение с растяжением или сжатием

Сочетание деформаций кручения и растяжения испытывают крепежные детали (фундаментные болты, шпильки и др.), а сочетание кручения и сжатия – винты домкратов и др.

Нормальные напряжения определяются по известной формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Касательные напряжения равны:

$$\tau = \frac{M_z}{W_p}.$$

Эквивалентное напряжение в этом случае равно

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)^2}.$$

Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (6.118)$$

6.10. Тонкостенные оболочки и резервуары

Основная масса аппаратов нефтеперерабатывающих и нефтехимических предприятий является цилиндрическими сосудами, работающими под внутренним или наружным давлением, в которых основными рабочими средами являются жидкости и газы.

6.10.1. Основные физические свойства жидкости

Основные законы, используемые в гидромеханике, те же, что и в механике твердых тел. Однако применение их отличается некоторыми особенностями вследствие различия свойств жидкости и твердых тел [11].

Жидкостью называется агрегатное состояние вещества, сочетающее в себе черты твердого состояния и газообразного. Как и кристаллические тела, жидкости имеют определенный объем, но форма этого объема легко изменяется под действием внешних сил. Жидкости отличаются от твердых тел легкой подвижностью частиц, т.е. текучестью.

По своим механическим свойствам жидкости разделяются на два класса:

- малосжимаемые (капельные), обладающие большим сопротивлением сжатию и совершенно малым сопротивлением растягивающим и касательным усилиям; они обладают вполне определенным объемом, который практически не изменяется под действием сил;

– сжимаемые (газообразные), которые, занимая все предоставленное им пространство, могут значительно изменять объем, сжимаясь и расширяясь под действием сил, т.е. газы легко изменяют как объем, так и форму.

К основным физическим параметрам жидкости относятся:

- плотность;
- удельный вес;
- сжимаемость;
- температурное расширение;
- вязкость;
- поверхностное натяжение.

Плотностью ρ называется масса жидкости, заключенная в единице объема, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (6.119)$$

где V – объем, м^3 ; m – масса жидкости, кг.

Удельный вес γ – вес единицы объема жидкости, $\frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \rho g; \quad (6.120)$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g}. \quad (6.121)$$

Коэффициент сжатия характеризует свойство жидкости изменять свой объем под действием давления, Па^{-1} :

$$\beta_{сж} = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P}, \quad (6.122)$$

где ΔP – изменение давления, вызывающее изменение объема ΔV .

Модуль упругости – величина, обратная коэффициенту сжатия, Па:

$$E = \frac{1}{\beta_{сж}}. \quad (6.123)$$

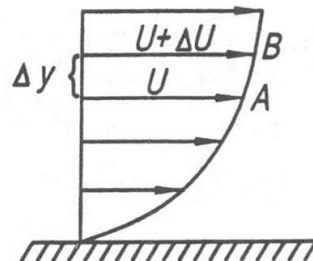
Коэффициент температурного расширения β_t , град^{-1} :

$$\beta_t = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (6.124)$$

где Δt – изменение температуры, $^{\circ}\text{C}$.

Вязкость – свойство жидкостей оказывать сопротивление сдвигу. Все реальные жидкости обладают вязкостью, которая проявляется в виде трения при относительном перемешивании частиц (рис. 6.78).

Рис. 6.78. Распределение скоростей при течении жидкости вдоль плоской стенки: ΔU – абсолютное приращение скорости; Δy – расстояние между слоями



Касательные напряжения между слоями определяются по уравнению, представляющему закон трения Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}, \quad (6.125)$$

где $\frac{dU}{dy}$ – градиент скорости сдвига, с^{-1} ; μ – динамическая вязкость, $\text{Па} \cdot \text{с}$:

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{dU}{dy}}.$$

Наряду с понятием динамической вязкости находит применение понятие *кинематической вязкости* ν , представляющей собой отношение динамической вязкости к ее плотности:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (6.126)$$

Кинематическая вязкость измеряется в квадратных метрах на секунду или стоксах ($1 \text{Ст} = 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$). В таблице 6.6 приведены значения вязкости некоторых жидкостей.

Поверхностное натяжение жидкостей. Молекулы жидкости, расположенные на границе раздела фаз, находятся в условиях, отличных от условий нахождения молекул внутри жидкости. Внутри объема жидкости молекулы окружены со всех сторон такими же молекулами, на поверхности – лишь с одной стороны. Поэтому энергия поверхностных молекул от-

личается от энергии молекул внутри жидкости на величину, называемую *поверхностной энергией*

$$\mathcal{E} = \sigma \cdot S, \quad (6.127)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, Н/м.

Таблица 6.6

Динамическая и кинематическая вязкости капельных жидкостей

Жидкость	$\mu \cdot 10^3$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с
Вода пресная ($t = 20$ °С)	1,01	0,1012
Глицерин безводный ($t = 20$ °С)	512	410
Керосин ($t = 15$ °С)	1,6 – 2,5	2 – 3
Бензин ($t = 15$ °С)	0,60 – 0,65	0,83 – 0,93
Масло минеральное ($t = 20$ °С)	27,5 – 1290	0,313 – 14,5
Нефть ($t = 15$ °С; $\delta = 0,86$)	7 – 8	8,1 – 9,3
Ртуть ($t = 20$ °С)	1,5	0,111
Спирт этиловый безводный ($t = 20$ °С)	1,19	1,51

В зависимости от величин коэффициентов поверхностного натяжения на границе раздела фаз существуют смачивающие ($\Theta = 0 - 90^\circ$) и не смачивающие ($\Theta > 90^\circ$) жидкости (рис. 6.79).

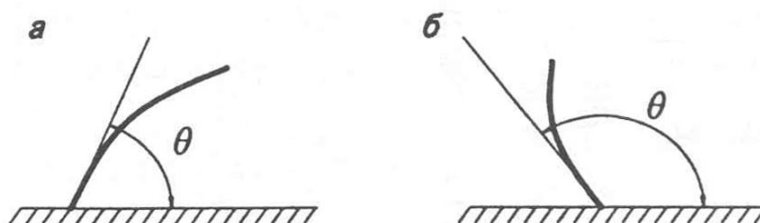


Рис. 6.79. К определению краевого угла: *а* – смачивающие жидкости; *б* – несмачивающие жидкости

Поверхностное натяжение зависит от химической природы жидкости и температуры, уменьшаясь с увеличением температуры:

$$\sigma_t = \sigma_{t_0} - \beta(t - t_0), \quad (6.128)$$

где β – коэффициент пропорциональности.

Влияние сил поверхностного натяжения приходится учитывать при работе с жидкостными приборами для измерения давления, при фильтрации и в других случаях.

Жидкости, движение которых не подчиняются закону Ньютона, называются *аномальными*. К аномальным жидкостям можно отнести нефтепродукты, при температуре, близкой к температуре застывания, коллоидные растворы и др. Чтобы привести такие жидкости в движение, необходимо приложить некоторое усилие. Движение аномальных жидкостей начинается только после того, как касательные напряжения в них достигнут некоторого предельного значения: при меньших касательных напряжениях эти жидкости не текут, а испытывают только упругие деформации, как твердые тела. В аномальных жидкостях касательное напряжение определяется по формуле Бингама:

$$\tau = \tau_0 + \mu^* \frac{dU}{dy}, \quad (6.129)$$

где τ_0 – начальное напряжение сдвига; μ^* – пластическая вязкость.

6.10.2. Гидростатическое давление и его свойства

В покоящейся жидкости касательные напряжения в любой произвольной точке равны нулю и напряженное состояние определяется совокупным действием только нормальных напряжений, равных между собой ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$). Величина p , равная модулю напряжения σ , называется *гидростатическим давлением* в точке; размерность гидростатического давления совпадает с размерностью напряжения $[p] = [\sigma] = [\text{Па}]$.

Гидростатическое давление обладает двумя основными свойствами.

1. *Гидростатическое давление всегда действует нормально к площадке и является сжимающим, т.е. оно направлено по нормали внутрь рассматриваемого объема жидкости.*
2. *Гидростатическое давление в любой точке внутри жидкости по всем направлениям одинаково, т.е. не зависит от угла наклона площадки, на которую оно действует.*

Поверхность, в каждой точке которой значение заданной функции (функция температуры, давления и т.д.) постоянно, называется *поверхностью уровня*. В прикладной механике жидкости наибольший интерес представляет поверхность равного давления, т.е. такая поверхность, в каждой точке которой давление имеет постоянное значение.

Поверхность уровня обладает двумя основными свойствами:

1. *Поверхности уровня не пересекаются между собой.*
2. *Внешние массовые силы направлены по внутренней нормали к поверхности уровня.*

Поверхностью уровня (поверхностью равного давления) в однородной покоящейся жидкости будет любая горизонтальная плоскость, в том числе и свободная поверхность, независимо от формы сосуда. Распределение давления в покоящейся жидкости описывается основным уравнением гидростатики, согласно которому гидростатический напор во всех точках покоящейся жидкости является постоянной величиной (рис. 6.80):

$$z + \frac{P}{\rho g} = H = \text{const}, \quad (6.130)$$

где z – нивелирная высота; $\frac{P}{\rho g}$ – приведенная высота; H – гидростатический напор.

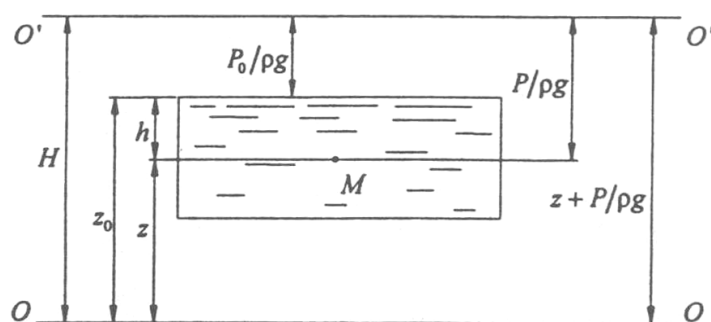


Рис. 6.80. Равновесие жидкости в поле силы тяжести

Для практических расчетов используют другую форму основного уравнения гидростатики:

$$P = P_0 + \rho gh, \quad (6.131)$$

где $h = z_0 - z$ представляет глубину погружения точки M ; P – полное или абсолютное гидростатическое давление; P_0 – внешнее давление или давление на свободную поверхность.

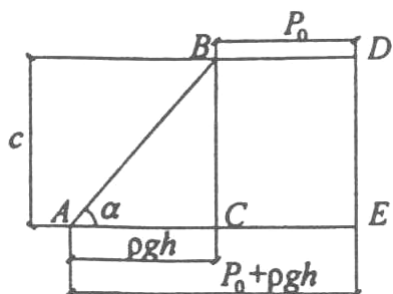


Рис. 6.81. Распределение гидростатического давления

Распределение гидростатического давления по вертикали линейно зависит от глубины погружения рассматриваемой точки и может быть графически представлено в виде трапеции $ABDE$ для полного давления или прямоугольного треугольника ABC для избыточного давления (рис. 6.81).

6.10.3. Расчет тонкостенных резервуаров по безмоментной теории

Резервуары для жидкостей и газов обычно представляют собой тонкостенные оболочки, срединная поверхность которых является поверхностью вращения. *Оболочкой* называется геометрическое тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми, называемое *толщиной*, мало по сравнению с другими размерами тела. Оболочки считаются тонкими, если отношение радиуса срединной поверхности к толщине ≥ 100 . *Срединной* называется поверхность, делящая пополам толщину стенки оболочки. Наиболее распространены резервуары, состоящие из цилиндрических, сферических и конических оболочек. Теория тонких оболочек построена в предположении, что материал оболочки изотропен, обладает идеальной упругостью, подчиняется закону Гука и перемещения точек оболочки малы по сравнению с ее толщиной [4]. Кроме того, используются *гипотезы Кирхгофа*:

- о *прямых нормалях*, т.е. считается, что линейные элементы оболочки, нормальные к срединной поверхности, остаются прямолинейными и нормальными и к изогнутой срединной поверхности;
- об *отсутствии поперечного давления*, т.е. предполагается, что нормальные напряжения, перпендикулярные к срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы.

Будем рассматривать только оболочки вращения, срединные поверхности которых являются поверхностями вращения, а нагрузки, приложенные к оболочкам, будем считать симметричными относительно их оси.

След пересечения оболочки с плоскостью, проходящей через ось вращения, называется *меридианом*. Меридианы совпадают с образующими оболочки.

След пересечения оболочки с плоскостью, перпендикулярной ее оси, называется *параллелью* или *параллельным кругом*.

Радиус меридиана называется *первым главным радиусом кривизны* оболочки и обозначается ρ_m . Радиус кривизны кривой, полученный при пересечении меридиана плоскостью, перпендикулярной этому меридиану, называется *вторым главным радиусом кривизны* и обозначается ρ_t . Оба радиуса лежат на одной прямой, являющейся нормалью к меридиану. Например, для шаровой поверхности радиусом R : $\rho_m = \rho_t = R$; для цилиндрической поверхности: $\rho_m = \infty$, $\rho_t = R$.

Нагрузкой служит либо распределенное по всей внутренней поверхности оболочки давление газа, либо переменное по высоте резервуара давление заключенной в нем жидкости.

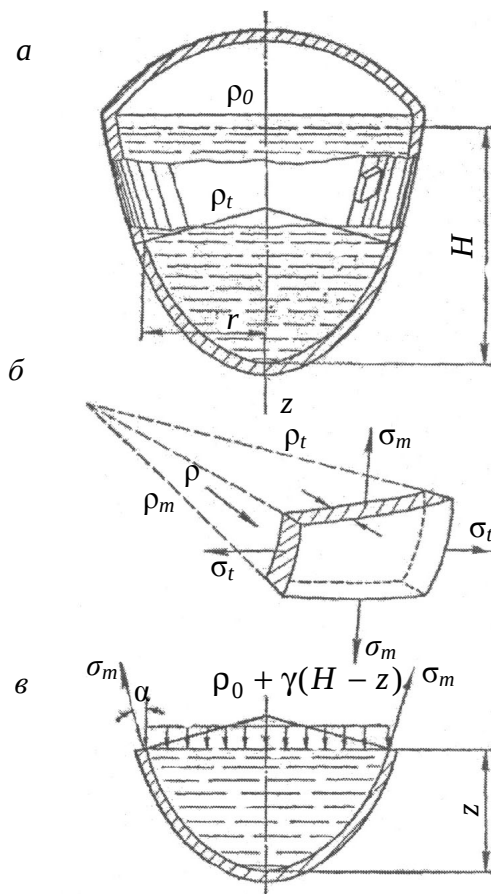


Рис. 6.82. К расчету тонкостенных оболочек:
 а) резервуар с жидкостью; б – элемент резервуара;
 в) к определению напряжений

Для резервуаров в виде тонкостенных осесимметричных оболочек при отсутствии нагрузок в виде сосредоточенных сил и моментов, постоянной или плавно изменяющейся кривизне меридианов можно считать, что напряжения по толщине стенки резервуара распределены равномерно – стенка не испытывает изгиба. При этом места жесткого закрепления оболочки из рассмотрения исключаются. Такая теория расчета носит название *безмоментной теории оболочек*.

Напряжения, возникающие в стенках оболочек в местах жестких закреплений и в местах изломов меридианов, носят местный характер, т.е. быстро затухают уже на незначительном расстоянии от зоны их возникновения.

На рисунке 6.82, а показан резервуар, заполненный до уровня H жидкостью с удельным весом γ ; над жидкостью находится газ под давлением p_0 . Элемент, выделенный из стенки резервуара двумя бесконечно близкими меридиональными и двумя бесконечно близкими коническими сечениями

(перпендикулярными к меридиональным), показан на рис. 6.82, б. Грани этого элемента являются главными площадками для данной точки стенки. Нормальное напряжение, направленное вдоль меридиана (возникающее в коническом сечении), носит название *меридионального напряжения* и обозначается σ_m ; нормальное напряжение, направленное перпендикулярно к меридиану (возникающее в меридиональном сечении), носит название *окружного* или *кольцевого напряжения* и обозначается σ_t . Главные напряжения (σ_m и σ_t) связаны между собой уравнением Лапласа:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}, \quad (6.132)$$

где ρ_m и ρ_t – радиусы кривизны соответственно меридионального и нормального к нему сечений для данной точки срединной поверхности;

p – давление, действующее на соответствующую точку стенки;

δ – толщина стенки.

В общем случае, когда $\rho_m \neq \infty$ и $\rho_t \neq \infty$ в первую очередь определяют меридиональное напряжение, используя уравнение равновесия сил, действующих на отделенную коническим сечением часть резервуара (рис. 6.82, в):

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos \alpha = \sum P_{iz}, \quad (6.133)$$

где r – радиус кривизны параллели в плоскости, перпендикулярной к оси резервуара;

$\sum P_{iz}$ – сумма проекций на ось резервуара всех внешних сил, действующих на отсеченную часть (обычно собственный вес резервуара не учитывают):

$$\sum P_{iz} = \gamma \cdot V_H + p \cdot \pi r^2, \quad (6.134)$$

где γ – удельный вес жидкости, находящейся в резервуаре;

V_H – объем оставленной (нижней) части резервуара;

p – давление на уровне проведенного сечения, определяемое высотой столба жидкости, расположенного выше сечения, и давлением p_0 газа, находящегося над жидкостью:

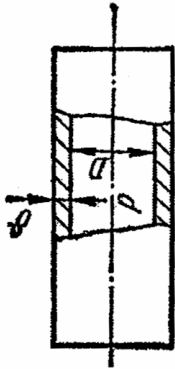
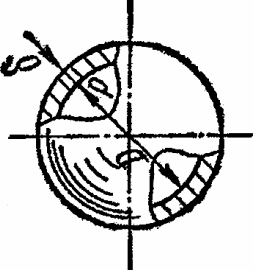
$$p = \gamma(H - z) + p_0. \quad (6.135)$$

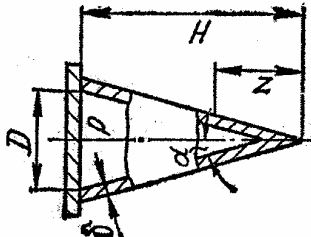
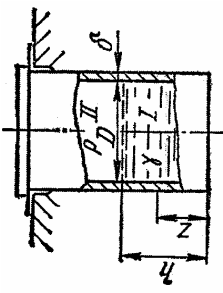
Формула (6.135) соответствует случаю, когда опора резервуара расположена выше проведенного сечения; в противном случае в величину $\sum P_{iz}$ должна быть включена реакция опоры.

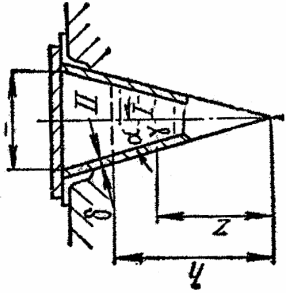
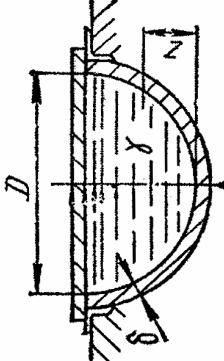
Формулы для расчета тонкостенных резервуаров, находящихся под действием внутреннего давления, приведены в табл. 6.7.

Таблица 6.7

Формулы для расчета тонкостенных резервуаров, находящихся под действием внутреннего давления

Форма резервуара и характер нагружения	Значения σ_m и σ_t для произвольной точки стенки резервуара	Наибольшие значения напряжений $\sigma_{m \max}$ и $\sigma_{t \max}$	Наибольшие значения эквивалентных напряжений
1	2	3	4
Цилиндр, наполненный газом под давлением p 	$\sigma_m = \frac{pD}{4\delta};$ $\sigma_t = \frac{pD}{2\delta}$	—	$\sigma_3 = 0,433 \frac{pD}{\delta}$
Сфера, наполненная газом под давлением p 	$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pD}{4\delta}$	—	$\sigma_3 = \frac{pD}{4\delta}$

1	2	3	4
Конус, наполненный газом под давлением p 	$\sigma_m = \frac{pDz}{4\delta H \cos \alpha};$ $\sigma_t = \frac{pDz}{2\delta H \cos \alpha}$	$\sigma_{m \max} = \frac{pD}{4\delta \cos \alpha};$ $\sigma_{t \max} = \frac{pD}{2\delta \cos \alpha}$	$\sigma_{\vartheta} = \frac{0,433 pD}{\delta \cos \alpha}$
Цилиндр, заполненный до уровня h жидкостью с удельным весом γ и в верхней части наполненный газом под давлением p_0 	$\sigma_m = \frac{(p_0 + \gamma h) D}{4\delta}$ Для нижней части (I) резервуара $\sigma_{tH} = \frac{D}{2\delta} [p_0 + \gamma(h - z)]; \sigma_{t \max H} = \frac{D}{2\delta} (p_0 + \gamma h)$ Для верхней части (II) резервуара $\sigma_{t\delta} = \frac{p_0 D}{2\delta}$		Для нижней части резервуара $\sigma_{\vartheta H} = 0,433 \frac{D}{\delta} (p_0 + \gamma h).$ Для верхней части резервуара $\sigma_{\vartheta \delta} = \frac{p_0 D}{4\delta} \sqrt{3 + \left(\frac{\gamma h}{p_0} \right)^2}$

1	2	3	4
Конус, заполненный до уровня h жидкостью с удельным весом γ 	Для нижней части (I) резервуара $\sigma_{mH} = \frac{\gamma(3h - 2z)z \cdot \operatorname{tg} \alpha}{6\delta \cos \alpha}; \quad \sigma_{mH \max} = \frac{3\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{16\delta \cos \alpha};$ (при $z = \frac{3}{4}h$). Для верхней части (II) резервуара $\sigma_{me} = \frac{\gamma h^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{6\delta z \cos \alpha}; \quad \sigma_{me \max} = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{6\delta \cos \alpha};$ $\sigma_{te} = 0$	$\sigma_{эH} = \frac{0,22\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{\delta \cos \alpha};$ $\sigma_{эB} = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{6\delta \cos \alpha};$	$\sigma_3 = \frac{0,144\gamma D^2}{\delta}$
Полусфера, заполненная жидкостью с удельным весом γ 	$\sigma_m = \frac{\gamma D^2 (3D^2 - 6Dz + 4z^2)}{24\delta (D^2 - Dz)}$ $\sigma_t = \frac{\gamma D^2 (3D^2 - 12Dz + 8z^2)}{24\delta (D^2 - Dz)}$	$\sigma_{m \max} = \sigma_{t \max} = \frac{\gamma D^2}{8\delta};$ (при $z = 0$)	$\sigma_3 = \frac{0,144\gamma D^2}{\delta}$

6.11. Устойчивость сжатых стержней и оболочек

Наряду с проблемой прочности и жесткости при определении требуемых размеров поперечного сечения стержней существует и проблема устойчивости конструкции или ее элементов, так как разрушение может произойти не только из-за нарушения прочности или жесткости, но и потому, что стержень не сохранит своего первоначального равновесного состояния. Например, если стержень, вплоть до разрушения, работает на основе сжатия, то условие проверки прочности будет следующее:

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

При увеличении длины или действующей сжимающей нагрузки стержень перейдет в новое состояние, изогнется и, в конце концов, сломается. Разрушение произойдет оттого, что стержень не сможет сохранить прямолинейную форму равновесия.

Если малые возмущения вызывают в конструкции малые отклонения от расчетного состояния, то такое состояние системы является устойчивым. Примером *устойчивого* или *неустойчивого* равновесия является равновесие тяжелого шарика, лежащего на сферической поверхности (рис. 6.83, *а* и *б*).

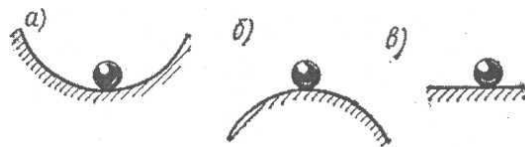


Рис. 6.83. К понятию устойчивости: *а* – устойчивое равновесие; *б* – неустойчивое равновесие; *в* – безразличное равновесие

При *безразличном* равновесии тело, будучи отклонено, остается в равновесии и в новом положении (рис. 6.83, *в*).

Под устойчивостью понимают свойство конструкции сохранять свое первоначальное состояние при внешних воздействиях.

Наиболее простым случаем потери устойчивости является деформирование центрально-сжатого стержня, (рис. 6.84, *а*). Если приложить к стержню поперечную нагрузку, т.е. слегка изогнуть его, то при малых значениях сжимающей силы после снятия поперечной нагрузки стержень вернется в прямолинейное состояние. Это значит, что прямолинейная форма равновесия оси стержня устойчива. При большем значении сжи-

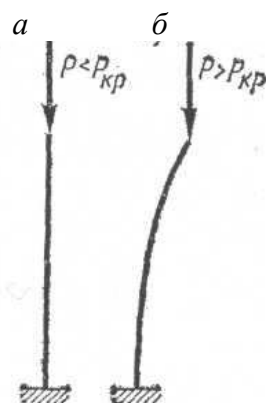


Рис. 6.84. К понятию устойчивости сжатого стержня: *а* – прямолинейная форма равновесия; *б* – криволинейная форма равновесия

мающей силы слегка изогнутый поперечной нагрузкой стержень после ее устранения медленнее возвращается в прямолинейное состояние. Но все же прямолинейная форма равновесия еще устойчива. Наконец, при некотором значении сжимающей силы прямолинейная форма равновесия оси стержня становится неустойчивой и возникает новая устойчивая форма равновесия – криволинейная. Происходит выпучивание стержня (рис. 6.84, *б*). Деформация стержня, выражающаяся в искривлении его под действием сжимающих сил, направленных вдоль его оси, называется *продольным изгибом*.

Наибольшее значение центрально приложенной сжимающей силы, при которой прямолинейная форма равновесия стержня устойчива, называется *критическим*.

При сжатии кольца или тонкой оболочки радиально направленными силами (рис. 6.85, *а*), при некотором их значении круговая форма оси кольца становится неустойчивой, и оно приобретает форму, показанную на рис. 6.85, *б*. Характер деформации кольца существенно изменяется: при нагрузке, меньшей критической, кольцо работало на сжатие, а после потери устойчивости – на сжатие и изгиб.

Консоль вытянутого прямоугольного сечения, работающая на прямой изгиб в плоскости наибольшей жесткости (рис. 6.86, *а*), при критическом значении изгибающей силы закручивается (рис. 6.86, *б*) и вместо изгиба испытывает совместный изгиб и кручение. Этот случай называют *потерей устойчивости плоской формы изгиба*.

Расчет на устойчивость должен обеспечить работу элемента конструкции при первоначальной форме его упругого равновесия, т.е. при нагрузках, меньших критических.

Критическая сила считается разрушающей, т.к. малейшее ее превышение ведет к резкому отклонению элемента конструкции от первоначального положения и, следовательно, к разрушению, если элемент изготовлен из хрупкого материала, или к потере устойчивости, если материал пластичен. Поэтому при расчете элементов конструкций на продольный изгиб

вводится понятие *допустимой* силы, которая назначается из следующего соотношения:

$$[P] = \frac{P_{кр}}{K_y}, \quad (6.136)$$

где $P_{кр}$ – критическое значение сжимающей силы для рассчитываемого элемента конструкции; K_y – коэффициент запаса устойчивости, зависящий от материала (для стальных элементов – $K_y = 1,8 \dots 3,0$; для чугунных – $K_y = 5,0 \dots 6,0$; для деревянных – $K_y \geq 2,5$).

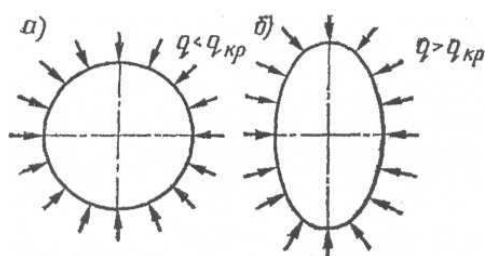


Рис. 6.85. Потеря устойчивости сжатого кольца: *а* – устойчивая форма равновесия; *б* – неустойчивая форма равновесия

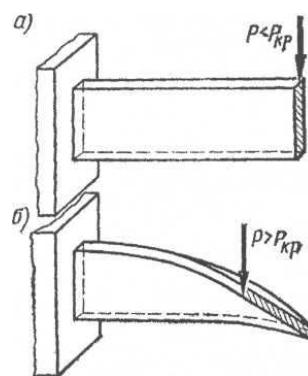


Рис. 6.86. К понятию потери устойчивости плоской формы изгиба: *а* – устойчивая форма равновесия; *б* – неустойчивая форма равновесия

6.11.1. Формула Эйлера и пределы ее применимости

Для расчетов сжатых стержней на устойчивость необходимо знать величину критической силы $P_{кр}$ как наименьшую сжимающую силу, при которой можно сохранять равновесие слегка искривленного сжатого стержня. Л.Эйлер в 1744 году, исследовав упругий стержень, шарнирно закрепленный по концам и нагруженный силой P , на основании дифференциального уравнения изогнутой оси получил выражение критической силы $P_{кр}$, равное

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_n^2}, \quad (6.137)$$

где E – модуль упругости материала стержня; $I_{\min}$ – момент инерции поперечного сечения в плоскости минимальной жесткости; l_n – приведенная длина стержня, равная $l_n = \mu \cdot l$; μ – коэффициент приведения длины стержня l , зависящий от способа закрепления концов стержня.

Очевидно, что при различных закреплениях концов стержня, его изогнутая ось будет принимать различные очертания. На рис. 6.87 показаны наиболее часто встречающиеся способы закрепления концов стержня и соответствующие значения коэффициента приведения длины μ .

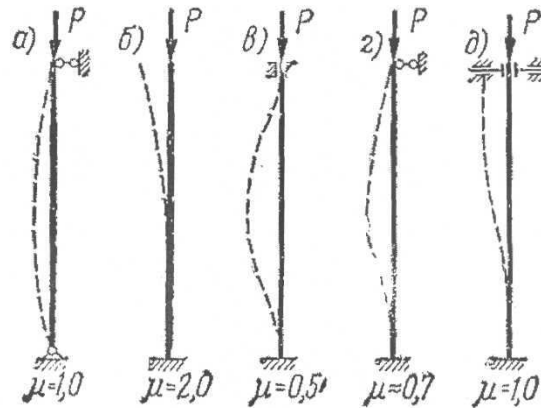


Рис. 6.87. Способы закрепления концов стержня и соответствующее значение коэффициента приведения длины μ : а – оба конца стержня закреплены шарнирно; б – нижний конец жестко зашцеилен, верхний свободен; в – оба конца жестко зашцеилены; г – нижний конец закреплен жестко, верхний – шарнирно; д – нижний конец закреплен жестко, верхний имеет «плавающую» заделку

При выводе формулы для определения критической силы Л. Эйлер предполагал, что материал сжимаемого стержня подчиняется закону Гука, поэтому формулой Эйлера можно пользоваться не всегда.

Нормальное напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, соответствующее критическому значению сжимающей силы, также называют критическим.

Для определения пределов применимости формулы Эйлера определим критическое напряжение:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_n^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_n}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (6.138)$$

где $\lambda = \frac{l_n}{i_{\min}}$ – гибкость стержня; $i_{\min}$ – минимальный радиус инерции сечения,

равный $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$.

Гибкость λ – безразмерная геометрическая характеристика сжатого стержня, показывающая его сопротивляемость потере устойчивости; она одновременно отражает и длину стержня, и жесткость его поперечного сечения.

Таким образом, формулой Эйлера можно пользоваться при выполнении условия

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{тц}, \quad (6.139)$$

Выразим величину предельной гибкости $\lambda_{пред}$:

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{тц}}}. \quad (6.140)$$

В отличие от гибкости стержня, *предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня и не зависит от его размеров*. Предельная гибкость – величина постоянная для данного материала.

Формула Эйлера применима лишь в тех случаях, когда гибкость рассчитываемого стержня больше или равна предельной гибкости для материала, из которого он изготовлен.

Предельная гибкость для углеродистой стали 3 $\lambda_{пред} \approx 100$; для чугуна – $\lambda_{пред} \approx 80$; для сосны – $\lambda_{пред} \approx 110$.

В случае неприменимости формулы Эйлера величина критического напряжения определяется по эмпирическим формулам Ф.С. Ясинского. Для некоторых материалов формула Ф.С. Ясинского имеет вид

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (6.141)$$

где a и b – коэффициенты, постоянные для данного материала и имеющие размерность напряжения.

В зависимости от гибкости сжатые стержни условно делят на три категории:

1) стержни большой гибкости, для которых расчет на устойчивость ведется по формуле Эйлера и зависимость $\sigma_{кр}$ от λ гиперболическая:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \text{ (гипербола Эйлера);}$$

2) стержни средней гибкости, рассчитываемые на устойчивость по эмпирической формуле Ф.С. Ясинского. Для них зависимость $\sigma_{кр}$ от гибкости линейна: $\sigma_{кр} = a - b\lambda$.

3) стержни малой гибкости, рассчитываемые не на устойчивость, а на прочность. Для них критическое напряжение считается постоянным: для хрупких материалов $\sigma_{кр} = \sigma_в$; для пластичных материалов $\sigma_{кр} = \sigma_T$.

Для низкоуглеродистых сталей характер зависимости критического напряжения от гибкости представлен на рис. 6.88. На этом графике штриховой линией показано продолжение гиперболы Эйлера в область ее неприменимости; она проходит выше линии критических напряжений, установленных опытным путем.

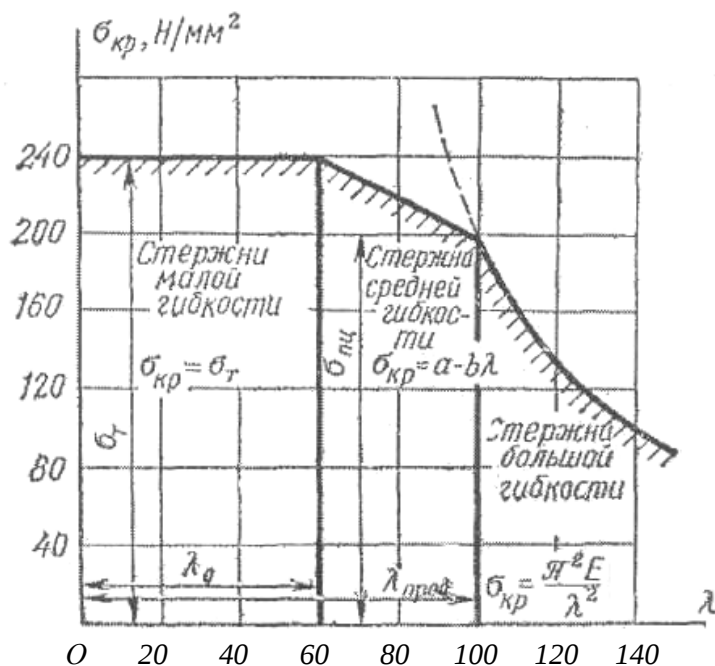


Рис. 6.88. Характер зависимости критического напряжения от гибкости для низкоуглеродистых сталей

Это значит, что при неправильном применении формула Эйлера дает преувеличенное значение критического напряжения, следовательно, и допускаемое значение сжимающей силы получается преувеличенным, что может повлечь за собой аварию конструкции.

Приведем для некоторых материалов значения коэффициентов a и b , а также значение $\lambda_{пред}$ (табл. 6.8), при которых применима формула Ф.С. Ясинского.

Таблица 6.8

Материал	$a, \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$	$\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст2	264	0,70	105
Сталь Ст3	310	1,14	100
Сталь 20, Ст4	328	1,15	96
Сталь 45	449	1,67	85
Дюралюминий Д16Т	406	1,83	53
Сосна, ель	29,3	0,194	70

Для стержней из чугунного литья пользуются параболической зависимостью:

$$\sigma_{кр} = 776 - 12\lambda + 0,0053\lambda^2 \left[\frac{H}{мм^2} \right]. \quad (6.142)$$

6.11.2. Расчет на устойчивость

Как отмечалось выше, сжатые стержни должны быть проверены по двум условиям:

– прочности:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{он}}{K}; \quad (6.143)$$

– устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{K_y}. \quad (6.144)$$

Допускаемое напряжение на устойчивость не является постоянным для одного и того же материала, а зависит от гибкости стержня λ . Чтобы выяснить, как связаны между собой допускаемые напряжения на устойчивость с допускаемыми напряжениями на прочность, составим их отношения

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр} \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{он}},$$

откуда

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр} \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{он}} [\sigma].$$

Обозначив $\varphi = \frac{\sigma_{кр} \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{он}}$, окончательно получим

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma]. \quad (6.145)$$

Коэффициент φ называется коэффициентом уменьшения основного допускаемого напряжения $[\sigma]$ при продольном *изгибе*. Его величина всегда меньше единицы и зависит от гибкости стержня и его материала. Тогда *расчетная формула на устойчивость* принимает вид

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma], \quad (6.146)$$

где $[\sigma]$ – основное допускаемое напряжение при осевом сжатии.

В зависимости от поставленной задачи различают три вида расчетов на устойчивость:

1. *Проверочный расчет*, при котором определяют коэффициент запаса устойчивости K_y и сравнивают полученное значение с допускаемой величиной $[K_y]$:

$$K_y = \frac{P_{кр}}{P} \geq [K_y], \quad (6.147)$$

где P – действующая на стержень нагрузка.

2. *Проектный расчет*, при котором определяют требуемое значение минимального момента инерции поперечного сечения стержня $I_{\min}$:

$$I_{\min} \geq \frac{P \cdot [K_y] \cdot l_n^2}{\pi^2 E}. \quad (6.148)$$

Затем определяют гибкость стержня и сравнивают ее с предельной.

3. *Определение допускаемой нагрузки*, действующей на стержень $[P]$:

$$[P] = \frac{P_{кр}}{[K_y]}. \quad (6.149)$$

Форма поперечного сечения стержня имеет существенное значение. Она оказывается наиболее целесообразной и экономичной в том случае, когда гибкость относительно обеих главных осей инерции сечения будет одинаковой. Расчеты показывают, что наиболее выгодными являются кольцевые и коробчатые тонкостенные сечения.

Значения коэффициента φ при различной гибкости λ стержня для различных материалов приведены в табл. 6.9

6.11.3. Особенности устойчивости оболочек

Оболочки могут терять устойчивость при нагружении осевой сжимающей силой, равномерно или неравномерно распределенным по поверхности внешним давлением, при изгибе и кручении или при различных сочетаниях внешних сил. При стеснении перемещений торцов замкнутые оболочки теряют устойчивость и от действия сосредоточенных сил, приложенных нормально к срединной поверхности.

Названные внешние силы могут прикладываться статически или динамически.

В стержне после потери устойчивости напряжения определяются изгибом. При потере устойчивости оболочки вследствие кривизны поверхно-

сти, кроме изгибных напряжений, возникают значительные растягивающие или сжимающие напряжения в срединной поверхности и точки оболочки в направлении нормали к срединной поверхности смещаются преимущественно к центру кривизны.

Таблица 6.9

**Значение коэффициента ϕ
в зависимости от гибкости λ стержней из различных материалов**

λ	Сталь марок			Чугун: СЧ12 СЧ15 СЧ18 СЧ21	Дуралю- ний Д16Т	Дерево (незави- симо от породы)	Бетон	
	Ст 0 Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	14Г2 15ГС 10Г2С 15ХСНД				тяжелый	легкий
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,999	0,99	1,00	1,00
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,998	0,97	0,96	0,96
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,835	0,92	0,90	0,86
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,700	0,87	0,84	0,73
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,568	0,80	0,76	0,68
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,455	0,71	0,70	0,59
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,353	0,61	0,63	0,52
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,269	0,49	0,57	0,46
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,212	0,38	0,51	-
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,172	0,31	0,45	-
110	0,52	0,43	0,39	-	0,142	0,26	-	-
120	0,45	0,37	0,33	-	0,119	0,22	-	-
130	0,40	0,32	0,29	-	0,101	0,18	-	-
140	0,36	0,28	0,25	-	0,087	0,15	-	-
150	0,32	0,25	0,23	-	0,076	0,14	-	-
160	0,29	0,23	0,21	-	-	0,12	-	-
170	0,26	0,21	0,19	-	-	0,11	-	-
180	0,23	0,19	0,17	-	-	0,10	-	-
190	0,21	0,17	0,15	-	-	-	-	-
200	0,19	0,15	0,13	-	-	-	-	-
210	0,17	0,14	0,12	-	-	-	-	-
220	0,16	0,13	0,11	-	-	-	-	-

Физическую картину поведения оболочки при нагружении рассмотрим в случае осевого сжатия [10]. При сжатии оболочки в осевом направлении силами, равномерно распределенными по торцам, по мере роста нагрузки потенциальная энергия оболочки увеличивается. Если оболочка со-

храняет цилиндрическую форму, вся потенциальная энергия деформации есть энергия осевого сжатия. При некотором (критическом) значении нагрузки оболочка теряет устойчивость, продолжая сжиматься вдоль образующей, деформируется в кольцевом направлении и изгибается. В момент потери устойчивости потенциальная энергия становится равной работе внешних сил, в закритическом состоянии она меньше.

Выпучивание оболочки может быть симметричным относительно ее оси, но тонкие оболочки с $\frac{r}{h} \geq 100$ выпучиваются по асимметричной форме h .

Тщательно изготовленная оболочка по всей поверхности покрывается вмятинами ромбовидной формы. Переход к этому равновесному закритическому состоянию происходит с большой скоростью (в течение 0,006 ... 0,010 с), сопровождается хлопком. В процессе хлопка форма выпучин (вмятин) изменяется до тех пор, пока не будет достигнут наименьший уровень потенциальной энергии в новом равновесном состоянии. Прогибы смещения по нормали уже в начале потери устойчивости имеют порядок толщины оболочки.

Существуют две теории упругой устойчивости оболочек; линейная и нелинейная. В линейной теории предполагается, что при достижении критической нагрузки малые возмущения приводят к появлению новой устойчивой формы равновесия, бесконечно близкой к исходной; по ней определяются только критические силы или напряжения. В нелинейной теории рассматриваются конечные перемещения, сравнимые с толщиной оболочки.

Устойчивость замкнутой цилиндрической оболочки, сжатой вдоль образующей. Рассмотрим устойчивость идеальной изотропной оболочки, шарнирно опертой по торцам и сжатой силой, равномерно распределенной по концевым сечениям, погонное значение которой обозначим p . Будем полагать перемещения малыми и считать, что произошла потеря устойчивости, если состояние оболочки, ближайшее к невозмущенному (основному), становится устойчивым (линейная задача).

Предположим, что поверхность оболочки при выпучивании симметрична относительно оси (рис. 6.89). При этом поперечные сечения остаются круговыми, а вдоль меридионального сечения образуется несколько полуволн.

Величина критической силы определится по формуле

$$F_{кр} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{h^2}{r}. \quad (6.150)$$

Критическое напряжение при $\mu = 0,3$:

$$p_{кр} = \frac{F_{кр}}{h} = 0,605E \frac{h}{r}. \quad (6.151)$$

Критическое напряжение, которое для тонких оболочек равно отношению критической силы к толщине оболочки, в задачах устойчивости обозначается $p_{кр}$.

Тонкие оболочки, теряя устойчивость по асимметричной форме, образуют волны не только вдоль оси, но и по кольцу. При этом образуются вмятины ромбического типа (рис. 6.90).

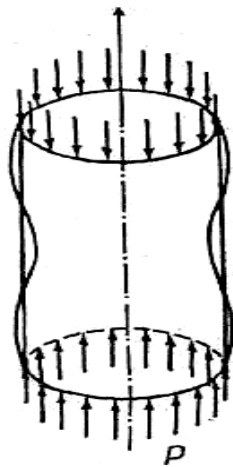


Рис. 6.89. Картина нагружения и деформирования оболочки

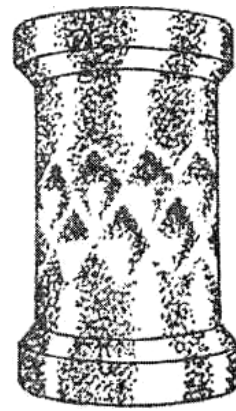


Рис. 6.90. Характерный вид потери устойчивости тонкой оболочки

Устойчивость цилиндрических оболочек при действии внешнего давления. Резервуары для хранения жидкостей, подвергаются действию равномерно распределенного по поверхности внешнего давления и могут терять устойчивость. Величина критического давления для круговой цилиндрической оболочки (рис. 6.91) определяется по формуле П.Ф. Папковича

$$q_{кр} = 0,92E \frac{h^2}{r \cdot l} \sqrt{\frac{r}{h}}. \quad (6.152)$$

Формула П.Ф. Папковича применима для оболочек средней длины, определяемой неравенствами:

$$\frac{0,92Eh}{\sigma_{нц} \sqrt{\frac{r}{h}}} \leq 1 \leq 3,35r \sqrt{\frac{r}{h}}. \quad (6.153)$$

При безмоментном докритическом состоянии критическому давлению соответствует критическое напряжение. Если напряжение больше предела пропорциональности, то его истинное значение определяют по полумпирической формуле

$$\sigma_{кр} = \sigma_s \frac{1+k}{1+k+k^2}, \quad (6.154)$$

При внешнем давлении оболочка вдоль образующей выпучивается только по одной полуволне (рис. 6.92), поэтому условия опирания торцов на критическую нагрузку влияют заметно, чем при осевом сжатии; при защемлении торцов критическое давление в 1,5 раза выше, чем при шарнирном опирании.

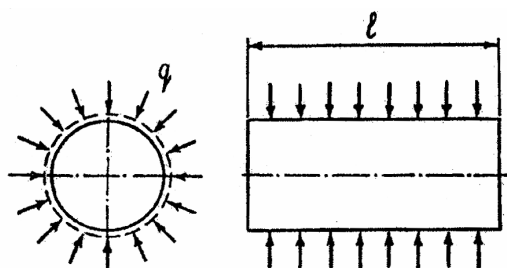


Рис. 6.91. Цилиндрическая оболочка под действием внешнего давления



Рис. 6.92. Вид потери устойчивости оболочки под действием внешнего давления

6.12. Основы расчета на действие динамических нагрузок

До сих пор рассматривалось действие только статических нагрузок, величина и положение которых не изменялись во времени. Однако нередки случаи приложения нагрузки, которая зависит от времени и, быстро изменяясь, вызывает в элементах конструкций колебания, ускорения и силы инерции. *Возникновение ускорения частиц рассматриваемого тела свидетельствует о воздействии динамической нагрузки.* Динамическую нагрузку испытывают фундаменты машин, имеющих вращающиеся элементы, мосты и многие другие конструкции и сооружения.

К динамическим нагрузкам относятся и *ударные* приложения сил.

Инерционные нагрузки учитываются при подъеме груза в подъемных машинах, при проектировании сооружений. Ускорения и связанные с ними силы инерции возникают в элементах конструкций при неравномерном их движении или при равномерном, в случае, если траектории отдельных то-

чек рассчитываемого элемента криволинейны. При больших ускорениях силы инерции могут достигать значительных величин, и их необходимо учитывать при расчетах на прочность и жесткость [4].

6.12.1. Расчет троса при подъеме груза

Определение напряжений и перемещений при заданных ускорениях основано на приведении задач динамики к задачам статики с помощью метода кинетостатики (принципа Д'Аламбера). Напомним, что этот принцип состоит в следующем: *если в любой момент времени к каждой материальной точке данной системы приложить силу инерции этой точки, то эти силы инерции будут уравниваться заданными силами, действующими на систему, и реакциями связей, т. е. система может рассматриваться как находящаяся в состоянии покоя (или равномерного прямолинейного движения).*

Сила инерции равна произведению массы материальной точки на ее ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Для определения напряжения, возникающего в поперечном сечении стального троса, объемный вес которого равен γ , при подъеме груза P с постоянным ускорением a (рис. 6.93, а), необходимо придерживаться следующей последовательности действий.

Разрезаем трос произвольным поперечным сечением и отбрасываем верхнюю часть, заменив ее действие на нижнюю продольной силой N (рис. 6.93, б).

Сила инерции $P_{ин}$ рассматриваемой части направлена вниз (в сторону, противоположную ускорению), ее величина определяется из выражения

$$P_{ин} = m \cdot a = \frac{P + \gamma Az}{g} a, \quad (6.155)$$

где m – масса груза и части троса, расположенной ниже проведенного сечения; A – площадь поперечного сечения троса.

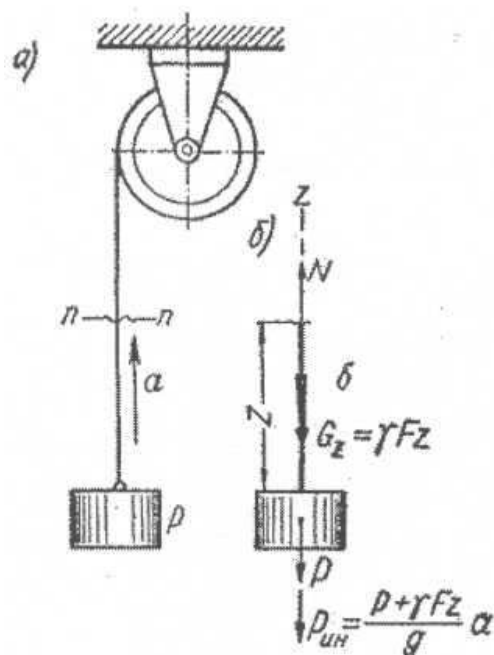


Рис. 6.93. К расчету напряжений в тросе при подъеме груза

Составляем уравнение равновесия $\sum Z = 0$ для оставленной части и определяем продольную силу в поперечном сечении троса:

$$N = (P + \gamma Az) \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Напряжение в рассматриваемом сечении троса будут равны:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P + \gamma Az}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right), \quad (6.156)$$

При отсутствии ускорения ($a = 0$) статическое напряжение в поперечном сечении троса $\sigma_{cm} = \frac{P + \gamma Az}{A}$, следовательно,

$$\sigma = \sigma_{cm} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{cm} \cdot k_d, \quad (6.157)$$

где $k_d = 1 + \frac{a}{g}$ – динамический коэффициент.

При равноускоренном движении $\sigma > \sigma_{cm}$, а при равнозамедленном движении $\sigma < \sigma_{cm}$.

При свободном падении груза $a = -g$ и напряжение в тросе равно нулю.

6.12.2. Приближенный способ расчета на удар

Явление удара наблюдается в том случае, когда скорость элемента конструкции изменяется в очень короткий промежуток времени.

Рассмотрим приближенный метод расчета на удар, базирующийся на следующих основных допущениях [4]:

1. Материал рассчитываемого элемента конструкции при деформациях, вызванных ударной нагрузкой, следует закону Гука.
2. Работа силы тяжести ударяющего груза полностью переходит в потенциальную энергию деформации элемента конструкции, испытывающего действие удара.
3. Масса элемента конструкции, воспринимающей действие ударной нагрузки, мала по сравнению с массой ударяющего груза.
4. Удар считается неупругим, т.е. после соприкосновения ударяющего груза с упругой системой он не отскакивает и при ее деформации движется с ней совместно.

Рассмотрим удар груза весом Q , падающего с высоты h на некоторую упругую систему, например цилиндрическую винтовую пружину (рис. 6.94).

Работа силы тяжести определяется из выражения:

$$A = Q(h + \lambda_{\partial}), \quad (6.158)$$

где λ_{∂} – перемещение той точки (сечения) упругой системы, по которой ударяет падающий груз.

Составим выражение для потенциальной энергии деформации упругой системы. Учитывая первое допущение, потенциальную энергию деформации можно определить как половину произведения некоторой динамически действующей силы P_{∂} на соответствующее перемещение:

$$U_{\partial} = \frac{P_{\partial} \cdot \lambda_{\partial}}{2}.$$

Для линейно деформируемой системы $\lambda_{\partial} = \frac{P_{\partial}}{C}$, где C – коэффициент жесткости упругой системы.

Тогда $P_{\partial} = C \cdot \lambda_{\partial}$. Подставляя значение P_{∂} в уравнение потенциальной энергии деформации,

получаем
$$U_{\partial} = \frac{C \cdot \lambda_{\partial}^2}{2}.$$

На основании второго из принятых допущений приравняем величины работы силы тяжести падающего груза и потенциальной энергии деформации упругой системы, имеем

$$A = U_{\partial},$$

тогда

$$Q(h + \lambda_{\partial}) = \frac{C \cdot \lambda_{\partial}^2}{2},$$

откуда

$$\left(\frac{2Q}{C}\right)h + \left(\frac{2Q}{C}\right)\lambda_{\partial} = \lambda_{\partial}^2.$$

Однако $Q/C = \lambda_{cm}$, где λ_{cm} – перемещение, вызванное силой, равной весу Q падающего груза, при ее статическом действии.

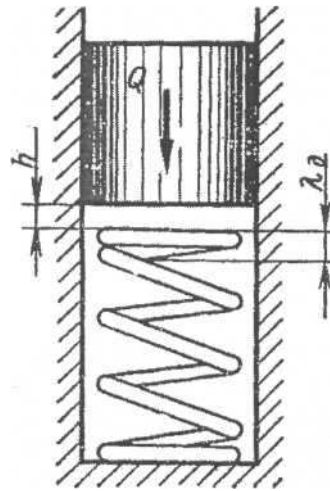


Рис. 6.94. К расчету на удар

Таким образом, имеем

$$2\lambda_{cm}h + 2\lambda_{cm}\lambda_{\partial} = \lambda_0^2 \text{ или } \lambda_0^2 - 2\lambda_{cm}\lambda_{\partial} - 2\lambda_{cm}h = 0.$$

Определим из этого квадратного уравнения значение λ_{∂} :

$$\lambda_{\partial} = \lambda_{cm} + \sqrt{\lambda_{cm}^2 + 2\lambda_{cm}h}.$$

Второй корень квадратного уравнения, соответствующий знаку минус перед радикалом, дает отрицательное значение λ_{∂} и поэтому не нужен.

Представим полученное выражение в виде

$$\lambda_{\partial} = \lambda_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{cm}}} \right).$$

Величину, стоящую в скобках, обычно называют *динамическим коэффициентом* k_{∂} , или коэффициентом удара:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{cm}}}. \quad (6.159)$$

Таким образом, *перемещение, вызванное действием ударной нагрузки, равно перемещению от статически приложенной силы, равной весу падающего груза, умноженному на динамический коэффициент*:

$$\lambda_{\partial} = k_{\partial} \cdot \lambda_{cm}. \quad (6.160)$$

Линейная связь между силами и перемещениями позволяет сделать вывод, что напряжения в упругой системе от действия ударной нагрузки во столько же раз больше возникающих при статическом приложении такой же по величине нагрузки, во сколько раз динамические перемещения больше статических, т.е.

$$\sigma_{\partial} = k_{\partial} \cdot \sigma_{cm}. \quad (6.161)$$

Следовательно, определение перемещений и напряжений при ударе сводится к определению перемещений и напряжений, вызванных статически приложенной силой, равной весу падающего груза, и вычислению динамического коэффициента.

Полученные формулы верны как в случае растягивающего или сжимающего, т.е. продольного удара по стержню или пружине, так и в случае изгибающего, т.е. поперечного удара по балке.

В частном случае мгновенного безударного приложения нагрузки, которое может рассматриваться как действие груза, падающего с высоты $h = 0$, получим $k_{\partial} = 2$.

Следовательно, *перемещения и напряжения, вызванные действием мгновенно приложенной силы, вдвое больше, чем при статическом действии такой же по величине силы.*

В случае если высота падения груза велика по сравнению с величиной $\lambda_{ст}$, можно пользоваться упрощенной формулой для вычисления динамического коэффициента:

$$k_d = \sqrt{\frac{2h}{\lambda_{ст}}}. \quad (6.162)$$

6.13. Местные напряжения

Напряжения при растяжении (сжатии), кручении, изгибе и в случае сложного нагружения, определяемые по рассмотренным выше зависимостям, называют *расчетными*. Экспериментально установлено, что в местах приложения сил, ослабления поперечного сечения отверстиями, в местах резкого изменения площади поперечного сечения *действительные* напряжения больше расчетных. Различие действительных и расчетных напряжений наблюдается в ограниченной зоне, т.е. носят местный характер, поэтому и напряжения, возникающие в этой зоне, называются *местными напряжениями* [1].

6.13.1. Концентрация напряжений

Во многих деталях машин и элементах конструкций по конструктивным, технологическим или экономическим соображениям имеют место нарушения геометрической сплошности поверхностей различного рода отверстиями, выкружками, резкими переходами размеров и др. Конструктивные элементы на поверхностях деталей, технологические погрешности и дефекты строения материала принято называть *концентраторами напряжений*.

В непосредственной близости от концентратора напряжений возникают дополнительные местные напряжения, которые могут в несколько раз превосходить значения средних напряжений, испытываемых телом. Происходит так называемая **концентрация напряжений** – *явление резкого увеличения напряжений в местах прославления сечения детали*. Концентрация напряжений может быть вызвана и условиями внешних воздействий (температурных, силовых, электромагнитных, радиационных и др.)

Например, при растяжении полосы (рис. 6.95, *a*) силами F в сечениях $k-k$ напряжения равны расчетным: $\sigma = \frac{F}{A}$. При наличии в пластине отверстия (рис. 6.95, *б*) или выточки (рис. 6.95, *в*) распределение напряжений изменяется: у краев отверстия и выточки напряжения максимальны ($\sigma_{\max}$) и значительно превосходят расчетные. Подобное можно наблюдать и при изгибе балки (рис. 6.96, *a*), когда $\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{F \cdot l}{W_x}$, а $\sigma_{\max} > \sigma$.

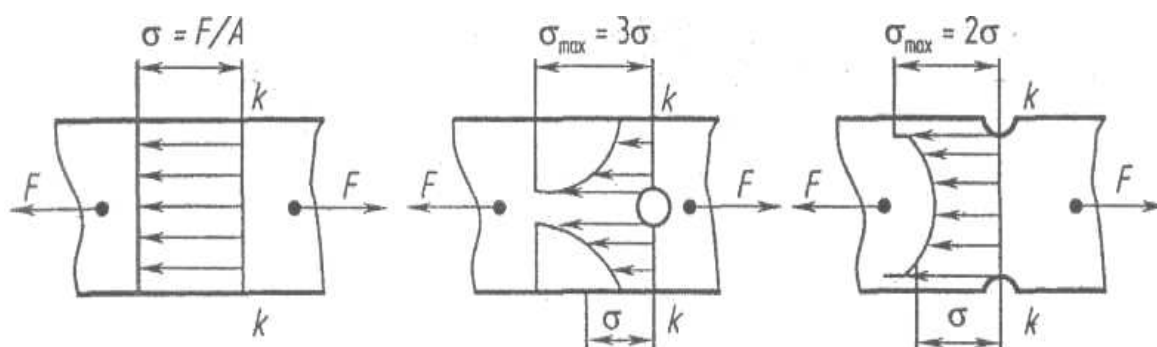


Рис. 6.95. Концентрации напряжений: *a* – эпюра нормальных напряжений при растяжении пластины, силами F ; *б* – эпюра нормальных напряжений при наличии концентратора напряжений в виде отверстия; *в* – эпюра тех же напряжений при наличии концентратора напряжений в виде выточки

Количественной мерой концентрации напряжений служит *коэффициент концентрации напряжений*. Различают теоретический и эффективный коэффициенты концентрации напряжений.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений равен отношению максимального местного напряжения $\sigma_{\max}$ при наличии концентратора к расчетному напряжению σ в той же зоне при отсутствии концентратора:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}. \quad (6.163)$$

Теоретический коэффициент концентрации напряжений зависит от характера нагрузки, формы, размеров и ориентации концентратора относительно действующей нагрузки, физико-механических свойств материала детали и других факторов. Коэффициент концентрации α_k определяют на основе методов теории упругости, пластичности и экспериментальными методами (поляризационно-оптическим, тензометрированием, лаковых покрытий, полос муара и др.).

При статическом нагружении разрушение хрупких материалов в зоне концентрации напряжений начинается при достижении местных максимальных напряжений предела прочности. В этом случае достаточно знание теоретического коэффициента концентрации напряжений. В пластичных материалах влияние концентраторов напряжений на прочность значительно сложнее. Пластичные материалы значительно легче переносят концентрацию напряжений за счет, так называемого «выравнивания» напряжений, происходящего при достижении местного максимального напряжения предела текучести.

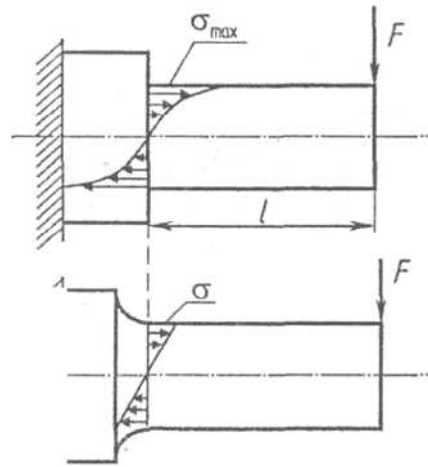


Рис. 6.96. Концентрация напряжений при изгибе ступенчатого бруса (а) и снижение ее при помощи галтели (б)

Значение теоретического коэффициента концентрации напряжений не дает полного суждения о прочности конструкции при переменных нагрузках. В связи с этим вводится понятие эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ , который всегда меньше значения теоретического коэффициента концентрации напряжений α_k и равен

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_k - 1), \quad (6.164)$$

где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, принимающий значения от 0 до 1,0. Для конструкционных сталей q назначается от 0,6 до 0,8, причем меньшие значения выбирают для пластичных сталей, а большие – для более твердых сталей. Для чугуна он равен 1,0.

Уменьшить негативное действие концентраторов напряжений можно различными приемами:

- подкрепить отверстия различного рода упругими элементами из других материалов;
- применять плавные переходы, называемые *галтелями*, при резком изменении размеров поперечного сечения (рис. 6.96, б);
- заменять прорези полукруглыми выточками;
- увеличивать радиусы закруглений галтелей и выточек;
- заменять круглые отверстия эллиптическими, вытянутыми вдоль оси тела;
- располагать необходимые отверстия в зоне пониженных напряжений и т.д.

6.13.2. Контактные напряжения

Большие местные напряжения возникают в местах соприкосновения действующих друг на друга тел. Эти напряжения принято называть *контактными*. Под контактными напряжениями понимают те *местные напряжения, которые возникают при нажатии тел друг на друга по небольшой площадке соприкосновения их между собой*. Теория распределения контактных напряжений была разработана Г. Герцем на основе методов теории упругости. Определение контактных напряжений выполняют при расчетах подшипников качения, цилиндрических шарниров и катков в опорных устройствах, фрикционных и зубчатых передач, элементов кулачковых механизмов и др. От места контакта напряжения убывают быстро, поэтому их относят к местным напряжениям.

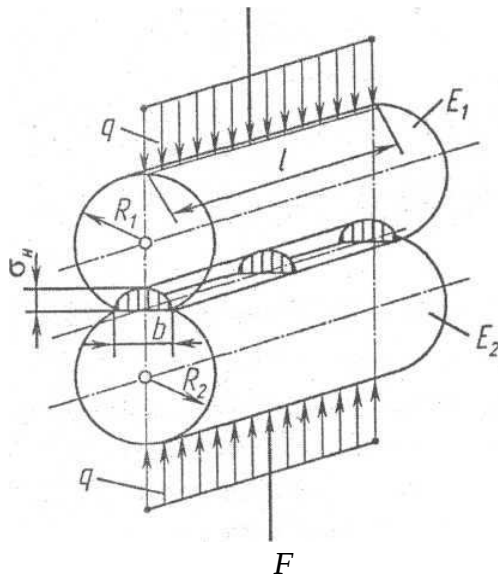


Рис. 6.97. Контактные напряжения при соприкосновении двух цилиндров

Определение контактных напряжений при малых размерах площадок контакта для тел различной конфигурации базируется на следующих допущениях:

- в месте контакта возникают только упругие деформации;
- поверхности соприкасающихся тел идеально гладкие;
- силы давления, распределенные по площадке контакта, нормальны к поверхности контакта;
- на площадке контакта возникают только нормальные напряжения.

Напряжения в месте контакта зависят от геометрии соприкасающихся тел. Например, в случае сжатия двух цилиндров (рис. 6.97) радиусами R_1 и R_2 и длиной l по образующей, считают, что сила прижатия F передается через узкую площадку контакта шириной b и длиной l . Возникающие на площадке нормальные напряжения распределяются по ее ширине в эллиптической зависимости, достигая наибольшего значения в точках оси площадки и могут быть определены по формуле

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{qE_{np}}{2\pi(1-\mu^2)\rho_{np}}}, \quad (6.165)$$

где $q = \frac{F}{l}$ – удельная (на единицу длины) нагрузка; $E_{gh} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}$ – приведенный модуль упругости материалов цилиндров; μ – коэффициент Пуассона; $\rho_{np} = \frac{R_1R_2}{R_1 \pm R_2}$ – приведенный радиус кривизны цилиндров; знак «–» берут в случае контакта выпуклой поверхности радиусом R_2 с вогнутой поверхностью радиусом R_1 .

Для материалов с коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$ выражение (6.165) принимает вид

$$\sigma_H = 0,148 \sqrt{\frac{qE_{np}}{\rho_{np}}}. \quad (6.166)$$

При соприкосновении двух шаров радиусами R_1 и R_2 контактные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_H = 0,3383 \sqrt{\frac{FE_{np}^2}{\rho_{np}^2}}; \quad (6.167)$$

Условие прочности записывается в виде

$$\sigma_H \leq [\sigma_H]. \quad (6.168)$$

Допускаемое контактное напряжение зависит в основном от свойств поверхностных слоев материала деталей и от характера изменения контактных напряжений во времени. Значения $[\sigma_H]$ существенно выше, чем допускаемые напряжения, принимаемые при оценке общей прочности деталей $[\sigma]$, примерно в 3 ... 5 раз.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения прочности, жесткости и устойчивости.
2. Приведите классификацию внешних нагрузок. Какие внешние силы являются активными, а какие – реактивными?
3. Дайте определения основных свойств материалов. Приведите основные гипотезы и допущения, используемые в сопротивлении материалов.
4. В чем заключается метод сечений? Назовите внутренние силовые факторы, возникающие в сечениях бруса.
5. Дайте определение напряжения в точке тела и приведите формулу его определения.

6. Приведите классификацию элементов конструкций по геометрической форме.
7. На какие составляющие можно разложить напряжение в точке тела? В чем заключается физический смысл нормального и касательного напряжений?
8. Какой вид деформации называется растяжением или сжатием, и какие внутренние силовые факторы возникают при этом?
9. Что называется продольной силой и как она определяется?
10. Какие напряжения возникают при растяжении или сжатии и приведите формулу их определения?
11. Что называется эпюрой продольных сил, приведите порядок ее построения и контроля?
12. Что называется эпюрой нормальных напряжений, приведите порядок ее построения и контроля?
13. Как измениться вид эпюр продольных сил и нормальных напряжений при учете собственного веса бруса?
14. Дайте определения абсолютного и относительного удлинения или укорочения бруса. Что называется коэффициентом Пуассона, как он определяется, его размерность и диапазон значений?
15. Сформулируйте и запишите закон Гука при растяжении или сжатии.
16. Что называется модулем Юнга, какова его размерность?
17. Что понимается под жесткостью при растяжении или сжатии?
18. Как графически можно выразить закон Гука?
19. Как определяются напряжения в наклонных площадках бруса?
20. Как определяются перемещения сечений бруса и строится их эпюра?
21. Какие методы расчета на прочность Вы знаете? Запишите условие прочности по методу допускаемых напряжений.
22. Какие виды расчетов можно выполнять из условия прочности?
23. От каких условий зависит выбор материалов, применяемых при изготовлении нефтеаппаратуры?
24. Как ведут себя стали при повышенных и пониженных температурах?
25. Что называется ползучестью? Что называется релаксацией?
26. По каким классификационным признакам разделяются испытания?
27. Вычертите диаграмму растяжения пластичного материала и дайте определение основных механических характеристик?
28. Какое явление называется наклепом?

29. Что называется твердостью и какими методами определяется число твердости?
30. Приведите сравнительные диаграммы сжатия пластичного и хрупкого материала и отметьте характерные зависимости.
31. В чем заключаются особенности проведения испытаний на сжатие древесины?
32. Какие напряжения принято называть допускаемыми? Как определяется величина допускаемых напряжений?
33. Какие напряжения являются опасными для хрупкого и пластичного материалов? Что такое коэффициент запаса прочности?
34. Приведите известные Вам геометрические характеристики плоских сечений?
35. Что называется осевым моментом инерции, его размерность, знак и формула определения?
36. Что называется полярным моментом инерции, его размерность, знак и формула определения?
37. Что называется центробежным моментом инерции, его размерность, знак и формула определения?
38. Что называется осевым моментом сопротивления, его размерность, знак и формула определения?
39. Что называется радиусом инерции, его размерность, знак и формула определения?
40. Запишите формулы изменения моментов инерции при параллельном переносе осей.
41. Запишите формулы изменения моментов инерции при повороте осей на определенный угол.
42. Как определяются главные моменты инерции? Какие оси называются главными осями инерции?
43. Запишите формулы определения моментов инерции и моментов сопротивления простых плоских фигур относительно центральных осей.
44. Запишите формулы вычисления центробежного момента инерции плоского сечения.
45. Какой вид деформации называется сдвигом, и какие внутренние силовые факторы при этом возникают?
46. Какая величина называется относительным сдвигом? Запишите закон Гука при сдвиге. Запишите формулу определения абсолютного сдвига.
47. Запишите связь между упругими постоянными E , G , μ .
48. Запишите условие прочности при сдвиге.

49. Какой вид деформации называется смятием? Запишите условие прочности при смятии.
50. Какие виды деформации возникают при работе заклепочных соединений?
51. Запишите условие прочности сварного стыкового соединения. Какой вид имеет условие прочности лобового сварного шва.
52. Какой вид деформации называется кручением?
53. Что называется крутящим моментом? Изложите порядок построения и контроля эпюры крутящих моментов.
54. Как определяются касательные напряжения при кручении, и какой вид имеет их эпюра?
55. Как определяются абсолютный и относительный угол закручивания?
56. Запишите условия прочности и жесткости при кручении.
57. Какие внутренние силовые факторы возникают при сжатии цилиндрической винтовой пружины? Запишите условие прочности пружины.
58. Что называется осадкой пружины и как она определяется? Что называется характеристикой пружины?
59. Что характеризует индекс пружины? Запишите формулу определения коэффициента жесткости пружины.
60. Какой вид деформации называется изгибом? Какой изгиб называется чистым, поперечным?
61. Что называется силовой плоскостью при изгибе?
62. Сформулируйте правила знаков для изгибающего момента и поперечной силы.
63. Что называется эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил?
64. Назовите правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
65. Какой вид имеют эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной сосредоточенной силой?
66. Какой вид имеют эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной парой сил с моментом M ?
67. Какой вид имеют эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для однопролетной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой?
68. Какой вид имеют эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой?

69. Сформулируйте правила контроля эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
70. Запишите дифференциальную зависимость между M , Q , q .
71. Напишите формулу определения нормальных напряжений в сечениях балки при изгибе.
72. Какой вид имеет эпюра нормальных напряжений при изгибе балки?
73. Запишите формулу определения касательных напряжений (формулу Журавского) в сечениях балки при изгибе.
74. Какой вид имеет эпюра касательных напряжений при изгибе балки прямоугольного и двутаврового сечения?
75. Запишите условие прочности при изгибе.
76. Запишите формулу расчета на прочность при изгибе по главным напряжениям.
77. Какую балку называют балкой равного сопротивления изгибу?
78. Что называется прогибом и углом поворота сечений балки при изгибе? Что называется упругой линией балки?
79. Запишите дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
80. Из каких условий определяются постоянные интегрирования при получении уравнений углов поворота и прогибов сечений балки?
81. Какой вид имеет условие жесткости при изгибе?
82. Что называется напряженным состоянием в точке тела? Какие величины называются компонентами напряженного состояния?
83. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
84. Какие площадки и напряжения называются главными?
85. Назовите и приведите примеры видов напряженного состояния.
86. Чему равно максимальное касательное напряжение для данной точки тела?
87. Запишите формулу определения главных напряжений в точке тела.
88. Как определяется положение главных площадок? Какое напряжение называется эквивалентным?
89. Назовите и сформулируйте классические теории прочности.
90. Какой вид деформации называется сложным сопротивлением?
91. Запишите формулу определения напряжений при внецентренном сжатии.
92. Как определяются отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат при внецентренном сжатии?

93. Что такое ядро сечения?
94. Запишите условие прочности при совместном действии кручения с изгибом.
95. Запишите условие прочности при совместном действии кручения с растяжением или сжатием.
96. Назовите основные физические свойства жидкости.
97. Дайте определение гидростатического давления и приведите его свойства.
98. Запишите основное уравнение гидростатики.
99. Какой вид имеет эпюра гидростатического давления?
100. Какое тело называется оболочкой?
101. Что называется срединной поверхностью оболочки?
102. Какая теория расчета носит название безмоментной теорией оболочек?
103. Какой формулой связаны между собой меридиональные и кольцевые напряжения в тонкостенной оболочке?
104. Запишите уравнение Лапласа.
105. Приведите примеры устойчивого и неустойчивого равновесия.
106. Какая центрально приложенная сжимающая сила называется критической?
107. Как определяется величина допустимой силы из расчета на устойчивость?
108. Запишите формулу Эйлера и укажите пределы ее применимости.
109. Как определяется предельная гибкость?
110. Какой вид имеет формула Ясинского и когда она применяется?
111. Какой вид имеет расчетная формула на устойчивость?
112. Как определяется коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения φ ?
113. Опишите физическую картину поведения оболочки при осевом сжатии.
114. Как определяются критические напряжения при сжатии замкнутой цилиндрической оболочки?
115. Как определяются критические напряжения в цилиндрической оболочке при действии внешнего давления?
116. Что свидетельствует о воздействии динамической нагрузки?
117. По какой формуле рассчитываются напряжения в тросе при подъеме груза?
118. Как определяется динамический коэффициент при ударе?

119. Какие напряжения называются местными?
120. Что называется концентрацией напряжений?
121. Как определяется теоретический коэффициент концентрации напряжений?
122. Что называется концентратором напряжений?
123. По какой формуле определяется эффективный коэффициент концентрации напряжений?
124. Что такое контактные напряжения?
125. По какой формуле определяются контактные напряжения?

Литература

1. Завистовский, В.Э. Техническая механика / В.Э. Завистовский, Н.М. Захаров. – Мн.: Амалфея, 2000. – 416 с.
2. Сопротивление материалов / под общ. ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1975. – 480 с.
3. Любошиц, М.И. Справочник по сопротивлению материалов / М.И. Любошиц, Г.М. Ицкович. – Мн.: Высш. шк., 1969. – 464 с.
4. Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов / Г.М. Ицкович. – М.: Высшая школа, 1976. – 439 с.
5. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1975. – 654 с.
6. Саргсян, А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности / А.Е. Саргсян. – М.: Высш. шк., 2000. – 286 с.
7. Винокуров, Е.Ф. Сопротивление материалов: расчет.-проектир. работы / Е.Ф. Винокуров, А.Г. Петрович, Л.И. Шевчук. – Мн.: Высш. шк., 1987. – 227 с.
8. Вихман, Г.Л. Основы конструирования аппаратов и машин нефтеперерабатывающих заводов / Г.Л. Вихман, С.А. Круглов. – М.: Машиностроение, 1978. – 328 с.
9. Хмелев, А.А. Сопротивление материалов: лабораторные работы / А.А. Хмелев, В.А. Сидоров. – Мн.: Технопринт, 2002. – 206 с.
10. Тимофеев, С.И. Сопротивление материалов / С.И. Тимофеев. – Ростов н/Д: Феникс, 2004. – 192 с.
11. Ильина, Т.Н. Основы гидравлического расчета инженерных сетей / Т.Н. Ильина. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 192 с.

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Аксиомы статики – простые исходные положения, подтверждаемые практикой и не нуждающиеся в доказательстве, устанавливающие основные свойства сил, приложенных к материальной точке и абсолютно твердому телу.

Аппараты (химических и нефтехимических производств) – технические системы, предназначенные для ведения в них технологических процессов, а также для хранения или перемешивания различных химических веществ.

Балка – брус, преимущественно работающий на изгиб.

Балка равного сопротивления изгибу – балка, в сечениях которой наибольшие нормальные напряжения имеют одинаковые значения.

Балансировка – уравнивание вращающихся движущихся масс механизмов с целью устранения влияния сил инерции.

Вал – брус, испытывающий деформации кручения.

Вес тела – численное значение силы тяжести, равное той силе, с которой тело давит на неподвижную опору в состоянии равновесия, если при этом другие силы на него не действуют.

Гибкость – безразмерная геометрическая характеристика сжатого стержня, показывающая его сопротивляемость потери устойчивости; она одновременно отражает и длину стержня и жесткость его поперечного сечения.

Гибкость предельная – физическая величина, постоянная для данного материала, зависящая только от физико-механических свойств и не зависящая от размеров стержня.

Главный вектор – сила, равная геометрической сумме сил системы.

Главный момент системы сил – векторная сумма моментов всех сил системы относительно центра приведения.

Графитизация – явление, связанное с разрушением карбида углерода и образованием цепочек свободного графита; наблюдается в зоне сварных швов.

Движение (механическое) – изменение положения тел в пространстве относительно других тел с течением времени.

Движение вращательное – движение тела вокруг неподвижной оси, при котором прямая, проходящая через какие-нибудь две точки, во время движения остается неподвижной.

Движение переносное – движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета

Движение плоскопараллельное – движение твердого тела, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Движение поступательное – движение твердого тела, при котором любая отмеченная в нем прямая движется, оставаясь параллельной самой себе.

Движение плоское -- движение твердого тела, при котором все точки траектории лежат в одной плоскости.

Деталь – простейшая часть механизма, выполненная из материала одной марки без применения сборочных операций.

Динамика – раздел механики, в котором изучаются движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Диссипация – процесс преобразования механической энергии в другие формы энергии.

Жесткость – способность элементов конструкций и деталей машин противостоять образованию деформации.

Заклепка – стержень с одной головкой.

Звено – подвижное соединение между собой частей механизма.

Звено ведущее – подвижное звено, получающее движение от внешних источников.

Звено ведомое – подвижное звено, получающее определенное движение от ведущего звена.

Звено рабочее – ведомое звено, совершающее требуемое движение, которое получают с помощью механизма.

Звено зубчатое – звено, имеющее выступы (зубья) для передачи движения посредством взаимодействия с выступами другого звена (тоже зубчатого).

Звено гибкое – подвижное звено (ремень, канат, нить, цепь), которое охватывает два и более звеньев и устанавливает определенную связь между перемещениями этих звеньев.

Изгиб – вид деформации бруса, при которой происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны оси кривого бруса.

Изгиб чистый – изгиб, при котором в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты.

Изгиб прямой – изгиб, при котором силовая плоскость проходит через одну из главных плоскостей балки и ось балки искривляется в этой же плоскости.

Изгиб косой – изгиб, при котором силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки и изогнутая ось не лежит в силовой плоскости.

Изгиб поперечный – изгиб, при котором совместно с изгибающим моментом в сечениях балки возникают и поперечные силы.

Изгибающий момент – внутренний силовой фактор, возникающий в поперечном сечении балки, т.е. момент относительно оси, расположенной в плоскости поперечного сечения и проходящей через его центр тяжести; действует в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению балки.

Импульс силы – векторная величина, численно равная произведению силы на время ее действия.

Индекс пружины – отношение среднего диаметра пружины к диаметру проволоки.

Инертность – способность тел сохранять состояние своего движения.

Инерциальная система отсчета – система отсчета, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

Кинетическая энергия – энергия, которой обладает всякая материальная точка при движении; динамическая мера движения материальной точки.

Кинематическая пара – соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение.

Кинематическая цепь – соединение звеньев с помощью кинематических пар.

Колесо зубчатое – вращающееся зубчатое звено.

Конус трения – геометрическое место прямых линий, проведенных из точки под углом трения к нормали опорной поверхности.

Кинестатики метод – искусственный прием, позволяющий рассматривать равновесие тела вместо его движения; метод решения динамических задач с помощью принципа Д'Аламбера.

Количество движения материальной точки – вектор, равный произведению массы материальной точки на ее скорость, и имеющий направление скорости.

Коромысло – подвижное звено, совершающее неполнооборотное вращательное движение.

Концентраторы напряжения – конструктивные элементы на поверхности деталей, технологические погрешности и дефекты строения материала и другие прослабления сечения детали.

Концентрация напряжений – явление резкого увеличения напряжений в местах прослабления сечения детали.

Коэффициент концентрации напряжений – количественная мера концентрации напряжений.

Коэффициент концентрации напряжений теоретический – отношение максимального местного напряжения при наличии концентратора напряжения к расчетному напряжению в той же зоне при отсутствии концентратора напряжений.

Коэффициент концентрации напряжений эффективный – коэффициент концентрации напряжений, определенный с учетом действия переменных нагрузок и чувствительности материала к концентрации напряжений; всегда меньше значения теоретического коэффициента концентрации напряжений.

Коэффициент полезного действия – отношение полезной работы или мощности к затраченной.

Коэффициент Пуассона – частное от деления относительной поперечной деформации на относительную продольную деформацию при осевом растяжении (сжатии), взятое по абсолютной величине.

Кривошип – подвижное звено, совершающее полнооборотное вращательное движение вокруг неподвижной оси.

Кручение – вид деформации бруса, при котором в поперечных сечениях возникают только крутящие моменты.

Кулачок – подвижное звено, выполненное в виде поверхности переменной кривизны.

Кулиса – подвижное звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном поступательную пару.

Линия действия силы – прямая, по которой направлен вектор силы.

Линия нулевая – прямая, делящая поперечное сечение на две части, в одной из которых напряжения сжимающие, а в другой – растягивающие.

Линия силовая – линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения.

Линия упругая – кривая линия, в которую превращается первоначально прямолинейная ось балки после приложения к ней внешней нагрузки.

Масса тела – величина, зависящая от количества вещества в данном теле и определяющая его инертность.

Материал пластичный – материал, разрушение которого происходит при больших остаточных деформациях.

Материал хрупкий – материал, разрушение которого происходит уже при малых остаточных деформациях.

Машина – совокупность взаимосвязанных звеньев, предназначенная для преобразования энергии или движения, для накопления и переработки информации с целью повышения производительности, замены или облегчения физического и умственного труда человека.

Механизм – совокупность взаимосвязанных звеньев, допускающая их относительное движение и предназначенная для преобразования заданного движения одного или нескольких звеньев в требуемое движение остальных.

Механизм винтовой – механизм, в состав которого входят винтовые пары.

Механизм зубчатый – механизм, в состав которого входят зубчатые звенья.

Механизм кулачковый – механизм, в состав которого входит кулачок.

Механизм прерывистого движения – механизм, предназначенный для преобразования непрерывного движения ведущего звена в прерывистое движение ведомого звена.

Механизм фрикционный – механизм, в котором для передачи движения между соприкасающимися звеньями используется трение.

Механика – наука об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механика прикладная – область механики, посвященная изучению движения и напряженного состояния реальных технических объектов с учетом основных закономерностей, установленных в теоретической механике.

Момент инерции тела относительно оси – сумма произведений масс материальных точек, составляющих это тело, на квадрат расстояний их до этой оси.

Момент инерции плоского сечения осевой – сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояний до рассматриваемой оси.

Момент инерции плоского сечения полярный – сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояний до полюса.

Момент инерции плоского сечения центробежный – сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояний до координатных осей Ox и Oy .

Момент инерции плоского сечения главный – максимальное (минимальное) значение момента инерции плоского сечения относительно данной оси.

Момент инерции плоского сечения главный центральный – максимальное (минимальное) значение момента инерции плоского сечения относительно главной центральной оси.

Момент пары сил – взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо.

Момент силы относительно точки – взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы.

Момент силы относительно оси – момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки их пересечения.

Момент сопротивления плоского сечения осевой – отношение осевого момента инерции относительно данной оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки поперечного сечения вдоль этой оси.

Момент статический площади плоской фигуры относительно оси – взятая по всей площади фигуры сумма произведений элементарных площадок на их расстояние до этой оси.

Момент маховой – произведение силы тяжести вращающегося тела на квадрат его диаметра инерции.

Мультипликатор – механизм, служащий для повышения угловой скорости ведомого звена.

Нагрузка временная – нагрузка, действующая лишь некоторое время на конструкцию.

Нагрузка динамическая – нагрузка, вызывающая ускорение в элементах конструкции.

Нагрузка постоянная – нагрузка, действующая на протяжении всего времени работы конструкции.

Нагрузка статическая – нагрузка, приложенная к конструкции постепенно и не вызывающая ускорения элементов конструкции.

Направление силы – направление того перемещения, которое получает под действием этой силы материальная точка, находившаяся в покое.

Напряжение – мера интенсивности внутренних сил в точках сечения.

Напряжение в точке тела – величина внутренней силы, приходящаяся на единицу площади сечения.

Напряжение нормальное – напряжение, действующее перпендикулярно к данному сечению.

Напряжение касательное – напряжение, действующее в плоскости сечения.

Напряжение допускаемое – напряжение, превышение которого приводит к возникновению в материале конструкции опасного состояния.

Напряжение эквивалентное – напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равнопрочным заданному напряженному состоянию.

Напряжение меридиональное – нормальное напряжение, направленное вдоль меридиана оболочки.

Напряжение кольцевое – нормальное напряжение, направленное перпендикулярно меридиану оболочки.

Напряжение расчетное – напряжение, определенное для данного вида деформации по расчетным зависимостям.

Напряжения контактные – местные напряжения, которые возникают при нажатии тел друг на друга по небольшой площадке соприкосновения их между собой.

Напряжение местное – напряжение в ограниченной зоне, обусловленное различием действительных и расчетных напряжений.

Оболочка – геометрическое тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами тела.

Осадка – изменение высоты пружины под нагрузкой.

Ось инерции главная – ось, относительно которой осевой момент инерции плоского сечения имеет экстремальное значение.

Ось центральная – ось, проходящая через центр тяжести.

Пара сил – система двух равных по модулю противоположных сил, приложенных к одному твердому телу.

Плечо пары сил – кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Передача – механизм, служащий для передачи вращательного движения с преобразованием скорости ведомого звена.

План положения – выполненное в масштабе графическое положение механизма.

План скоростей – фигура, образованная векторами скоростей точек звеньев при заданном положении механизма.

План ускорений – фигура, образованная векторами ускорений точек звеньев при заданном положении механизма.

Пластичность – свойство материала тела получать значительные остаточные деформации, не разрушаясь.

Плоскость силовая – плоскость, проходящая через ось балки, в которой действуют внешние силы.

Площадка текучести – горизонтальный участок диаграммы растяжения пластичного материала.

Поверхность срединная – поверхность, делящая пополам толщину стенки оболочки.

Ползучесть – способность материала конструкции медленно, непрерывно, пластически деформироваться под действием постоянной нагрузки при высоких температурах.

Ползун – подвижное звено механизма, совершающее возвратно-поступательное движение.

Пояс фермы (верхний, нижний) – стержни внешнего контура фермы
Предел пропорциональности – наибольшее напряжение, при котором справедлив закон Гука.

Предел упругости – наибольшее напряжение, при котором деформации носят еще упругий характер.

Предел текучести – напряжение, при котором деформации растут без увеличения нагрузки.

Предел прочности – наибольшее напряжение, возникающее в теле до разрушения.

Прибор – техническая система, служащая для передачи и преобразования движения и предназначенная для регистрации и регулирования физических и технологических процессов производства, технических измерений, приема и передачи различной информации и сигналов и др.

Прогиб – линейное перемещение сечений балки при изгибе.

Прочность – способность элементов конструкций сопротивляться внешнему воздействию, не разрушаясь.

Работа силы – количественная скалярная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Раскос – стержень решетки фермы, наклоненный под углом к горизонту.

Растяжение – вид деформации, при котором все внутренние силы в поперечном сечении сводятся к продольной силе, имеющей положительное значение.

Реакция связи – сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении

Редуктор – механизм, служащий для понижения угловой скорости ведомого звена.

Релаксация – самопроизвольное снижение напряжений в элементах конструкций при высокой температуре и при неизменной деформации.

Решетка – стержни, расположенные между верхним и нижним поясами фермы.

Ротор – звено механизма, совершающее вращательное движение.

Связь – любое ограничение, накладываемое на движение тела.

Связь пассивная – связь, не влияющая на кинематику механизма, а формально уменьшающая степень его подвижности.

Сдвиг – вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только поперечная сила.

Сжатие – вид деформации, при котором все внутренние силы в поперечном сечении сводятся к продольной силе, имеющей отрицательное значение.

Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

Сила движущая – сила, приложенная к ведущим звеньям механизма и направленная в сторону перемещений их точек приложения или составляющая с этими перемещениями острый угол.

Сила полезного сопротивления – сила, приложенная к рабочим звеньям механизма, направленная против перемещения их точек приложения или составляющая с этими перемещением тупой угол.

Сила вредного сопротивления – сила, возникающая при относительном движении элементов кинематических пар, на преодоление которых расходуется дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления сил полезного сопротивления.

Сложное сопротивление – вид деформации, когда в результате действия нагрузки в поперечных сечениях одновременно возникают несколько внутренних силовых факторов.

Слой нейтральный – волокно, которое не подвергается деформации ни сжатия, ни растяжения при изгибе балки.

Смятие – разновидность деформации сжатия при действии сжимающей силы на небольшой площади элемента конструкции.

Срез – деформация сдвига, доведенная до разрушения бруса.

Статика – раздел механики, в котором изучаются общие правила сложения сил и условия равновесия материальных тел под действием сил.

Стойка (механизм) – неподвижное звено механизма.

Стойка (фермы) – вертикальный стержень в ферме.

Степень подвижности механизма – число независимых движений, которые можно задать ведущему звену чтобы получить вполне определенное движение всех остальных подвижных механизма.

Стрела прогиба – максимальный прогиб сечений балки.

Твердость – способность материала оказывать сопротивление проникновению в него другого, более твердого тела.

Тело абсолютно твердое – тело, у которого расстояния между любыми двумя точками остаются неизменными.

Тело отсчета – тело, относительно которого рассматривается положение интересующего нас тела.

Точка материальная – абстрактный образ материального тела (или его части), который имеет вид геометрической точки с массой, равной массе данного тела (или части этого тела).

Точка свободная – точка, которая может получать любые перемещения в пространстве.

Точка приложения силы – материальная частица тела, на которую непосредственно передается действие от другого тела.

Траектория – линия, описываемая движущейся материальной точкой относительно выбранной системы отсчета.

Трение качения – сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Угол трения скольжения – наибольший угол, на который может отклониться линия действия силы реакции негладкой поверхности от нормали, проведенной к ней в точке контакта тел.

Угол поворота – угол, на который поворачивается каждое сечение по отношению к своему первоначальному положению.

Удлинение абсолютное – увеличение длины бруса.

Удлинение относительное – отношение величины абсолютного удлинения к первоначальной длине бруса.

Узел – соединение стержней фермы между собой.

Укорочение абсолютное – уменьшение длины бруса.

Укорочение относительное – отношение величины абсолютного укорочения к первоначальной длине бруса.

Упругость – способность тела восстанавливать свою первоначальную форму после удаления внешних сил.

Ускорение – кинематическая мера, характеризующая быстроту изменения во времени скорости тела.

Условия связи – ограничения, налагаемые на относительные движения звеньев, входящих в кинематическую пару.

Устойчивость – способность элементов конструкций сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Факторы внутренние силовые – внутренние усилия взаимодействия любых частей конструкции под действием внешних сил.

Ферма – геометрически неизменяемая система прямолинейных стержней, соединенных шарнирами.

Ферма плоская – ферма, оси стержней которой лежат в одной плоскости.

Функция передаточная – первая производная от функции положения ведомого звена по углу поворота или линейному перемещению ведущего звена.

Функция положения – геометрическая характеристика, связывающая положение ведомого и ведущего звеньев механизма.

Характеристика пружины – зависимость между нагрузкой пружины и изменением ее высоты, задаваемая в виде графика.

Хрупкость тепловая – снижение ударной вязкости материала в результате их длительной работы при высоких температурах.

Центр тяжести – геометрическая точка, принадлежащая телу, через которую проходит линия действия равнодействующей системы сил тяжести частиц материального тела.

Цикл движения механизма – полная совокупность последовательных однократно воспроизводимых относительных расположений звеньев механизма.

Шатун – подвижное звено, участвующее в сложном движении механизма.

Шарнир – подвижное соединение тел, которое дает возможность им свободно поворачиваться относительно друг друга.

Шарнир идеальный точечный – шарнир, в котором отсутствует трение.

Шестерня – зубчатое звено механизма, имеющее меньшее число зубьев.

Элементы пары – поверхности, линии, точки, по которым одно звено соприкасается с другим, образуя кинематическую пару.

Эпюра внутренних силовых факторов – график, выражающий закон изменения внутреннего силового фактора по длине бруса.

Ядро сечения – область, очерченная вокруг центра тяжести и характерная тем, что всякая продольная сила, приложенная в этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака.

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ФОРМУЛЫ

Равнодействующую двух сходящихся сил можно найти и с помощью вычислений:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Аналитические уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, используя формулы:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) = 0.$$

Положение ее центра тяжести плоской фигуры:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k x_k)}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n (A_k y_k)}{A}.$$

Касательное ускорение:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho}.$$

Модуль ускорения Кориолиса:

$$a_{кор} = 2 \cdot \omega \cdot V_{отн} \cdot \sin(\bar{\omega} \bar{V}_{отн})$$

Формула движения жидкости Эйлера

$$M\vec{V}_1 - M\vec{V}_2 + \vec{R}_{об}^e + \vec{R}_{нов}^e = 0.$$

Формула Д. Бернулли

$$R_x = \rho S V_1^2.$$

Уравнение Д. Бернулли

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = const.$$

Формулы Малышева:

$$W = 6n - 1p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5.$$

Формулы Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Закон Гука при растяжении – сжатии:

$$\sigma = E \cdot \epsilon.$$

Абсолютная деформация при растяжении – сжатии:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

Условие прочности при растяжении – сжатии:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 \cdot A.$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2 \cdot A;$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + a \cdot b \cdot A.$$

Изменение моментов инерции при повороте осей на угол α :

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

Главные моменты инерции:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2};$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}.$$

Формулы вычисления центробежного момента инерции:

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha;$$

$$I_{x_1 y_1} = \pm \sqrt{I_{x_1} \cdot I_{y_1} - I_x \cdot I_y};$$

$$I_{x_1 y_1} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 - (I_{x_1} - I_{y_1})^2};$$

$$I_{x_1 y_1} = \pm \sqrt{(I_x - I_{x_1})(I_y - I_{y_1})}.$$

Закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

Упругие постоянные материала E , G , μ связаны между собой следующей зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Условие прочности при сдвиге:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau].$$

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}].$$

Выражение для касательных напряжений в произвольном волокне поперечного сечения при кручении вала:

$$\tau_p = \frac{M_z \cdot \rho}{I_p}.$$

Условие прочности при кручении:

$$\tau = \frac{M_{z_{\max}}}{W_p} \leq [\tau].$$

Условие жесткости при кручении:

$$\varphi_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_z}{G \cdot I_p} \leq [\varphi_0].$$

Условие прочности пружины:

$$\tau_{\max} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Формула определения осадки пружины:

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}.$$

Дифференциальные зависимости при изгибе:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y;$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = q;$$

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q.$$

Формула определения нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Формула определения касательных напряжений при изгибе (формула Д.И. Журавского):

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b_y}.$$

Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$y'' = \frac{M_z}{E \cdot I_x}.$$

Закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Величины главных напряжений находят по формуле

$$\sigma_{\pm l} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}.$$

Формула определения нормальных напряжений при внецентренном сжатии

$$\sigma = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p}{i_x^2} y + \frac{x_p}{i_y^2} x \right).$$

Уравнение Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}.$$

Формула Эйлера при расчетах на устойчивость

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_n^2}.$$

Условие использования формулы Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{нц}.$$

Формула Ф.С. Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

Условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \phi[\sigma].$$

Формула определения критических напряжений при расчете на устойчивость оболочки

$$p_{кр} = \frac{F_{кр}}{h} = 0,605E \frac{h}{r}.$$

Формула П.Ф. Папковича

$$q_{кр} = 0,92E \frac{h^2}{r \cdot l} \sqrt{\frac{r}{h}}.$$

Формула Бингама

$$\tau = \tau_0 + \mu^* \frac{dU}{dy},$$

Основное уравнение гидростатики

$$P = P_0 + \rho gh,$$

Динамические напряжения в тросе при подъеме груза:

$$\sigma = \sigma_{cm} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{cm} \cdot k_{\partial}.$$

Значение динамического коэффициента при расчете на удар:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{cm}}}.$$

Формула определения значения эффективного коэффициента концентрации напряжений

$$K_{\sigma} = 1 + q(\alpha_k - 1).$$

Формула Г. Герца

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{qE_{np}}{2\pi(1-\mu^2)\rho_{np}}}.$$

Учебное издание

ЗАВИСТОВСКИЙ Владимир Эдуардович

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов специальности 1-48 01 03 «Химическая технология
природных энергоносителей и углеродных материалов»

В двух частях

Часть 1

Теоретические основы расчетов

В двух книгах

Книга первая

Редактор *О.П. Михайлова*

Дизайн обложки *В.А. Виноградовой*

Подписано в печать 19.10.09. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 16,93. Уч.-изд. л. 16,21. Тираж 85 экз. Заказ 1774.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009

ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29