

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

Т. А. Алексеева

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ РЭС

Учебно-методический комплекс для студентов специальности
1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование РЭС»
очной и заочной форм обучения

Новополоцк
ПГУ
2014

УДК 621.396.6(075.8)
ББК 32.844я73
А47

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве учебно-методического
комплекса (протокол № 2 от 10.02.2010)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

канд. техн. наук, доц.,
зав. каф. радиоэлектроники УО «ПГУ» С. В. МАЛЬЦЕВ;
зам. директора Новополоцкого филиала РУП «БелТЭИ» А. А. ГЛУБОКИЙ

Алексеева, Т. А.

А47 Теоретические основы проектирования и надежности РЭС : учеб.-метод. комплекс для студентов специальности 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование РЭС» / Т. А. Алексеева. — Новополоцк : ПГУ, 2014. — 260 с.
ISBN 978-985-531-429-6.

Изложена основная информация по математическим методам, используемым в исследованиях конструкций и технологии радиоэлектронных средств (РЭС) и электронно-вычислительных средств (ЭВС), проводимых прежде всего на этапах научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИОКР).

Данный УМК призван углубить и расширить фундаментальную подготовку радиоинженеров-конструкторов-технологов, которые обязаны овладеть передовой технологией надежности проектирования РЭС (ЭВС) с применением ЭВМ.

Предназначен для преподавателей и студентов вузов данной специальности.

УДК 621.396.6(075.8)
ББК 32.844я73

ISBN 978-985-531-429-6

© Алексеева Т. А., 2014
© УО «Полоцкий государственный
университет», 2014

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические подходы при создании РЭС различной степени сложности и использующие различные принципы функционирования приобретают на современном этапе развития электронной техники все большее значение, ибо позволяют быстрее и с лучшим качеством создавать современную аппаратуру общего и специального назначения. Поэтому знать теоретические основы создания РЭС современному инженеру необходимо. Изложению этих основ и посвящен учебно-методический комплекс. Предметом изучения в нем являются инженерные математические основы конструирования, технологии и эксплуатации РЭС. Задача данной дисциплины состоит в изложении математических методов (подходов), используемых для анализа, синтеза и оптимизации процессов конструирования и технологии производства РЭС с целью повышения их качества.

Предметом изучения в курсе являются инженерные математические основы конструирования и разработки технологии производства РЭС (ЭВС) как необходимые компоненты большой системы проектирования, производства и эксплуатации РЭС (ЭВС), а именно методы:

- системного подхода к анализу больших систем;
- теоретического и экспериментального анализа конструкций и технологических процессов по их математическим моделям;
- оптимизации решений при конструировании и разработке технологии производства РЭС (ЭВС);
- экспериментального исследования конструкции и технологических процессов, научного планирования эксперимента;
- прогнозирования состояния и качества РЭС (ЭВС);
- анализа надежности и эффективности РЭС (ЭВС).

В результате изучения курса ТОП и Н студент должен: познакомиться с сущностью, содержанием и применением системного подхода и анализа в проектировании и исследованиях РЭС (ЭВС); освоить основные идеи математического моделирования, а также методы синтеза и анализа конструкций и технологии РЭС (ЭВС) с использованием математических моделей и теории параметрической чувствительности; углубить знания в области теории вероятностей и математической статистики, включая инженерные методы решения задач точности, стабильности, серийнопригодности и надежности РЭС (ЭВС); овладеть теорией и методами активного эксперимента и обработкой его результатов; изучить математические методы оптимизации технических решений; получить представление о перспективных теоретико-математических проблемах конструирования и технологии РЭС (ЭВС).

Курс является дисциплиной в подготовке инженеров по специальности 1-39 02 01 и базируется прежде всего на знании высшей и вычислительной математики, а также физики в объемах, даваемых в университете, физико-химических основ микроэлектроники и технологии (разделы явления в контактах, тепловые свойства твердых тел, механические свойства твердых тел, структура материалов электронной техники, физические процессы в диэлектриках, магнитные свойства твердых тел); электрорадиоэлементов и устройств функциональной электроники (разделы конструкции и принципы работы компонентов РЭС).

Полученные при изучении курса знания предназначены для того, чтобы в последующих конструкторско-технологических курсах использовать современные математические методы системного подхода, вероятностно-статистического анализа, математического моделирования и вычислительного эксперимента, теории надежности и оптимизации. Все это в сочетании с физическими представлениями и эвристическими (интуитивными) приемами, излагаемыми в конструкторско-технологических курсах, позволит студентам овладеть современными диалоговыми системами автоматизированного конструирования и технологической подготовки производства (ТхПП) РЭС (ЭВС). Именно на такой основе возможно проведение всесторонних проектных исследований конструкций и технологии с целью получения РЭС (ЭВС) высокой надежности и конкурентоспособности.

НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

№ темы	Название темы
1	Введение. Основные определения рассматриваемых понятий и связанных с ними терминов
2	Роль и место технической подготовки производства (ТПП) в структуре приборостроительного предприятия
3	Основные задачи и стадии конструкторской подготовки производства (КПП)
4	Основные задачи и стадии технологической подготовки производства (ТхПП)
5	Технические требования, предъявляемые к РЭС. Характеристика условий эксплуатации РЭС. Климатическое исполнение РЭС. Категории размещения изделий РЭС
6	Типизация и технологичность конструкций РЭС
7	Системный подход к проектированию и производству РЭС. Сложность РЭС. Системный подход к анализу физических процессов. Радиоэлектронное средство как методологическая система. Признаки системного подхода
8	Основы системного анализа. Условное изображение технического процесса как системы. Выходные и первичные параметры. Показатели параметрической чувствительности
9	Общие вопросы проектирования конструкций и технологических процессов. Теоретические исследования сущности основных задач проектирования. Роль функций чувствительности в решении проектных задач
10	Системные принципы построения расчетных моделей. Классификация расчетных моделей РЭС
11	Принципы исследования параметрической чувствительности РЭС
12	Основы математического моделирования конструкций и технологических процессов производства РЭС. Роль моделей в проектировании РЭС. Математическое моделирование физических процессов РЭС
13	Общие сведения о моделях. Метод наименьших квадратов. Нахождение приближающих математических моделей. Получение математических моделей с помощью пассивного и активных факторных экспериментов
14	Вероятностные модели и методы. Введение в теорию вероятностных моделей конструкций РЭС. Случайный характер параметров
15	Модели законов распределения параметров. Равномерное распределение. Экспоненциальное распределение. Нормальное распределение. Логарифмически нормальное распределение. Распределение Вейбулла. Гамма-распределение. Распределение Релея. Распределение Пуассона. Корреляция параметров
16	Экспериментальное определение вероятностного описания. Применение вероятностного описания параметров для решения инженерных задач
17	Вероятностные модели производства РЭС в виде систем массового обслуживания (МО). Производственные задачи, представляемые в виде МО. Типы систем МО и их характеристики. Потoki событий (заявок). Математическое описание систем МО: с отказом; «чистой», с ожиданием; смешанного типа с ограничением длины очереди

18	Вероятностные методы в задачах оценки и обеспечения надежности РЭС. Основные понятия и определения теории надежности. Математические основы оценки надежности
19	Математические модели надежности РЭС и технологических процессов как систем. Параметрическая надежность РЭС
20	Методы повышения надежности РЭС. Резервирование как метод повышения надежности РЭС. Постоянное резервирование. Резервирование замещением: нагруженный режим, облегченный режим, ненагруженный режим. Скользящее резервирование
21	Расчет и оптимизация комплектов запасных элементов (ЗИП) РЭС. Структура системы ЗИП. Запасы элементов. Стратегия пополнения запасов. Показатели достаточности. Методика вычислений показателей достаточности и расчета одиночного, группового комплекта ЗИП
22	Анализ точности и стабильности выходных параметров РЭС и технологических процессов. Основные понятия точности. Серийнопригодность конструкции. Виды допусков, устанавливаемых на параметры. Точность и стабильность параметров
23	Методы анализа точности выходных параметров. Определение производственного допуска методом «min-max». Анализ точности выходных параметров: вероятностным методом; методом Монте-Карло
24	Анализ стабильности выходных параметров РЭС и технологических процессов. Определение эксплуатационных допусков
25	Разработка и обеспечение требований к точности выходных параметров. Способы определения коэффициентов влияния: аналитический; экспериментально-расчетный
26	Прогнозирование технического состояния элементов и устройств РЭС. Понятие прогнозирования и его классификация. Приемы выполнения эвристического прогнозирования. Характеристика и методы решения задач индивидуального прогнозирования
27	Этапы решения задач индивидуального прогнозирования распознаванием образов
28	Рекомендации по выбору информативных признаков для элементов РЭС. Методы построения прогнозирующих правил

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

№ темы	Кол-во часов	Название темы
1	2	Определение точечных оценок математических ожиданий, среднеквадратических отклонений, интервальных оценок параметров; определение требуемого числа наблюдений параметра
2	2	Оценка коэффициентов парной корреляции; определение законов распределения параметров на основе опытных данных
3	2	Проверка гипотез о законах распределения параметров; проверка адекватности гипотезы соответствующему распределению параметров

4	2	Решение задач с использованием метода наименьших квадратов; нахождение приближающих математических моделей в виде элементарных функций
5	2	Построение математических моделей с помощью активных факторных экспериментов
6	2	Анализ точности выходных параметров вероятностным методом, методом Монте-Карло
7	2	Анализ стабильности выходных параметров: стабильность, температурные допуски, допуски старения, эксплуатационные допуски
8	4	Расчет показателей надежности РЭУ и их элементов: вероятность безотказной работы, вероятность отказа, интенсивность отказов, наработка на отказ, среднее время безотказной работы, эксплуатационные коэффициенты надежности

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

№ темы	Кол-во часов	Название темы
1	4	Изучение законов распределения случайных ошибок измерений и способов их учета
2	4	Изучение методов математической обработки результатов экспериментов
3	4	Изучение методов достоверности результатов эксперимента
4	8	Построение математической модели РЭУ методом регрессивного анализа с использованием полного факторного эксперимента
5	8	Построение математической модели РЭУ методом регрессивного анализа с использованием дробного факторного эксперимента
6	4	Определение номинального значения параметра и допуска радио-электронного компонента по результатам эксперимента
7	4	Проверка гипотезы о нормальности закона распределения случайной величины

ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ

Тематика курсовых проектов весьма разнообразна, охватывает все разделы учебной дисциплины. Как правило, каждый студент учебной группы получает задание, которое отличается от других не только конкретными исходными данными, но и формулировкой темы. Это позволяет развивать у студентов навыки самостоятельного решения поставленных задач, умение находить решение в нестандартных ситуациях, уменьшает вероятность заимствования и использования методов и подходов, предложенных другими.

Всё многообразие задач, предлагаемых в качестве тем курсовых проектов, можно разделить на две группы:

- аналитические;
- экспериментально-расчётные.

В аналитических темах исходные данные, характеризующие конструкторское или технологическое решение РЭС, заданы (полностью или частично) и задача состоит в том, чтобы аналитическими приемами или моделированием на ЭВМ получить решение в соответствии с темой курсового проекта.

Экспериментально-расчётные темы предполагают вначале получение экспериментальных данных об интересующем объекте, процессе или варианте конструкторско-технологического решения РЭС, а затем математическую обработку полученной информации с целью достижения результата, предусматриваемого формулировкой темы курсового проекта. Такие темы предлагаются обычно студентам, проявляющим повышенный интерес к исследовательской работе на кафедре. Темы курсовых проектов этого вида формулируются и подбираются преподавателем, который руководит курсовым проектированием студента.

Тему курсового проекта следует рассматривать как пример инженерной задачи, решая которую, студент осмысливает основные понятия и, кроме того, развивает и совершенствует навыки инженерного анализа решений в области конструирования, технологии и надежности с использованием прикладных математических методов.

Основная масса студентов получает темы расчетно-аналитического характера. Ниже приведен перечень этих тем.

1. Построение на ЭВМ математической модели РЭУ с использованием результатов пассивного эксперимента.

2. Оценка точности выходного параметра конструкции РЭУ (или технологического процесса) методом Монте-Карло с использованием математического моделирования.

3. Сравнительная оценка точности выходного параметра, полученной по методу Монте-Карло и рассчитанной вероятностным методом.

4. Сравнительная оценка стабильности выходного параметра РЭУ (или технологического процесса), полученной методом Монте-Карло и рассчитанной с учётом вероятностного рассеивания температурных и временных изменений первичных параметров.

5. Установление эксплуатационного допуска на выходной параметр конструкции РЭУ (или технологического процесса) моделированием на ЭВМ точности и стабильности параметров элементов или технологических операций.

6. Обеспечение с использованием ЭВМ требований к точности выходного параметра РЭУ (или технологического процесса).

7. Обеспечение с использованием ЭВМ требований к стабильности выходного параметра РЭУ.

8. Сравнительная оценка показателей безотказности РЭУ, полученных расчётным способом и методом моделирования на ЭВМ отказов элементов (с учетом внезапных отказов).

9. Определение показателей безотказности РЭУ с учетом внезапных отказов и разных законов их распределения (расчётным способом и моделированием отказов элементов на ЭВМ).

10. Оценка параметрической надежности РЭУ с использованием моделирования постепенных отказов элементов на ЭВМ.

11. Оценка надежности РЭУ с учетом внезапных и постепенных отказов методом моделирования отказов элементов на ЭВМ.

12. Оценка показателей безотказности функционального узла РЭУ при наличии постоянного резервирования с последовательным соединением элементов в узле (расчётным способом и методом моделирования отказов на ЭВМ).

13. Оценка показателей безотказности функционального узла РЭУ при наличии постоянного резервирования с параллельным соединением элементов в узле (расчётным способом и методом моделирования отказов на ЭВМ).

14. Оценка показателей безотказности функционального узла РЭУ при наличии постоянного резервирования со смешанным соединением элементов в узле (расчётным способом и методом моделирования отказов на ЭВМ).

15. Сравнение показателей безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением, полученных расчётным способом и методом моделирования отказов на ЭВМ (резерв ненагруженный).

16. Оценка показателей безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением, полученных расчётным способом и методом моделирования отказов на ЭВМ (резерв облегчённый).

17. Оценка показателей безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением, полученных расчётным способом и методом моделирования отказов на ЭВМ (резерв нагруженный).

18. Оценка показателей безотказности РЭУ при наличии постоянного резервирования и резервирования замещением (методом моделирования отказов элементов на ЭВМ).

19. Прогнозирование эксплуатационных свойств РЭС (элементов или устройств) методом экстраполяции.

20. Определение информативных параметров РЭС (элементов или устройств), используемых для индивидуального прогнозирования надёжности методом распознавания образов.

21. Индивидуальное прогнозирование надёжности РЭС (элементов или устройств) методом распознавания образов.

22. Решение задачи оптимального резервирования методом целочисленного программирования.

23. Оптимизация конструкторского или технологического решения РЭУ с построением целевой функции.

24. Сравнение результатов оптимизации конструкторского решения РЭУ, полученных методами динамического программирования и случайного поиска на ЭВМ.

25. Оценка основных характеристик системы массового обслуживания с отказом моделированием на ЭВМ процессов поступления и обслуживания заявок.

26. Оценка основных характеристик системы массового обслуживания с ожиданием моделированием на ЭВМ процессов поступления и обслуживания заявок.

27. Оценка основных характеристик системы массового обслуживания смешанного типа моделированием на ЭВМ процессов поступления и обслуживания заявок.

ТЕМА 1. РОЛЬ И МЕСТО ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ПРОИЗВОДСТВА (ТПП) В СТРУКТУРЕ ПРИБОРОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

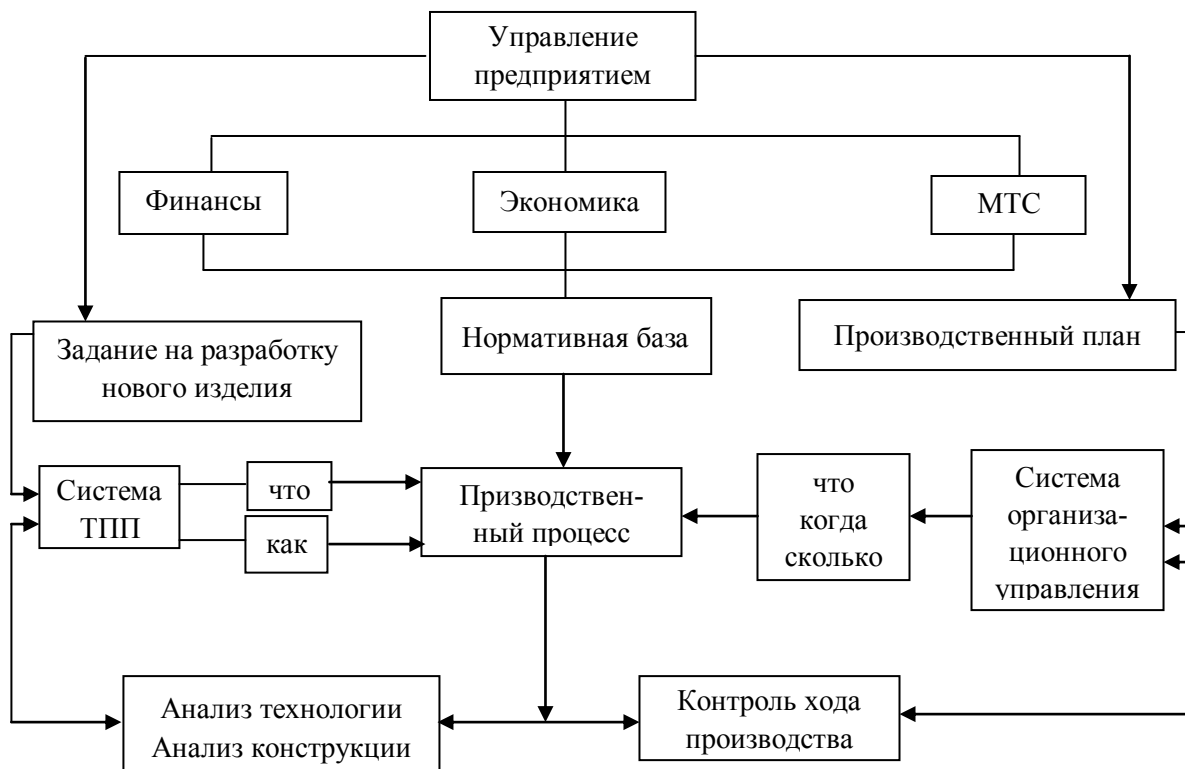


Рисунок 1.1 — Техническая подготовка производства (ТПП) в структуре приборостроительного предприятия

Современное представление об управлении процессом дискретного материального производства предполагает выделение двух функционально отличных типов управляющих воздействий в общей системе управления производством (рис. 1.1).

Организационное управление — пространственно-временная координация производственного процесса, ставящая целью решение задачи организационно-экономического воздействия путем оптимального планирования, контроля, повышения эффективности эксплуатации оборудования, материального и морального стимулирования. Управляющая информация, вырабатываемая на этом канале управления, призвана ответить на вопросы: где и когда будет производиться продукт и сколько его будет произведено.

Технологическое управление функционально связано с продуктом производства и отвечает на два главных вопроса: что производить и как.

Система, вырабатывающая эту информацию, известна под названием системы технической подготовки производства (СТПП) и в свою очередь

функционально разделяется на две системы: конструкторской подготовки (что производить, КПП) и технологической (как производить, ТхПП).

КПП охватывает задачи по разработке новых и модернизации старых изделий. К этим задачам относятся:

- управление процессами;
- разработка технического задания на новые изделия;
- эскизное, техническое и рабочее проектирование изделий;
- стандартизация элементов конструкции и конструкторской документации;
- управление и изменение конструкторской документации.

ТхПП включает комплекс работ по проектированию и совершенствованию действующих технологических процессов, оснастки и технологического оборудования, расчету сводных материальных и трудовых нормативов, техническому сопровождению изготавливаемых изделий. В наиболее полном объеме она охватывает:

- управление ТхПП;
- отработку изделия на технологичность;
- разработку производственной структуры предприятия;
- проектирование технологических процессов изготовления и сборки;
- техническое нормирование;
- проектирование специального инструмента и оснастки;
- ТхПП инструмента и оснастки;
- изготовление инструмента и оснастки и их внедрение;
- расчет производственных мощностей и сводных технологических нормативов изделия;
- подготовку программ для оборудования с ЧПУ;
- типизацию и нормализацию технологических процессов и оснастки;

В результате выполнения своих функций СТПП создает информационный базис в виде нормативно-технических данных, необходимых для организации управления всем процессом производства в целом, включая экономическое, материально-техническое снабжение, организацию производства. Если в контуре организационного управления обратная связь главным образом обеспечивает поддержание заданного хода производства, то в контуре технического управления она на основе анализа технологических процессов и поведения изделия в процессе производства создает информацию, которая является исходной как для решения задачи совершенствования самого процесса, так и для повышения технологичности выпускаемых изделий.

1.1. Уровни и этапы проектирования

РЭС — сложные системы, проектирование которых является трудоемким процессом. Поэтому выполнение проектных работ должно быть распределено как во времени, так и между подразделениями проектного предприятия и между отдельными рабочими.

Разделение работ во времени приводит к разделению на этапы. Разделение работ между подразделениями производится на основе **блочного-иерархического подхода к проектированию**, обуславливающего выделение в процессе проектирования ряда уровней. Блочный-иерархический подход позволяет свести общую сложную задачу проектирования объекта к совокупности более простых задач, доступных для решения с помощью имеющихся средств проектирования.

В один уровень включаются, как правило, представления, имеющие общую физическую основу и допускающие для своего описания использование одного и того же математического аппарата.

Уровни проектирования можно выделять по степени подробности, с которой отражаются свойства проектируемого объекта. Тогда их называют горизонтальными (иерархическими) уровнями проектирования. Выделение горизонтальных уровней лежит в основе блочно-иерархического подхода к проектированию.

Горизонтальным уровням свойственно следующее:

1. При переходе с некоторого уровня K_1 , на котором рассматривается система S , на соседний более низкий уровень K_2 происходит разделение системы S на блоки S_j и рассмотрение вместо системы S ее отдельных блоков S_j .
2. Рассмотрение каждого из блоков S_j на уровне K_2 с большей степенью детализации чем на уровне K_1 .
3. Использование своих понятий системы и элемента на каждом уровне: если на уровне элементами проектируемой системы S считались блоки S_j , то на соседнем низшем уровне K_2 те же блоки S_j рассматриваются как системы.

Уровни проектирования можно выделять также по характеру учитываемых свойств объекта. Тогда их называют **вертикальными уровнями проектирования**. При проектировании РЭС основными вертикальными уровнями являются:

1. Функциональное (схемное) проектирование — связано с разработкой структурных, функциональных и принципиальных схем. В случае РЭА при функциональном проектировании определяются основные особенности структуры, принципы функционирования, важнейшие параметры и характеристики объекта.

2. Конструкционное проектирование — включает в себя вопросы конструкторской реализации результатов функционального проектирования, т. е. вопросы выбора форм и материалов оригинальных деталей, выбора типоразмеров унифицированных деталей, пространственного расположения составных частей, обеспечивающего заданное взаимодействие между ними.

3. Технологическое проектирование — охватывает вопросы реализации конструкционного проектирования, т. е. вопросы технологических процессов изготовления изделий.

4. При проектировании ЭВМ к этим уровням добавляется программное (алгоритмическое) проектирование. Оно связано с разработкой алгоритмов работы ЭВМ, с созданием их общего математического обеспечения (рис. 1.2).

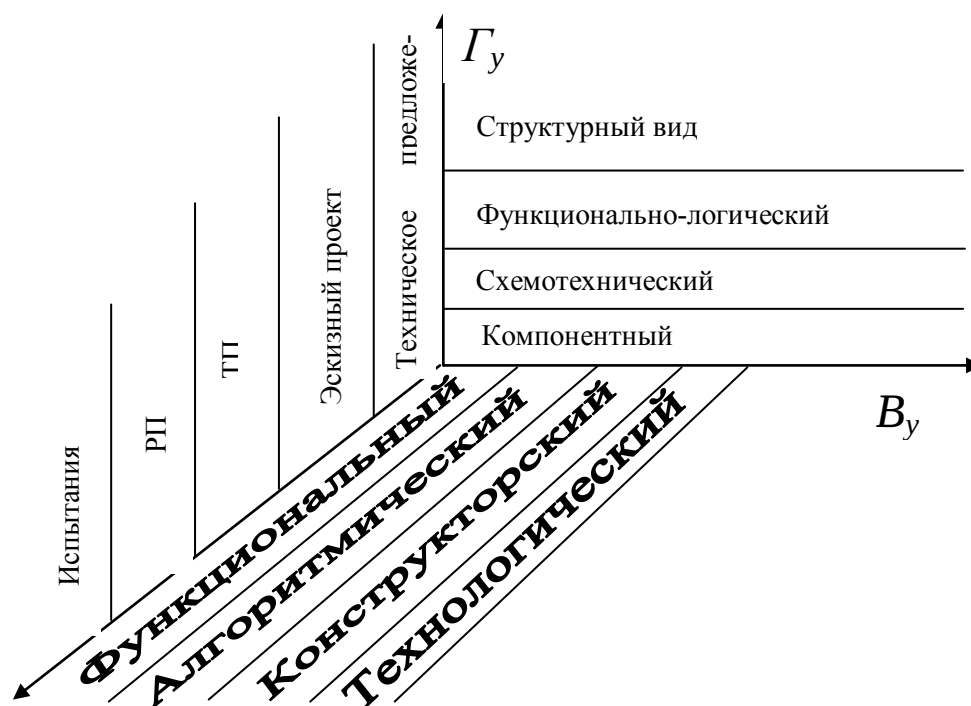


Рисунок 1.2 — Этапы проектирования

1.2. Этапы проектирования

Процесс проектирования сложных систем разбивается на следующие этапы.

Этап научно-исследовательских работ: новая система не имеет аналогов или должна превосходить их. И в том и в другом случае необходимо проводить ряд научных исследований, связанных с поиском принципиальных возможностей построения системы. Новые физические процессы: результат — техническое предложение.

Этап эскизного проектирования — вырабатывание эскизного проекта, где детальная обработка дает возможность построения системы.

Этап технического проектирования.

Кроме названных этапов в серийном производстве выделяют этапы изготовления, испытания нового образца (пробной серии).

В зависимости от порядка, в котором выполняются этапы проектирования, различают **восходящее** и **нисходящее проектирование**.

Восходящее проектирование — решение задач от более низких иерархических уровней к более высоким (деталь – блок – устройство – комплекс). Нисходящее — наоборот, от главных блоков к элементам.

Таблица 1.1 — Соотношение затрат времени в зависимости от проектных процедур

Наименование проектной процедуры	Время отдельной операции, %	Затраты времени
Проектирование / конструирование	15	ПРЯМЫЕ
Расчеты	4	
Вычерчивание	33	
Прочие работы	10	
Составление спецификаций	5	КОСВЕННЫЕ
Контроль чертежей	6	
Поиск повторяющихся деталей	2	
Составление описания	12	
Предварительное нормирование	3	
Поиск аналогов проекта	1	
Переписка	3	
Прочие работы	6	

1.3. Методы проектирования

Существующие методы проектирования делятся на две группы:

- эвристические;
- алгоритмические.

Эвристические методы способствуют исключительно деятельности человека, направленной на решение вопросов, возникающих при рассмотрении задачи. Они представляют собой упорядоченные в какой-то мере правила и рекомендации, помогающие при решении задачи без предварительной оценки результата.

Наиболее распространены:

- метод элементарных вопросов;

- метод аналогий;
- метод «от целого к частному» (принцип синергии);
- метод наводящих операций;
- метод коллективного спонтанного мышления.

Алгоритмические методы относительно больше формализованы. Эти методы создают рациональный переход от замкнутого мышления к открытому рассуждению. Они используют возможности дедукции, стремятся к определению операций и их очередности, а также связи между операциями. В результате создается ряд последовательных и приближающих к цели процедур (логических и математических алгоритмов).

Наиболее распространенными принципами алгоритмизации проектных процедур являются:

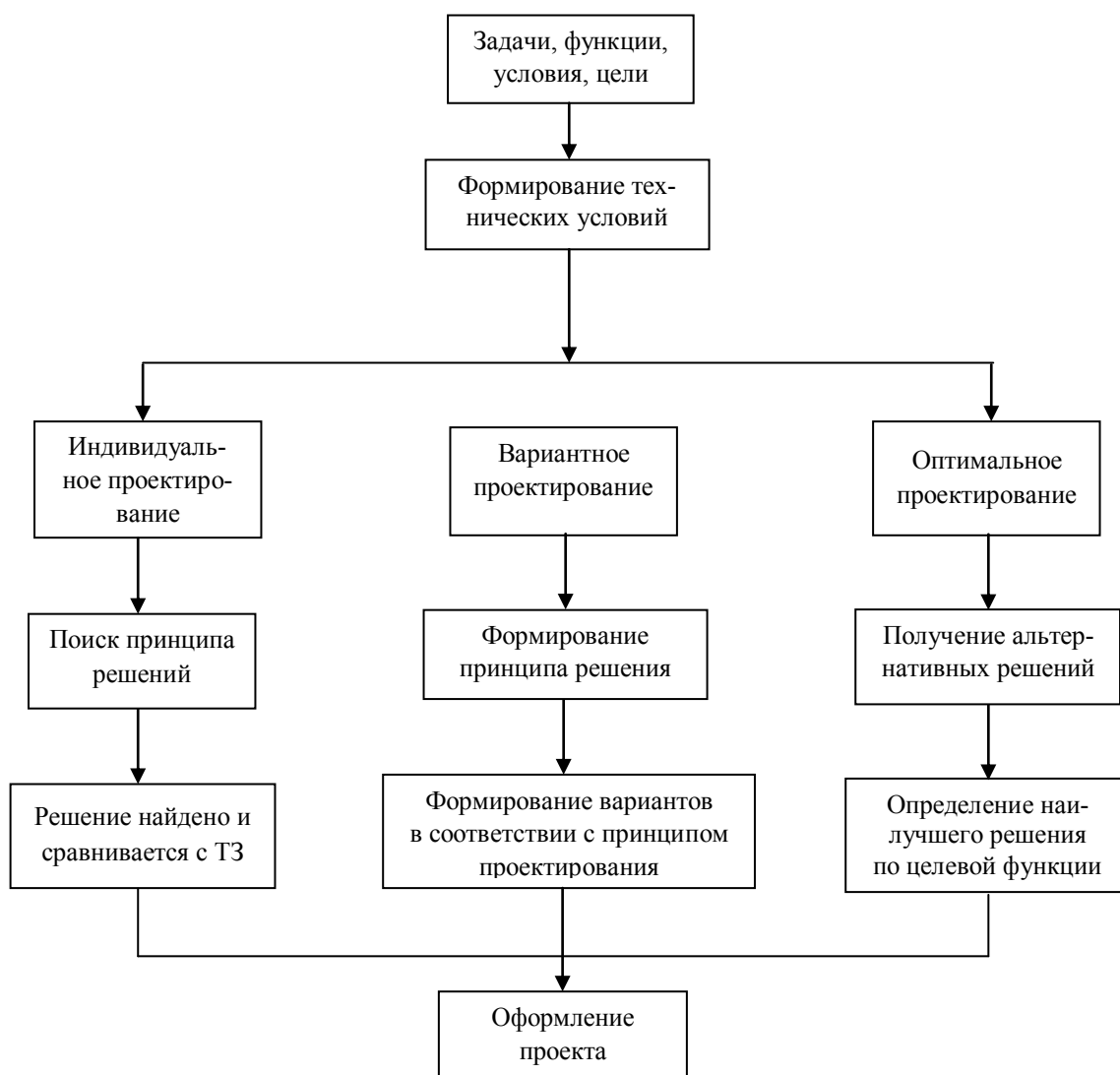
- графы зависимости;
- сетки связей;
- через разделение к целому;
- элементарные комбинации;
- исключение избыточности;
- структурные карты;
- морфологические карты;
- математические модели;
- прямая минимизация при косвенном ограничении;
- сложная оптимизация.

При выборе методов решения в процессе проектирования РЭС следует различать единичное, вариантное и оптимальное конструирование.

1. При единичном конструировании на основании технической характеристики необходимо искать пути решения, сравнивая полученный проект с заданием. При этом различные варианты не сопоставляются.

2. Вариантное конструирование характеризуется тем, что разрабатывается общий принцип решения, а для решения конкретной задачи берется один из возможных вариантов общего решения. Вариации могут заключаться, например, в том, что по-разному komponуются имеющиеся унифицированные узлы. Вариации принципов решения можно распространять также на создание по установленному плану новой компоновки изделия.

3. Оптимальное конструирование отличается от вариантного стратегией поиска. Стратегия поиска — это алгоритм, реализующий получение альтернативных решений, улучшающихся в отношении заданной целевой функции.



1.4. Требования, предъявляемые к процессу проектирования. Схема процесса проектирования

Для оценки эффективности применяемых методов проектирования по сравнению с другими методами имеются следующие критерии:

- качество проектирования;
- сроки разработки;
- стоимость проектирования;
- число занятых специалистов-разработчиков.

Задачи, решаемые на каждом уровне блочно-иерархического проектирования, делятся на задачи синтеза и анализа. Задачи синтеза связаны с получением проектных вариантов. Задачи анализа — с их оценкой.

Различают синтез параметрический и структурный.

Цель структурного синтеза — получение структуры объекта, т. е. состава его элементов и способа их связи.

Цель параметрического синтеза — определение числовых значений параметров элементов.

Если ставится задача определения полученной в некотором процессе структуры и (или) значений параметров, то такая задача синтеза называется **оптимизацией**.

Часто оптимизация связана только с параметрическим синтезом, т. е. с расчетом оптимальных параметров при заданной структуре объекта. Чтобы подчеркнуть такой характер оптимизации, ее называют параметрической оптимизацией. Задачу выбора оптимальной структуры называют структурной оптимизацией.

Задачи анализа при проектировании являются задачами исследования модели проектируемого объекта. Модели могут быть физическими (макеты, стенды) и математическими.

Математическая модель — совокупность математических объектов (чисел, переменных, векторов, множеств и т. п.) и отношений между ними, которые адекватно отображают свойства проектируемого объекта, интересующего инженера-проектировщика.

Математические модели объектов:

1. Функциональные — отображают физические или информационные процессы, протекающие в моделируемом объекте. Функциональные модели объектов чаще всего представляют собой системы уравнений.

2. Структурные — отображают только структурные (в частном случае геометрические) свойства объекта. Это графы, матрицы и т. д.

Математическую модель объекта, полученную в результате объединения математических моделей элементов в систему, называют полной математической моделью. Упрощение полной математической модели объекта дает его макро модель.

Фигурирующие в математических моделях объекта величины называют параметрами. Большое значение при описании объекта имеют параметры, характеризующие свойства элементов. Параметры, характеризующие свойства системы, называются входными параметрами. Параметры, характеризующие свойства внешней по отношению к рассматриваемому объекту среды, называются внешними параметрами.

Обозначим через X , Q , Y векторы соответственно внутренних, внешних и входных параметров. Тогда можно записать:

$$Y = F(X, Q). \quad (1.1)$$

Если эта функция известна и может быть представлена в явной форме, то ее называют аналитической моделью.

В задачах проектирования аналитические модели удается получать лишь в редких случаях. Поэтому используются алгоритмические модели, в которых отображение (1) реализуют в виде алгоритма (рис. 1.3).

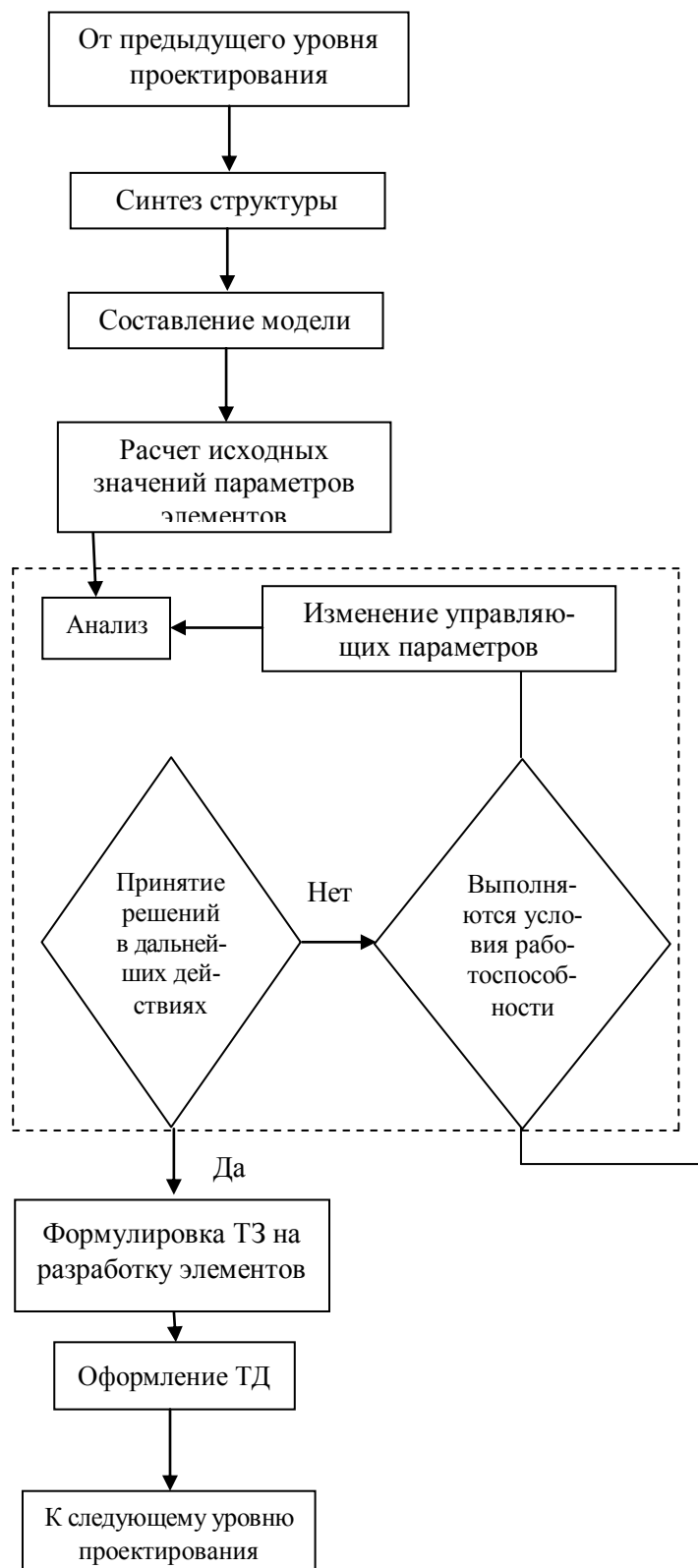


Рисунок 1.3 — Схема нисходящего проектирования

Синтезируют исходный вариант структуры. Для него составляют модель и рассчитывают исходные значения параметров элементов.

Анализ модели позволяет принять то или иное решение в дальнейших действиях. Если получено приемлемое условие выполнения работоспособности, то синтезируемый на данном этапе вариант считается окончательным. Следовательно, можно приступать к оформлению ТД и перейти к следующему уровню проектирования.

Если удовлетворительный результат еще не достигнут, принимается решение о дальнейшем улучшении объекта (2 пути):

- изменение значений параметров элементов;
- изменение структуры объектов.

Процесс проектирования носит итерационный характер (последовательное улучшение результата).

ТЕМА 2. ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К РЭС. ХАРАКТЕРИСТИКА УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ РЭС. КЛИМАТИЧЕСКОЕ ИСПОЛНЕНИЕ РЭС. КАТЕГОРИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИЗДЕЛИЙ РЭС

К прямым факторам относятся факторы, являющиеся природными, естественными особенностями окружающей среды (климатические, биологические, радиационные и т. п.)

К косвенным факторам относятся факторы, возникающие и воздействующие на РЭС в условиях эксплуатации.

Нормальными климатическими условиями для РЭС являются: температура $+25 \pm 10$ °С, относительная влажность — 45%...80%, атмосферное давление — $(8,3...10,6)10^4$ Па (630....800 мм рт. ст.) и отсутствие активных веществ в окружающей атмосфере.

При разработке РЭС необходимо, таким образом, учитывать те или иные климатические условия среды, чтобы создавать РЭС в том или другом климатическом исполнении. В этом смысле при разработках РЭС учитывают следующие особенности регионов по климатическим условиям.

Очень холодный регион (ОХЛ) располагается в Антарктиде.

Средняя минимальная температура в нем ниже 60 °С. Характерной особенностью этого региона является сочетание низких температур с сильным ветром.

Холодный регион (ХЛ) — территория, на которой минимум температуры воздуха не ниже 60 °С. Характерной особенностью является обледенение, иней, ветер с мелкой снежной пылью.

Умеренно холодный регион (УХЛ) — территория, на которой максимум температуры воздуха не выше + 40 °С, а минимум не ниже 60 °С. Характерно образование инея, выпадение росы, наличие тумана, изменение давления воздуха от 86 до 106 кПа.

Тропически влажный регион (ТВ) — территория, на которой температура воздуха не выше + 45 °С, а относительная влажность не менее 80% при + 27 °С. Высокая влажность и повышенная концентрация солей (особенно вблизи побережья морей и океанов) делает атмосферу этой зоны коррозионно-агрессивной. Сочетание температуры и влажности в таких регионах способствует существованию 10 000 видов плесневых грибов.

Тропически сухой регион (ТС) — территория, на которой температура воздуха выше +45 °С и которая не относится к району с ТВ климатом. Интенсивное солнечное излучение (до 1500 Вт/м²), значительное изменение температуры воздуха в течение суток, пыль и песок способствуют отрицательному абразивному и химическому воздействию на РЭС.

Умеренно холодная морская зона включает моря, океаны и прибрежные территории, расположенные севернее 30° северной широты и южнее 30° южной широты. Остальная часть морей, океанов и прибрежных территорий относится к тропически морской зоне (ТМ).

Климат морских зон отличается наличием высокой влажности и значительным содержанием хлоридов в атмосфере. РЭС, предназначенные для эксплуатации в одном из указанных климатических районов, изготавливают в определенном климатическом исполнении (табл. 2.1).

Таблица 2.1 — Обозначения РЭС по климатическим исполнениям

Условия эксплуатации РЭС	Обозначение РЭС	
	Буквенное	Цифровое
На суше, в реках, озерах в макроклиматических районах:		
– с умеренным климатом	У	0
– с умеренным и холодным климатом	УХЛ	1
– с влажным тропическим климатом	ТВ	2
– с сухим тропическим климатом	ТС	3
– с сухим и влажным тропическим климатом	Т	4
Во всех макроклиматических районах на суше, кроме района с очень холодным климатом (общеклиматическое исполнение)	О	5
В макроклиматических районах с морским климатом:		
– умеренно-холодным	М	6
– тропическим, в том числе для судов каботажного плавания или иных, предназначенных для плавания только в этом районе	ТМ	7
– умеренно-холодным и тропическим, в том числе для судов неограниченного района плавания	ОМ	8
Во всех макроклиматических районах на суше и на море, кроме района с очень холодным климатом (климатическое исполнение)	В	9

Характеристики климатических районов приведены в ГОСТ 24482-80, который позволяет установить технические требования к РЭС по стойкости к климатическим факторам, режимы их испытаний, правила эксплуатации, хранения и транспортирования.

Для различных зон эксплуатации характерны различные сочетания и длительность воздействующих факторов: под влиянием этих факторов в РЭС протекают сложные физико-химические процессы, изменяющие их свойства и вызывающие отказы. Поэтому необходимо иметь максимум информации об изменениях характеристик изделий при воздействии на них климатических факторов и в первую очередь о допустимых величинах воздействующих факторов.

Таблица 2.2 — Допустимые значения естественных климатических факторов, воздействующих на РЭС

Вид воздействия	Климат в зоне эксплуат. и категории размещения изделий							
	На суше				На суше и море			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Температура воздуха, С:								
– верхнее значение	+45	+45	+45	+45	+45	+45	+45	+45
– нижнее значение	–60	–60	–60	+1	–60	–60	–60	–10
Сочетание относительной влажности воздуха, %, с температурой, С: -верхнее значение	100/35	100/35	98/35	98/35	100/35	100/35	98/35	98/35
Интегральная плотность потока солнечной радиации, Вт/м ² : верхнее значение	1125				1125			
Максимально возможная температура нагрева черной матовой поверхности, °С	+9	–	–	–	+9	–	–	–
Колебания температуры воздуха за 8 ч, °С	+4	+30	+20	–	+4	+30	+20	–
Интенсивность дождя, мм/мин: верхнее значение	5	–	–	–	5	–	–	–
Динамическое воздействие пыли и песка	+	–	–	–	+	–	–	–
Выпадение инея	+	+	х	–	+	+	х	–
Наличие плесени грибов	+	+	+	+	+	+	+	+
Наличие морской соли в воздухе, мг/(м ² в сутки):	2	2	–	–	2000	2000	–	–

1 — элементы междублочного монтажа РЭС, размещаемые на открытом воздухе; 2 — элементы междублочного монтажа РЭС, размещаемые под навесом, и внутриблочного монтажа РЭС, размещаемые на открытом воздухе; 3 — изделия РЭС, размещаемые в помещениях без искусственного регулирования климатических условий; 4 — изделия РЭС, размещаемые в помещениях с искусственным регулированием климатических условий; «+» — фактор присутствует; «–» — фактор отсутствует.

В таблице 2.2 приведены допустимые значения естественных климатических факторов, воздействующих на РЭС. Учитывая влияния естественных климатических условий и управляя искусственными, можно добиться надежной работы РЭС.

В таблице 2.3 приведены основные эффекты, вызываемые в РЭС воздействием отдельных внешних климатических факторов.

Таблица 2.3 — Основные эффекты, вызываемые в РЭС воздействием отдельных внешних климатических факторов

Факторы окружающей среды	Основной эффект воздействия	Типичный вид отказов
Высокая температура	Тепловое старение: окисление, растрескивание, химическая реакция. Размягчение, плавление, сублимация. Уменьшение вязкости, испарение. Расширение	Нарушение изоляции, механическое повреждение, увеличение механического напряжения, увеличивающийся износ подвижных частей из-за расширения или потери смазки
Низкая температура	Хрупкость. Образование льда. Увеличение вязкости и затвердевание. Потеря механической прочности. Физическое сжатие.	Нарушение изоляции, растрескивание, механическое повреждение, увеличивающийся износ подвижных частей, вызванный сжатием или потерей механической прочности или потерей смазки
Высокая относительная влажность	Абсорбция или адсорбция влаги. Набухание. Потеря механической прочности. Химическая реакция: коррозия, электролиз. Увеличение проводимости изоляторов	Физические разрушения, нарушения изоляции, механическое повреждение
Низкая относительная влажность	Обезвоживание. Хрупкость. Потеря механической прочности. Усадка. Увеличение абразивного износа между подвижными контактами	Механические повреждение. Растрескивание
Высокое давление	Сжатие, деформация	Механическое повреждение, течи (нарушение герметичности), искрение, перегрев
Низкое давление	Расширение. Снижение электрической прочности воздуха. Образование короны и озона. Ухудшение условий охлаждения	
Солнечная радиация	Химическая, физическая и фотохимическая реакция. Поверхностные разрушения. Хрупкость. Образование озона. Нагрев. Разностные тепловые и механические повреждения	Нарушение изоляции

Песок и пыль	Абразивный износ и эрозия. Засорение. Термоизоляция. Электростатические эффекты	Увеличенный износ, электрическое повреждение, механическое повреждение
Коррозионная атмосфера	Химические реакции, коррозия, электролиз	Увеличенный износ, электрическое повреждение, механическое повреждение
Ветер	Применение силы. Усталостное явление. Выветривание материалов. Засорение. Эрозия. Наведение вибрации	Структурное разрушение, механическое повреждение
Дождь	Абсорбция воды. Термический удар. Эрозия. Коррозия	Электрическое повреждение, растрескивание, течи, поверхностное разрушение
Град	Эрозия. Термический удар. Механическая деформация	Структурное разрушение, поверхностное разрушение
Снег или лед	Абсорбция воды. Термический удар	Структурное разрушение
Быстрая смена температуры	Тепловой удар. Тепловое напряжение	Механическое повреждение, растрескивание, нарушение герметичности
Озон	Быстрое окисление. Хрупкость (особенно резины). Снижение электрической прочности воздуха	Электрическое повреждение, механическое повреждение, потускнение поверхности, растрескивание
Ускорение (постоянный режим)	Механическое напряжение. Усталостное явление	Механическое повреждение, увеличение износа подвижных частей, структурное разрушение

Особо необходимо рассмотреть воздействие на РЭС **биологических** факторов как одного из видов климатического воздействия.

Большинство биоповреждений РЭС обусловлено воздействием микроорганизмов и плесневых грибов (микроорганизмом называют любой организм, имеющий микроскопические размеры и не видимый невооруженным глазом).

Можно определить четыре вида биоповреждений:

- механические макроразрушения при контакте;
- ухудшения эксплуатационных параметров;
- биохимическое разрушение;
- физико-химическая коррозия на границе материал-организм (рис. 1.4).

Механические разрушения вызываются в основном микроорганизмами, а также организмами, имеющими размеры, сравнимые с габаритами изделия. Микроразрушение при контакте может произойти из-за столкновения, прогрызания и уничтожения. Примерами являются столкновения птиц с антеннами радиолокационных станций, а уничтожение материалов и изделий

РЭС происходит в процессе питания организмов; нарушение материалов и изделий РЭС из-за действий грызунов (крыс, мышей, зайцев, белок, кротов и т. д.), а также различных насекомых (термитов, муравьев, жуков и т. д.).

Биозагрязнение и биозасорение вызывают ухудшение эксплуатационных параметров РЭС. Биозагрязнением называют остатки выделений организмов и продуктов их жизнедеятельности, которые в дальнейшем, впитывая влагу из воздуха, изменяют параметры изделий.

Биозасорение РЭС связано с наличием спор грибов и бактерий, семян растений.

Биохимические разрушения являются наиболее распространенными видами биоповреждений и вызываются в основном микроорганизмами и плесневыми грибами. Этот вид разрушения разделяют на два характерных типа: биологическое потребление в процессе питания и химическое действие выделяющихся в процессе питания веществ. Биологическое потребление связано с предварительным химическим разрушением ферментом исходного материала иногда только одного компонента, обычно низкомолекулярного соединения, например, пластификатора, стабилизатора и т. д. Такое разрушение открывает путь физико-химической коррозии, приводит к ухудшению термодинамических свойств материала и к его механическому разрушению под действием эксплуатационных нагрузок. Химическое действие продуктов обмена веществ сводится к агрессивному воздействию на материалы органических кислот. Физико-химическая коррозия на границе материал – организм вызывается воздействием amino- и органических кислот, а также продуктов гидролиза. В основе этого биоповреждения лежат электрохимические процессы коррозии металлов.



Рисунок 1.4 — Биологические повреждения, возникающие в РЭС

2.1. Механические факторы

Как мы уже отмечали, в зависимости от своего назначения РЭС может подвергаться различным механическим воздействиям. Основными механическими воздействиями являются вибрации, удары, линейные и угловые ускорения.

Свойство РЭС противостоять влиянию вибрации характеризуется виброустойчивостью и вибропрочностью.

Виброустойчивость определяет способность РЭС выполнять заданные функции во включенном состоянии в условиях воздействия вибраций.

Вибропрочность характеризует качество конструкции РЭС, т. е. способность противостоять разрушающему воздействию вибрации в нерабочем состоянии и продолжать нормально работать после снятия вибрационных нагрузок.

Воздействие вибраций на конструкцию РЭС характеризуется диапазоном частот и величиной ускорения (в единицах g).

Удар возникает в тех случаях, когда объект, на котором установлена РЭС, претерпевает быстрое изменение ускорения. Удар характеризуется ускорением, длительностью и числом ударных импульсов.

Различают однократные и многократные удары. Линейные ускорения характеризуются величиной ускорения (в единицах g) и длительностью воздействия. Акустические шумы проявляются в РЭС, устанавливаемых на ракетах, самолетах, кораблях, наземных транспортных средствах. Они характеризуются давлением звука, мощностью колебаний источника звука, силой звука, спектром звуковых частот. Требования к устойчивости конструкции РЭС к воздействию механических факторов постоянно ужесточаются. Это иллюстрируется данными таблицы 2.4.

Таблица 2.6 — Ужесточение требований к РЭС по механическим воздействиям

Механические воздействия	Уровень требований			
	1965 г.	1970 г.	1995 г.	2000 г.
Вибрации: частота, Гц / ускорение, g	5Ц000	512500	5E5000	5Ц0000
Линейное ускорение, g	75	150	500	800
Однократные удары, g	150	500	1000	2000
Многократные удары, g	75	150	150	200
Акустические шумы, дБ			165	180

2.2. Общие технические требования к радиоэлектронным средствам

Одной из главных задач в решении проблемы обеспечения комплексного качества радиоэлектронных средств является правильное и полное формирование системы требований к конструированию и их реализация на всех стадиях создания и эксплуатации техники.

При конструировании РЭС особенно важно найти место тех или иных требований (подчас противоречащих друг другу) в системе общих технических требований к РЭС и правильно расставить приоритеты в их достижении. Сложность решения этой задачи заключается в противоречивости взглядов на комплекс требований к сложным радиоэлектронным средствам. Так, широко распространено мнение, что, например, требования технической эстетики относятся только к внешнему виду РЭС. Внешний вид РЭС — композиционное и компоновочное решение формы (ее пропорции, пластика, силуэт и т. п.), ее отделка и т. п. — безусловно, играют важную роль в обеспечении их качества, но это далеко не главные показатели оптимальности конструкции РЭС с точки зрения дизайна, и этим, конечно, не исчерпываются огромные возможности технологического дизайна и эргономики в совершенствовании конструкций изделий.

Основой технических требований является, прежде всего, сумма потребительских параметров изделий, которая разрабатывается как результат всестороннего анализа системы сложнейших связей комплекса «человек — изделие — производственная среда».

Естественно, говоря о качественном совершенстве конструкций РЭС, нельзя рассматривать их с чисто инженерных позиций. Необходимо рассматривать с иных точек зрения, более обширных и глубоких, чем в инженерном конструировании, привлекая и эргономические, и социальные взгляды, и учитывать современную маркетинговую ситуацию на потребительском рынке. Отсюда возникает комплекс специфических требований, определяющих всесторонние потребительские свойства изделий: их компоновочное и структурное решение, современное функциональное решение, рациональную расчлененность на сборочные единицы, стиль, эргономические параметры и т. п. С другой стороны, безусловно, важнейшим требованием остается комплекс конструктивно-технологических параметров, тактико-технические характеристики изделия, требования к надежности и т. д.

Таким образом, наиболее правильно понимать под общими техническими требованиями комплекс функциональных, технических, технологиче-

ских, экономических, эргономических и эстетических требований. Все эти требования выступают как различные стороны (признаки) комплексного качества изделия.

В сфере разработки РЭС общие технические требования условно разделяют на общие эксплуатационные требования, общие конструктивные требования, требования технической эстетики и специальные требования. Частные требования к РЭС можно разделить на четыре группы: эксплуатационные требования; компоновочные требования; требования эстетики и эргономики; конструктивно-технологические требования.

Рассмотрим схему общих технических требований и покажем их существование и взаимосвязь в общей структуре качественных характеристик изделия (рис. 1.5).

Эксплуатационные требования. Одним из важнейших эксплуатационных требований к РЭС является требование обеспечения комплексной надежности. В понятие комплексной надежности в случае конструирования можно, с одной стороны, включить понятие долговечности работы конструкции в условиях механических и климатических воздействий, а с другой — обеспечение ее эргономической оптимальности для оператора (эргономичности конструкции оборудования).

Эксплуатационная надежность РЭС прямо связана с совершенством всей системы «человек – РЭС – среда».

Так, при эксплуатации РЭС специального назначения предъявляются исключительно высокие требования к работе оператора в системе «оператор — РЭС». Он должен обеспечивать надежное и качественное исполнение всех операций на каждом из участков «большой системы РЭС», часто содержащей десятки и сотни единиц изделий. Конструкции изделий по своим эргономическим параметрам должны быть спроектированы с учетом биомеханических особенностей и психофизиологических возможностей оператора и должны позволять оператору эффективно и надежно выполнять свои функции.

Можно сказать, что взаимосвязь всех других общих технических требований с эксплуатационными требованиями наиболее жесткая и глубокая. Так, все методы конструктивно-технологической отработки РЭС, направленные на обеспечение высоких потребительских качеств изделия, находят свое отражение прежде всего во всестороннем улучшении эксплуатационных параметров (показателей) РЭС. **Эксплуатационные требования РЭС** проявляются, как показано на рисунке 1.5, в климатических, механических и эргономических характеристиках.

Климатические и механические характеристики определяют, как было показано выше, такие показатели работы РЭС, как:

- механическая прочность, жесткость и добротность конструкции, надежность функционирования деталей, сборочных единиц и блоков РЭС при воздействии внешних механических факторов; обеспечение устойчивости изделия при воздействии на него вибрации и ударов, линейных и угловых ускорений;

- устойчивость конструкции к воздействию комплекса климатических факторов (тепла, влаги, соляного тумана, радиации, биологических факторов и т. п.);

- длительность срока службы в условиях эксплуатации.

Эргономические характеристики (в аспекте их влияния на эксплуатационные показатели) определяют оперативность обслуживания — минимальные затраты времени на подготовку РЭС к работе, быстрое выполнение рабочих манипуляций и т. п.; удобство обслуживания — легкий доступ к основным сборочным единицам и блокам в условиях эксплуатации, возможность быстрого осмотра, комплексный биомеханический и психофизиологический комфорт на рабочем месте, рациональная компоновка и конструктивное исполнение устройств управления (штурвалов, ручек, рычагов, тумблеров, кнопок, переключателей и т. п.) и устройств отображения информации (шкал, экранов, табло, мнемосхем и т. п.), рациональные режимы труда и отдыха и т. д.; безопасность обслуживания наличие устройств заземления, экранировки, блокировки, наличие аварийной сигнализации и т. п.

Компоновочные требования являются едва ли не самыми важными в процессе формообразования и общего структурного построения изделия, так как их выполнение позволяет создать стройную компоновочную структуру изделия — основу рациональной, гармоничной композиции его формы — и по возможности применить функционально-блочную (модульную) систему его построения. Эти требования также комплексны по своему содержанию.

Очевидно, часть компоновочных требований может быть обеспечена в процессе инженерного конструирования. К этим требованиям можно отнести:

- обеспечение рациональных массо-габаритных характеристик;
- максимальное сокращение кинематических связей в изделии;
- рациональную расчлененность на сборочные единицы;
- снижение (или полное исключение) взаимных наводок между блоками и электрическими цепями междублочного, внутриблочного, монтажа между вводами и выводами; оптимальный тепловой режим и т. п.

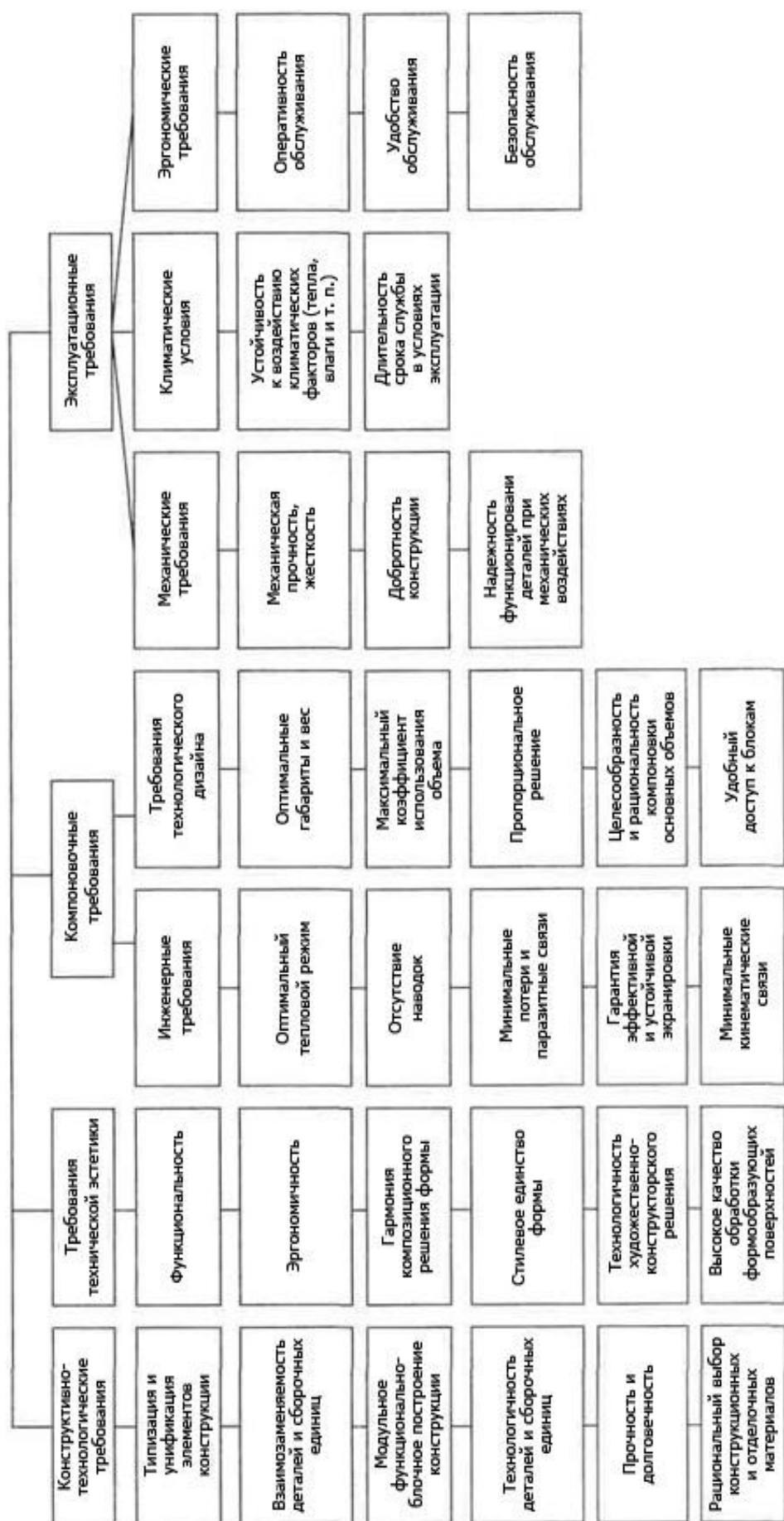


Рис. 1.5 — Схема общих технических требований к радиоэлектронным средствам

Другие же компоновочные требования не могут быть рационально применены во время монтажа и обеспечены в процессе чисто инженерного конструирования. Они получают наиболее полное, глубокое и всестороннее выражение лишь в процессе технологического дизайна РЭС. Их целесообразно отнести к дизайнерским компоновочным требованиям.

Таковыми требованиями являются рациональные габариты и вес, максимальный коэффициент использования объема, пропорциональное решение приборных корпусов РЭС, удобный доступ к комплектующим сборочным единицам и блокам в процессе сборки и эксплуатации и т. п.

Требования технической эстетики в целом направлены на выявление и обеспечение потребительских (в частности, художественно-конструкторских и эргономических) качеств изделий, которые определяют совершенство конструкции в комплексе «человек – РЭС – среда».

Требования технической эстетики представляют собой комплекс социально экономических, функционально-конструктивных, эргономических и эстетических требований, выполнение которых обеспечивает создание экономически и технологически целесообразного, технически совершенного, экономичного, красивого и удобного в эксплуатации изделия.

В методическом плане можно выделить в отдельную группу и собственно требования технической эстетики к РЭС, которые определяют научные и практические критерии его дизайнерского и эргономического решения.

К собственно требованиям технической эстетики можно отнести социально экономические требования, функционально-конструктивные, эргономические, эстетические требования.

Социально-экономические требования устанавливают оптимальную потребность в изделиях РЭС, их оптимальную номенклатуру и т. п. и в целом направлены на создание таких социально-экономических условий, которые развивали бы эстетическое отношение к процессу и результатам труда, способствовали росту его производительности при одновременном гармоничном развитии личности.

Некоторые авторы, говоря о социально-экономических требованиях, считают, что дизайнер может активно влиять на номенклатурный состав изделий, определять его и т.п. Однако такое утверждение слишком категорично.

Процесс влияния технологического дизайна на формирование социально-экономического развития в сфере проектирования РЭС чрезвычайно сложен и выражается, на наш взгляд, в том, что под влиянием проектирования происходит постоянная, в том числе и эстетическая модернизация РЭС, отмирание в номенклатуре тех видов изделий, которые уже не удовлетворяют эстетическим и эргономическим запросам работающих, не спо-

способствуют формированию определенного эстетического отношения к процессу и результатам труда, следовательно, не способствуют повышению его производительности. Именно так следует понимать социально-экономические требования технической эстетики и оценивать степень влияния технологического дизайна на народнохозяйственную потребность в РЭС.

Функционально-конструктивные требования представляют собой комплекс конструктивно-технологических и функциональных требований к конкретному решению РЭС (включая формообразование их приборных корпусов). Эти требования определяют связь формы корпусов РЭС с конструкцией, соответствие формы приборных корпусов РЭС их функциональному назначению, технологичности формы РЭС и т. п.

Эргономические требования в соответствии с ГОСТ 16.035–81 — требования, определяемые свойствами человека, характеристиками производственной среды и предъявляемые к изделию для повышения эффективности взаимодействия человека с данным изделием. Реализация эргономических требований предполагает проектирование РЭС с учетом психологических и физиологических особенностей, биомеханических возможностей и антропометрических данных человека-оператора.

На основании ГОСТ 22973–78 общие эргономические требования, характерные для групп (классов) изделий и классифицируемые по предметно-функциональному признаку, являются основой для разработки частных эргономических требований, обусловленных назначением и особенностями эксплуатации конкретных видов РЭС.

Эстетические требования — требования, направленные на обеспечение композиционной целостности формы приборных корпусов РЭС, ее гармоничности, соответствие общего формообразования РЭС требованиям современного стиля. Общетеоретические требования технической эстетики позволяют сформулировать ряд частных требований, которые можно назвать прикладными требованиями технической эстетики. Форма изделий может считаться эстетически совершенной, если обеспечена функциональность формы приборного корпуса РЭС, эргономичность формы, высокий уровень композиционного решения формы приборного корпуса, стилевое единство решения формы, технологичность формы приборного корпуса, высокое качество обработки и отделки формообразующих поверхностей.

Требования технической эстетики по своей сущности комплексны для всего процесса проектирования (непосредственно связаны с компоновочными, конструктивно-технологическими и другими техническими требованиями). Важно отметить, что требования технической эстетики не существуют сами по себе, самостоятельно, и не могут рассматриваться

изолированно от общих технических требований. Они как бы синтезируют в себе наиболее прогрессивные взгляды на данное изделие, являются их логическим выражением. Требования технической эстетики тесно связаны с конструктивно-технологическими требованиями.

Конструктивно-технологические требования. Назначение этих требований обеспечить в процессе проектирования создание совершенного конструктивно технологического решения. Среди множества этих требований необходимо выделить:

- взаимозаменяемость отдельных элементов конструкции;
- максимальную унификацию и стандартизацию изделия (в том числе и его формообразующих элементов);
- функционально-блочное (модульное) построение конструкции; технологичность деталей и сборочных единиц конструкции (в том числе формообразующих элементов);
- рациональный выбор конструкционных и отделочных материалов и т. п.

Конструктивно-технологические требования могут рассматриваться весьма подробно и получать те или иные характерные особенности для каждого конкретного вида изделий.

ТЕМА 3. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОЕКТИРОВАНИЮ И ПРОИЗВОДСТВУ РЭС. СЛОЖНОСТЬ РЭС. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. РАДИОЭЛЕКТРОННОЕ СРЕДСТВО КАК МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. ПРИЗНАКИ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА

На современном этапе развития науки и техники ЭВА является уже настолько сложной, что ее создание, изучение, управление и оптимизация становятся неэффективными без представления ее в виде системы. Под системой будем в дальнейшем понимать ограниченное множество элементов, объединенных некоторыми связями и образующих единое главенствующее целое. Часть элементов системы, выполняющих некоторое функционально завершенное преобразование, называют подсистемой. Естественно, что одна и та же система может быть представлена различным количеством подсистем, что определяется степенью детализации функциональных преобразований, выполняемых подсистемами.

Каждая система окружена внешней средой, с которой она взаимодействует. Воздействия среды на систему называют входными воздействиями, воздействия системы на среду — выходными воздействиями. И те и

другие оценивают, как правило, многомерными векторами. Очевидно, что практически любой объект независимо от его сложности, спецификации и физической природы можно рассматривать как систему. В свою очередь, система может быть формализована, т. е. абстрактно представлена некоторой математической моделью ее функционирования. Последняя является упрощенным математическим отображением наиболее существенных свойств реальной системы. Она характеризует правило преобразования входных сигналов x в выходе y .

Такое преобразование можно, очевидно, произвести с помощью некоторого оператора $A\{\dots\}$. Этот оператор может представлять собой совокупность математических и логических операций, выполнение которых необходимо для установления связи между x и y . Используя $A\{\dots\}$, математическую модель системы в самом общем виде можно представить следующим выражением

$$y = A\{x\}.$$

Различают детерминированные и вероятностные математические модели. Первые характеризуются наличием однозначной аналитической связи между входными и выходными параметрами системы, вторые предполагают известные зависимости между законами распределения входных и выходных величин, рассматриваемых как случайные. Оба вида моделей могут быть статическими (независимыми во времени) и динамическими, состояние которых существенно изменяется во времени. В большинстве практических случаев производственные объекты описываются динамическими моделями.

Исследование объектов с помощью их математических моделей и представляют основную суть системного подхода, характеризующегося следующими важнейшими принципами:

- целостностью изучаемой системы (т. е. свойства целого не могут быть поняты и оценены без знания свойств частей этого целого, но само целое принципиально не может быть сведено к сумме свойств составляющих его элементов);
- структурность (т. е. возможность описания системы с помощью сети связей между ее элементами);
- иерархичность (т. е. каждая подсистема или элемент системы может рассматриваться как система);
- множественность описания (т. е. система может быть описана множеством математических моделей, каждая из которых описывает определенный ее аспект);
- взаимосвязанность системы и среды (т. е. свойства системы проявляются только при взаимодействии с окружающей ее средой).

Системный подход является в настоящее время общенаучным направлением методологии, определяет ориентацию научных исследований и занимает ведущее место в научном познании. В его основе лежит исследование объектов как систем, направленное на поиск механизмов целостности объектов и выявление всех его связей. Системный подход предполагает общую оптимизацию разработки, проектирования, производства, эксплуатации, отдельные составные части которых могут и не быть оптимальными.

На разных стадиях создания и эксплуатации ЭВА ее математические модели будут, естественно, различными (например, схемотехнического проектирования и проектирования компонентов системы, ее оптимизации, технологического процесса производства и пр.). В связи с этим одной из задач системного подхода является оптимальный выбор вида, числа, уровня сложности, формы представления этих математических моделей. Кроме того, необходимо обеспечить (и согласовать) принцип входимости математических моделей низких уровней иерархии в более высокие. При этом всякий раз следует стремиться к тому, чтобы системный подход облегчал задачу создания современной ЭВА. Он не только существенно ускоряет этот процесс, но и исключает неизбежные ошибки, имеющие место при неавтоматизированных методах проектирования и производства. Однако все же следует иметь в виду, что точно описать объект ни одна математическая модель практически не может, поэтому роль разработчика аппаратуры по-прежнему остается определяющей.

В настоящее время системный подход в основном реализован практически и внедрен в производство в различных системах автоматизированного проектирования (САПР) полупроводниковой аппаратуры.

Любой технологический процесс независимо от его физической природы всегда можно представить в виде некоторой системы, следовательно, для его изучения можно применить системный подход. Такой процесс всегда укрупненно можно представить набором операций по изготовлению деталей D_i , операцией сборки C_i , регулировки P_i и испытании I_i готового изделия. Формализованная таким образом обобщенная функциональная схема абстрактного технологического процесса представлена на рисунке 3.1.

В качестве $X_{1,...,n}$ могут выступать материалы, комплектующие изделия, технические средства и квалификация рабочих, осуществляющих технологический процесс; в качестве $Y_{1,...,k}$ — отклонение параметров от номинальных значений, стоимость, точность, показатели надежности изделия и пр.; в качестве $R_{1,...,m}$ — электрические непрерывные и дискретные сигналы, механические воздействия и пр.; в качестве $Z_{1,...,l}$ — разнообразные физические величины и признаки, по которым можно объективно оценить $Y_{1,...,k}$.

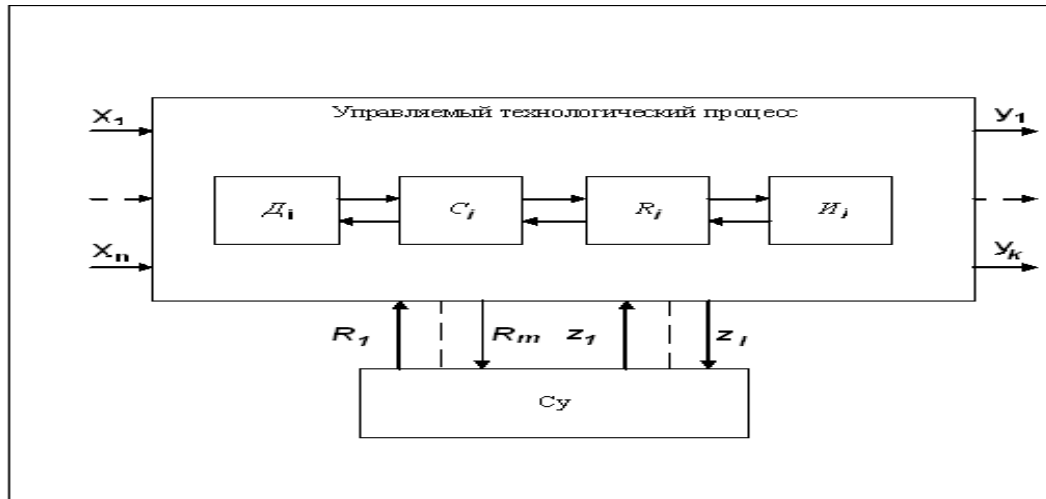


Рисунок 3.1 — Обобщенная функциональная схема технологического процесса:

C_y — система управления технологическим процессом, которая может быть как автоматизированной (например, специализированная управляющая цифровая ЭВМ), так и неавтоматизированной; $X_{1,...,n}$ — входные (возмущающие) воздействия;

$Y_{1,...,k}$ — выходные переменные (сигналы отклика, переменные состояния);

$R_{1,...,m}$ — управляющие сигналы, $Z_{1,...,l}$ — наблюдаемые переменные;

стрелками показаны направления распространения сигналов

Наиболее простым, типичным и распространенным системным методом исследования технологических процессов является метод, обеспечивающий достижение экстремального значения целевой функции, под которой понимают некоторый обобщенный показатель, наиболее полно характеризующий важнейшие показатели объекта производства. При этом каждый из сигналов (если их можно считать детерминированными) удобно характеризовать многомерными векторами

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{pmatrix}; \quad R(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{pmatrix}; \quad Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_l(t) \end{pmatrix}.$$

где $X(t)$, $Y(t)$, $R(t)$ и $Z(t)$ — соответственно векторы-столбцы возмущения, состояния, управления и наблюдения.

Если эти сигналы представляют собой случайные величины, то их также можно представить векторами-столбцами, но элементами в них будут уже математические ожидания соответствующих величин, а не сами величины, как было ранее.

В большинстве практических случаев не удастся непосредственно измерить сигналы $Y_{1,...,k}$ на выходе системы. Однако достаточно легко они могут быть измерены и зафиксированы на выходе соответствующего измерительного устройства, подключенного к выходу системы, в виде сигналов $Z_{1,...,l}$. Но в частном случае все же может иметь место следующее равенство: $Y_{1,...,k} \approx Z_{1,...,l}$. Для упрощения дальнейшего изложения будем считать его справедливыми. Очевидно, что в любой момент времени, например, t_i , состояние системы $Y(t_i)$ является функцией ее начального состояния $Y(t_0)$ в момент времени t_0 и векторов $X(t_i)$ и $R(t_i)$ [27]. Поэтому, полагая, что система может быть описана, например, детерминированной динамической моделью, можно записать:

$$\begin{aligned} Y(t_i) &= f(Y(t_0); X(t_i, t_0); R(t_i, t_0)); \\ Y(t_i) &\in A(t); \\ X(t_i) &\in B(t); \\ R(t_i) &\in C(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — соответственно некоторые замкнутые области векторного пространства состояния, возмущения и управления, ограничивающие все возможные значения $Y_{1,...,k}$, $X_{1,...,n}$ и $R_{1,...,m}$. Эти ограничения большей частью обусловлены физическими закономерностями, в соответствии с которыми осуществляется функционирование технических систем (ограничения первого рода), и ограниченностью ресурсов, которые в силу чисто технических возможностей системы не могут превосходить некоторых пределов (ограничения второго рода).

Выражение (3.1) является математической моделью исследуемого процесса, записанной в самом общем виде. Будем для определенности считать в дальнейшем, что поведение исследуемой системы может быть описано системой обыкновенных дифференцированных уравнений. Тогда (поскольку t_0 представляет собой фиксированный момент времени, т. е. $t = \text{const}$) уравнение (3.1) можно привести к следующему виду с сохранением ранее приведенных ограничений:

$$\frac{dY}{dt} = \varphi(Y(t_1); X(t_1); R(t_1)).$$

Если обозначить значение целевой функции изучаемого процесса через E , то очевидно, что она может быть представлена выражением вида

$$E = \varphi(Y(t_1); X(t_1); R(t_1)).$$

Будем в дальнейшем для простоты считать, что оптимальный процесс соответствует, например, некоторому экстремальному значению целевой функции E . тогда задачу оптимального управления процессом наиболее просто практически сформулировать следующим образом: найти оптимальный вектор управления $R_{i\ddot{o}}(t)$, доставляющий экстремальное значение целевой функции E и удовлетворяющий ограничениям (3.1). Мы выбрали в качестве средства оптимизации процесса изменения вектора $R(t)$ из-за того, что он наиболее эффективно воздействует на процесс. Можно было бы рассмотреть случай одновременного изменения (вместе с $R(t)$) и вектора $X(t)$. Но это более сложно.

В подобной постановке задачу оптимизации решают обычно в два этапа. На первом этапе (первичной оптимизации) определяют идеальный вектор управления $R_{e\ddot{a}}(t)$. Достигнуть этого (и практически реализовать) обычно не представляется возможным, но делают это для того, чтобы было ясно, к чему следует стремиться, чтобы процесс протекал наиболее благоприятно. На втором этапе (вторичной оптимизации), зная $R_{e\ddot{a}}(t)$, выбирают практически реализуемый квазиоптимальный вектор управления. Здесь же стараются получить решение, наименее отличающееся от идеального и в то же время реализуемое наиболее просто.

В заключение отметим, что в большинстве практических случаев даже оптимизированные технологические процессы дополнительно подвергаются наладкам и корректирам (если это возможно). Это обусловлено тем, что при построении математических моделей процессов невозможно учесть ряд влияющих (и зачастую неизвестных нам) факторов.

Процесс конструирования ЭВА может быть также отображен набором операций, связанных с выбором принципа действия (ПД) разрабатываемой конструкции, ее функционально-логической схемы (ФЛС) и реализующей ее системы элементов, выполнением полного комплекта рабочей документации (РД) и анализом качества (АК) разработки. Обобщенная функциональная схема подобного абстрактного процесса конструирования приведена на рисунке 3.2. В ней сохранены обозначения переменных векторов возмущения $X_{1,...,n}$, состояния $Y_{1,...,k}$, управления $R_{1,...,m}$ и наблюдения $Z_{1,...,l}$, которые имеют ранее указанный физический смысл. Взаимосвязь операций отмечена на рис.3.2 стрелками.

Как видно из приведенной схемы, в процессе конструирования приходится обращаться к математическим моделям на этапах разработки ФЛС и РД. Обращение к математическим моделям дает возможность решать ряд задач оптимизации, связанных, например, с минимизацией числа и типов

логических элементов ФЛС, с минимизацией площади кристалла, на котором размещена ФЛС, и целый ряд других конструкторских задач, связанных с топологией.

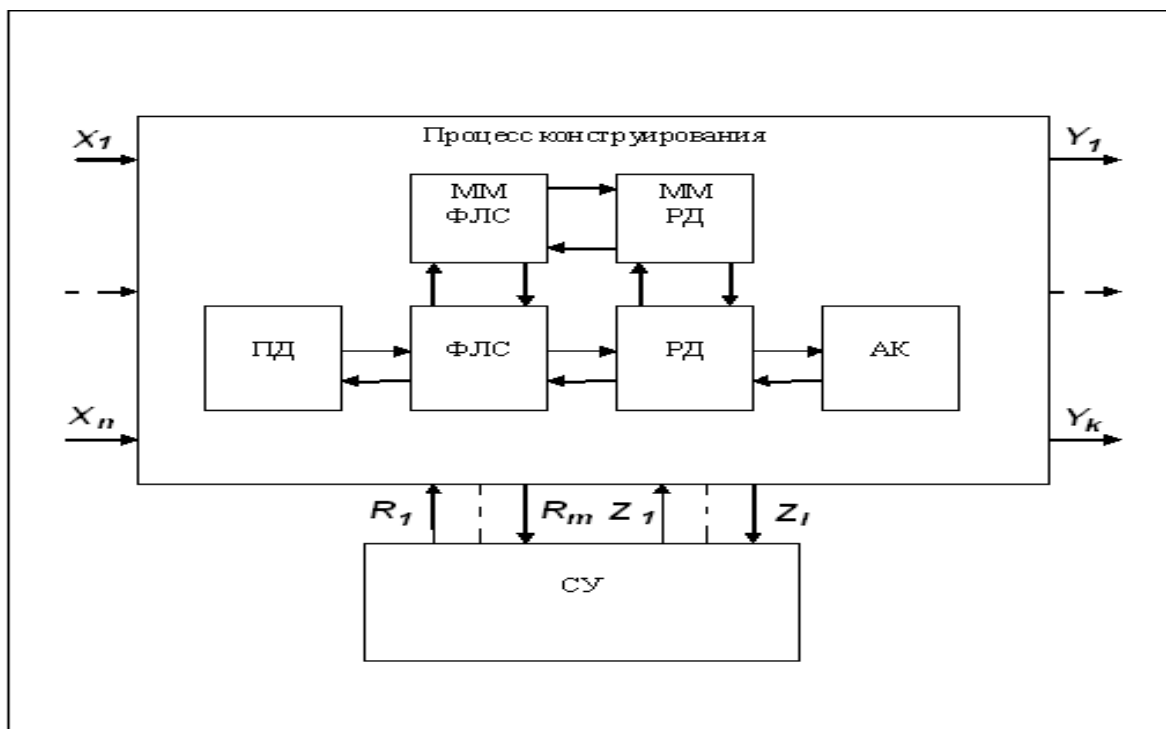


Рисунок 3.2 — Обобщенная функциональная схема процесса конструирования:
ММ — математическая модель

Математические процедуры при разработке технологических процессов полностью применены и остаются в силе при конструировании ЭВА. Отличие состоит лишь в выборе целевой функции.

ТЕМА 4. СИСТЕМНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ РЭС

Моделирование представляет собой метод научного познания, при котором исследуемый объект заменяется другим, как правило, более простым, называемым **моделью**, изучение которой дает возможность получить новую ранее неизвестную информацию об исходном объекте. В зависимости от способа воплощения изучаемого объекта в модели различают физическое и математическое моделирование. Оба эти вида используются при проектировании ЭВА.

Процесс создания ЭВА всегда включает в себя прогнозирование ее основных характеристик. Наиболее естественным и, как правило, достоверным является макетирование, которое предполагает создание устройства и последующие его испытания. В процессе проведения испытаний выявляются ошибки и слабые места в конструкции, которые далее устраняются. Такой способ обработки изделий называется **физическим моделированием**, поскольку он осуществляется на вещественной (материальной) модели, которая, отображая изучаемый объект, сохраняет его физическую природу. Для удешевления экспериментов физические модели (макеты) изготавливают зачастую в упрощенном виде (например, меньшей мощности, производительности и пр.). Естественно, что при этом точность предсказания снижается.

Но бывает и так, что натурный эксперимент практически невыполним, настолько он сложен, дорог и рискован. Так обстоит дело при решении задач, связанных с термоядерными и некоторыми химическими реакциями, с освоением космического пространства, с созданием систем жизнеобеспечения людей, размещаемых на автономных объектах, и т. п. В ряде случаев создание макета устройства экономически нецелесообразно, особенно когда после изготовления в него практически невозможно внести какие-либо усовершенствования (изменения). Так, например, обстоит дело при создании новых типов БИС. Поэтому естественно стремление разработчиков создавать сразу конструкции ЭВА с характеристиками, близкими к оптимальным.

Решение перечисленных задач требует применения методов, с помощью которых можно было бы провести оценку (расчет) наиболее важных процессов, имеющих место в проектируемом изделии. В настоящее время такими методами принято считать методы вычислительной математики (численные методы). Реализация последних на цифровых ЭВМ приводит к **математическому моделированию**. Суть его состоит в том, что проектируемому изделию ставят в соответствие его математическую модель (ММ), под последней обычно понимают упрощенное отображение наиболее существенных свойств реального объекта, выраженное в математической форме. В общем случае она характеризует правило преобразования входных сигналов в выходные.

Математическая модель может быть в общем случае задана системой уравнений, неравенств, логической последовательностью операций и пр. Независимо от способа задания ММ она всегда дополняется ограничениями, связанными, как правило, с техническими возможностями устройства, условиями его эксплуатации и т. п.

Наиболее распространенным способом представления ММ является система (каких-либо) уравнений с необходимыми для ее решения данными: начальными и граничными условиями, численными значениями коэффициентов в уравнениях и пр. Варьируя их, можно провести детальное изучение физических процессов в изделии, отображенных выбранной ММ, выявить основные их закономерности, оценить влияние на них различных факторов, т. е. получить информацию, аналогичную получаемой во время физического эксперимента. Однако в данном случае вместо экспериментальной установки мы используем ЭВМ, а вместо изучаемого физического объекта — его математическую модель. Подобные исследования называются вычислительным экспериментом.

Вычислительный эксперимент обладает рядом преимуществ по сравнению с натурным. Он, как правило, намного дешевле, легче и быстрее реализуем, допускает вмешательство (связанное с корректировкой) на любой стадии исследования и позволяет моделировать условия эксперимента, которые зачастую вообще невозможно воспроизвести при натурных испытаниях.

Несмотря на все разнообразие современной ЭВА, математические модели ее функционирования описываются ограниченным числом типов уравнений. Кроме того, существенно разнохарактерные физические процессы могут описываться сходными математическими моделями, поэтому численные методы их исследования достаточно схожи и, при необходимости, сравнительно легко перестраиваются. Физическая же модель одного изделия не может быть использована для исследования другого объекта с отличной физической природой. Но, несмотря на очевидные преимущества, вычислительный эксперимент обладает и тем недостатком, что применимость его результатов ограничена рамками принятой ММ. Последняя же строится либо на основании изучения физических закономерностей (выявляемых опытом), либо по данным формальных измерений необходимых параметров объекта. В любом случае, модель не является точной, что, естественно, сказывается на результатах вычислительного эксперимента.

В общем случае физические модели (по сравнению с математическими) дают более точные и достоверные сведения об изучаемом объекте, но проигрывают последним по стоимости и скорости получения информации. Поэтому физический и вычислительный эксперименты не следует противопоставлять. Необходимо определить их разумное сочетание и использовать для решения практических задач.

4.1. Формальные и физические математические модели

Различают формальные и физические ММ, классификация которых для ИМС дана на рисунке 4.1. Формальные ММ используют, как правило, когда требуется осуществить качественный анализ (например, аппроксимацию) характеристик уже имеющегося прибора, связанный с предварительными приближенными оценками, в том случае когда физика его работы известна недостаточно полно. В общем случае поведение изучаемого объекта описывают некоторой аппроксимирующей функцией. Неизвестные ее коэффициенты определяют по данным электрических измерений характеристик измеряемых приборов. Формальные ММ требуют, как правило, для достаточно точных оценок весьма большого количества измерений и аппроксимируют характеристики изучаемого объекта в сравнительно узком диапазоне его функционирования.

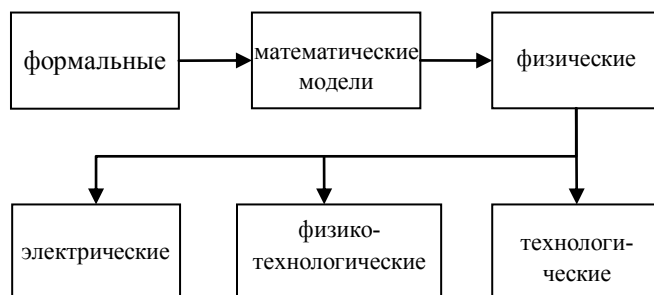


Рисунок 4.1 — Классификация математических моделей

Физические математические модели отображают и физические процессы, протекающие в проектируемых приборах. В отличие от формальной ММ уравнения физической модели устанавливаются на основании теории работы прибора. Основным классификационным признаком физических ММ является тип исходных параметров. В зависимости от того, какие физические параметры являются для данной модели исходными, определяется область возможного практического использования модели.

Физические ММ подразделяются на электрические, физико-топологические и технологические (см. рис. 4.1).

Для **электрических моделей** исходными (входными) являются электрические параметры, определяемые экспериментально при исследовании уже имеющихся приборов. Эти модели строят обычно на основе упрощенной физической теории их работы, которая учитывает в основном только основные эффекты. Дополнительные (менее значимые) эффекты, которые не учитывает упрощенная теория, могут быть отражены в модели введением

формальных коэффициентов и аппроксимаций. Выходными параметрами электрических ММ являются токи и напряжения на выходах прибора. Границы применимости электрических моделей обычно несколько шире, чем формальных ММ.

В **физико-топологических моделях** исходными параметрами являются геометрические размеры областей компонентов и физические характеристики полупроводника. Геометрические размеры определяются из топологических чертежей, физические параметры — из соответствующих электрических измерений. Эти ММ учитывают все основные эффекты, влияющие на работу прибора, поскольку они (в отличие от электрических ММ) используются при проектировании самих полупроводниковых приборов, а не для аппроксимации характеристик уже созданных приборов. Поэтому физико-топологические ММ обычно значительно сложнее электрических.

В **технологических моделях** исходными являются параметры технологических процессов. Выходная информация технологических моделей может представлять собой оптимизированную совокупность физико-топологических параметров. Эти модели применяются как для анализа, так и для оптимизации технологических режимов изготовления ЭВА, а также для расчета исходных параметров физико-топологических ММ. Поскольку на ход технологических процессов влияет обычно большое число факторов, то для выделения среди них основных используют обычно статистические методы. Технологические ММ являются до сих пор наиболее сложными и наименее разработанными.

Наиболее разработанными являются ММ компонентов полупроводниковых ИМС (БИС). Но их применение при числе элементов более 1000 становится практически невозможным из-за громадных затрат машинного времени и необходимости иметь в цифровой ЭВМ огромную память. Поэтому для исследования сложных полупроводниковых структур (узлов, приборов, устройств и пр.) используют макромодели. Под **макромоделью** понимают упрощенную ММ целого прибора, устанавливающую связь между его входными и выходными характеристиками.

Различают параметрические и непараметрические ММ. Первые содержат в своем составе неизвестные параметры, вторые таковых не содержат. В настоящее время наиболее распространенными методами задания параметрических моделей является их представление с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений с заранее неизвестными постоянными коэффициентами (параметрами).

Если ММ отражает статическое состояние исследуемого объекта при неизменных внешних управляющих воздействиях, то такую модель называют статической. Если ММ дополнительно отображает еще и переходные процессы в объекте, то такую модель называют динамической. В зависимости от скорости изменения управляющих сигналов различают низко- и высокочастотные динамические математические модели, в зависимости от уровня сигналов — математические модели для малого и большого сигналов. Так как в исследуемом приборе интересующие нас процессы могут происходить по нескольким координатам, различают одно-, двух- и трехмерные ММ.

4.2. Требования, предъявляемые к математическим моделям

Поскольку ММ отображают поведение проектируемого устройства, то имеется возможность, не создавая устройства, косвенно оценить (предсказать) его основные свойства на основании свойств ММ. Чем более адекватна ММ исследуемому процессу (устройству) тем с большей уверенностью может быть сделано такое предсказание. В связи с этим к ММ предъявляют ряд требований, основными из которых являются:

- способность отображать с необходимой точностью характеристики проектируемых приборов (процессов) при изменении их параметров и внешних условий;
- иметь однозначное соответствие между параметрами и физическими процессами в приборе;
- быть пригодной для обработки на цифровой ЭВМ.

Важным также представляется простота перехода от объекта к модели и обратно. Математические модели должны строиться по иерархическому принципу так, чтобы каждая последующая ММ являлась более точной и учитывала большее количество эффектов.

Выполнить все перечисленные требования к ММ практически не представляется возможным, так как они противоречивы. Например, высокая точность отображения моделируемых объектов и предельная простота ММ. Поэтому на практике всегда предварительно оценивают, что является наиболее важным для исследуемой ЭВА и на основании этого выбирают наиболее подходящую ММ. Несмотря на то, что ММ хотя и приближенно характеризуют изучаемые объекты, однако их применение и обработка на цифровой ЭВМ позволяет наиболее экономно решить с достаточной для практики точностью задачи прогнозирования основных характеристик конструкций ЭВА и техпроцессов, не создавая их самих.

4.3. Математические модели электронных схем ЭВА

При конструкторском проектировании, являющемся завершающим и наиболее ответственным этапом процесса разработки изделия, ММ удобно описывать языком теории графов. При этом электрическая схема ЭВА практически любой степени сложности может быть представлена набором конечного числа элементов и связей между ними. Исходя из этого, в настоящее время наибольшее распространение получили следующие три способа представления моделей электронных схем. Проиллюстрируем их на примере электронной схемы, представленной на рисунке 4.2, а. В ней $k_{1,...,6}$ означает, соответственно, входы и выходы; $\mathcal{E}_{1,...,5}$ — составляющие схему элементы; 1, 2, 3 — выводы элементов; $\alpha_{1,...,8}$ — соединяющие элементы электрические цепи. Пути прохождения сигналов в схеме указаны стрелками.

Модель I. Исследуемая электрическая схема интерпретируется взвешенным неориентированным графом $G(X, R)^1$, вершины которого $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ставят в соответствии с элементами схемы, а его ребра $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ — связями между ними. Вес, например, ребра $r_{ij} \in R$ определяется степенью связи между элементами i и j . Этот граф изображен на рисунке 4.2, б.

Модель II. Исследуемая электрическая схема интерпретируется гиперграфом $G(X, A)^2$, в котором множество вершин $X = x_1, x_2, \dots, x_n$, так же как в модели I, отождествляется с элементами устройства, а каждому ребру a_i из множества ребер $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ (a_i — подмножество множества вершин, т. е. $a_i \in X$; $i = 1, 2, \dots, k$) соответствует вполне определенная электрическая цепь α'_i , соединяющая элементы устройства. Этот граф изображен на рисунке 4.2, в.

Модель III. Исследуемая электронная схема интерпретируется ориентированным графом¹, в котором каждому элементу соответствует одна вершина, а ребра отождествляют электрические цепи $\alpha_{1,...,8}$. Направление ребер графа определяется порядком прохождения сигналов в рассмотренном устройстве.

¹Взвешенным неориентированным графом называют граф, у которого все вершины соединены ребрами, каждому из которых соответствует определенный вес. В простейшем случае это может быть порядковая нумерация ребер.

² Граф, у которого ребро может соединять не только две, но и любое другое множество вершин, называют гиперграфом. Например, на рисунке 4.2, в ребру a_7 соответствует электрическая цепь, соединяющая 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й компоненты (вершины), ребру a_8 — 2-й, 3-й и 4-й.

¹Граф, у которого все вершины соединены дугами, называется ориентированным. В нем важен порядок соединения вершин, указываемый стрелками.

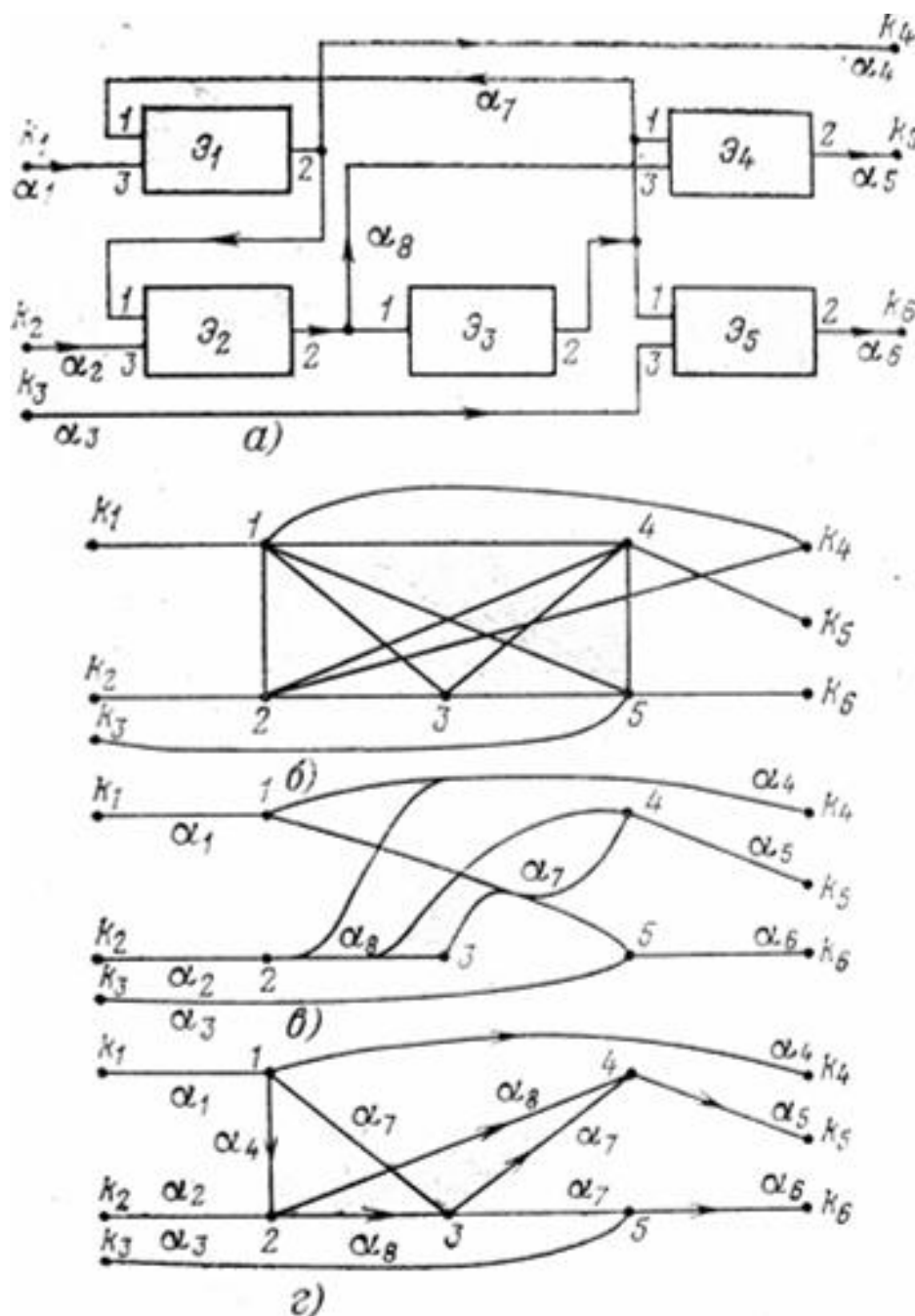


Рисунок 4.2 — Схема (a) и интерпретирующие ее графы (б – в)

Представление ММ электронных схем ЭВА в виде различных графов является наиболее наглядным и естественным при конструкторском проектировании. Граф всегда можно задать в виде некоторой цифровой матрицы специального типа. Матричная запись однозначно определяет граф и позволяет представить его в виде, удобном для обработки с помощью цифровой ЭВМ.

Вернемся вновь к схеме на рисунке 4.2, а. Как видно из рисунка она включает пять конструктивных элементов ($\mathcal{Y}_{1,...,5}$), соединенных электрическими цепями ($\alpha_{1,...,5}$). В качестве составляющих схему ЭВА элементов

могут быть узлы, блоки и пр. Пусть, например, они представляют собой некоторые многовыводные электронные элементы, показанные на рисунке 4.3 в виде многополюсника. Если бы выходы многополюсника были инвариантными, то модели исследуемой схемы, приведенные на рисунке 4.2, б – з, исчерпывающе бы отражали характер ее электрических связей.

В общем случае выходы элементов не являются инвариантными так как каждый из них соответствует точно определенному входу (выходу) электрической схемы элемента, который должен быть соединен с точно определенным входом (выходом) какого-либо (или нескольких) элемента схемы. Без этих сведений решить задачу соединения элементов в схеме (задачу трассировки) невозможно. Поэтому в описании схемы должны присутствовать данные о том,

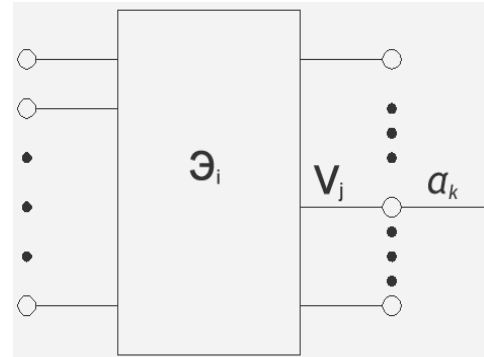


Рисунок 4.3 — Многовыводной электронный элемент

к какому конкретно выводу V_i элемента $\mathcal{E}_i$ подходит электрическая цепь α_k , инцидентная этому элементу. Таким образом, возникает задача представления исходных данных о схеме, сводящаяся в общем случае к установлению бинарных отношений инцидентности между тремя множествами: множеством цепей, элементами и выводов элементов. Такого рода данные удобно представлять либо в матричной форме, либо в виде так называемых списков.

При матричном описании схемы ЭВА в качестве элементов матрицы могут быть выбраны элементы одного из трех множеств, т. е. схему можно описать одним из трех типов матриц.

Матрица I ($\mathbf{M}_I$), элементами которой являются номера электрических цепей α_i (первого множества), инцидентных j -му выводу i -го элемента $\mathcal{E}_i$ (в строках матрицы $\mathbf{M}_I$ размещены номера электрических цепей, соединенных соответственно с j -ми выводами с элементов). Размерность $\mathbf{M}_I$, определяется числом выводов элементов и числом элементов $\mathcal{E}$; она равна $V \times \dot{Y}$.

Матрица II ($\mathbf{M}_{II}$), элементами которой являются номера $\mathcal{E}_i$ (второго множества); у последних j -й вывод инцидентен электрической цепи α_i .

Матрица III ($\mathbf{M}_{III}$), элементами которой являются номера j выводов V_i (третьего множества), инцидентные цепям α_i .

Каждая из типов матриц $\mathbf{M}_{I, \dots, III}$ с одинаковой степенью точности и равной детализацией отображает описание исследуемой схемы, но на практике отдают предпочтение матрице $\mathbf{M}_I$, поскольку она проще и ее легче кодировать, а для ее хранения требуется меньший объем памяти ЭВМ (меньшее число ячеек).

Заметим, что число ячеек памяти ЭВМ, необходимых для хранения информации о схеме, прямо зависит от размера (порядка) матрицы и не зависит от того, содержит или не содержит матрица нулевые элементы.

На примере электрической схемы, изображенной на рисунке 4.2, проиллюстрируем матричный способ представления ММ электронных схем.

Будем для простоты и определенности считать, что все элементы $\mathcal{E}_{1,\dots,5}$ рассматриваемой схемы имеют по три вывода $V = 3$ (на самом деле их намного больше). Выберем матрицу $\mathbf{M}_I$. В применении к рассматриваемому случаю она будет иметь следующий вид:

$$M_I = \begin{array}{ccc|c} \underline{V_1} & \underline{V_2} & \underline{V_3} & \\ \hline 7 & -4^* & -1 & \acute{Y}_1 \\ -4 & 8^* & -2 & \acute{Y}_2 \\ 8 & 7^* & 0 & \acute{Y}_3 \\ 7 & -5^* & 8 & \acute{Y}_4 \\ 7 & -6^* & -3 & \acute{Y}_5 \end{array}$$

В каждой i -й строке матрицы помещены номера электрических цепей α_k , подключенных к j -м выводам элемента $\mathcal{E}_i$. В матрице $\mathbf{M}_I$ знаком минус отмечены номера электрических цепей, которые подсоединены к внешним выводам элементов $\mathcal{E}_{1,\dots,5}$, звездочкой — номера электрических цепей, которые инцидентны $\mathcal{E}_i$ -му элементу и являются по отношению к нему выходными. Если число внешних выводов схем N , то информацию об электрических цепях (точнее, об их номерах), соединенных с ними, можно представить списком $K[N]$ размером N , элементами N_i которого являются номера этих электрических цепей. Для схемы на рисунке 4.2, *a* такой список будет иметь вид

$$K_6 = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Аналогичные списки могут быть составлены для последовательной построчной записи всех ненулевых элементов матрицы и для порядковых номеров ее элементов, начиная с которых последовательно записаны ненулевые элементы всех строк матриц. Эти списки полностью заменяют приведенную выше матрицу.

Описание электрической схемы ЭВА набором списков является в общем случае более экономным и компактным. Объясняется это тем, что матрицы $\mathbf{M}_I, \dots, \mathbf{M}_L$, отображающие практические схемы, содержат обычно в своем составе значительное количество нулевых элементов. Чем их

больше (т. е. чем более разрежена матрица), тем большее предпочтение следует отдавать списочному способу представления информации о схеме, в котором нулевые элементы вообще отсутствуют. Объем памяти ЭВМ, необходимый для хранения информации о схеме, отображаемой матрицей, целиком определяется размером матрицы. Поэтому для запоминания ее нулевых элементов также необходимы ячейки памяти. При списочном представлении ММ схемы экономится объем памяти ЭВМ за счет того, что в них отсутствуют нулевые элементы.

4.4. Математические модели монтажного пространства

В качестве наиболее универсальных моделей монтажных пространств ЭВА используют обычно обыкновенные графы $G(X, R)$, задаваемые следующим образом. Если монтаж устройства осуществляется в одной плоскости (например, с помощью односторонних печатных плат), то ее разделяют на p_i квадратных площадок, каждой из которой ставят в соответствие вершины $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обыкновенного графа. Две вершины (i и j) соединяют ребром только тогда, когда соответствующие им элементарные площадки (p_i и p_j) позволяют трассировать соединительные проводники непосредственно из одной площадки в другую (например, из p_i в p_j и обратно), минуя дополнительные площадки. При ортогональной трассировке к каждой вершине графа могут подходить четыре ребра. Примеры модели монтажного пространства и интерпретирующего его графа приведены на рисунке 4.4.

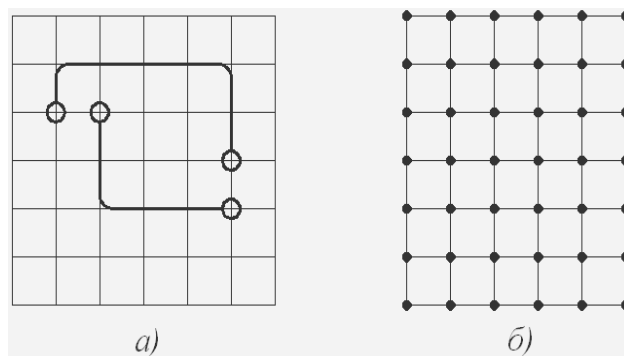


Рисунок 4.4 — фрагмент модели монтажного пространства (а) и интерпретирующий ее граф (б) при ортогональной трассировке

Если монтаж устройства производится при пространственном расположении проводников (например, с помощью многослойных печатных плат), то монтажное пространство разбивают (как и прежде) на элементарные площадки p_{ij} в каждом печатном слое (i — номер площадки, j — номер печатного слоя). Далее повторяется процедура, аналогичная описанной выше при плоском монтаже. В этом случае при ортогональной трассировке к четырем ребрам каждой вершины графа добавляются еще два, указывающие на возможность перехода в площадки верхнего и нижнего слоев.

ТЕМА 5. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Параметры элементов и комплектующих изделий всегда имеют некоторые отклонения относительно номинальных (средних) значений. По этой причине выходные параметры различных экземпляров одного и того же ЭВС также имеют отклонения относительно средних значений, принимаемых обычно за номинальные. Отклонения параметров возникают при изготовлении изделий (элементов, устройств и т. п.) в условиях производства. Поэтому их называют производственными погрешностями, иногда — производственными разбросами.

Наличие производственных погрешностей параметров элементов и комплектующих изделий — объективная закономерность, являющаяся результатом отклонений параметров исходных материалов, нестабильности технологических процессов и т. п. Попытка в процессе производства полностью устранить производственные погрешности параметров элементов и комплектующих изделий вызвала бы значительные затраты. На практике экономически оправдано изготавливать элементы и комплектующие изделия с некоторыми производственными погрешностями параметров, а в процессе разработки конструкций ЭВС учитывать (при возможности устранить) влияние этих погрешностей.

Для учета влияния производственных погрешностей параметров необходимо параметры и их отклонения описать количественными характеристиками.

Значения параметров в виду наличия некоторых отклонений от номинальных величин являются по сути случайными (так как невозможно заранее предсказать точное значение параметра). Поэтому для количественного описания параметров с учетом их отклонений на практике используют математический аппарат теории вероятностей.

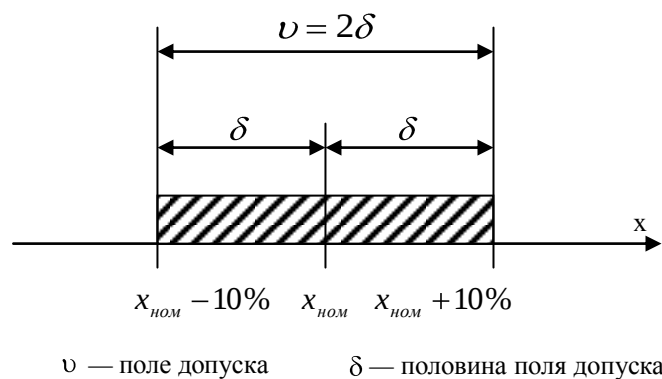


Рисунок 5.1 — Ограничение разброса параметров x допуском

Случайность параметров в конструкции и технологии ЭВС не означает полный «хаос». Разброс параметров, обусловленный производственными погрешностями, ограничивается (регламентируется) предельными отклонениями — допусками на параметры, например, $\pm 10\%$ от значения номинальной величины. С вероятностью, близкой к единице, значения параметров партии (выборки) однотипных элементов или изделий должны укладываться в пределы поля допуска (рис. 5.1).

В пределах поля допуска значение параметра подчиняется тому или иному закону распределения. Закон распределения может быть описан плотностью распределения (иначе — плотностью вероятности) случайной величины или же функцией распределения.

Плотность распределения характеризуется плотностью, с которой распределяются значения параметра в различных точках диапазона его возможных значений. Например, если параметр x , являясь случайным, занимает диапазон от $x_{\hat{i}\hat{i}} - 10\%$ до $x_{\hat{i}\hat{i}} + 10\%$, то плотность распределения показывает, как плотно группируются значения этого параметра в той или иной точке на участке от $x_{\hat{i}\hat{i}} - 10\%$ до $x_{\hat{i}\hat{i}} + 10\%$ (рис. 5.2).

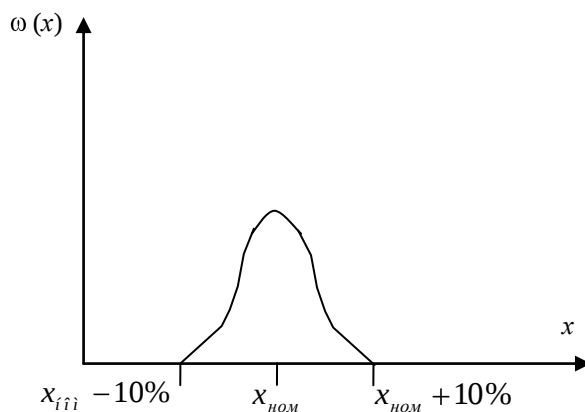


Рисунок 5.2 — Кривая плотности распределения параметра x

Из рисунка 5.2 следует, что значения параметра вблизи точки $x_{\hat{i}\hat{i}}$, будут встречаться более часто, нежели вблизи границ поля допуска: $x_{\hat{i}\hat{i}} - 10\%$ и $x_{\hat{i}\hat{i}} + 10\%$.

Функция распределения показывает, какова вероятность, что значение случайного параметра x меньше текущего значения, например β (рис. 5.3).

Функции $\omega(x)$ и $F(x)$, в сущности, несут одну и ту же информацию о случайном параметре x , но в разной форме.

Зная функцию $\omega(x)$ или $F(x)$, можно дать ответ на вопрос, который интересует инженера: какова вероятность того, что параметр примет значение, заключенное в некоторых пределах, например, от α до β .

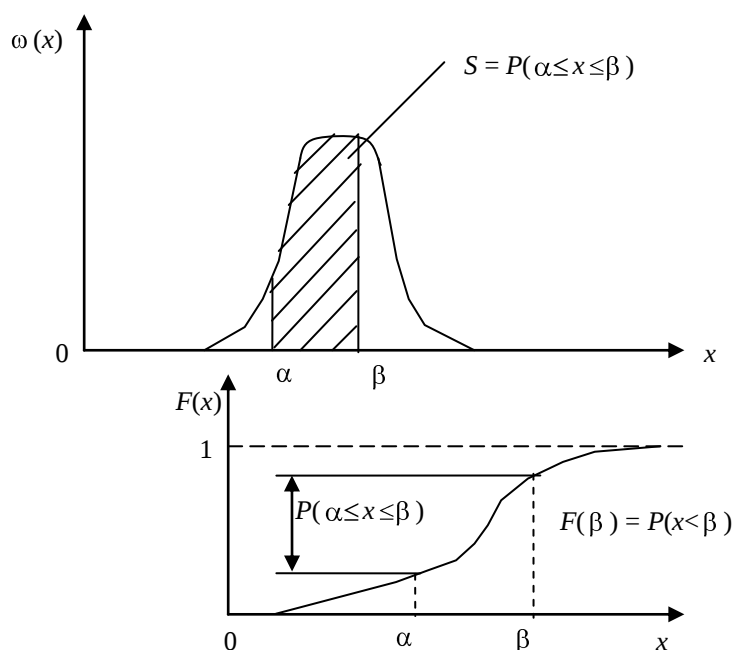


Рисунок 5.3 — Иллюстрация к определению вероятности попадания параметра x в заданный участок

Эта вероятность $P(\alpha \leq x \leq \beta)$ может быть определена из выражения

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \omega(x) dx \quad (5.1)$$

или по формуле

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \quad (5.2)$$

где $F(\beta)$, $F(\alpha)$ — значения функции распределения $F(x)$ в точках $x = \beta$ и $x = \alpha$.

Графическая интерпретация соотношений (5.1) и (5.2) показана на рисунке 5.3.

Для вероятностного описания случайного параметра (обозначим его через x) используют следующие характеристики:

- среднее значение параметра $M(x)$ — в большинстве случаев оно соответствует номинальному значению параметра;

- среднее квадратическое отклонение параметра $\sigma(x)$ или дисперсию $D(x)$; необходимо помнить, что величины $\sigma(x)$ и $D(x)$ связаны соотношением

$$D(x) = \sigma^2(x);$$

- закон распределения параметра в пределах его поля допуска.

В качестве закона распределения параметра обычно используют функцию плотности его распределения $\omega(x)$ в пределах поля допуска.

Для решения практических задач достаточно было бы знать числовые характеристики $M(x)$ и $\sigma(x)$. Однако информация о производственных погрешностях параметров обычно задается в виде значения половины поля допуска δ (рис. 5.4). А для перехода от величины $\delta(x)$ к значению $\sigma(x)$ или $D(x)$ необходимо располагать функцией плотности распределения $\omega(x)$.

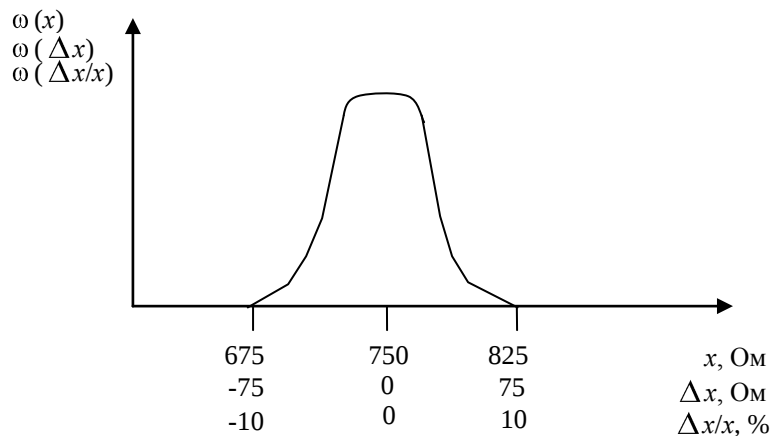


Рисунок 5.4 — Кривая функции плотности распределения параметра x , его абсолютной Δx и относительной $\Delta x/x$ погрешностей

В ряде случаев при расчете пользуются функцией плотности распределения не самого параметра x , а его абсолютной ($\Delta x = x - x_{\hat{i}}$) или относительной ($\Delta x/x$) погрешности. Переход от функции $\omega(x)$ к функции $\omega(\Delta x)$ и $\omega(\Delta x/x)$ применительно к параметру $x = 750 \pm 75$ Ом иллюстрируется на рисунке 5.4. Вид функции (кривой) плотности распределения сохраняется, изменяются только значения параметров распределения (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение).

Аналогично в ряде случаев при расчетах удобнее пользоваться не характеристиками $M(x)$ и $\sigma(x)$, а характеристиками $M(\Delta x)$, $\sigma(\Delta x)$ или же $M(\Delta x/x)$, $\sigma(\Delta x/x)$. Сказанное справедливо и для величины половины поля допуска δ .

5.1. Математические модели законов распределения

При оценке надежности изделий основными объектами исследования являются случайные величины и случайные события. **Случайной величиной** называют такую, которая в результате опыта может принимать то или иное, но заранее не известное значение. Случайные величины могут

быть дискретными либо непрерывными. Например, в результате многократного измерения одного и того же физического параметра технического устройства получен ряд дискретных случайных величин. Время работы изделия до отказа или время, необходимое на восстановление его работоспособности, является непрерывной случайной величиной.

Вероятность всех значений, которые может принимать случайная величина, называют **распределением вероятностей**. В распределении вероятностей случайных величин наблюдаются определенные закономерности, называемые **законами распределения** случайных величин.

Случайным событием называют такое, которое в результате опыта может произойти или не произойти. Например, отказ, восстановление, короткое замыкание электрических цепей, пробой диэлектриков представляют собой случайные события. Случайные события, происходящие во времени и образующие некоторую последовательность, называют **потоксом событий** (например, отказы восстанавливаемого устройства). Переход изделия из одного состояния в другое в теории надежности рассматривают как **случайный процесс** (например, переход от состояния полного или частичного отказа изделия к режиму его нормального функционирования).

Напомним кратко фундаментальные понятия теории вероятностей, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Законом распределения случайной величины будем называть всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$ и соответствующими вероятностями $P = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_k)$ ее появления. Закон распределения X может быть задан матрицей (таблицей), рядом распределения X , многоугольником распределения, графической зависимостью $X(p)$, а также представлен «механической» интерпретацией ряда распределения

Случайные величины подчиняются тому или иному закону распределения. Непрерывные и дискретные случайные величины X характеризуются вероятностью того, что они меньше некоторой текущей переменной x . Это обстоятельство выражается **интегральным законом распределения** или функцией распределения $F(x)$ случайной величины X :

$$F(x) = P(X < x).$$

Дифференциальный закон распределения или **плотность распределения** $f(x)$ случайной величины X представляет собой производную от функции распределения:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Важнейшими характеристиками законов распределения случайных величин X , которыми мы будем в дальнейшем пользоваться, являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации. **Математическим ожиданием** $M(X)$ случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$ на вероятность появления этих значений $P = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_k)$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i$$

Математическое ожидание — это среднее значение случайной величины в генеральной совокупности; оно характеризует центр распределения X .

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины X_0 :

$$D(X) = M(X_0)^2$$

где центрированная случайная величина X_0 , соответствующая X , представляет собой отклонение случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$, т. е.

$$X_0 = X - M(X)$$

Дисперсия — это среднее значение квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Она характеризует рассеивание X . Чем больше рассеиваются отдельные значения случайной величины, тем больше будет дисперсия. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Это не вполне удобно, и естественнее пользоваться натуральной размерностью. Поэтому в качестве одной из характеристик законов распределения случайных величин получило распространение понятие среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Среднее квадратическое отклонением $\sigma(X)$ (или иначе — стандартом) случайной величины X называют выражение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Оно так же, как и $D(X)$, характеризует рассеивание случайной величины X . Отношение $\sigma(X)$ и $M(X)$ называют **коэффициентом вариации**

$$V(X) = \sigma(X) / M(X),$$

который исчисляется в процентах и характеризует рассеивание случайной величины X в относительных единицах.

В теории надежности наибольшее распространение получили следующие законы распределения случайных величин: биномиальный закон и распределение Пуассона — для **дискретных случайных величин**, экспоненциальный закон, закон Вейбулла, нормальный и логарифмически нормальный законы — для **непрерывных случайных величин**.

Существует большое число математических выражений (моделей) законов описания случайных параметров. Наиболее широко на практике используются 20–30 моделей. Особый интерес представляют нормальная и равномерная модели.

Нормальная модель. Аналитическое выражение (модель) функции плотности распределения параметра x для нормального закона, называемого также законом Гаусса, имеет вид

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.3)$$

где m , σ — параметры распределения.

С параметрами распределения должны быть связаны числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание (среднее значение) $M(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$, или дисперсия $D(x)$. Для нормального закона (и только для него) параметры распределения m и σ совпадают с количественными характеристиками $M(x)$ и $\sigma(x)$:

$$m = M(x); \quad \sigma = \sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

Функция распределения $F(x)$ случайной величины (параметра) x может быть получена из выражения (5.3) в виде

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (5.4)$$

где

$$t = \frac{\sigma}{x - m}. \quad (5.5)$$

Интеграл вида (5.4) не выражается через элементарные функции. Его вычисляют через специальные функции. На практике находят широкое применение две разновидности таких функций, а именно:

$$\hat{O}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{и} \quad \Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Интеграл $\Phi(x)$ называют нормированной функцией Лапласа. Функция $\Phi^*(x)$ — функция распределения для нормально распределенной случайной величины с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$. Поэтому $\Phi(x)$ называют нормальной (иногда нормальной стандартной) функцией распределения. Для функций $\Phi(x)$ и $\Phi^*(x)$ составлены специальные таблицы [1, 3, 4, 6]. Связь между этими функциями описывается соотношением

$$\Phi^*(x) = 0,5 + \Phi(x). \quad (5.7)$$

В дальнейшем будем пользоваться функцией $\Phi^*(x)$.

Графики функций $\omega(x)$ и $F(x)$ при нормальном законе распределения параметров приведены на рисунке 5.5.

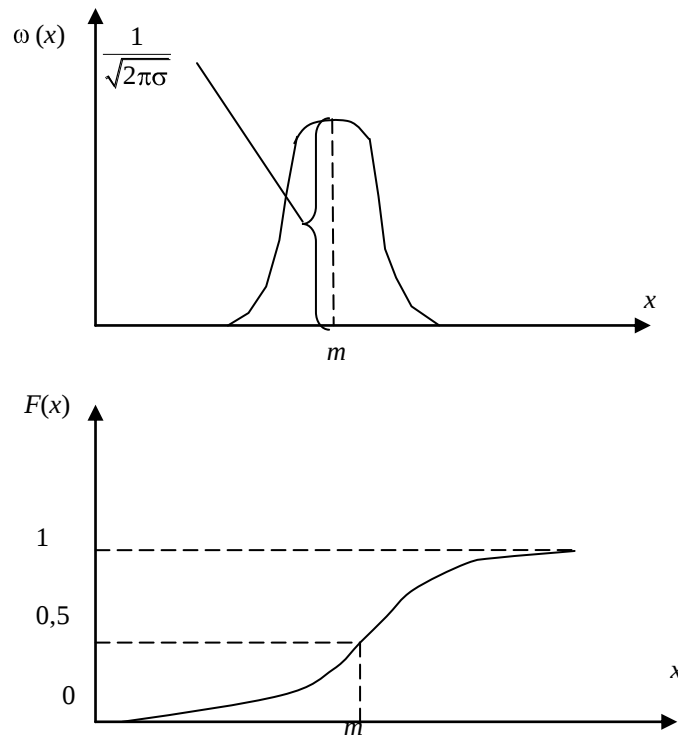


Рисунок 5.5 — Графики функций $\omega(x)$ и $F(x)$ при нормальном законе распределения параметра x

Функция распределения $F(x)$ выражается через нормальную функцию распределения $\Phi^*(x)$:

$$F(x) = \hat{O}\left(\frac{\sigma}{x - m}\right), \quad (5.8)$$

где m , σ — параметры нормального распределения рассматриваемого параметра x .

Вероятность попадания параметра x на участок от α и β , согласно формуле (5.2), запишется в виде

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \hat{O}^* \left(\frac{\beta - m}{\sigma} \right) - \hat{O}^* \left(\frac{\alpha - m}{\sigma} \right). \quad (5.9)$$

Какова вероятность того, что значение параметра x , распределенного по нормальному закону, отстоит не далее, чем на величину $n\sigma$ от математического ожидания (среднего, номинального значения) m , где n — определенное целое число ($n = 1, 2, \dots$)?

Пользуясь табличной функцией $\Phi^*(x)$ для чисел $n = 1, 2, 3$, по формуле (5.9) можно получить значения вероятностей:

n	1	2	3
$P(m - n \cdot \sigma < x < m + n \cdot \sigma)$	0,68	0,95	0,9973

Видно, что при значении $n = 3$ вероятность выхода параметра x за пределы $\pm 3\sigma$ очень мала (примерно 0,0027%). Это означает, что при нормальном законе распределения параметров все рассеивание (с ошибкой до долей процента) укладывается на участке $m \pm 3\sigma$. Очевидно, зная среднее квадратическое отклонение и математическое ожидание (номинальное значение) параметра, можно ориентировочно указать интервал его практически возможных значений. Такой способ оценки диапазона возможных значений параметра широко используется в инженерной практике (и математической статистике вообще) и носит название «правило трех сигм» (рис. 5.6).

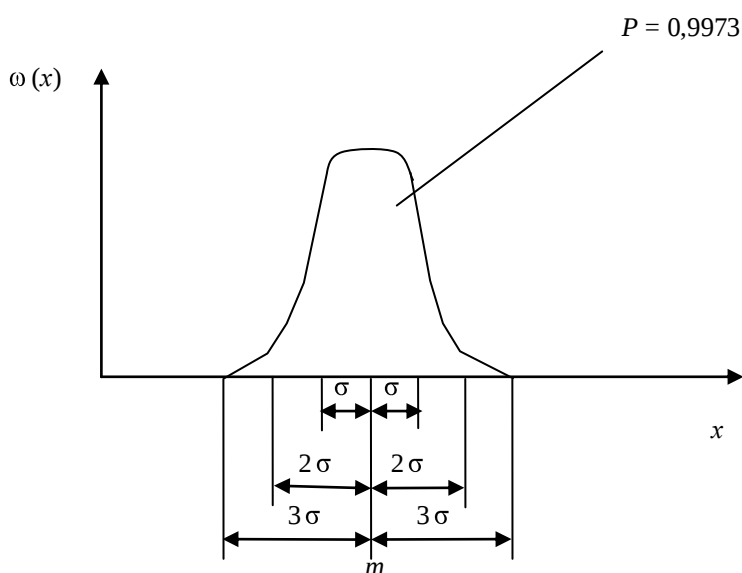


Рисунок 5.6 — Пояснение «правила трех сигм»

Например, при нормальном законе распределения допуск на параметр устанавливается в виде значения

$$\delta(x) = 3\sigma(x),$$

где $\delta(x)$ — величина половины поля допуска на параметр x , $\sigma(x)$ — среднее квадратическое отклонение параметра x , подсчитанное по статистическим данным (результатам измерения параметра).

Из «правила трех сигм» вытекает ориентировочный способ определения при нормальном законе среднего квадратического отклонения параметра:

$$\sigma(x) = \frac{\delta(x)}{3}, \quad (5.10)$$

где $\delta(x)$ — половина поля допуска на параметр, указанная в нормативно-технической документации.

Примерно в 95% случаев параметры элементов и комплектующих изделий РЭУ распределены по закону, близкому к нормальному.

Нормальная модель закона распределения находит широкое применение для решения практических задач.

Пример 1. Определить, какой процент резисторов с разбросом не более $\pm 2\%$ содержится в партии элементов со значением сопротивления $R = 300 \text{ Ом} \pm 10\%$.

Решение. Так как в исходной партии резисторов допуск на значение сопротивления относительно велик, $\delta(\Delta R/R) = 10\%$, то оправдана гипотеза о нормальной модели закона распределения относительной производственной погрешности сопротивления резисторов (рис. 5.7).

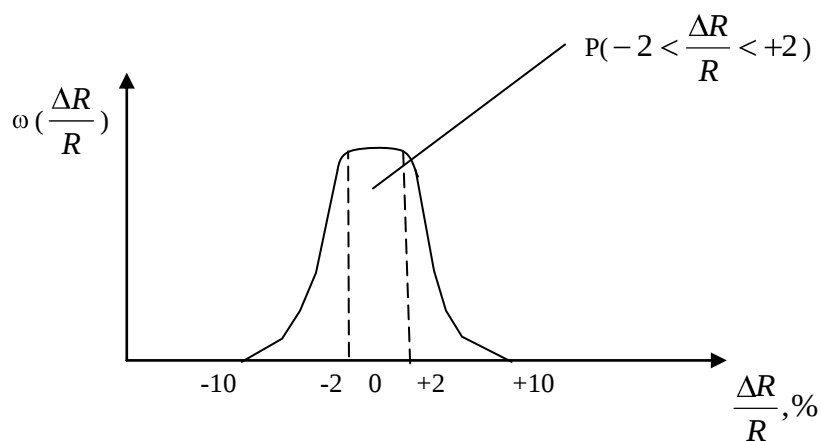


Рисунок 5.7 — Иллюстрация к примеру 1

Для решения задачи обратимся к формуле (5.9), используя относительные значения величин (в процентах).

1) Имеем: $\alpha = -2\%$; $\beta = +2\%$; $M(\Delta R/R) = 0$ (так как допуск симметричный); $\delta(\Delta R/R) = 10\%$.

2) По «правилу трех сигм» определяем величину $\sigma(\Delta R/R)$ и получаем

$$\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = \frac{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{3} = \frac{10}{3} \approx 3.33\%$$

Используя значения функции $\Phi^*(x)$, находим:

$$\begin{aligned} P(-2\% < \frac{\Delta R}{R} < +2\%) &= \Phi^*\left(\frac{+2-0}{3.33}\right) - \Phi^*\left(\frac{-2-0}{3.33}\right) = \\ &= \Phi^*(0,6) - \Phi^*(-0,6) = 0,7257 - 0,2743 \approx 0,45. \end{aligned}$$

Таким образом, в исходной партии примерно 45% резисторов будут иметь разброс сопротивления не более чем на $\pm 2\%$ от номинального значения $R_{НОМ1} = 300$ Ом.

Решение этой же задачи для значений величин в своей размерности приведено ниже.

1) Имеем:

$$M(R) = R_{НОМ} = 300 \text{ Ом},$$

$$\delta(R) = 0,1 R_{НОМ} = 30 \text{ Ом},$$

$$\alpha = R_{НОМ} - 0,02 R_{НОМ} = 294 \text{ Ом},$$

$$\beta = R_{НОМ} + 0,02 R_{НОМ} = 306 \text{ Ом}.$$

2) По «правилу трех сигм» находим

$$\sigma(R) = \frac{\delta(R)}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ Ом}.$$

3) Применяя формулу (5.9), получим

$$\begin{aligned} P(294 < R < 306) &= \hat{O}^*\left(\frac{306-300}{10}\right) - \hat{O}^*\left(\frac{294-300}{10}\right) = \\ &= \hat{O}^*(0,6) - \hat{O}^*(-0,6) = 0,7257 - 0,2743 \approx 0,45. \end{aligned}$$

Равномерная модель. Аналитическое выражение (модель) функции плотности распределения параметра x для закона равной вероятности имеет следующий вид:

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ї ðë } a < x < b; \\ 0 & \text{ї ðë } x < a \text{ èëë } x < b \end{cases}, \quad (5.11)$$

где a, b — параметры распределения.

Функция распределения $F(x)$ может быть определена так:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \omega(x) dx = \frac{x-a}{b-a} . \quad (5.12)$$

Графики функций $\omega(x)$ и $F(x)$ при распределении параметра по закону равной вероятности приведены на рисунке 5.8.

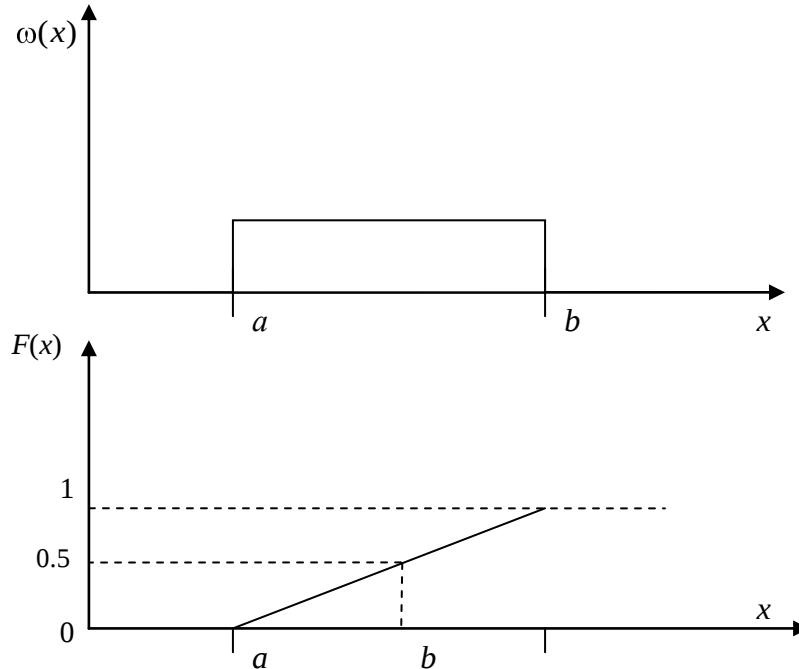


Рисунок 5.8 — Графики функций $\omega(x)$ и $F(x)$ при распределении параметров x по закону равной вероятности

Математическое ожидание (номинальное значение) и дисперсия параметра x связаны с параметрами распределения a, b формулами

$$M(x) = \frac{a+b}{2}; D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} . \quad (5.13)$$

Если параметр x распределен по закону равной вероятности и известна величина половины поля допуска $\delta(x)$, то среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ определяется выражением

$$\sigma(x) = \frac{\delta(x)}{\sqrt{3}} . \quad (5.14)$$

Как правило, в природе равномерное распределение не существует. Чаще всего это есть результат вмешательства человека. Равномерное распределение характерно для отбора элементов с малым допуском на параметры, например, $\pm 5\%$, из совокупности элементов с заметно большим допуском, например, $\pm 20\%$ (рис. 5.9).

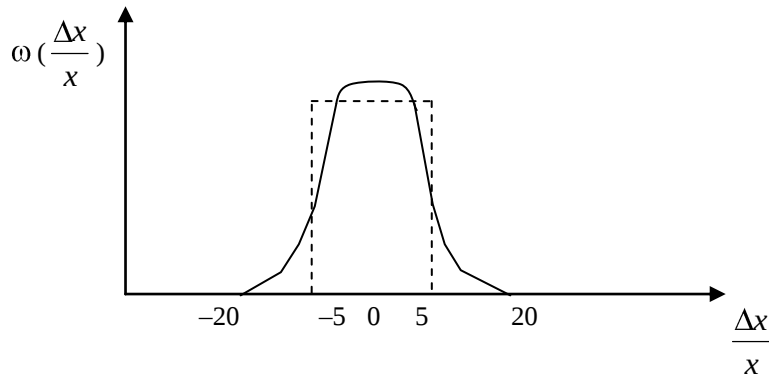


Рисунок 5.9 — Равномерная модель — следствие отбора элементов с повышенной точностью параметра

Отобранные элементы со значениями от a до b имеют практически равномерный закон распределения параметра. Незначительной неравномерностью на вершине пренебрегают.

При решении задач в конструировании и технологии ЭВС часто возникает вопрос об определении законов распределения тех или иных параметров. В ряде случаев приходится также находить числовые характеристики параметров, необходимые для инженерных расчетов, так как норма на параметры может устанавливаться в виде ограничения их минимальных или максимальных значений.

Если закон распределения параметра определить не представляется возможным, то (при известных или найденных числовых характеристиках) следует пользоваться законом равной вероятности.

Биномиальный закон распределения. Характеризует вероятность появления события n в m независимых опытах. Если вероятность появления события n в одном опыте равна p (соответственно, вероятность его не появления равна $1 - p = q$), а число независимых испытаний равно m , то вероятность появления события n в серии m опытов P_m^n может быть представлена математической интерпретацией биномиального закона распределения следующим образом:

$$P_m^n = C_m^n p^n (1 - p)^{m-n},$$

где C_m^n — число сочетаний m по n , равное

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

При этом следует иметь в виду, что C_m^n представляет собой целое положительное число. Очевидно, что вероятности p являются членами разложения по биному Ньютона. Отсюда происходит и название — биномиальное распределение. Основные характеристики биномиального закона распределения следующие:

— математическое ожидание:

$$M(n) = pm;$$

— дисперсия:

$$\sigma^2(n) = M(n)q;$$

— среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(n) = \sqrt{M(n)q};$$

— коэффициент вариации:

$$V(n) = \sqrt{M(n)q} / pm.$$

Биномиальный закон распределения применяют обычно при статистическом контроле качества, когда имеется очень мало сведений о поведении изделий, а их необходимо расклассифицировать на годные и бракованные.

Закон Пуассона. Этот закон имеет место в тех случаях, когда на некотором интервале времени τ случайное событие n появляется большое число раз, но с малой вероятностью $P_n(\tau)$. Вероятность возникновения n на интервале τ , является математическим выражением распределения Пуассона, которое имеет следующий вид:

$$P_n(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \exp(-\lambda\tau),$$

где λ — интенсивность случайного события, некоторая положительная величина, называемая параметром закона Пуассона.

Отметим, что в приведенной формуле величина n может принимать только целые значения. Основные характеристики распределения Пуассона следующие:

— математическое ожидание:

$$M(n) = \lambda\tau;$$

– дисперсия:

$$\sigma^2(n) = \lambda\tau;$$

– среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(n) = \sqrt{\lambda\tau};$$

– коэффициент вариации:

$$V(n) = 1/\sqrt{\lambda\tau}.$$

Характерным признаком распределения Пуассона является равенство математического ожидания и дисперсии $M(n) = \sigma^2(n)$.

Распределение Пуассона получается как предельный случай биномиального распределения, когда вероятность p стремится к нулю (соответственно $q = 1 - p \rightarrow 1$). Такое совпадение можно считать практически приемлемым, начиная с $p < 0,1$. Но в отличие от биномиального распределения, при котором величина n ограничена ($n \leq m$), в распределении Пуассона n может принимать значения $0 \leq n \leq \infty$.

Биномиальное распределение применяют в принципе для любого p , а распределение Пуассона — только для малого p . Поэтому в расчетном смысле закон Пуассона уже биномиального распределения, но в физическом смысле он шире, так как существует ряд процессов, в которых независимо от значения вероятности p распределение Пуассона применимо, а биномиальное нет. Так, в ремонтируемых изделиях после окончания периода их приработки случайное число отказов в процессе эксплуатации распределено по закону Пуассона. Распределение Пуассона обычно применяют для определения вероятности появления заданного числа событий на заданном интервале времени при условии независимости и несовместности событий.

Рассмотрим теперь законы распределения непрерывных случайных величин. Для их характеристики будем дополнительно пользоваться понятиями плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ случайной величины X .

Экспоненциальный закон распределения. Непрерывная случайная величина X характеризуется тем, что вероятность того, что $X > x$, всегда выполняется. Распределение случайной величины X называют экспоненциальным, если плотность распределения $F(x)$ имеет вид

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x),$$

где λ — интенсивность случайного события — постоянная величина ($\lambda = \text{const}$).

Функция распределения соответственно запишется

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = 1 - \exp(-\lambda x).$$

Характерным признаком этого распределения является постоянство λ . Основные характеристики экспоненциального закона следующие:

– математическое ожидание:

$$M(X) = 1/\lambda;$$

– дисперсия:

$$\sigma^2(X) = 1/\lambda^2;$$

– среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = 1/\lambda;$$

– коэффициент вариации:

$$V(X) = 1.$$

Экспоненциальный закон используют обычно при оценке надежности сложных изделий, отказы которых обусловлены большим количеством входящих в их состав комплектующих элементов. Его применяют при исследовании времени наработки на отказ неремонтируемых изделий и для определения времени между последовательными отказами в ремонтируемых изделиях.

Закон Вейбулла. Характеризует распределение непрерывной случайной величины X , которая может принимать только положительные значения ($x \geq 0$). Плотность распределения $f(x)$ в законе Вейбулла имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{m}{t_0} x^{m-1} \exp(-t^m / t_0^m),$$

где m и t_0 — параметры распределения закона Вейбулла — постоянные величины ($m = \text{const}$, $t_0 = \text{const}$); для каждого класса изделий они имеют определенные значения.

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = 1 - \exp(-t^m / t_0^m).$$

Основные характеристики закона Вейбулла следующие:

– математическое ожидание:

$$M(X) = b_m t_0^{1/m};$$

– дисперсия:

$$\sigma^2(X) = C_m^2 (t_0^{1/m})^2;$$

– среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = C_m t_0^{1/m};$$

– коэффициент вариации:

$$V(X) = C_m / b_m,$$

где величины b_m и C_m соответственно равны:

$$C_m = \sqrt{\Gamma(1 + 2/m) - [\Gamma(1/m + 1)]^2},$$

где Γ — гамма-функция.

При $m = 1$ распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное. Распределение Вейбулла используют обычно при оценке надежности изделий в период их приработки, а также при износе и старении.

Общее нормальное распределение непрерывной случайной величины X характеризуется тем, что X может при этом принимать любые значения ($-\infty \leq X \leq +\infty$).

Его плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right],$$

где a и b — постоянные величины, называемые параметрами закона нормального распределения, причем b — величина положительная, a может быть положительной, отрицательной и равно нулю.

Основные характеристики общего нормального распределения следующие:

– математическое ожидание:

$$M(X) = a;$$

– дисперсия:

$$\sigma^2(X) = b^2;$$

– среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = b;$$

– коэффициент вариации:

$$V(X) = b/a.$$

Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Его используют обычно, когда случайная величина X зависит от большого числа случайных факторов, однородных по своему влиянию, причем влияние каждого из них по сравнению со всей их совокупностью незначительно. Общим нормальным законом распределения хорошо описываются результаты независимых измерений физических величин; он также используется при оценке надежности изделий в процессе их износа и естественного старения, его применяют для определения времени наработки до отказа и т. п. Общий нормальный закон распределения называют предельным, из-за того что к нему приближаются другие законы распределения (и их композиции) при весьма часто встречающихся типичных условиях. Например, при достаточно большом значении математического ожидания биномиальное распределение близко к нормальному.

Логарифмически нормальное распределение. Непрерывная неотрицательная величина X имеет место, если ее десятичный логарифм $z = \lg X$ распределен по нормальному закону. Плотность распределения величины X будет:

$$f(x) = \frac{\mu}{x\sigma(z)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[z - M(z)]^2}{2\sigma^2(z)}\right\},$$

где $M(z)$, $\sigma(z)$, $\sigma^2(z)$ — соответственно математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение и дисперсия случайной величины z ; $\mu = 0,4343$. Основные характеристики логарифмически нормального распределения следующие:

– математическое ожидание:

$$M(X) = x_0 \exp\left[\frac{\sigma^2(z)}{2\mu^2}\right] = x_{cp},$$

где $\lg X_0 = M(z)$;

– дисперсия:

$$\sigma^2(X) = x_{cp}^2[(x_{cp}/x_0)^2 - 1];$$

– среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = x_{cp} \sqrt{[(x_{cp} / x_0)^2 - 1]};$$

– коэффициент вариации:

$$V(X) = \sigma(X) / M(X).$$

Логарифмически нормальное распределение используется обычно при оценке отказов из-за износа. В тех случаях, когда отказ возникает из-за усталостных повреждений, наработка до отказа часто подчиняется логарифмически нормальному закону. Этот закон применяется также для оценки затрат времени, необходимого для отыскания и устранения отказа. Им также хорошо аппроксимируются случайные величины, которые образуются в результате умножения большого числа независимых или слабо-коррелированных случайных величин.

Существуют еще более десятка законов распределения случайных величин. Но для оценки надежности ЭВА они применяются реже в силу своей специфичности.

Изложенные математические основы достаточны для того, чтобы определить количественные соотношения для наиболее главных показателей надежности.

5.2. Определение законов распределения параметров на основе опытных данных

Вначале получают статистическую совокупность из n значений. Для этого у n экземпляров (выборки) однотипных элементов (изделий) измеряют интересующий параметр x . Желательно, чтобы $n > 60 \dots 100$. Далее, обрабатывая статистическую совокупность, определяют оценки математического ожидания $M(x)$ и дисперсии $D(x)$.

Затем строят статистический ряд. Для этого весь диапазон наблюдаемых значений параметра x разбивают на k интервалов (разрядов) и для каждого i -го ($i = 1, 2, \dots, k$) интервала определяют величину

$$P_i^* = \frac{m_i}{n}, \quad (5.15)$$

где P_i^* — частота, соответствующая i -му интервалу;

m_i — количество значений параметра x , приходящихся на i -й интервал.

Сумма частот всех интервалов должна быть равна единице. Строят таблицу, в которой приводят интервалы в порядке их расположения (вдоль оси абсцисс), и соответствующие интервалам частоты:

I_i	x_1, x_2	x_2, x_3	$\dots$	x_k, x_{k+1}
P_i^*	P_1^*	P_2^*	$\dots$	P_k^*

Здесь I_i — обозначение i -го интервала;

x_i, x_{i+1} — границы i -го интервала; $i = 1, 2, \dots, k$.

Полученную таблицу называют **статистическим рядом**. Далее строят гистограмму. Если априорно известен вид распределения, гистограмму можно не строить. Гистограмма строится следующим образом. По оси абсцисс откладываются интервалы, и на каждом из них как на основании строится прямоугольник, высота которого равна

$$h_{xi}, h_{x_{i+1}} = \frac{P_i^*}{x_{i+1} - x_i}, \quad (5.16)$$

где $(x_{i+1} - x_i)$ — ширина i -го интервала.

Удобно выбирать равные интервалы. В этом случае высоты прямоугольников гистограммы пропорциональны соответствующим частотам P_i^* (рис. 5.10).

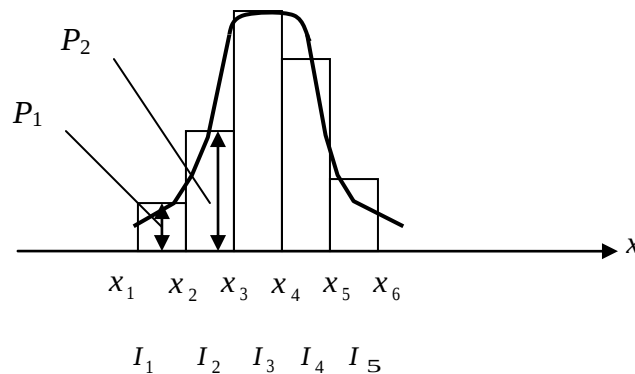


Рисунок 5.10 — Гистограмма распределения параметра x

При увеличении числа n можно выбирать все более узкие интервалы. При этом гистограмма будет все ближе к графику плотности распределения параметра (см. рис. 5.10).

Пользуясь данными статистического ряда, можно приближенно построить и статистическую функцию распределения параметра x . На практике обычно достаточно эту функцию построить по нескольким

точкам, в качестве которых удобно использовать границы $x_1, x_2, \dots$ интервалов. Тогда, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} F(x_1) &= 0; \\ F(x_2) &= P_1^*; \\ F(x_3) &= P_1^* + P_2^*; \\ &\dots\dots\dots \\ F(x_k) &= \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*; \\ F(x_{k+1}) &= \sum_{i=1}^k P_i^* \end{aligned} \right\}. \quad (5.17)$$

Соединяя полученные точки ломаной линией или плавной кривой, получим приближенный график статистической функции распределения (рис. 5.11).

Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с ограниченным числом измерений (наблюдений). Поэтому при обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического распределения теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с ограниченным объемом экспериментальных данных. Такую задачу называют **задачей выравнивания** или **сглаживания статистических рядов**.

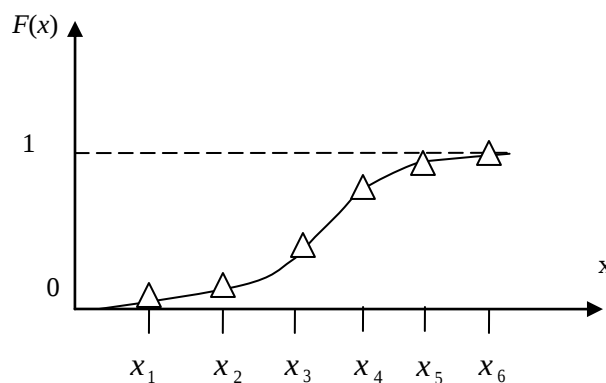


Рисунок 5.11 — График статистической функции распределения

В ряде случаев принципиальный вид теоретической кривой выбирается заранее на основе анализа существа задачи, в других случаях — по внешнему виду статистического распределения. Обычно в последнем случае пользуются гистограммой: по графику статистической функции

распределения (см. рис. 5.11) в большинстве случаев трудно сказать что-то определенное о виде закона распределения.

Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров этого распределения. Задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора таких значений параметров, при распределении которых соответствие между теоретическим и статистическим распределениями оказывается наилучшим. Одним из методов решения этой задачи является так называемый **метод моментов**.

Согласно методу моментов, параметры теоретического распределения выбирают так, чтобы важнейшие числовые характеристики (моменты) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Например, если теоретическая кривая $\omega(x)$ зависит от двух параметров, то эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия $D(x)$ теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками $M^*(x)$ и $D^*(x)$. С учетом этого, при выравнивании статистического распределения нормальным законом в выражении (5.2) необходимо принять

$$m = M^*(x); \sigma = \sqrt{D^*(x)}.$$

В случае выравнивания законом равной вероятности параметры a и b этого теоретического распределения должны быть определены из уравнений

$$\frac{a+b}{2} = M^*(x); \frac{(b-a)^2}{12} = D^*(x). \quad (5.18)$$

Как бы хорошо ни была подобрана теоретическая кривая, например, $\omega(x)$, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Для ответа на вопрос, чем объясняются эти расхождения: ограниченным объемом выборки (наблюдений) или неудачным подбором кривой, — служат так называемые «критерии согласия».

При использовании критериев согласия чаще проверяются гипотезы применительно к функции распределения $F(x)$. Широкое распространение находит критерий согласия Пирсона (критерий χ^2). Схема его применения следующая.

1. Определяется мера расхождения U по формуле

$$U = \chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}, \quad (5.19)$$

где P_i — вероятность попадания параметра x в i -й интервал, вычисленная по теоретическому закону распределения.

2. Определяется число степеней свободы:

$$f = k - s, \quad (5.20)$$

где s — число независимых условий (связей), наложенных на частоты P_i^* (часто $s = 3$).

3. По значениям f и χ^2 с помощью специальных таблиц находится вероятность того, что величина U , имеющая распределение χ^2 с f степенями свободы, превзойдет данное значение χ^2 . Если эта вероятность весьма мала (менее 0,1), гипотеза отбрасывается как неправдоподобная. Если эта вероятность относительно велика, гипотезу можно признать не противоречащей опытным данным.

При применении критерия χ^2 необходимо, чтобы для интервалов выполнялось условие $n P_i^* \geq 5$.

Пример 2. С целью исследования закона распределения емкости коллекторного перехода ($f = 1$ МГц) транзистора типа КТ812 было измерено значение этого параметра у 100 экземпляров. Результаты измерений представлены в виде статистического ряда:

I_i , пФ	70; 76	76; 82	82; 88	88; 94	94; 100
m_i	5	20	42	27	6
P_i^*	0,05	0,20	0,42	0,27	0,06

Получены оценки количественных характеристик величины C_K :

$$M^*(C_K) = 85,72; \quad \sigma^*(C_K) = 5,58.$$

Необходимо построить гистограмму, выровнять статистический ряд с помощью нормального закона.

Решение. Так как ширина интервалов одинакова, то в качестве высот прямоугольников гистограммы можно отложить соответствующие значения частот P_i^* . Построенная гистограмма показана на рисунке 5.12.

Нормальный закон зависит от двух параметров: m и σ .

Подберем для теоретического закона (распределения) эти параметры так, чтобы сохранить первые два момента статистического распределения: математическое ожидание $M^*(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma^*(x)$. Для этого необходимо обеспечить условия

$$m = M^*(C_K); \quad \sigma = \sigma^*(C_K).$$

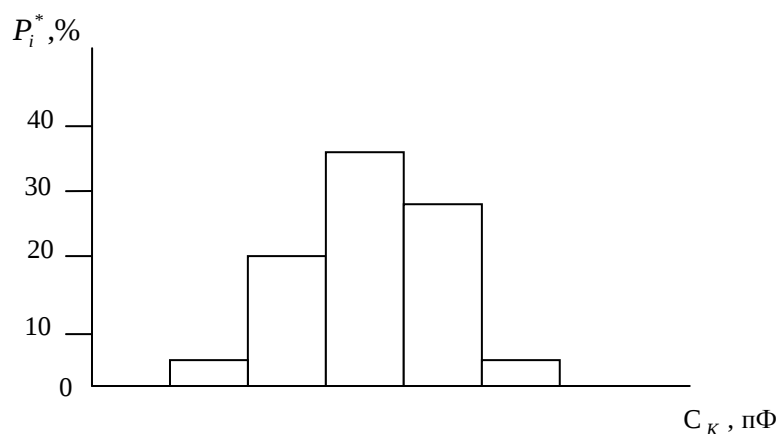


Рисунок 5.12 — Гистограмма распределения емкости коллекторного перехода

Поэтому принимаем $m = 85,72$; $\sigma = 5,58$.

Далее, пользуясь теоретическим нормальным законом с параметрами $m = 85,72$; $\sigma = 5,58$, находим теоретическое значение вероятности попадания исследуемого параметра в интервалы. Используем формулу (5.9), которая применительно к данной задаче принимает вид

$$P_i = \Phi^* \left(\frac{x_{i+1} - m}{\sigma} \right) - \Phi^* \left(\frac{x_i - m}{\sigma} \right).$$

Рассчитанные по этой формуле с использованием таблиц значения теоретических вероятностей P_i представим в виде:

I_i , пФ	70; 76	76; 82	82; 88	88; 94	94; 100
P_i^*	0,0382	0,2118	0,4051	0,2735	0,0635

По формуле (5.19) определяем значение меры расхождения.

Определяем число степеней свободы. В данном случае число наложенных связей $s = 3$, так как на частоты P_i^* накладывается требование

$\sum_{i=1}^k P_i^* = 1$ и, кроме того, теоретическое распределение подбирается с теми

условиями, чтобы совпадали теоретические и статистические средние значения и средние квадратические отклонения. Поэтому $f = 5 - 3 = 2$.

Для значений $f = 2$ и $\chi^2 = 0,51$ находим значение вероятности $P = 0,78$. Эта вероятность не является малой. Поэтому гипотеза о том, что исследуемый параметр распределен по нормальному закону, не противоречит опытными данным.

ТЕМА 6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА РЭС В ВИДЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

6.1. Общая структура

Существует большое число процессов, для которых характерна следующая общая структура, называемая системой обслуживания.



В совокупность пунктов поступают через некоторые промежутки времени объекты (входящий поток), которые подвергаются там соответствующим операциям (обслуживанию) и затем покидают систему (выходной поток), освобождая место для следующих объектов. Промежутки времени через которые поступают объекты, и время обслуживания носят, как правило, случайный характер. При массовом поступлении объектов в системе обслуживания могут возникать очереди. Процессы массового обслуживания типичны для связи, транспорта, производственных процессов, ремонта и обслуживания оборудования, проектирования технологических процессов и т. п.

Составными элементами системы массового обслуживания являются:

- входной поток;
- очереди;
- система пунктов обслуживания;
- выходной поток.

Независимо от конкретной природы и характера объектов, поступающих в систему обслуживания, их называют требованиями или потоками.

Входной поток требований рассматривается как последовательность событий следующих через какие-то моменты времени. Распределение входного потока обуславливает и характер процесса массового обслуживания. Требования могут выполняться в порядке поступления (операции на конвейере), в приоритетном (внеочередное право получения билета), в случайном порядке (отбор образцов для статистического анализа), в порядке первого очередного поступления при освободившемся канале обслуживания (прием вызова телефонной станцией).

Очереди могут ограничиваться по длине, т. е. по числу находящихся в них заявок, и по времени ожидания. Основной характеристикой очередей является время ожидания.

Система пунктов обслуживания может иметь различную организацию: с последующим, параллельным и комбинированными каналами, некоторые из которых могут быть специализированными.

В зависимости от поступления требований и образования очередей эта система может обладать способностями изменять свою конфигурацию. В это же время ее свойства влияют на структуру очереди и отношение к ней объектов обслуживания. Так, при занятости всех каналов поступающие требования могут получать отказ (системы с отказом) или становиться в очередь (системы с ожиданием).

6.2. Простейший поток

Входной поток называют **простейшим**, если вероятность поступления того или иного числа требований в течение интервала времени T зависит только от протяженности этого интервала и не зависит от расположения на оси времени (свойство стационарности). Причем требования поступают по одиночке (ординарность) и независимо друг от друга (отсутствие последействия).

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность поступлений k событий за время t . Если поток требований простейший, то вероятность случайного события, состоящего в том, что за время $t + \Delta t$ поступит ровно k событий, можно представить следующим образом:

$$P_n(t + \Delta t) = \sum P_{n-k}(t)P_k(\Delta t)$$

Рассмотрим эту формулу. Пусть событие A_{n-k} означает поступление $n - k$ требований за время t , а событие B_k — поступление k требований за время Δt . Тогда рассматриваемое событие можно представить как пересечение несовместных событий $A_{n-k} \cap B_k$ для $k = \overline{0,1}$. Так как интервалы t и Δt на оси времени не пересекаются и требования поступают независимо, то события A_{n-k} и B_k при любом k независимы. Следовательно, вероятность этого события можно записать следующим образом:

$$k = \overline{0,1} \quad \begin{aligned} P(A_{n-k} \cap B_k) &= P(A_{n-k}) \cap P(B_k) = P_{n-k}(t)P_k(\Delta t) \\ P_n(t + \Delta t) &= P_n(t)P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) \end{aligned}$$

С учетом несовместности событий A_{n-k} и B_k получаем приведенное выше соотношение. Пусть Δt настолько малый интервал времени, что в силу ординарности простейшего потока вероятность попадания в этот интервал более одного требования пренебрежимо мала. Это значит что при $k > 1$ вероятность $P_k(\Delta t) = 0$ и следовательно получаем следующее выражение:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda [P_0(t) - P_1(t)] = \lambda e^{-\lambda t} - P_1(t)$$

По условию стационарности вероятность поступления одиночного требования в интервале Δt не зависит от расположения этого интервала на оси времени и пропорционально его длине. Поэтому можно считать, что $P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$, где λ — коэффициент пропорциональности.

Очевидно, вероятность отсутствия требований выражается как

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t.$$

Если устремить Δt к нулю, то придем к следующему дифференциальному уравнению.

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_{n-1} \lambda \Delta t$$

или

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda [P_{n-1}(t) - P_n(t)].$$

При $n = 0$ первый член уравнения отсутствует, т. к. возможен единственный случай соответствующий отсутствию требований, как за время t , так и за интервал Δt . Поэтому

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

Решение этого уравнения при граничном условии $P_0(0) = 1$ можно записать следующим образом:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

При $n = 1$ можем записать следующее уравнение:

$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda [P_0(t) - P_1(t)] \quad n \geq 1$$

Решение которого при граничном условии $P_1(0) = 0$:

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Продолжая этот процесс находим для плотности распределения числа требований за время t следующее выражение:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad \lambda t = a$$

То есть мы пришли к распределению Пуассона, которое характеризует простейший поток требований.

6.3. Число требований в заданном интервале

Найдем математическое ожидание распределения Пуассона:

$$M(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Полученная величина λt определяет среднее значение числа требований, поступивших за время t . Отсюда ясно, что параметр λ представляет собой среднее число требований за единицу времени. В связи с чем его называют интенсивностью или плотностью потока.

Среднее число требований $a = \lambda t$ за время t в силу стационарности простейшего потока не зависит от положения временного интервала. Поэтому под t можно понимать и время, прошедшее от начала процесса. Распределение Пуассона даст значение вероятности поступления за время t равно n требований. В частности, вероятность того, что за интервал времени t не поступит ни одного требования, равна

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

А вероятность поступления одного требования:

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Вероятность поступления за время t не более одного требования:

$$P_0(t) + P_1(t) = (1 - \lambda t) e^{-\lambda t}$$

В общем случае вероятность того, что за время t поступит не более n требований определяется функцией распределения $F(n, t)$, которая равна сумме вероятностей $P_n(t)$:

$$F(n, t) = \sum_{k=0}^n P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = \overline{0, n}$$

Вероятность поступления более n требований за время t равна дополнению функции распределения $F(n, t)$ до 1.

Например, в систему обслуживания поступает в среднем 11 заказов в час. Найдем вероятность того, что в систему не поступит ни одного заказа, а также вероятность поступления не более трех заказов за 10 минут.

Так как $\lambda = 12/60 = 0,2$ заказа в минуту, то ответ на первый вопрос получаем из выражения

$$P_0(1) = e^{-0.2} = 0.819$$

Для ответа на второй вопрос необходимо найти вероятность $P_k(t)$, где $k = 10$ при $\lambda t = 0,2 \cdot 10 = 2$.

Из суммы полученных вероятностей получаем 0,852, равное значению интегральной функции распределения при $n \in 3$, определяет искомую вероятность поступления не более трех заказов за 10 минут. Определение вероятностей $P_n(t)$ и их суммирование облегчается, если использовать приближенную формулу

$$R(n, a) = \sum_{k=0}^n P_k(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} e^{-a} \approx \hat{O}\left(\frac{n + 0.5 - a}{\sqrt{a}}\right)$$

где a есть λt , а $\Phi(y)$ — интеграл Лапласа, значения которого приводятся в таблицах.

Функция $\Phi(n, a = \lambda t)$ представляет собой интегральную функцию распределения Пуассона, определяющую для простейшего потока вероятность поступления не менее n заявок за время t при интенсивности потока λ . Плотность распределения числа требований за время t , т. е. вероятность поступления равно n требований можно выразить следующим образом:

$$P_n(t) = P_n\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \frac{a^n}{n!} e^{-a} = R(n, a) - R(n-1, a)$$

Равенство математического ожидания и дисперсии можно использовать для решения вопроса о соответствии простейшему потоку некоторого потока требований и вообще любой случайной величины, если ее статистические характеристики известны или определены опытным путем.

Существенное различие математического ожидания и дисперсии может служить причиной отказа от использования распределения Пуассона.

6.4. Интервал между двумя последовательными требованиями

Вероятность того что интервал между двумя последовательными требованиями превысит τ равно вероятности отсутствия требований в этом интервале, т. е. $e^{-\lambda\tau}$.

Дополнение этой величины до 1 дает функцию распределения интервалов между многочленами двух последовательных требований, т. е.

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}; \quad f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}.$$

При пуассоновском потоке закон распределения вероятностей для интервалов между двумя последовательными требованиями является экспоненциальным с параметром $\lambda\tau$.

$$\text{Соответственно,} \quad m(\tau) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, среднее время между двумя последовательными требованиями τ_{cp} обратно пропорционально интенсивности потока требований λ . Этой же величине равно и среднее квадратичное отклонение интервала τ от τ_{cp} , определяемое как

$$\sigma_\tau = \sqrt{D} \frac{1}{\lambda} = \tau_{\tilde{\sigma}}.$$

Важное свойство экспоненциального закона распределения состоит в том, что вероятность появления очередного требования по прошествии времени τ не зависит от момента появления предшествующего. Это свойство присуще только экспоненциальному закону и представляет собой следствие независимости поступления событий во времени, которое называется отсутствием последствия.

6.5. Время обслуживания и время ожидания

Производительность системы обслуживания зависит от числа заказов и их быстродействия. Время обслуживания одного требования чаще всего считают случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону.

Экспоненциальный закон особенно хорошо описывает такие системы, которые сравнительно быстро обслуживают основную массу требований, а длительные сроки обслуживания встречаются тем реже, чем больше они занимают времени.

Пусть время обслуживания t задано экспоненциальным законом с плотностью распределения $g(t)$

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

Среднее время обслуживания выражается математическим ожиданием, которое равно $1/\mu$. Таким образом, параметр μ представляет собой величину, обратную среднему времени обслуживания. Этот параметр называется интенсивностью обслуживания.

Дисперсия времени обслуживания — $1/\mu^2$.

Функция распределения представляет собой вероятность того, что обслуживание закончится за время t , т. е. вероятность освобождения канала обслуживания за это время.

Очевидно вероятность того, что за время t канал неосвободится равна

$$G(t) = \int_0^t \mu e^{-\mu x} dx = 1 - e^{-\mu t}.$$

Если в системе занято k каналов, то вероятность того, что ни один из них не освободится за время t равняется

$$1 - G(t) = e^{-\mu t}.$$

6.6. Время ожидания требований в очереди

Оно обычно задается (если очередь существует) экспоненциальным законом с плотностью распределения

$$h(t) = \nu e^{-\nu t},$$

где параметр ν — величина обратная среднему времени ожидания.

Функция распределения представляет собой вероятность того, что время ожидания не превысит t :

$$H(t) = 1 - \nu e^{-\nu t}.$$

6.7. Теория массового обслуживания в производственных задачах

При исследовании многих практически важных сложных систем возникает необходимость в решении задач, относящихся к массовому обслуживанию. Эти задачи встречаются наиболее часто в физике частиц, организации производства, телефонии, планировании, автоматическом управ-

лении сложными агрегатами и т. д. Характерной особенностью таких задач является наличие обслуживающей системы, в которую в случайные моменты времени поступают заявки. Обслуживающая система имеет линии (каналы), выполняющие совокупность операций, подразумеваемых под словом «обслуживание».

Работа любой системы массового обслуживания (СМО) состоит в выполнении поступающего на нее потока требований или заявок. Заявки поступают одна за другой в некоторые, вообще говоря, случайные моменты времени. Обслуживание поступившей заявки продолжается какое-то время, после чего канал освобождается и снова готов для приема следующей заявки. Каждая СМО в зависимости от числа каналов и их производительности обладает какой-то пропускной способностью, позволяющей ей более или менее успешно справляться с потоком заявок. Предмет теории массового обслуживания – установление зависимости между характером потока заявок, производительностью отдельного канала, числом каналов и успешностью (эффективностью) обслуживания.

Типичным примером систем массового обслуживания могут служить: телефонная связь (снятием трубки с рычага телефонного аппарата абонент дает заявку на обслуживание разговора одной из линий телефонной сети), автозаправочная станция (заявки на обслуживание возникают по прибытии на станцию автомобилей), аэропорт (заявки на обслуживание — посадка самолетов), разгрузка судов на причалах, обслуживание покупателей в магазинах и т. д.

В качестве характеристик эффективности обслуживания могут применяться различные величины и функции, например:

- среднее количество заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени;
- средний процент заявок, получающих отказ и покидающих СМО необслуженным;
- вероятность того, что поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию;
- среднее время ожидания в очереди;
- закон распределения времени ожидания;
- среднее количество заявок, находящихся в очереди;
- закон распределения числа заявок в очереди;
- средний доход, приносимый СМО в единицу времени т. д.

Рассмотрение процесса обслуживания отдельно взятой заявки представляет ограниченный интерес. Обычно предполагается, что заявки образуют поток — последовательность заявок со случайным появлением их

во времени. Если с точки зрения обслуживания все заявки данного потока равноправны, то такие потоки называют потоками однородных событий.

Большой теоретический и практический интерес представляют собой так называемые стационарные потоки, для которых вероятностный режим не зависит от времени.

В качестве примера стационарного потока с ограниченным последствием можно привести поток с равномерным распределением интервалов времени между заявками, функция плотности в этом случае имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{b} \quad 0 \leq t \leq b. \quad (6.1)$$

Плотность потока

$$\lambda = \frac{2}{b}. \quad (6.2)$$

Важную роль в теории массового обслуживания играет так называемый простейший поток однородных событий. Поток называется простейшим, если он является стационарным, ординарным и потоком без последствия.

Можно строго доказать, что для простейшего потока вероятность наступления k событий за интервал времени t выражается законом распределения Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (6.3)$$

где λ — интенсивность (плотность) потока.

Функция плотности для простейшего потока

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (6.4)$$

Кроме указанных, представляют интерес и другие потоки с ограниченным последствием, в частности, потоки типа Эрланга.

Потоком Эрланга порядка m называют ординарный стационарный поток с ограниченным последствием, для которого

$$f_m(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t}, \quad (6.5)$$

где λ — плотность простейшего потока.

Интенсивность, самого потока Эрланга

$$\lambda_{\tilde{Y}} = \frac{\lambda}{m}, \quad \hat{\lambda} = m\lambda_{\tilde{Y}}.$$

Поток Эрланга m -го порядка получают путем сохранения в простейшем потоке каждой m -й точки и выбрасыванием остальных.

Задаваясь величиной m , можно получить потоки, обладающие различным последствием — от полного отсутствия последствия ($m = 1$) до жесткой функциональной связи между моментами появления событий ($m = \infty$). Таким образом, порядок потока Эрланга может служить в какой-то степени и мерой последствия.

Системы массового обслуживания вообще могут быть двух типов.

1. Системы с отказами. В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ», покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

2. Системы с ожиданием (с очередью). В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов. Как только освободится канал, принимается к обслуживанию одна из заявок, стоящих в очереди.

В зависимости от типа СМО при оценке ее эффективности могут применяться те или другие величины (показатели эффективности). Например, для СМО с отказами одной из важнейших характеристик продуктивности является так называемая абсолютная пропускная способность — среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Наряду с абсолютной часто рассматривается относительная пропускная способность СМО — средняя доля поступивших заявок, обслуживаемых системой.

Помимо абсолютной и относительной пропускной способности, при анализе СМО с отказами применяют и другие характеристики.

Для СМО с неограниченным ожиданием важными характеристиками являются:

- среднее число заявок в очереди;
- среднее число заявок в системе;
- среднее время ожидания заявки в очереди;
- среднее время пребывания заявки в системе и др.

Для СМО с ограниченным ожиданием применяют обе группы упомянутых выше характеристик.

Для анализа процесса, протекающего в СМО, существенно знать основные параметры системы: число каналов n , интенсивность потока заявок λ ,

производительность каждого канала (среднее число заявок μ , обслуживаемое каналом в единицу времени), условия образования очереди.

Процессы сборочного производства рассматриваются как составляющие системы массового обслуживания. Потоки деталей, поступающих для выполнения над ними различных сборочных операций, могут рассматриваться как «потоки заявок», ритмичность поступления которых нарушается за счет случайных величин.

Для упрощения дальнейших выкладок рассмотрим случай, когда сборочные операции производятся на одной поточной линии. Такой случай относится к одноканальной СМО с ожиданием, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ ; интенсивность обслуживания μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок в единицу времени). Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Пронумеруем состояния СМО по числу заявок, находящихся в системе (как обслуживаемых, так и ожидающих обслуживания):

- S_0 — канал свободен;
- S_1 — канал занят, очереди нет;
- S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди;
-
- S_k — канал занят, $k - 1$ заявок стоит в очереди.

При отсутствии ограничений по длине очереди каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена.

Среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (6.6)$$

где

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Среднее время ожидания

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (6.7)$$

Можно совершенно строго доказать, что $\rho < 1$ есть условие, при котором в СМО с ожиданием существует предельный установившийся режим: при $\rho \geq 1$ такого режима не существует, и очередь при $t \rightarrow \infty$ растет до бесконечности.

Исходя из этого условия и выражений (6.77) и (6.78) решаются задачи складирования и транспортные задачи при организации производства.

Поскольку поставка покупных изделий и материалов не может осуществляться непосредственно от их изготовителей (периферийных) прямо в производство с интенсивностью использования, то необходимо складирование этих изделий и материалов. Задача складирования решается совместно с задачей транспортировки, поскольку периодически необходимо пополнять запасы изделий и материалов. Причем обе эти задачи должны иметь оптимальное решение, поскольку слишком малый запас изделий потребует частных доставок от изготовителя, а слишком большой запас потребует большого количества транспорта (при редком его использовании) и больших помещений для складирования, кроме того, требуется обеспечить соответствующие условия хранения изделий.

Наличие статистической модели, реализуемой на ЭВМ, позволяет провести интересные в теоретическом и практическом отношении исследования СМО.

Эти исследования влияния вариаций параметров системы на показатели, характеризующие ее основные свойства, позволяют определить оптимальные параметры, т. е. оптимизировать СМО.

6.8. Процесс производства РЭА на предприятии как сложная система, функционирующая в условиях случайных возмущений

В сложных системах поддержание нужных режимов функционирования обеспечивается за счет управления отдельными элементами системы и системой в целом. В связи с этим из совокупности элементов системы наряду с другими могут быть выделены две особые группы элементов: управляющие устройства и управляемые объекты.

Управление является процессом переработки информации. Управляющие устройства выдают управляющую информацию, которая используется для управления объектами. Воздействие управляющей информации на управляемые элементы должно быть таким, чтобы режимы функционирования последних обладали заданными свойствами. В связи с этим управление, исходя из некоторого критерия управления, должно быть оптимальным. Оптимизировать процесс управления можно при помощи соответствующих методов исследования операций (например, динамическое программирование и др.). Автоматизированные управляющие комплексы обычно снабжаются ЭВМ, осуществляющими функции обработки информации.

В настоящее время созданы и функционируют автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУТП). Типичная АСУТП содержит датчики, выдающие информацию о состоянии процесса; управляющие устройства, куда входят ЭВМ и человек-оператор; органы управления процессом.

ТЕМА 7. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СТАБИЛЬНОСТИ ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЭС И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТОЧНОСТИ

7.1. Анализ точности при конструировании и разработке технологий

Точность при конструировании и разработке технологии играет большую роль, поскольку она определяет как нормальное функционирование РЭА, так и ее стоимость. Для обеспечения нормального функционирования РЭА требуется высокая точность, однако это связано со значительным повышением стоимости. Поэтому конструкторы и технологи вынуждены искать компромиссные решения. В основном точность определяется производственными погрешностями, которые возникают за счет нестабильности технологических процессов и неоднородности исходных материалов.

В общем случае для анализа точности необходимо установить зависимость между входными и выходными параметрами, т. е. установить зависимость вида

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x_i) \\ (i = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

где y — выходной параметр;

x_i — входной (первичный) i -й параметр.

При этом число уравнений будет равно количеству учитываемых выходных параметров.

При анализе точности используют несколько методов, из которых наибольшее распространение получили следующие: метод максимума-минимума, вероятностный метод, метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), метод граничных испытаний и т. д.

Метод максимума-минимума. Пусть первичные параметры имеют номинальные значения x_{i0} , тогда величина выходного параметра также является номинальной y_0 .

Разложим функцию (7.1) в ряд Тейлора в окрестности точки с номинальным значением параметров по степеням разности $x_i - x_{i0}$. Полагая, что $\Delta x_i \ll x_{i0}$, и ограничившись членами первого порядка малости, получим для абсолютной погрешности

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_i} \right] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i. \quad (7.2)$$

Разделив (7.1) на (7.2), получим уравнение относительной точности выходного параметра

$$\delta_y \sum_{i=1}^n B_i \delta x_i,$$

где

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y_0}; \quad \delta x_i = \frac{\Delta x_i}{x_{i0}}; \quad \hat{A}_i = \left[\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_i} \right] \frac{x_{i0}}{\varphi(x_{i0})}. \quad (7.3)$$

Коэффициенты A_i и B_i называют коэффициентами влияния. Они показывают степень влияния погрешностей первичных параметров на точность выходного параметра.

При расчете данным методом полагают, что все первичные параметры одновременно могут иметь наихудшие сочетания, т. е. максимальные значения с учетом знака коэффициентов влияния.

Предположим, что в исходном уравнении погрешностей (7.2) коэффициенты влияния B_i от $i = 1$ до $i = m$ положительные, а остальные (от $i = m + 1$ до $i = n$) отрицательные.

Суммируя отдельно положительные и отрицательные максимальные отклонения и учитывая, что все погрешности $\delta_{xi\max}$ положительные, а $\delta_{xi\min}$ — отрицательные, получим

$$\begin{aligned} \delta y_{\max} &= \sum_{i=1}^m B_i \delta x_{i\max} + \sum_{m+1}^n B_i \delta x_{i\min} \\ \delta y_{\min} &= \sum_{i=1}^m B_i \delta x_{i\min} + \sum_{m+1}^n B_i \delta x_{i\max} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Практически чаще всего погрешности симметричны, т. е.

$$|\delta x_{i\max}| = |\delta x_{i\min}| = \delta x_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\delta_{y \max} &= \sum_{i=1}^n /B_i \delta x_{ii} \delta \hat{a} \hat{a} /; \\ \delta_{y \min} &= \sum_{i=1}^n /B_i \delta x_{ii} \delta \hat{a} \hat{a} /; \end{aligned} \quad (7.5)$$

Обозначив $\delta y_{\max} / \delta y_{\min} = \delta y_{i \delta \hat{a} \hat{a}}$, $i \hat{a} \hat{a}$

$$\delta y_{i \delta \hat{a} \hat{a}} = \sum_{i=1}^n B_i x_{ii} \delta \hat{a} \hat{a}. \quad (7.6)$$

Практически параметры элементов одной конструкции не могут иметь одновременно все максимальные отклонения, поэтому действительное значение погрешности выходного параметра будет лежать в пределах $\delta y_{\min} \leq \delta y \leq \delta y_{\max}$ и с большой вероятностью ближе к среднему значению. При расчете получают значения погрешности, завышенные в 10 и более раз.

Однако метод важен тем, что позволяет найти предельно возможные значения погрешностей.

Вероятностный метод. Поскольку в реальных случаях параметры схем и конструкций всегда случайны, то при анализе точности необходимо применять математический аппарат теории вероятностей.

В этом случае зависимость (7.5) необходимо рассматривать как вероятностную. В общем случае эта функция нелинейная, если рассматривать ее на всем интервале изменения аргументов.

По существу нам нужно определить закон распределения y по известным законам распределения x_i .

В общем случае решение этой задачи связано с большими математическими трудностями. Учитывая также то, что в нашем случае область практически возможных значений случайных аргументов мала, эта функция может быть с достаточной для практики точностью линеаризована (приближенно заменена линейной).

Это означает, что

$$y(x_i) \approx \varphi(m_{xi}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m (x_i - m_{xi}), \quad (7.7)$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m = \frac{\partial \varphi(m_{xi})}{\partial x_i}$ — частная производная функции $\varphi(x_i)$ по аргументу x_i , в которую вместо каждого аргумента подставлено его математическое ожидание.

Математическое ожидание почти линейной функций приближенно вычисляется по формуле

$$m_y \approx \varphi(m_{x_i}). \quad (7.8)$$

Дисперсия почти линейной функции приближенно вычисляется по формуле

$$D_y \approx \sum_{i=1}^n A_i^2 D_{x_i} + 2 \sum_{j=1}^n A_i \cdot A_j \cdot r_{ij} \cdot \sqrt{D_{x_i} \cdot D_{x_j}}, \quad (7.9)$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции величин x_i, x_j .

Если величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ не коррелированы, то

$$D_y = \sum_{i=1}^n A_i^2 D_{x_i}, \quad A_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m. \quad (7.10)$$

В ряде случаев для расчета точности вероятностным методом удобно брать линейные уравнения (7.8) и (7.9).

Применяя к этим уравнениям теоремы о числовых характеристиках суммы случайных величин и учитывая, что коэффициенты A_i и B_i являются величинами детерминированными, получим для абсолютной погрешности

$$M[\Delta y] = \sum_{i=1}^n A_i M[\Delta x_i]; \quad (7.11)$$

$$D[\Delta y] = \sum_{i=1}^n A_i^2 D[\Delta x_i] + 2 \sum_{i \neq j} r_{ij} A_i A_j \sqrt{D[\Delta x_i] D[\Delta x_j]} \quad (7.12)$$

и для относительной погрешности

$$M[\delta y] = \sum_{i=1}^n B_i M[\delta x_i]; \quad (7.13)$$

$$D[\delta y] = \sum_{i=1}^n B_i^2 D[\delta x_i] + 2 \sum_{i \neq j} r_{ij} B_i B_j \sqrt{D[\delta x_i] D[\delta x_j]}. \quad (7.14)$$

Если величины $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ не коррелированы, то

$$D[\delta y] = \sum_{i=1}^n B_i^2 D[\delta x_i]. \quad (7.15)$$

Метод граничных испытаний. Метод основан на имитации изменения первичных параметров под влиянием различных причин и исследовании соответствующего изменения выходного параметра. Метод позволяет экспериментальным путем (необходим образец или его физическая модель — недостаток!) уточнить данные на допуски и др.

Образец испытывают при номинальных (расчетных) значениях первичных параметров. Один из параметров схемы принимают за так называемый параметр граничных испытаний (например, напряжение питания схемы). Вначале устанавливают номинальное расчетное значение параметра x_{i0} . Затем изменяют параметр граничных испытаний до фиксации отказа, по контрольному параметру. Получают точку 1 (рис. 7.1). После этого изменяют x_{i0} на несколько процентов и вновь изменяют параметр граничных испытаний до фиксации отказа. Получают точку 2. Аналогично находятся остальные точки.

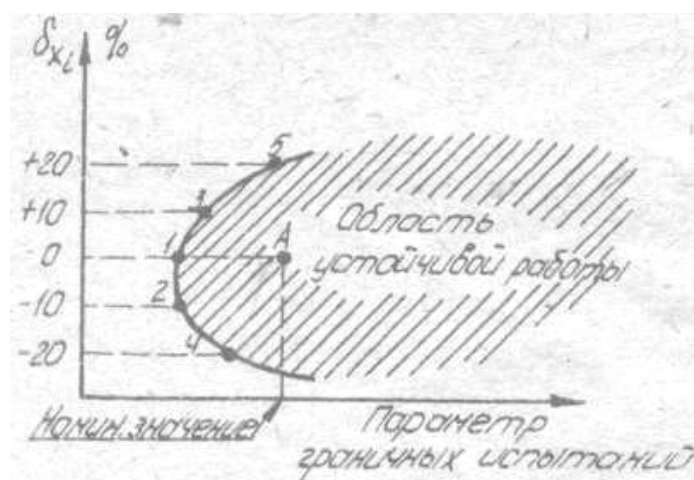


Рисунок 7.1 — График граничных испытаний

По построенной границе раздела области отказов и области устойчивой работы выбирают рабочую точку, соответствующую наименьшей вероятности отказа.

Если критериев отказа два или более, то строят область устойчивой работы с учетом всех критериев.

Для примера рассмотрим случай двумерного пространства. Первичные параметры x_1 и x_2 изменяются в пределах $[x_{1min}, x_{1max}]$ и $[x_{2min}, x_{2max}]$ (рис. 7.2). При этом выходной параметр не выходит за пределы своего допуска в области, ограниченной сплошной линией. Это и есть область работоспособности. Однако, как видно из рисунка 7.2, не при всякой комбинации первичных параметров x_1 и x_2 внутри своих пределов выходной параметр будет находиться внутри области работоспособности.

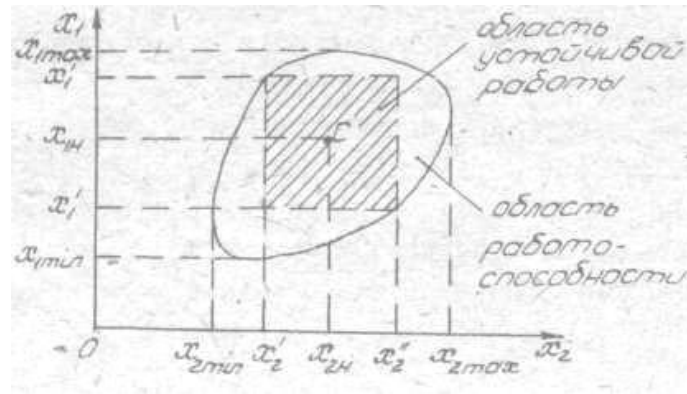


Рисунок 7.2 — Случай двумерного пространства

Выходной параметр будет находиться внутри этой области только при значениях $x_1' \leq x_1 \leq x_1''$; $x_2' \leq x_2 \leq x_2''$.

Заштрихованная область является областью устойчивой работы системы. А отображающая точка С для повышения устойчивости работы системы должна быть одинаково удалена от границ области устойчивой работы.

Испытания можно проводить не для всех первичных параметров, а только для «определяющих», т. е. для тех, которые в основном влияют на погрешность выходных параметров.

Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Основная идея этого метода состоит в моделировании случайного процесса путем выбора по жребию отдельных ситуаций в системе. Перебор ситуаций осуществляется по случайной программе, которая соответствует статистическим закономерностям процесса.

Для осуществления метода необходимо иметь аналитические зависимости выходных параметров от первичных типа (7.2). Кроме того, необходимо иметь совокупность случайных величин, распределенных по такому же закону, как и параметры элементов x_i . Из данной совокупности случайных величин задаем случайные значения первичным параметрам и подставляем их в уравнение (7.2). Находим по одному значению y_i . Затем необходимо выбрать другие случайные значения первичных параметров из той же совокупности случайных величин и опять найти выходные параметры y_i . Этот процесс повторяется многократно, в результате чего можно построить функцию распределения y .

Необходимый объем испытаний определяется заданной точностью и надежностью оценки. Для того чтобы обеспечить достаточную для практики точность и достоверность оценки, необходимо получить не менее 10^2 – 10^3 испытаний. Большой объем расчетных работ является основным недостатком этого метода, однако при применении ЭВМ этот метод дает наилучшие результаты.

Как показывают статистические данные, распределение производственных погрешностей первичных параметров в основном подчиняется нормальному распределению и закону равной вероятности (рис. 7.3).

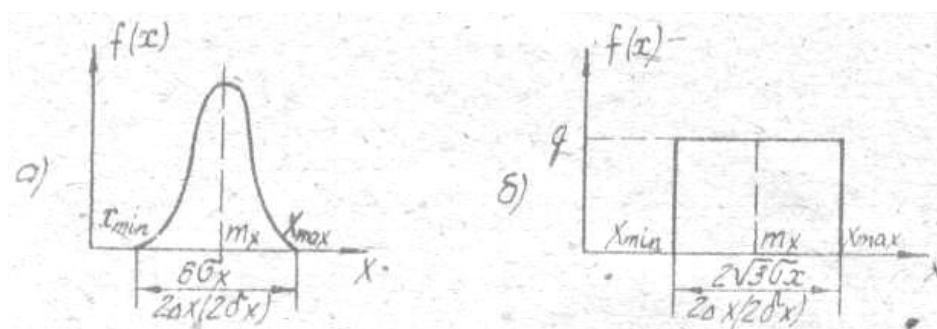


Рисунок 7.3 — Кривые распределения:
а — нормального; б — равной вероятности

В соответствии со сказанным можно построить блок-схему программы на ЭВМ для анализа точности методом Монте-Карло (рис. 7.4).

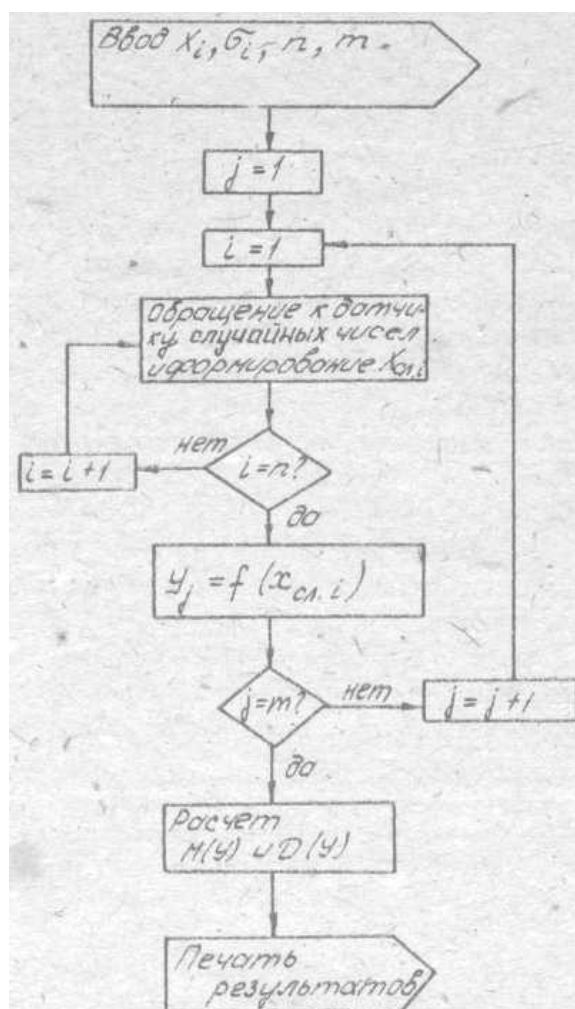


Рисунок 7.4 — Блок-схема анализа точности методом Монте-Карло

Развитие микроэлектроники, переход радиоэлектронной промышленности на крупносерийное поточное и автоматизированное производство с одновременным повышением требований к точности и надежности изделий сделали особенно актуальной проблему правильного назначения допусков на параметры электрорадиоэлементов, модулей, микромодулей, блоков и других элементов конструкций.

В настоящее время создана система допусков, которая оговаривает существующие допуски как на электрические параметры, так и на механические.

При правильном назначении допусков на электрорадиоэлементы и функциональные узлы может быть обеспечена функциональная взаимозаменяемость, а также унификация и стандартизация узлов, без чего невозможна автоматизация производства РЭА, специализация и кооперирование.

Допуски на параметры деталей и узлов РЭА, установленные необоснованно, увеличивают ее стоимость и удлиняют сроки производства. Излишняя жесткость допусков повышает требования к точности оборудования, качеству оснастки и квалификации рабочих. Слишком большие допуски приводят к увеличению конструкции, числа элементов, требующих подгонки, к усложнению регулировочных работ при сборке.

7.2. Анализ стабильности конструкций и устойчивости технологических процессов

В процессе изготовления, хранения и эксплуатации изделий на параметры конструкций и технологических процессов действует большое число дестабилизирующих факторов: температура, влага, атмосферное давление, механические воздействия, солнечная радиация и др.

Из упомянутых факторов наибольшее воздействие на РЭА и технологические процессы с точки зрения их стабильности оказывает температура.

Изменение температуры вызывает изменение физических свойств материалов, что в свою очередь вызывает изменение как электрических характеристик элементов, так и геометрических размеров деталей конструкций. Например, при изменении температуры изменяется величина магнитной проницаемости магнитных материалов (рис. 7.5), диэлектрическая проницаемость диэлектриков, параметры полупроводниковых приборов изделий (рис. 7.6), удельное сопротивление проводников и др. Это изменение параметров носит случайный характер.

Изменение температуры вызывает также изменение линейных размеров элементов конструкции, что необходимо учитывать особенно при конструировании механизмов РЭА.

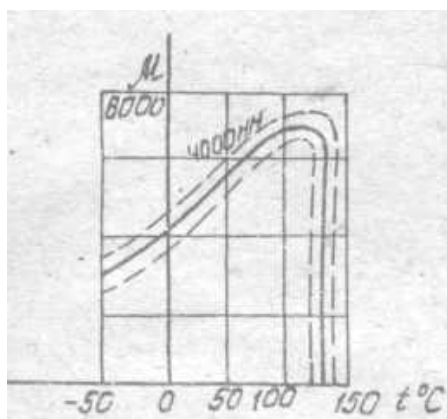


Рисунок 7.5 — Зависимость μ ферритов от температуры

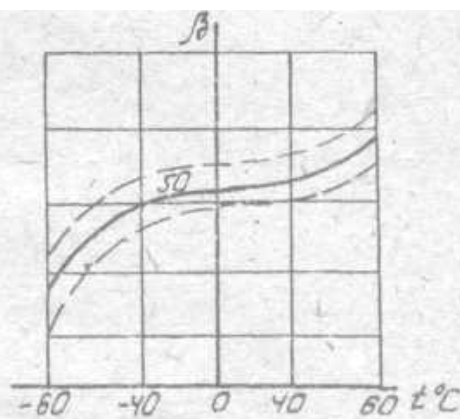


Рисунок 7.6 — Зависимость β транзистора от температуры

Под действием влаги меняется цвет, степень шероховатости, электропроводность, поверхностная прочность и т. п.

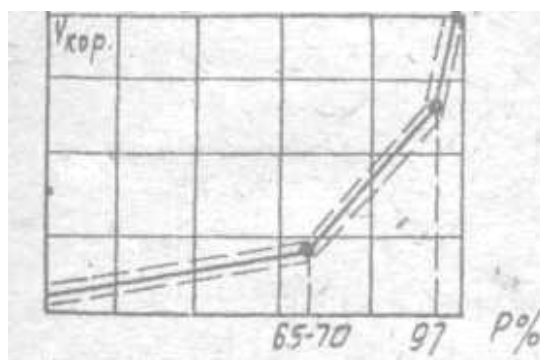


Рисунок 7.7 — Скорость атмосферной коррозии

Механические воздействия (удары, вибрации) могут также сказаться на стабильности работы РЭА, особенно на подвижных объектах, где уровень вибраций весьма велик.

Основное влияние на изменение параметров конструкций и устойчивость технологических процессов оказывает, как уже упоминалось выше, температура.

Учет изменений параметров под влиянием температуры может быть произведен следующим образом.

Выходные параметры при нормальных условиях ($T = +20 \pm 5$ °C) можно представить в виде (7.2).

При линейных и циклических изменениях параметров элементов под воздействием температуры отклонение Δx_i каждого из первичных параметров от его номинального значения x_0 равно

$$\Delta x_i = x_{i0} \alpha_{xi} \Delta t, \quad (7.16)$$

где α_{xi} — температурный коэффициент (ТК) параметра x_i ;

$\Delta t = (T - 20^\circ)$ — разность между воздействующей температурой окружающей среды и нормальной.

С учетом сказанного для выражения (7.4) можно записать

$$\delta Y_T = \sum_{i=1}^n B_i \alpha_{xi} \Delta t. \quad (7.17)$$

В данном случае ТК выходного параметра из формулы (7.17)

$$\alpha_y = \sum_{i=1}^n B_i \alpha_{xi}. \quad (7.18)$$

Обычно ТК параметров x_i являются случайными, для которых в простейшем случае легко найти числовые характеристики ТК выходного параметра

$$\begin{aligned} m(\alpha_y) &= \sum_{i=1}^n B_i m(\alpha_{xi}) \\ D(\alpha_y) &= \sum_{i=1}^n B_i^2 D(\alpha_{xi}) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Аналогично рассчитывается влияние влаги на выходные параметры, только в выражении 7.4 вместо δ_{xi} необходимо подставить $(\delta_{xi})_{вл}$.

Анализируя выражение 7.18, видим, что для увеличения стабильности работы функционального узла необходимо:

- увеличивать стабильность элементов;
- уменьшать число элементов схемы;
- варьировать коэффициентами влияния.

Практически часто для повышения точности используется взаимная компенсация погрешностей, вносимых каждым первичным параметром, для чего необходимо выбрать составляющие элементы изделия таким образом чтобы составляющие суммы погрешностей по возможности компенсировали друг друга.

7.3. Анализ закономерностей изменения свойств конструкции РЭА при длительном функционировании

Процесс старения и износа элементов РЭА является следствием необратимых изменений, происходящих в них с течением времени. Причиной этих изменений являются разнообразные физико-химические процессы (коррозия, износ, накопление деформаций и усталости, диффузия одного

материала в другой, окисление, изменение структуры веществ и т. д.), вследствие чего старение элементов имеет сложный характер, зависящий от типа элемента, его конструкции и условий, в которых он находится.

Для электрорадиоэлементов характерны процессы сравнительно быстрого старения. В основном они сводятся к различным изменениям параметров элементов: росту величины сопротивления углеродистых резисторов, уменьшению емкости электролитических конденсаторов и т. д. Эти изменения происходят в элементах и тогда, когда они не работают и далее тогда, когда они находятся в идеальных условиях хранения. Разница может заключаться лишь в скорости процессов старения.

Внешняя среда и условия работы также оказывают весьма существенное влияние на процесс старения элементов. Даже параметры элементов одного типа могут иметь различные законы изменения во времени, если условия их эксплуатации неодинаковы. В зависимости от времени работы радиоизделий нестабильность их характеристик, вызванная старением, колеблется от единиц до нескольких десятков процентов от общей нестабильности.

Старение электроэлементов является одной из основных причин отказов РЭА.

Случайные процессы изменения параметров элементов РЭА при длительном функционировании обычно являются монотонными, нормально распределенными. Эти процессы аппроксимируются нестационарными случайными функциями, для которых типичны очень жесткие связи между значениями параметров в последовательные моменты времени. Такие процессы называют детерминированными случайными (квазидетерминированными).

Встречающиеся на практике реализации изменения параметров, как правило, допускают статистическую линеаризацию. При этом каждая реализация процесса заменяется секущей прямой, отражающей лишь главные линейные части монотонных случайных процессов старения и износа. Основное достоинство такой линеаризации — минимальное количество экспериментальных данных для нахождения характеристик случайного процесса приближения систем к состоянию отказа. При такой аппроксимации случайный процесс изменения значений параметра представим в виде

$$y(t) = y_0 + vt, \quad (7.20)$$

где y_0 — начальное значение параметра;

v — скорость изменения параметра во времени.

Считается, что y_0 и v являются случайными величинами.

В ряде случаев для описания процессов $y(t)$ линейной аппроксимации недостаточно, поэтому используют экспоненциальную

$$y(t) = y_0 e^{\frac{v}{y_0} t} \quad (7.21)$$

или логарифмическую

$$y(t) = y_0 \ln e(1 + \frac{vt}{y_0}). \quad (7.22)$$

При этом предполагается, что известны m_{y0} , m_v , D_{y0} , D_v .

В зависимости от величины D_v функция (7.20) может быть равномерной ($D_v = \text{const}$) или веерной ($D_v \neq \text{const}$) (рис. 7.8).

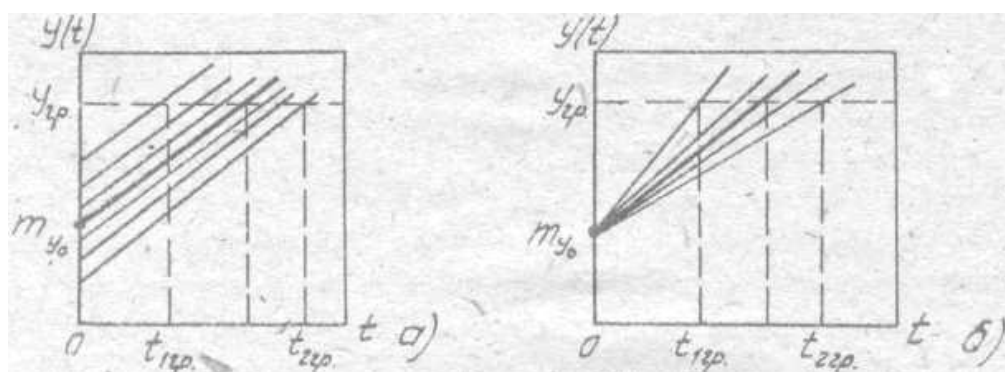


Рисунок 7.8 — Типичный вид линейных случайных процессов приближения конструкций к отказам:

a — равномерных; *б* — веерных

Величина y_{gr} — граничное (предельное) значение выходного параметра конструкции, при достижении которого наступает отказ.

Для равномерной линейной случайной функции (см. рис. 7.8, *a*) характерны неслучайная скорость V изменения параметра и постоянная дисперсия $D_y = \text{const}$. Случайной величиной является лишь начальное значение функции (7.20).

Для линейной веерной случайной функции (см. рис. 7.8, *б*) характерно наличие общей для всех реализаций неслучайной точки-полюса. Положение каждой реализации зависит от одной случайной величины — скорости изменения параметра. Веерная функция характеризуется следующими зависимостями:

$$m_y = m_{y0} + m_v t; \quad D_y = t^2 D_v. \quad (7.23)$$

Наибольший интерес для практики представляет веерная модель приближения систем к отказам. Однако в ряде случаев движение системы к границе не является линейным случайным процессом. В этом случае лучше использовать экспоненциальную (7.42) или логарифмическую модель (7.22). Это позволяет учесть непостоянство скорости изменения параметра во времени.

Можно отметить, что аппроксимация линейными функциями допустима лишь в пределах небольших интервалов работы конструкции и в тех случаях, когда неизвестен закон изменения параметров во времени, а условия эксплуатации постоянны. Для реальных систем и условий их эксплуатации предпочтительны нелинейные модели случайных процессов старения (рис. 7.9).

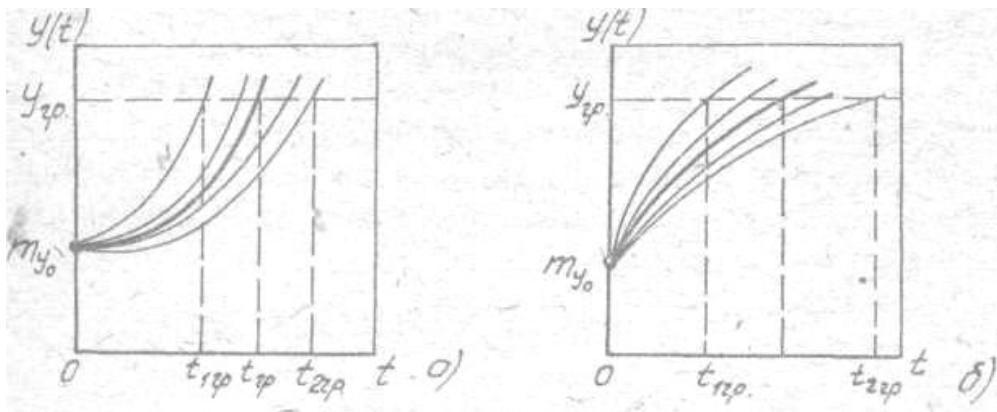


Рисунок 7.9 — Типичный вид нелинейных веерных процессов приближений систем к отказам:

а — экспоненциальных; б — логарифмических

В случае, когда система (конструкция) с постоянными D_{y0} и V приближается к граничному значению параметра $y(t) = y_{gr}$, для линейной равномерной модели старения функция работоспособности

$$\varphi(t) = y_{\infty} - y(t) \quad (7.24)$$

будет уменьшаться до нуля (рис. 7.10).

Если закон распределения нормальный $f(\varphi)$ и сохраняется в любые моменты времени t_i , то закон распределения моментов времени пересечения границы работоспособности системы также является нормальным $f(t)$.

При этом

$$m_t = \frac{y_{\infty} - m_{y0}}{v}; \quad D_t = \frac{D_{y0}}{v^2}. \quad (7.25)$$

При выборе допусков схемных элементов необходимо учитывать также влияние их нестабильности и старения на выходные параметры. Поскольку выбор суммарного допуска существенно влияет на стоимость изделия и его работоспособность, то его необходимо оптимизировать. Ввиду громоздкости расчетов целесообразно использование ЭВМ.

Как уже отмечалось выше, процессы износа и старения характеризуются монотонным нормально распределенным изменением параметров с очень жесткими связями между их значениями в последовательные моменты времени. Поэтому процесс старения есть случайный нестационарный процесс, описать который можно с помощью марковской модели.

Марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Однако они занимают особо важное положение среди других видов случайных процессов. Это объясняется в основном двумя обстоятельствами: во-первых, для марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие содержательные физические задачи, и, во-вторых, при помощи марковских процессов можно описывать точно или приближенно поведение ряда реальных физических систем и устройств.

Характерным свойством марковских процессов является то, что если точно известно состояние марковского процесса в настоящий момент времени, то будущее состояние не зависит от прошлого состояния (процессы без последствия).

Иначе говоря, если известны свойства конструкции в настоящий момент, то можно предсказать будущее поведение конструкций независимо от того, как и каким образом она достигла этого состояния в прошлом.

Поскольку процесс старения является непрерывным процессом, то его можно отнести к непрерывному марковскому процессу.

Вероятность перехода (из состояния y_0 в состояние y за время между t_0 и t) $\pi(y, t/y_0, t_0)$ непрерывного марковского процесса удовлетворяет следующим уравнениям в частных производных.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \pi(y, t / y_0, t_0) = & -\frac{\partial}{\partial y} K_1(y, t) \pi(y_0, t_0) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_2(y, t) \pi(y, t) / y_0, t_0) ; \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t_0} \pi(y, t / y_0, t_0) = & K_1(y_0, t_0) \frac{\partial}{\partial y_0} \pi(y, t / y_0, t_0) + \\ & + \frac{1}{2} K_2(y_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \pi(y, t / y_0, t_0). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Уравнение (7.30) называется уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова, или прямым уравнением (поскольку в нем фигурирует производная по конечному моменту времени $t > t_0$), а уравнение (7.31) называется уравнением Колмогорова, или обратным уравнением (так как в него входят производная по начальному моменту времени $t_0 < t$). Такое название оправдано тем, что уравнение (7.30) для процесса броуновского движения встречалось в работах Фоккера (1914 г.) и Планка (1917 г.). Строгое математическое обоснование (7.30) было дано Колмогоровым А. Н.; им же впервые было получено уравнение (7.31).

По традиции, связанной с применением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова первоначально в основном для изучения поведения броуновских частиц, коэффициенты $K_1(y, t)$ и $K_2(y, t)$ часто называют соответственно коэффициентами сноса и диффузий.

При этом

$$K_1(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\langle \frac{[y(t + \Delta t) - y(t)]}{y(t)} \right\rangle; \quad (7.32)$$

$$K_2(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\langle \frac{[y(t + \Delta t) - y(t)]^2}{y(t)} \right\rangle. \quad (7.33)$$

Здесь угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения по условной плотности вероятности (вероятности перехода)

$$\pi \left(\frac{y, t + \Delta t}{y, t} \right).$$

При этом

$$\left\langle \frac{[y(t + \Delta t) - y(t)]^n}{y(t)} \right\rangle = \int [y(t + \Delta t) - y(t)]^n \pi \left(\frac{y, t + \Delta t}{y, t} \right) dy. \quad (7.34)$$

Как следует из (7.32) и (7.33), коэффициент сноса $K_1(y, t)$ характеризует среднее значение локальной скорости, а коэффициент $K_2(y, t)$ — локальную скорость изменения дисперсии приращения марковского процесса (выходного параметра конструкции).

Линейные уравнения в частных производных (7.30) и (7.31) относятся к параболическому типу и носят название диффузионных. По этой причине непрерывные марковские процессы часто называют диффузионными. Для отыскания решений указанных уравнений необходимо задать начальные и граничные условия.

В нашем случае значение $y(t)$ в начальный момент времени не фиксировано, а является случайным и имеет плотность вероятности $f_0(y)$, тогда в качестве начального условия указывается эта плотность вероятности

$$f(y, t_0) = f_0(y). \quad (7.35)$$

Умножив (7.30) на $f(y_0, t_0)$ и проинтегрировав по y_0 с учетом условия согласования плотности вероятностей, т. е.

$$f(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_0, t_0) \pi\left(\frac{y, t}{y_0, t_0}\right) dy_0, \quad (7.36)$$

получим для плотности вероятности $f(y, t)$ с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} [K_1(y, t) f(y, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [K_2(y, t) f(y, t)]. \quad (7.37)$$

Решение уравнения должно быть неотрицательным и нормированным к единице:

$$f(y, t) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y, t) dy = 1. \quad (7.38)$$

Для решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (7.37), кроме начального условия, нужно указать еще и граничные условия. В нашем случае границей работы конструкции является первый отказ, т. е. достижение параметром $y(t)$ предельного значения $y_{\text{гр}}$, оговоренного техническими условиями. Такую граничную точку называют поглощающей границей (экраном) (рис. 7.11).

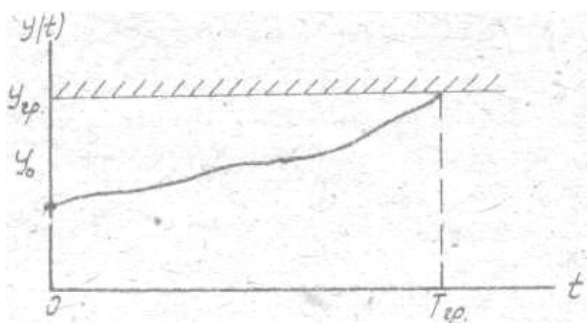


Рисунок 7.11. — К марковской модели старения

Очевидно, что плотность вероятности на поглощающей границе должна обращаться в нуль, т. е.

$$f(y_{\infty}, t) = 0. \quad (7.39)$$

Это условие поглощающей границы (экрана).

К сожалению, полное исследование переходных процессов, связанных с решением нестационарного уравнения (7.37), является довольно сложной задачей. Аналитическое решение нестационарного уравнения не удастся получить в общем виде, кроме некоторых частных случаев, например, когда коэффициенты K_1 и K_2 не зависят от времени.

Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова наиболее часто решается шестью методами:

- 1) методом разделения переменных;
- 2) методом преобразования Лапласа;
- 3) методом характеристической функции;
- 4) методом замены независимых переменных;
- 5) методом Гауссова приближения;
- 6) численными методами.

Поскольку процесс старения является случайным процессом, то и время достижения параметрами конструкций граничных значений также будет случайным. Аппарат теории марковских процессов позволяет анализировать работу систем так называемого порогового типа, нормальная работа которых обеспечивается лишь до тех пор, пока какой-либо характерный параметр этой системы не выходит за допустимые пределы.

Очевидно, что вероятность достижения границы в течение времени $t > 0$

$$P_{y\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t, y_0) = 1 - q_{y\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t, y_0), \quad (7.40)$$

где $q_{y\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t, y_0)$ — вероятность недостижения границы марковским процессом, имеющим начальное значение y_0 .

В свою очередь вероятность недостижения границы

$$q_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t, y_0) = \int_{y_0}^{y_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}} f(y, t / y_0) dy, \quad (7.41)$$

где $f(y, t/y_0)$ — плотность вероятности, являющаяся фундаментальным решением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (7.37) с начальным условием

$$f(y, 0 / y_0) = f_0(y) \quad (7.42)$$

и граничным условием

$$f(y_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}, t / y_0) = 0. \quad (7.43)$$

При нормальной плотности вероятности для начальной координаты

$$f_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(y-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}. \quad (7.44)$$

Для плотности вероятности времени первого достижения границы можно записать

$$W_{y\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}(t, y_0) = \frac{\partial}{\partial t} P_{y\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}(t, y_0) = -\frac{\partial}{\partial t} q_{y\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}(t, y_0). \quad (7.45)$$

Теперь можно найти начальные моменты распределения времени первого достижения границы:

$$T_n(y_0, y_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}) = \int_0^{\infty} t^n \frac{\partial P_{y\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}(t, y_0)}{\partial t} dt = \int_0^{\infty} t^n W_{y\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}(t, y_0) dt. \quad (7.46)$$

Исходя из (7.46), для среднего времени первого достижения границы ($n = 1$) получим

$$T_1(y, y_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}) = \int_0^{\infty} t W_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}(t, t_0) dt. \quad (7.47)$$

Можно вычислить дисперсию времени первого достижения границы:

$$D(y_0, y_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}) = T_2(y_0, y_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}) - T_1^2(y_0, y_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}). \quad (7.48)$$

Тогда для периода нормальной работы можно записать (для нормального распределения)

$$t_i = T_1 - 3\sqrt{D}. \quad (7.49)$$

Сравнивая марковскую модель старения с квазидетерминированными, видим, что первая является вероятностной и позволяет наиболее полно описать и исследовать процесс старения, однако отличается сложностью расчетов, которые часто приходится выполнять на ЭВМ.

Анализ старения позволяет выявить эксплуатационные свойства РЭА и оценить некоторые эксплуатационные характеристики (например, время сохранения работоспособности и т. д.).

Допуск — допустимое поле рассеивания погрешностей параметра, определенное из условия обеспечения как требуемой точности работы изделия, так и функциональной взаимозаменяемости.

Обычно допуски на выходные параметры деталей узлов, блоков, систем задаются в ТУ на эти устройства. Различают функциональную и технологическую точности.

Функциональная точность определяется как требуемая точность выходных параметров аппаратуры, обеспечивающих ее нормальное функционирование согласно ТУ.

Расчет функциональной точности обычно сводится к расчету и разумному назначению допусков на параметры элементов и комплексов, при которых поле $2\Delta_{\text{ТУ}}$ допуска на каждый выходной параметр РЭС было бы больше или равно полю рассеивания погрешности 2δ ($2\delta \leq 2\Delta_{\text{ТУ}}$), где $\Delta_{\text{ТУ}}$ и δ — соответственно половина поля допуска и поля рассеивания погрешности выходного параметра.

Технологическая точность — реально существующая точность выходных параметров функциональных узлов в процессе их изготовления при выбранном варианте технологии, характеризующейся вариацией параметров.

Технологическая точность РЭС определяется точностью процесса изготовления и точностью комплектующих изделий: радиодеталей, блоков и т. д.

Выбирая определенный класс деталей и вариант технологического процесса, разработчик и технолог могут управлять технологической погрешностью. Вариации параметров РЭС в процессе изготовления зависят от производственных погрешностей. Погрешности при этом могут быть случайные и систематические. При одновременном воздействии многих факторов, вызывающих погрешности, в общем случае вариация параметров изделия как случайных величин может быть оценена кривой их распределения. Поэтому такую кривую можно рассматривать как объективную характеристику точности производства, а ее количественные показатели — как меру технологической точности.

Свойство РЭС повторять свои параметры от изделия к изделию в процессе ее изготовления есть технологическая воспроизводимость.

От согласования технологической и функциональной точности, т. е. такого установления поля допуска и обеспечения поле рассеивания погрешности на каждый параметр РЭС зависит технологическая воспроизводимость по данному параметру. Количественным показателем технологической воспроизводимости является процент выхода годных РЭС, т. е. изделий, параметры которых находятся в пределах допусков, установленных ТУ.

7.4 Расчет функциональной точности РЭС

Основным инструментом анализа функциональной точности является уравнение погрешности, связывающее погрешности основных параметров ΔY с погрешностями вспомогательных параметров Δx :

$$Y + \Delta Y = f(x_1 + \Delta x, x_2 + \Delta x, \dots, x_n + \Delta x) \quad (7.50)$$

Полагаем, что отклонения параметров от номинальных величин незначительны: $\Delta Y \ll Y$, $\Delta x \ll x$. Разлагая выражение (7.50) в ряд Тейлора и пренебрегая членами второго порядка малости, получим уравнение для абсолютной погрешности выходного параметра:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_i} \Delta x_i$$

В этом уравнении все составляющие погрешности являются размерными величинами, что затрудняет вычисления. Переходя к относительной величине, основное уравнение погрешности можно представить так:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\Delta X_i}{X_i}, \quad \text{где} \quad A_i = \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y} \quad (7.51)$$

Коэффициент влияния A_i определяется степенью влияния данного вспомогательного параметра на выходной параметр. Уравнение (7.51) является основным для расчета функциональной точности. Из него следует, что увеличение точности может быть достигнуто тремя способами:

- ужесточением допусков на внутренние параметры;
- уменьшением количества вспомогательных параметров;
- уменьшением вариации коэффициента влияния.

Допуски выходных параметров РЭС являются эксплуатационными. Эксплуатационные допуски тесно связаны с производственными и накладывают на них определенные ограничения.

Производственными допусками называют пределы, в которых должны находиться параметры при изготовлении РЭС. Они определяют:

- точность технологического процесса изготовления РЭС;
- производство контрольно-измерительной аппаратуры;
- технологию сборки;
- методы контроля и регулирования.

При производстве РЭС невозможно получить всю продукцию тождественной по всем параметрам элементов, так как изменяются производственные параметры, которые определяют выходные параметры РЭС и их разброс от заданных значений.

Под производственными погрешностями понимают различного рода отклонения параметров от номинальных значений, указанных в чертежах, ТУ и других технических документах.

Погрешности являются следствием нестабильности ТП радиодеталей, процессов сборки, настройки и т.д. Кроме того, на параметры элементов

влияют различные дестабилизирующие факторы. Таким образом, отклонения в параметрах элементов являются случайными величинами и их характеристики могут быть заданы статистическим способом. При многофакторном процессе производства и отсутствии явно доминирующих факторов для большинства случаев распределение производственных погрешностей происходит по нормальному закону:

$$\varphi(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y-M(X)^2}{2\sigma^2}},$$

где φ — ордината к кривой распределения;

$M(Y)$ — координата центра группирования параметра относительно начала координат;

σ — среднеквадратическое отклонение.

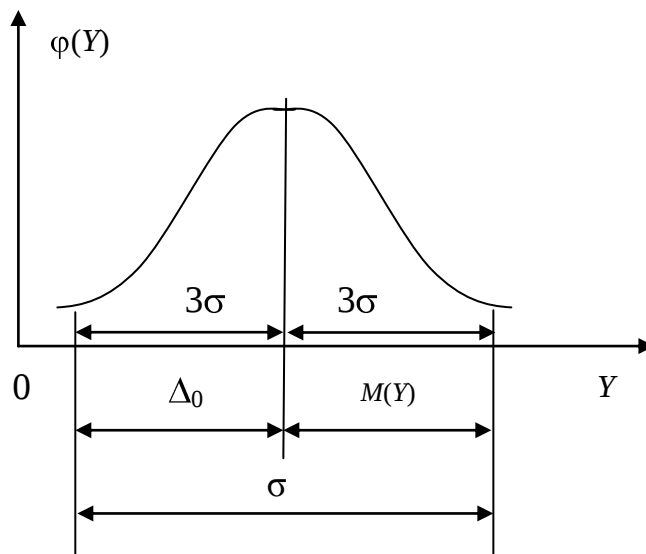


Рисунок 7.12 — Рассеивание погрешностей поля допуска σ

Для обеспечения заданного допуска в условиях производства необходимо, чтобы центр группирования производственных погрешностей располагался как можно ближе к середине поля допуска, заданного ТУ, а поле рассеивания погрешностей не выходило за пределы поля допуска (рис. 7.12):

$$3\sigma = \delta_{\text{доп}}; \quad M(Y) = \Delta_0,$$

где Δ_0 — координата середины поля допуска;

δ — половина поля допуска по ТУ.

Это положение иллюстрирует **рис. 1** и является основным требованием к регулировке ТП. При несоблюдении этого требования часть аппаратуры пойдет в неисправимый или исправимый брак.

7.5 Расчет технологической точности производства РЭС

Обеспечение производственной точности РЭС осуществляется путем учета случайной и систематической составляющих отклонений выходных параметров при многооперационном процессе производства.

Систематическая составляющая может быть представлена в виде:

$$M\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) = \sum A_i \alpha_i \delta_{iTY}, \quad \alpha_i = \frac{X_i - \Delta_O}{\delta_{iTY}}$$

где α_i — коэффициент относительной асимметрии параметра относительно середины поля допуска этого параметра;

δ_{TY} — половина поля допуска в соответствии с ТУ на параметр.

Случайная составляющая погрешности вычисляется по формуле

$$\delta\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 K_i^2 \delta_{iTY}^2 - \sum_{j=1}^V A_j A_k r_{lk} K_i K_k \delta_l \delta_k},$$

где r_{lk} — коэффициент, оценивающий степень корреляции случайно связанных двух второстепенных параметров l и k ;

V — количество пар случайно связанных параметров;

K_i — коэффициент рассеивания параметра:

$$K_i = \frac{3\sigma(x)}{\delta_{iTY}}$$

Входящие в уравнение коэффициенты α_i и K_i критичны к воздействию технологических факторов. Поэтому при анализе технологической точности необходимо произвести оценку влияния формирующих и преобразующих операций на производственную погрешность, и при этом учесть корреляцию связи между параметрами элементов. Это влияние определяется статистическим путем. Исходными данными при этом являются:

- принципиальная схема устройства;
- ТУ на устройство;
- структурная схема ТП;
- результаты анализа о влиянии операций ТП на точность входящих в это устройство элементов;
- статистические данные о величине корреляционных связей между параметрами отдельных элементов.

При наличии этих исходных данных необходимо определить коэффициенты влияния элементов на выходные параметры устройства и ре-

зультатирующее изменение коэффициента рассеивания и асимметрии ΔK_i и $\Delta \alpha_i$ для всего ТП в целом. Результирующие изменения коэффициентов рассматривается как алгебраическая сумма изменений коэффициентов по операциям.

После этого систематическая и случайная составляющие погрешности могут быть выражены как

$$M\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) = \sum_{i=1}^n A_i (\alpha_i - \Delta \alpha_{iE}) \delta_{iTY}$$

$$\delta\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 \delta_{iTY}^2 (K_i - \Delta K_{iE})^2 + 2 \sum_{j=1}^V A_i A_k \delta_i \delta_k r_{lk} \cdot (K_i + \Delta K_{iE})(K_k + \Delta K_{kE})}$$

Поле рассеивания производственных погрешностей будет определяться как

$$\omega = M\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) + \delta \frac{\Delta Y}{Y}.$$

При этом производственные допуски на параметр всегда должны быть больше его производственных погрешностей.

Практика эксплуатации РЭС показывает, что разброс параметров в конце срока службы аппаратуры в несколько раз превышает разброс параметров в начале ее эксплуатации. При эксплуатации, как и при производстве на параметры элементов схемной конструкции и на всю аппаратуру воздействуют различного рода дестабилизирующие факторы. Прежде всего — старение, износ и влияние температуры.

Поэтому эксплуатационные допуски на выходные параметры РЭС, выбранные из условия надежности, должны состоять из суммы трех допусков: производственного, температурного и на старение. Суммирование должно производиться по правилу суммирования случайных величин:

$$\delta_Y\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) = \sqrt{\delta_I^2\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) \pm \delta_T^2\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) \pm \delta_C^2\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)},$$

где δ_I — половина поля эксплуатационного допуска на выходной параметр;
 δ_T — половина поля температурного допуска на выходной параметр;
 δ_C — половина поля допуска на старение на выходной параметр.

Данный точностной расчет позволяет обеспечить выбор методов и средств технологического контроля на различных этапах технологического процесса изготовления РЭС.

ТЕМА 8. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РЭС. РЕЗЕРВИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РЭС

Рост сложности радиоэлектронной аппаратуры после второй мировой войны привел к снижению ее надежности, что стимулировало в свою очередь развитие соответствующего научного направления — теории надежности.

Терминология в теории надежности сложилась не сразу, ее формирование определялось развитием представлений о надежности.

Первым нормативным документом, заложившим основы терминологии и установившим важнейшие характеристики надежности изделий, стал ГОСТ 13377 – 67. Вторую редакцию этого документа (ГОСТ 13377 – 75) сменил новый ГОСТ 27.002 – 83, в последней редакции которого (ГОСТ 27.002 – 89) закрепились и уточнены все важнейшие термины и определения.

Термины и характеристики, используемые в области надежности, являются общими для различных отраслей промышленности, что говорит о фундаментальности этой науки.

Все изделия радиоэлектронной промышленности характеризуются качеством, т. е. определенной совокупностью свойств, которые существенно отличают данное изделие от других и определяют степень его пригодности для использования по своему назначению. В процессе эксплуатации вследствие износа и происходящих необратимых процессов старения характеристики РЭС (а следовательно, и их качество) изменяются. Изменение качества изделия во времени характеризует один из главных его показателей — надежность.

8.1. Основные термины и определения

Надежность — свойство объектов сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования.

Система — объект, представляющий собой совокупность элементов, взаимодействующих в процессе выполнения определенного круга задач и взаимосвязанных функционально.

Элемент системы — объект, представляющий собой простейшую часть системы; его отдельные части не представляют самостоятельного интереса в рамках конкретного рассмотрения.

Безотказность — свойство объекта непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторого времени или некоторой наработки. Это свойство распространяется как на период использования объекта по назначению, так и на период хранения и транспортировки.

Долговечность — свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния с необходимыми перерывами для технического обслуживания и ремонтов.

Ремонтопригодность — свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к предупреждению и обнаружению отказов и повреждений, к восстановлению работоспособности и исправности в процессе технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость — свойство объекта сохранять значение показателей безотказности, долговечности и ремонтопригодности в течение и после хранения и (или) транспортирования.

Работоспособное состояние — состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствуют требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

Неработоспособное состояние — состояние объекта, при котором значение хотя бы одного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

Предельное состояние — состояние объекта, при котором его дальнейшее применение по назначению недопустимо, либо восстановление его работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно. Признаки (критерии) предельного состояния устанавливаются нормативно-технической и (или) конструкторской документацией.

Отказ — событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта. Признак или совокупность признаков неработоспособного состояния объекта устанавливаются в нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

Восстанавливаемый объект — объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях.

Невосстанавливаемый объект — объект, работоспособность которого в случае возникновения отказа не подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях. Например, радиоаппаратура на непилотируемом спутнике связи относится к невосстанавливаемой: в случае отказа она не может быть заменена. Эта же радиоаппаратура на пилотируемой космиче-

ской станции относится к восстанавливаемой: отказавшие блоки могут быть заменены исправными (резервными).

Показатель надежности — техническая характеристика, количественным образом определяющая одно или несколько свойств надежности объекта. Показатель надежности может иметь размерность (например, среднее время наработки до отказа в часах) или не иметь ее (например, вероятность отказа).

Наработка — продолжительность или объем работы объекта.

Объект может работать непрерывно или с перерывами. В последнем случае учитывается суммарная наработка. Нарботка может измеряться в единицах времени, единицах выработки (кубометрах, гектарах, тоннах), циклах и других единицах. В частности, при испытаниях РЭС различают суточную, декадную, месячную наработки, наработку до первого отказа, наработку между отказами и т. д.

Технический ресурс — наработка объекта от начала его эксплуатации до достижения предельного состояния. Технический ресурс может включать в себя средние и капитальные ремонты, число которых указывается в нормативно-технической или конструкторской документации.

Срок службы — календарная продолжительность эксплуатации объекта от ее начала или возобновления после среднего или капитального ремонта до наступления предельного состояния.

Срок сохраняемости — календарная продолжительность хранения и (или) транспортирования объекта в заданных условиях, в течение и после которой сохраняются значения установленных показателей в заданных пределах.

Характеристики отказов. Отказы по характеру проявления подразделяются на внезапные и постепенные. Признаком внезапного отказа служит скачкообразное изменение одного или нескольких определяющих параметров объекта, а постепенный отказ — медленное, постепенное изменение параметров. Постепенные отказы появляются в результате процессов старения и износа, развития скрытого повреждения, интенсивного воздействия внешних факторов. При внезапных отказах количественные изменения параметров перерастают в скачкообразное их изменение.

Классификация отказов приведена в таблице 8.1.

Таблица 8.1 — Классификация отказов

Признак классификации	Вид отказа
Характер изменения контролируемого объекта до момента возникновения отказа	Внезапный Постепенный
Возможность последующего использования объекта после устранения отказа	Полный Частичный
Связь между отказами	Независимый Зависимый

Устойчивость работоспособности	Устойчивый Самоустраняющийся
Наличие внешних проявлений отказа	Очевидный (явный)
Причина возникновения отказа: – при конструкции; – при изготовлении; – при эксплуатации;	Конструкционный Производственный Эксплуатационный
Природа (происхождение) отказа.	Естественный Искусственный

Отказы подразделяются также на независимые и зависимые.

Независимый отказ элемента — отказ элемента объекта, не обусловленный отказами других элементов объекта.

Зависимый отказ элемента — отказ элемента объекта, обусловленный отказами элементов объекта.

Конструкционный отказ — отказ, возникающий вследствие ошибок, допущенных при конструировании объекта, или несовершенства примененных разработчиками методов конструирования.

Производственный отказ — отказ, возникающий вследствие нарушения или несовершенства технологического процесса изготовления объекта или комплектующих изделий.

Эксплуатационный отказ — отказ, возникающий вследствие нарушения установленных правил эксплуатации или вследствие влияния непредусмотренных внешних воздействий.

8.2. Показатели надежности

Под показателями надежности понимаются количественные характеристики одного или нескольких свойств, составляющих надежность РЭС. Показатели называются единичными, если они характеризуют какое-либо одно свойство надежности, и комплексными, если они относятся к нескольким свойствам надежности.

8.2.1. Единичные показатели безотказности

Количественно надежность характеризуется **показателями надежности**, отражающими те или иные ее свойства. В зависимости от того, какие свойства надежности РЭС показатели отражают, их подразделяют на **единичные** и **комплексные**.

ГОСТ 27.002 – 89 определяет следующие шесть основных показателей надежности: вероятность безотказной работы $P(t)$, гамма-процентная наработка до первого отказа T_γ , интенсивность отказов $\lambda(t)$, средняя наработка до первого отказа T_{cp} , средняя наработка на отказ T_0 , параметр потока отказов $V(t)$.

Четыре первых показателя используются для оценки надежности невосстанавливаемых (неремонтируемых) РЭС, а два последних — восстанавливаемых (ремонтируемых). В частном случае (например, если оценивается надежность ремонтируемого радиоизделия до первого отказа) они совпадают, но в общем случае показатели надежности ремонтируемых и неремонтируемых РЭС имеют разное математическое описание.

Дадим вероятностное и статистическое определения основных показателей надежности, а также проанализируем их основные свойства.

Вероятность безотказной работы — это вероятность того, что в заданном интервале времени $(0, t)$ или просто в течение времени t изделие не откажет, т. е.

$$P(t) = p\{\theta > t\}, \quad (8.1)$$

где θ — случайная величина, характеризующая время работы изделия до отказа.

Функция $P(t)$ обладает следующими основными свойствами:

$$0 < P(t) < 1; \quad P(0) = 1; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0.$$

Типичный график функции $P(t)$, называемый в литературе кривой убыли изделий, приведен на рисунке 8.1.

Значение $P(t_i)$ определяет долю работоспособных изделий в момент времени t_i , в чем и состоит физический смысл функции $P(t)$.

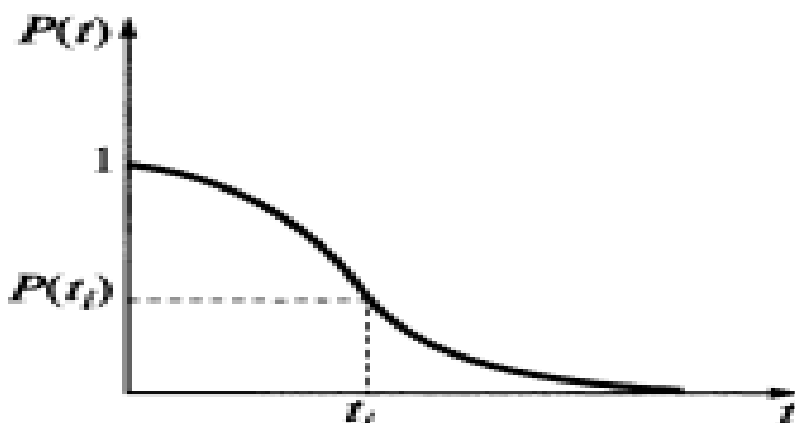


Рисунок 8.1 — Изменение вероятности безотказной работы изделия во времени

Наряду с вероятностным определением функции $P(t)$ используется и статистическое определение вероятности безотказной работы:

$$\bar{P}(t) = \frac{N(t)}{N_0} = 1 - \frac{n(t)}{N_0}, \quad (8.2)$$

где $N(t)$ — число изделий, исправных на момент времени t ; N_0 — общее число изделий, поставленных на испытания; $n(t)$ — число изделий, отказавших в интервале времени $(0, t)$.

При $N_0 \rightarrow \infty$ функции (8.1) и (8.2) будут равны.

Вероятность безотказной работы можно определить и для произвольного интервала времени (t_0, t) , что на практике соответствует работе изделия еще до момента времени t_0 . В этом случае говорят об условной вероятности безотказной работы $P(t_0, t)$, считая, что в момент времени t_0 (в момент начала наработки) изделие было работоспособно.

Условная вероятность определяется по следующей формуле:

$$P(t_0, t) = p\{\theta > t_0, \theta > t\} = P(t) / P(t_0), \quad (8.3)$$

где $P(t_0)$ и $P(t)$ — вероятности безотказной работы в интервалах времени $(0, t_0)$ и $(0, t)$ соответственно.

Статистически условная вероятность безотказной работы определяется выражением

$$\bar{P}(t_0, t) = N(t) / N(t_0), \quad (8.4)$$

откуда очевидно, что при $t_0 = 0$ она преобразуется к виду (8.2).

Помимо основного показателя $P(t)$, в теории надежности используются и следующие вспомогательные показатели:

- вероятность отказа $Q(t)$ и ее производная по времени
- $\varphi(t)$ — плотность распределения наработки до отказа (в ГОСТ 13377 – 67 эти показатели были отнесены к основным, но время расставило все по своим местам: сейчас они вспомогательные) [13].

Вероятность отказа — это вероятность того, что в заданном интервале времени $(0, t)$ радиоизделие откажет, т. е.

$$Q(t) = p\{\theta < t\}. \quad (8.5)$$

Поскольку функции $P(t)$ и $Q(t)$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$P(t) + Q(t) = 1. \quad (8.6)$$

Статистически вероятность отказа определяется отношением

$$\bar{Q}(t) = n(t) / N_0. \quad (8.7)$$

Плотность распределения наработки до отказа (иногда называемая частотой отказов)

$$\varphi(t) = dQ(t)/dt, \quad (8.8)$$

или с учетом (8.6):

$$\varphi(t) = dP(t)/dt,$$

т. е. $\varphi(t)$ представляет собой «скорость» снижения надежности изделия во времени.

Произведение $\varphi(t)dt$ характеризует безусловную вероятность того, что изделие откажет в интервале времени $(t, t + dt)$ при условии, что до момента времени t оно находилось в работоспособном состоянии. Статистически плотность распределения наработки до отказа определяется следующим отношением:

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{\Delta n(t)}{N_0 \Delta t}, \quad 1/\div,$$

где $\Delta n(t)$ — число отказов в интервале времени Δt .

Особенностью данного показателя является наличие размерности $[1/\text{ч}]$.

Гамма-процентная наработка до первого отказа — это наработка, в течение которой отказ изделия не возникнет с вероятностью γ , выраженной в процентах ($P_\gamma = \gamma/100$):

$$P_\gamma = 1 - \int_0^{T_\gamma} \varphi(t) dt. \quad (8.9)$$

Статистическое определение гамма-процентной наработки следующее:

$$\bar{P}(T_\gamma) = \bar{P}_\gamma = N(T_\gamma) / N_0, \quad (8.10)$$

Где $N(T_\gamma)$ — число изделий, исправных в момент времени T_γ .

Интенсивность отказов — это условная плотность вероятности отказа изделия в некоторый момент времени наработки при условии, что до этого момента отказов не было:

$$\lambda(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \frac{1}{(1 - Q(t))} = \frac{\varphi(t)}{P(t)}, \quad 1/\div. \quad (8.11)$$

В зарубежной литературе в качестве единицы измерения интенсивности отказов используют 1 fit (фит) = 10^{-6} $[1/\text{ч}]$.

Величина $\lambda(t)dt$ характеризует условную вероятность того, что изделие откажет в интервале времени $(t, t + dt)$ при условии, что в момент времени t оно находилось в работоспособном состоянии. Статистически интенсивность отказов определяется как доля изделий, которые отказывают в единицу времени после момента времени t :

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{\Delta n}{N(t)\Delta t}, 1/\div, \quad (8.12)$$

где $n(t)$ и $n(t + \Delta t)$ — число изделий, отказавших соответственно к моментам времени t и $t + \Delta t$.

Интенсивность отказов часто называют λ -характеристикой, или кривой жизни изделия.

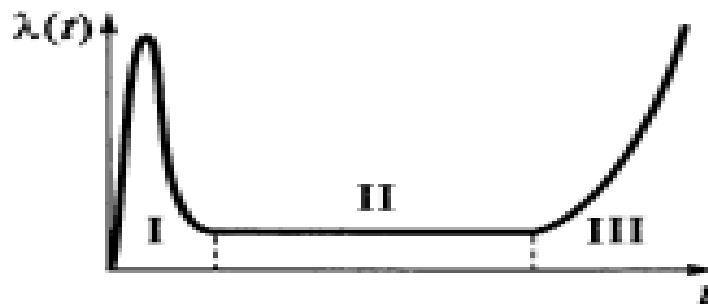


Рисунок 8.2 — Кривая жизни системы:
 I — период приработки; II — период нормальной эксплуатации;
 III — период массового износа и старения

Опыт эксплуатации РЭС показывает, что изменение интенсивности отказов системы длительного действия происходит следующим образом (рис. 8.2):

I — период начальной приработки аппаратуры. В этот период наблюдается повышенное число отказов системы вследствие различных производственных недостатков и выхода из строя наиболее ненадежных ее элементов со скрытыми дефектами. По мере выхода из строя дефектных элементов и замены их более качественными интенсивность отказов системы снижается. Продолжительность периода приработки зависит от типа системы и вида характеристик элементов, входящих в нее. Обычно период приработки составляет от десятков до сотен часов. Чем более однородны характеристики элементов, тем короче период приработки. Малая продолжительность периода приработки является достоинством системы, так как его можно исключить из времени эксплуатации в результате предварительной тренировки на заводе-изготовителе.

II — период нормальной эксплуатации системы, характеризуемый пониженным уровнем и постоянством интенсивности отказов во времени. Продолжительность этого периода зависит от среднего срока службы элементов системы и условий ее эксплуатации. Обычно она составляет несколько тысяч часов и характеризует долговечность аппаратуры. Интенсивность отказов системы в период нормальной эксплуатации можно снизить за счет проведения профилактических ремонтных мероприятий. Период нормальной эксплуатации системы определяется экспоненциальным законом распределения вероятности безотказной работы.

III — период массового износа и старения элементов системы, характеризуемый значительным ростом числа отказов. С наступлением этого периода дальнейшая эксплуатация системы нецелесообразна.

Средняя наработка до первого отказа — это математическое ожидание времени t исправной работы изделия до первого отказа:

$$T_{\bar{n}\bar{o}} = \int_0^{\infty} t\varphi(t)dt. \quad (8.13)$$

Вид функции $\varphi(t)$ определяется конкретным законом распределения случайной величины t .

Статистически средняя наработка до первого отказа находится как среднее арифметическое значение реализаций случайного интервала времени θ работы изделия до первого отказа:

$$\overline{T_{\bar{n}\bar{o}}} = \sum_{i=1}^{N_0} \theta_i / N_0, \quad (8.14)$$

где θ_i — время наработки i -го изделия до первого отказа;

N_0 — число исправных изделий, поставленных на испытания.

Средняя наработка на отказ — это математическое ожидание интервала времени между соседними восстанавливаемыми отказами:

$$T_0 = \int_0^{\infty} dF_k(t), \quad (8.15)$$

где $F_k(t)$ — функция распределения случайного времени θ_k исправной работы изделия между $(k-1)$ -м и k -м отказами.

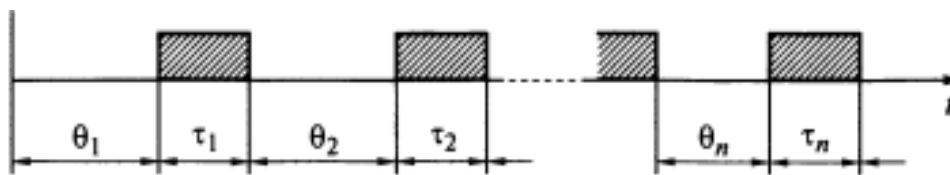


Рисунок 8.3 — Распределение отказов во времени

Статистически наработка на отказ определяется как среднее арифметическое значение реализаций случайного времени $\theta_{k,i}$ исправной работы изделия между $(k - 1)$ -м и k -м отказами без учета времени ремонта (рис. 8.3):

$$\overline{T}_0 = \sum_{i=1}^m \theta_{k,i} / m, \quad (8.16)$$

где m — число отказов испытываемых изделий.

При этом предполагается, что все вышедшие из строя радиоизделия заменяются новыми или восстанавливаются, т. е. число испытываемых изделий сохраняется одинаковым на протяжении всего испытания.

Параметр потока отказов — это предел отношения вероятности появления хотя бы одного отказа восстанавливаемого изделия за промежуток времени Δt к значению этого промежутка времени $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\overline{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (p\{t, t + \Delta t\} / \Delta t). \quad (8.17)$$

Статистически параметр потока отказов (средняя частота отказов) определяется как отношение числа отказов $\Delta n'$ в единицу времени к общему числу N_0 испытываемых изделий, включая отказы, возникшие после замены отказавших элементов:

$$\overline{V}(t) = \Delta n' / (N_0 \Delta t). \quad (8.18)$$

При сравнении формул (8.18) и (8.12) видно, что $\Delta n' \geq \Delta n$, поскольку в случае ремонтируемой РЭС число отказов может возрасти.

Наибольшее значение в теории надежности имеет так называемый **простейший поток отказов**, т. е. поток отказов, удовлетворяющий условиям стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Ординарный поток событий имеет место, когда вероятность появления двух и более отказов в единичном интервале времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного отказа.

Стационарный поток событий характеризуется постоянным относительным числом отказов в единичном интервале времени.

Понятие **отсутствие последействия** означает, что вероятность появления отказов в единичном интервале времени не зависит от возникновения отказов во всех других непересекающихся интервалах времени, т. е. отказы возникают независимо друг от друга. Для стационарных потоков отказов $\lambda(t) = \text{const}$, а так как значения $V(t)$ и $\lambda(t)$ совпадают, то $V(t) = \lambda(t) = \text{const}$.

8.2.2. Зависимости между отдельными показателями надежности

1. Определим связь между частотой отказов $\varphi(t)$ и вероятностью безотказной работы $P(t)$.

Проинтегрировав правую и левую части соотношения (8.8) для $Q(t)$ в пределах от 0 до t , получим выражение, подставив которое в формулу (8.6), запишем

$$P(t) = 1 - \int_0^t \varphi(t) dt = \int_t^{\infty} \varphi(t) dt. \quad (8.19)$$

2. Определим связь между частотой отказов $\varphi(t)$, интенсивностью отказов $\lambda(t)$ и вероятностью безотказной работы $P(t)$.

Воспользуемся статистическим определением интенсивности отказов $\lambda(t)$. Разделив числитель и знаменатель выражения (8.12) на $N_0 \Delta t$, запишем

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{\Delta n / (N_0 \Delta t)}{(N(t) \Delta t) / (N_0 \Delta t)} = \frac{\Delta n / (N_0 \Delta t)}{N(t) / N_0}.$$

Здесь выражение, стоящее в числителе, представляет собой функцию $\bar{\varphi}(t)$, а выражение, стоящее в знаменателе, согласно формуле (2.2), определяет функцию $\bar{P}(t)$, т. е. получаем

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{\varphi}(t) / \bar{P}(t), \quad (8.20)$$

что полностью соответствует формуле (8.11).

3. Определим аналитическую связь между вероятностью безотказной работы $P(t)$ и интенсивностью отказов $\lambda(t)$.

Воспользуемся равенством (8.6) и запишем формулу (8.11) в следующем виде:

$$\lambda(t) = -\frac{dP(t)}{dt} \frac{1}{P(t)} = -\frac{d}{dt} \ln P(t). \quad (8.21)$$

Проинтегрировав (8.21) от 0 до t , запишем

$$\ln P(t) = -\int_0^t \lambda(t) dt,$$

или, потенцируя окончательно, получим

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right). \quad (8.22)$$

Формула (8.22) является одной из важнейших в теории надежности невосстанавливаемых изделий.

Для практически важного случая $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ из (8.22) можно записать

$$P(t) = \exp(-\lambda t), \quad (8.23)$$

т. е. в период нормальной эксплуатации радиоизделия вероятность его безотказной работы снижается по экспоненциальному закону.

4. Определим связь между средней наработкой до первого отказа T_{cp} и вероятностью безотказной работы $P(t)$.

Для определения величины T_{cp} подставим выражение (8.8) в формулу (8.13):

$$T_{\tilde{n}\delta} = \int_0^{\infty} t \left(-\frac{dP(t)}{dt} \right) dt = - \int_0^{\infty} t dP(t).$$

Проинтегрировав полученное выражение по частям, получим

$$T_{\tilde{n}\delta} = -tP(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t) dt,$$

где первый интеграл равен нулю, следовательно,

$$T_{\tilde{n}\delta} = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (8.24)$$

Выражение (8.24) показывает, что кривая убыви радиоизделий (см. рис. 8.1) обладает следующими свойствами: площадь, ограниченная ею и осями координат, численно равна среднему времени безотказной работы T_{cp} . В случае когда $\lambda = \text{const}$, из формулы (8.24) имеем

$$T_{\tilde{n}\delta} = 1/\lambda. \quad (8.25)$$

Подставив выражение (8.25) в формулу (8.22), получим

$$P(t) = \exp(-t / T_{\tilde{n}\delta}). \quad (8.26)$$

5. Определим связь между гамма-процентной наработкой до отказа T_{γ} и средней наработкой до отказа T_{cp} .

Подставим выражение (8.26) в формулу (8.8), а полученное в результате выражение для $\varphi(t)$ — в формулу (8.9).

Выполнив необходимые преобразования, запишем выражение $P_\gamma = \exp(-T_\gamma / T_{\tilde{n}\delta})$, прологарифмировав которое, получим

$$T_\gamma = -T_{\tilde{n}\delta} \ln(P_\gamma) = -T_{\tilde{n}\delta} \ln(\gamma / 100). \quad (8.27)$$

Из формулы (8.27) следует: $P_\gamma < e^{-1}$ при $T_{cp} < T_\gamma$ и $P_\gamma > e^{-1}$ при $T_{cp} > T_\gamma$.

Таким образом, одного известного показателя надежности изделия ($P(t)$, $\lambda(t)$ или T_{cp}) вполне достаточно для нахождения других ее показателей надежности.

8.2.3. Единичные показатели восстанавливаемости

Большинство РЭС являются системами длительного использования, которые после отказов восстанавливаются и продолжают функционировать. Процесс восстановления, заключающийся в обнаружении и устранении отказа, так же как и процесс возникновения отказов, является вероятностным. В качестве случайной величины здесь выступает время восстановления, зависящее от многих факторов (характера возникшего отказа, приспособленности аппаратуры к быстрому обнаружению отказа, степени подготовки обслуживающего персонала, быстроты замены отказавшего элемента и др.). Опыт эксплуатации показывает, что основную долю времени восстановления (80... 90%) составляет процесс обнаружения отказавшего элемента.

Под **восстанавливаемостью** принято понимать свойство системы восстанавливать свою работоспособность после возникновения отказа с учетом качества обслуживания.

Количественно восстанавливаемость системы оценивается следующими показателями: вероятностью восстановления $P_\epsilon(\tau)$, средним временем восстановления T_ϵ и интенсивностью восстановления $\mu(\tau)$, — которые математически соответствуют рассмотренным показателям надежности: вероятности отказа $Q(t)$, среднему времени наработки на отказ T_0 и интенсивности отказов системы $\lambda(t)$.

Под **вероятностью восстановления** понимается вероятность того, что система будет восстановлена после отказа в течение заданного времени при определенных условиях ремонта. По аналогии с вероятностью отказа этот показатель можно представить как вероятность того, что случайное время восстановления системы ϵ будет не больше заданного:

$$P_\epsilon(\tau) = P \ \epsilon \leq \tau. \quad (8.28)$$

Статистически вероятность восстановления можно записать в виде

$$\bar{P}(\tau) = n_B(\tau) / N_B, \quad (8.29)$$

где $n_B(x)$ — число изделий, восстановленных за время τ ; N_B — число изделий, которое надо восстановить.

Следовательно, $P_B(\tau)$ является функцией распределения, или интегральным законом распределения, времени восстановления.

Количественно функция $P_B(\tau)$ обычно определяется через другие показатели восстанавливаемости: среднее время восстановления и интенсивность восстановления.

Наиболее наглядным показателем восстанавливаемости является **среднее время восстановления**, под которым понимается математическое ожидание случайной величины — времени восстановления:

$$T_B = \int_0^{\infty} \tau \varphi(\tau) d\tau. \quad (8.30)$$

Статистически среднее время восстановления можно представить в виде

$$\bar{T}_B = \sum_{i=1}^{N_B} \tau_{Bi} / N_B, \quad (8.31)$$

где τ_{Bi} — интенсивность восстановления i -го изделия, $i = \overline{1, N_B}$.

Известно, что для некоторых законов распределения случайной величины (экспоненциального, нормального и др.) наилучшей статистической оценкой математического ожидания является среднее арифметическое. В этих случаях определение статистического значения величины T_B аналогично определению среднего времени наработки на отказ. Например, если за определенный период эксплуатации аппаратуры произошло n отказов, то, просуммировав промежутки времени восстановления, можно найти среднее время восстановления по следующей формуле:

$$\bar{T}_B = \sum_{i=1}^n \tau_i / n. \quad (8.32)$$

Если имеется несколько комплектов однотипной аппаратуры, следует просуммировать промежутки времени восстановления по всем экземплярам и разделить эту сумму на общее число отказов.

Значение T_B показывает, сколько в среднем затрачивается времени на обнаружение и устранение одного отказа, и при заданных условиях обслуживания характеризует ремонтпригодность аппаратуры.

Как и при определении T_0 , точность значения T_e тем выше, чем больше используется статистических данных при расчете.

Заметим, что значение T_e в значительной мере зависит от технической подготовки обслуживающего персонала и наличия у него опыта по обнаружению и устранению отказов. Следовательно, при вычислении T_e и оценке ремонтпригодности аппаратуры необходимо обобщать данные по большому числу однотипных экземпляров, обслуживаемых разным техническим персоналом с целью снизить влияние субъективного фактора и получить усредненный результат.

Под **интенсивностью восстановления** системы понимается число восстановлений, произведенных в единицу времени.

В случае экспоненциального закона распределения интенсивность восстановления статистически определяется как отношение числа восстановлений системы за некоторый период времени к суммарному времени восстановления за тот же период:

$$\bar{\mu} = n / \sum_{i=1}^n \tau_i, [1/\div].$$

Этот показатель характеризует производительность восстановительных работ. Нетрудно заметить, что $\mu = 1/T_e$.

8.2.4. Комплексные показатели надежности РЭС

В настоящее время существуют три комплексных показателя надежности РЭС: коэффициенты готовности K_g , технического использования $K_{т.и.}$ и оперативной готовности $K_{о.г.}$.

Коэффициент готовности — это вероятность того, что изделие окажется работоспособным в произвольный момент времени его работы $t_{раб.}$:

$$K_r = T_0 / (T_0 + T_d), \quad (8.33)$$

где T_0 — наработка на отказ, определяемая по формуле (8.15).

Статистически коэффициент готовности можно представить в виде

$$\bar{K}_r = t_{\delta\alpha\alpha\Sigma} / (t_{\delta\alpha\alpha\Sigma} + t_{\delta\alpha\alpha\Sigma}),$$

где $t_{раб\Sigma}$ и $t_{рем\Sigma}$ — соответственно суммарное время работы и ремонта.

На практике также часто используется вспомогательный показатель надежности — **коэффициент простоя** K_n , характеризующий вероятность того, что изделие неработоспособно в произвольный момент времени:

$$K_n = T_d / (T_0 + T_d). \quad (8.34)$$

Очевидно, что K_e и K_n образуют полную группу событий, т. е. $K_e + K_n = 1$.

Коэффициент технического использования — это отношение математического ожидания времени пребывания изделия в работоспособном состоянии к сумме математических ожиданий времени его работы, ремонта и технического обслуживания ($T_{обсл.}$):

$$\hat{E}_{\dot{o}.\dot{e}.} = T_0 / (T_0 + T_{\hat{a}} + T_{\hat{a}\hat{n}\hat{e}}). \quad (8.35)$$

Статистически коэффициент технического использования можно записать в виде

$$\overline{K}_{\dot{o}.\dot{e}.} = t_{\dot{o}\dot{a}\dot{a}\Sigma} / (t_{\dot{o}\dot{a}\dot{a}\Sigma} + t_{\dot{o}\dot{a}\dot{n}\Sigma} + t_{\dot{o}\dot{a}\hat{n}\hat{e}\Sigma}), \quad (8.36)$$

где $t_{обсл\Sigma}$ — суммарное время технического обслуживания.

Коэффициент технического использования показывает, какую часть общего времени работы и простоя изделие находится в исправном состоянии.

Коэффициент оперативной готовности — это вероятность того, что радиоизделие окажется работоспособным в произвольный момент времени и, начиная с этого момента, безотказно проработает время $t_{раб}$:

$$K_{\hat{i}.\hat{a}.} = P_{\hat{i}.\hat{o}.} = K_r P(t_{\dot{o}\dot{a}\dot{a}}), \quad (8.37)$$

где $P_{н.ф.}$ — вероятность нормального функционирования, учитывающая начальное состояние изделия, его безотказность и восстанавливаемость; $P(t_{раб})$ — вероятность безотказной работы изделия в заданное время.

8.2.5. Рекомендации по выбору показателей надежности для различных электронных средств

Рассмотренные ранее показатели позволяют достаточно полно определить надежность сложных изделий (систем), в том числе современных ЭС, содержащих большое число электрорадиоизделий.

Наиболее полно надежность системы характеризуется частотой ее отказов $\varphi_c(t)$, так как эта величина является плотностью распределения, а следовательно, содержит в себе всю информацию о случайном явлении — времени безотказной работы [4].

Другие показатели надежности (в том числе интенсивность отказов) только лишь в совокупности позволяют охарактеризовать надежность сложной системы.

Время безотказной работы, или средняя наработка до первого отказа $T_{ср}$, является достаточно наглядной характеристикой надежности изделий.

Однако применение этого показателя для оценки надежности не рекомендуется в следующих случаях:

- время работы системы значительно меньше среднего времени безотказной работы ($T_{\text{раб}} \ll T_{\text{ср}}$);
- закон распределения времени безотказной работы не однопараметрический и для достаточно полной оценки требуются моменты высших порядков;
- при наличии системы резервирования;
- при непостоянной интенсивности отказов;
- при разном времени работы отдельных частей сложной системы.

Интенсивность отказов является наиболее удобной для практического использования характеристикой надежности простейших элементов, так как обеспечивает наиболее простое вычисление числовых значений надежности сложной системы, а также ее легко получить экспериментально в период нормальной эксплуатации (см. рис.8.2).

Наиболее целесообразно при определении надежности сложной системы использование вероятности безотказной работы, так как этот показатель:

- входит в качестве сомножителя в другие, более общие, характеристики системы, например, в эффективность и стоимость;
- характеризует изменение надежности во времени;
- сравнительно просто рассчитывается в процессе проектирования системы и оценивается в процессе ее испытания.

На основании изложенного можно утверждать, что показатели надежности современных ЭС могут быть различными и определяются областью их использования.

Для невосстанавливаемых резервированных и нерезервированных систем с длительным временем работы (самолетных, спутниковых блоков и т. д.) в качестве показателей надежности используют $P(t)$ (в этом случае необходимо задать интервал времени t), λ или $T_{\text{ср}}$.

Для нерезервируемых невосстанавливаемых систем с коротким временем работы (ракетных блоков, радиовзрывателей и т. д.) в качестве показателей надежности используют $P(t)$ или λ . Применение в этом случае в качестве показателя надежности $T_{\text{ср}}$ не рекомендуется.

Для восстанавливаемых резервированных и нерезервированных систем следует определять: K_e или $K_{o.z}$, T_0 или T_e , а также λ — интенсивность отказов в стационарном режиме.

8.2.6. Задачи для самостоятельного решения с примерами решения типовых вариантов

1. На испытание поставлены 1000 однотипных резисторов С2–54. За 10 000 ч отказали 5. Определить вероятность безотказной работы резисторов за 10 000 ч.

Решение. По формуле (8.2) определяем статистическую вероятность безотказной работы резисторов за 10 000 ч:

$$\bar{P}(10000) = \frac{N_0 - n(t)}{N_0} = \frac{1000 - 5}{1000} = 0.995.$$

2. В процессе приработки изделия, содержащего 120 элементов, вышли из строя 10. Определить вероятность исправной работы и вероятность отказа радиоизделия на начальном этапе эксплуатации.

3. В процессе испытаний 1000 электролитических конденсаторов за первые 100 ч наблюдений вышли из строя 2 конденсатора, а за последующие 200 ч — еще 5. Найти вероятность безотказной работы конденсаторов в интервале времени от 100 до 300 ч.

Решение. Используя формулу (8.4), определяем условную вероятность безотказной работы:

$$P(100, 300) = \frac{N(t_2)}{N(t_1)} = \frac{N - (n_1 + n_2)}{N_0 - n_1} = \frac{1000 - 7}{1000 - 2} = \frac{993}{998} = 0.995.$$

4. За первые 500 ч эксплуатации радиоизделия, содержащего 1000 элементов, произошло 3 отказа, и за последующие 500 ч — еще один. Найти вероятность безотказной работы радиоизделия в течение 500, 1000 ч и в интервале времени от 500 до 1000 ч.

5. Определить вероятность отказа резисторов, если при испытании 1000 штук через 100 ч остались исправными 990.

6. Вероятность исправной работы радиоизделий в интервале времени от 100 до 200 ч составляет 0,98. Число испытываемых радиоизделий $N_0 = 1000$, число отказов в указанном интервале времени — 5. Найти число радиоизделий, оставшихся исправными за 100 и 200 ч работы.

7. На испытании находились 1000 образцов неремонтируемой аппаратуры. Число отказов фиксировалось в течение 500 ч через каждые 50 ч. Построить кривую убыли аппаратуры, используя данные об отказах, приведенные в следующей таблице:

$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	0...0,5	0,5...1	1...1,5	1,5...2	2...2,5	2,5...3	3...3,5	3,5...4	4...4,5	4,5...5
$n(\Delta t_i)$	9	6	4	4	3	3	3	4	4	5

8. На испытании находились 1000 образцов неремонтируемой аппаратуры. Число отказов этой аппаратуры фиксировалось в течение 10 000 ч через каждые 500 ч.

Определить вероятность безотказной работы аппаратуры в интервале времени от 0 до 300 ч, условную вероятность безотказной работы в интервале времени от 7 000 до 8 000 ч и построить кривую убывания аппаратуры, используя данные об отказах, приведенные в следующей таблице:

$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	0...0,5	0,5...1	1...1,5	1,5...2	2...2,5	2,5...3	3...3,5	3,5...4
$n(\Delta t_i)$	9	6	4	4	3	3	3	4
$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	4...4,5	4,5...5	5...5,5	5,5...6	6...6,5	6,5...7	7...7,5	
$n(\Delta t_i)$	4	3	7	8	9	10	11	

9. При испытании 1000 транзисторов в течение 500 ч за первые 200 ч произошло 5 отказов, а за последующие 300 ч — еще 10. Найти интенсивности этих отказов в интервалах времени от 0 до 200 ч и от 200 до 500 ч.

10. Определить, какое число резисторов необходимо поставить на испытания, чтобы получить не менее 50 отказов в течение 10 000 ч, если ожидаемая интенсивность отказа одного резистора $\bar{\lambda}(t) = 5 \cdot 10^{-5} 1/\div$.

11. В интервале времени работы от 1200 до 1500 ч интенсивность отказов ЭРИ составила $5 \cdot 10^{-5} 1/\text{ч}$, а число отказов — 50. Определить число ЭРИ, оставшихся исправными за 1500 ч.

12. В интервале времени испытаний от 1000 до 1100 ч интенсивность отказов конденсаторов составила $4 \cdot 10^{-4} 1/\text{ч}$, а число отказов — 10. Найти вероятность безотказной работы конденсаторов в указанном интервале времени.

13. Результаты испытаний 1000 интегральных микросхем (ИМС) в течение 8 000 ч с интервалом испытаний 500 ч приведены в следующей таблице:

$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	0...5	5...10	10...15	15...20	20...25	25...30	30...35	35...40
$n(\Delta t_i)$	145	86	77	69	62	50	51	45
$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	40...45	45...50	50...55	55...60	60...65	65...70	70...75	75...80
$n(\Delta t_i)$	41	37	33	35	60	75	62	42

Используя имеющиеся результаты статистических испытаний построить временную зависимость кривой жизни ИМС и указать этапы ее жизненного цикла.

14. Результаты статистических испытаний 1000 образцов неремонтируемой аппаратуры с фиксированием числа отказов через каждые 100 ч работы приведены в следующей таблице:

$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	0...1	1...2	2...3	3...4	4...5	5...6	6...7	7...8	8...9	9...10
$n(\Delta t_i)$	50	20	20	19	18	18	18	17	16	15

Построить зависимость интенсивности отказов аппаратуры от времени. Указать, на каком этапе жизненного цикла изделия проводились испытания.

15. Результаты статистических испытаний 10 000 образцов неремонтируемой аппаратуры с фиксированием числа отказов через каждые 100 ч работы приведены в следующей таблице:

$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	0...1	1...2	2...3	3...4	4...5	5...6	6...7	7...8	8...9	9...10
$n(\Delta t_i)$	50	40	32	20	20	17	16	16	15	14
$\Delta t_i, 10^2 \cdot \text{ч}$	10...11	11...12	12...13	13...14	14...15	15...16	16...17	17...18	18...19	19...20
$n(\Delta t_i)$	13	12	12	13	11	12	15	17	18	20

Найти частоту отказов аппаратуры и построить соответствующую зависимость.

16. На испытания поставлена партия из 1000 однотипных транзисторов. За первые 3 000 ч отказали 80 из них, а за последующие 1000 ч — еще 50. Определить статистическую интенсивность отказов транзисторов в интервале времени испытаний от 3 000 до 4 000 ч.

17. Определить интенсивность отказов интегральной микросхемы в интервале времени работы от 1800 до 2600 ч, если из 200 ИМС, поставленных на испытания, 1800 ч до отказа проработала одна ИМС, 2000 ч — две, 2200 ч — четыре, 2400 ч — две, 2600 ч — одна.

18. Вероятность безотказной работы ЭРИ в течение 3 000 ч составляет 0,95 при числе произошедших отказов — 5, а в течение 3 100 ч — 0,9. Найти число изделий, поставленных на испытания, и число их отказов в интервале времени работы от 3 000 до 3 100 ч.

19. При испытании 500 конденсаторов число их отказов за первые 1000 ч составило 4, а в последующие 100 ч — 5. Найти вероятность безотказной работы конденсаторов в интервале времени работы от 1000 до 1100 ч.

20. Наблюдение за работой трех образцов ЭРИ показало: первый образец работал 181 ч и отказал 6 раз, второй работал 329 ч и отказал 11 раз, третий работал 245 ч и отказал 8 раз. Определить среднюю наработку до первого отказа одного образца ЭРИ.

21. В течение наблюдаемого периода эксплуатации одного образца радиолокационной станции было зарегистрировано 15 отказов. При этом до начала наблюдения станция проработала 258 ч, а к концу наблюдения ее наработка составила 1233 ч. Определить среднюю наработку станции до первого отказа.

22. Интенсивность отказов, полученная при испытаниях серии ИМС из 1000 штук, равна $2 \cdot 10^{-6}$ 1/ч. Определить число ИМС, отказавших в течение 1000 ч работы.

8.2.7. Показатели невосстанавливаемых и восстанавливаемых РЭС

На испытания обычно устанавливаются несколько однотипных РЭС, фиксируются их отказы и время наработки до появления отказа. В зависимости от функций, выполняемых РЭС, они подразделяются на невосстанавливаемые и восстанавливаемые. Как правило, процесс восстановления РЭС характерен для сложных и многофункциональных систем.

При этом для показателей надежности используются две формы представления: вероятностная и статистическая. Вероятностная форма применяется при аналитических оценках надежности, а статистическая — при экспериментальных исследованиях или испытаниях.

Рассмотрим наиболее часто применяемые при испытаниях показатели надежности РЭС.

Невосстанавливаемые РЭС.

1. Вероятность безотказной работы РЭС в интервале времени от 0 до t_{cp} .

а) вероятностное определение:

$$P(0, t_{cp}) = P(t_{cp}) = P\{T_1 \geq t_{cp}\} = 1 - F_1(t_{cp}), \quad (8.38)$$

где T_1 — случайная наработка РЭС до первого отказа;

$F(t_{cp})$ — распределение времени до первого отказа.

Таким образом, $P(t_{cp})$ — вероятность того, что объект проработает безотказно в течение заданного времени, начав работать в момент времени $t = 0$;

б) статистическое определение:

$$P(t_{cp}) = N(t_{cp}) / N(0) = 1 - n(t_{cp}) / N(0), \quad (8.39)$$

где $N(T_{cp})$ — количество работоспособных РЭС к моменту времени T_{cp} ;

$N(0)$ — количество РЭС, поставленных на испытание в момент $t = 0$;

$n(T_{cp})$ — число отказавших РЭС к моменту времени.

2. Вероятность отказа объекта в интервале времени от 0 до UP определяется как дополнительная к вероятности безотказной работы, т. е.

$$Q(t_{cp}) = 1 - P(t_{cp}) \quad (8.40)$$

и

$$\hat{Q}(t_{cp}) = 1 - \hat{P}(t_{cp}) \quad (8.41)$$

Сумма вероятностей безотказной работы и появления отказа, как противоположных событий, равна единице:

$$P(t_{cp}) + Q(t_{cp}) = 1. \quad (8.42)$$

3. Плотность распределения отказов.

а) Вероятностное определение:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = -\frac{d}{dt} P(t), \quad (8.43)$$

т. е. $f(t)$ — плотность вероятности того, что время работы РЭС до отказа окажется меньше t ;

б) статистическое определение:

$$f(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(0)\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(0)\Delta t} = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(0)\Delta t}, \quad (8.44)$$

где $f(t)$ — это отношение числа отказов в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ к произведению количества исправных РЭС в начальный момент времени $t = 0$ на длительность промежутка времени Δt .

4. Интенсивность отказов РЭС в момент времени t .

а) вероятностное определение:

$$\lambda(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \frac{d}{dt} F(t) = \frac{f(t)}{P(t)}, \quad (8.45)$$

где $\lambda(t)$ — условная плотность вероятности отказа РЭС к моменту времени t при условии, что до этого момента отказ РЭС не произошел.

б) статистическое определение:

$$\lambda(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(t)\Delta t}, \quad (8.46)$$

т. е. $\lambda(t)$ — отношение числа отказов за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ к произведению количества исправных РЭС в момент времени на длительность промежутка времени Δt .

5. Средняя наработка РЭС до отказа.

а) вероятностное определение:

$$T_{\text{н\o}} = M T_1 = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (8.47)$$

В выражении (8.47) величина $T_{\text{н\o}}$ является математическим ожиданием (средним значением) наработки до отказа;

б) статистическое определение:

$$T_{\text{н\o}} = \frac{1}{N(0)} (T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + \dots + T_1^{N(0)}) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} T_1^i. \quad (8.48)$$

Значение T_{cp} чаще записывается в форме

$$T_{\tilde{n}\tilde{o}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i, \quad (8.49)$$

где $t_i = T_i$ — случайное время наработки до i -го отказа;

$N = N(0)$ — количество РЭС, поставленных на испытание в момент времени t_i .

Из рассмотренных количественных показателей надежности для невосстанавливаемых РЭС наиболее важным является интенсивность отказов $\lambda(t)$. Многочисленными исследованиями установлены три основные зависимости интенсивности отказов от наработки технических устройств (рис. 8.4). Для устройств первой группы с функцией интенсивности $\lambda(t)$ вида рис. 8.4, а характерны относительно короткий период I приработки, на котором $\lambda(t)$ либо убывает, либо нарастает (пунктирные линии), и основной период II нормальной эксплуатации РЭС, в течение которого интенсивность отказов не зависит от наработки и остается постоянной вплоть до выработки назначенного ресурса.

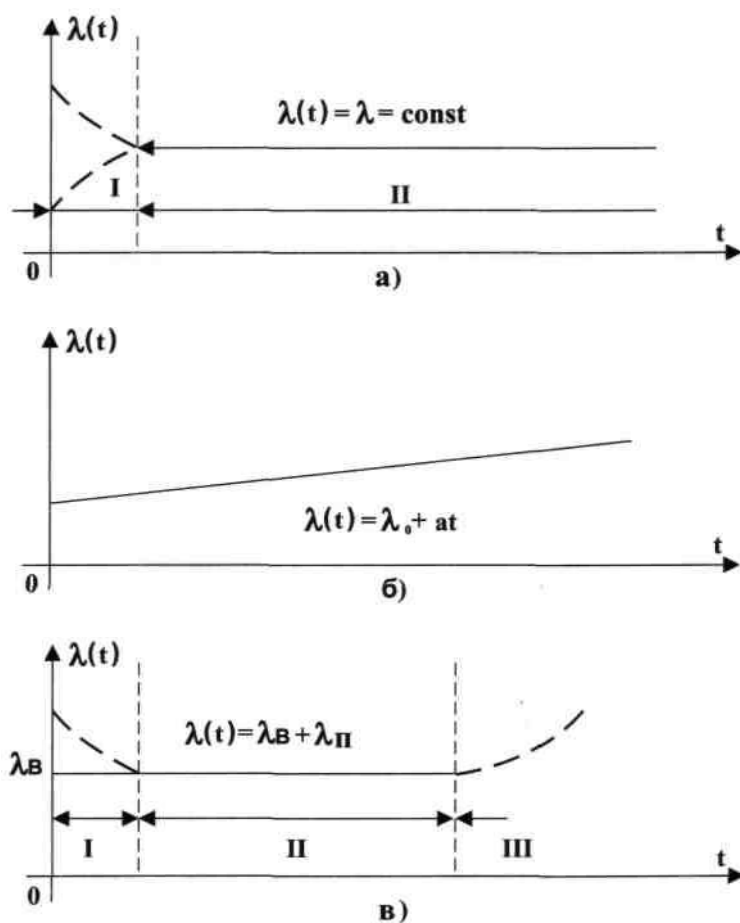


Рисунок 8.4 — Зависимость интенсивности отказов от наработки

Для устройств второй группы (см. рис. 8.4, б) типично закономерное ухудшение их параметров по наработке и практически линейное возрастание интенсивности отказов.

На кривой интенсивности $\lambda(t)$ третьего вида (рис. 8.4, в) можно выделить три участка: период приработки I, период нормальной эксплуатации II с $\lambda(t) = \text{const}$ и период III с возрастанием интенсивности отказов по причине износа и старения РЭС. Для РЭС с $\lambda(t)$ видов «б» и «в» предусматривается проведение профилактических работ и ремонтов с целью поддержания высокого уровня их надежности в течение всего срока службы (ресурса). Межремонтный ресурс для устройств с интенсивностью отказов вида «в» обычно назначается до наступления процессов износа и старения.

Для стационарных потоков отказов, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, приведенные выше соотношения (8.38)–(8.49) упрощаются и принимают вид

$$P(t_{\tilde{n}\delta}) = e^{-\lambda(t)}; \quad (8.50)$$

$$q(t_{\tilde{n}\delta}) = 1 - e^{-\lambda(t)}; \quad (8.51)$$

$$f(t_{\tilde{n}\delta}) = \lambda e^{-\lambda(t)}; \quad (8.52)$$

$$T_{\tilde{n}\delta} = \frac{1}{\lambda}. \quad (8.53)$$

Для анализа постепенных отказов с учетом явлений износа и старения используется гипотеза о нормальном распределении наработки до отказа. Тогда плотность вероятности постепенных отказов выражается как

$$f_{\tilde{I}}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_{\tilde{I}})^2}{2\sigma^2}}, \quad (8.54)$$

а

$$P_{\tilde{I}}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(t-T_{\tilde{I}})^2}{2\sigma^2}} dt = 0,5 - \hat{O}\left(\frac{t-T_{\tilde{I}}}{\sigma}\right), \quad (8.55)$$

где T_n , σ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение наработки до постепенного отказа;

$\hat{O}\left(\frac{t-T_{\tilde{I}}}{\sigma}\right)$ — нормированная функция Лапласа.

Соответственно интенсивность постепенных отказов будет равна

$$\lambda_{\bar{I}}(t) = \frac{f_{\bar{I}}(t)}{P_{\bar{I}}(t)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(t-T_{\bar{I}})^2}{2\sigma^2}}}{0,5 - \hat{O}\left(\frac{t-T_{\bar{I}}}{\sigma}\right)}. \quad (8.56)$$

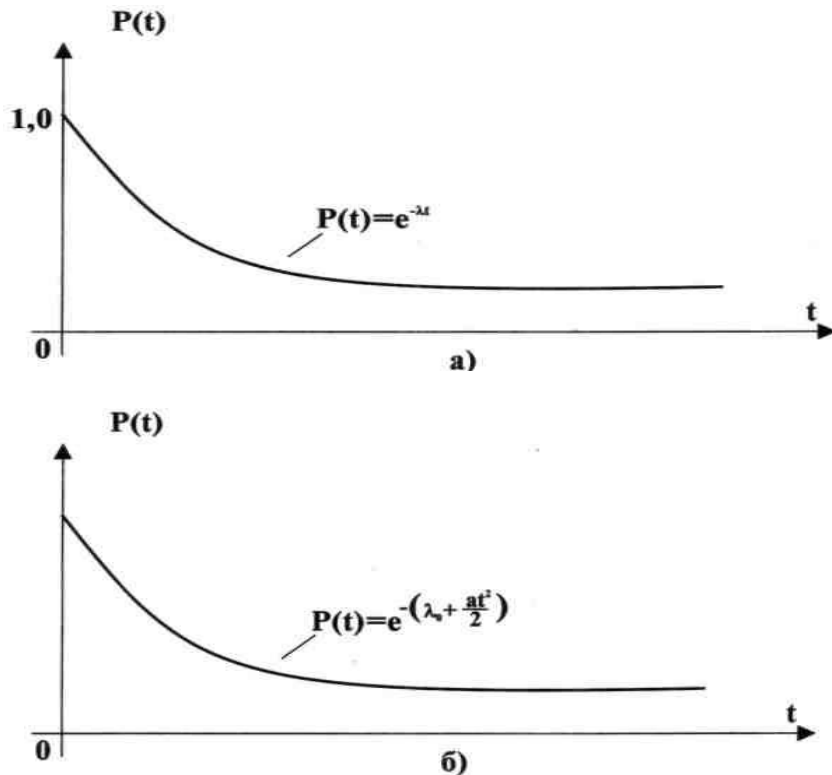
Выражения (8.54)–(8.56) используются в данном случае для описания и расчета характеристик надежности РЭС с кривой $\lambda(t) = \lambda_B + \lambda_{II}(t)$, где λ_B — постоянная по наработке интенсивность внезапных отказов, а $\lambda_{II}(t)$ — интенсивность постепенных отказов.

С учетом (8.56) будем иметь

$$P(t) = e^{\int_0^t \lambda_B + \lambda_{\bar{I}}(t) dt} = e^{-\lambda_B t \left[0,5 - \hat{O}\left(\frac{t-T_{\bar{I}}}{\sigma}\right) \right]}, \quad (8.57)$$

$$f(t) = \lambda_B + \lambda_{\bar{I}}(t) e^{-\lambda_B t \left[0,5 - \hat{O}\left(\frac{t-T_{\bar{I}}}{\sigma}\right) \right]}. \quad (8.58)$$

На рисунке 8.5 показан вид зависимостей вероятности безотказной работы от наработки для устройств, имеющих интенсивности отказов вида a , b , $в$ (см. рис. 8.4).



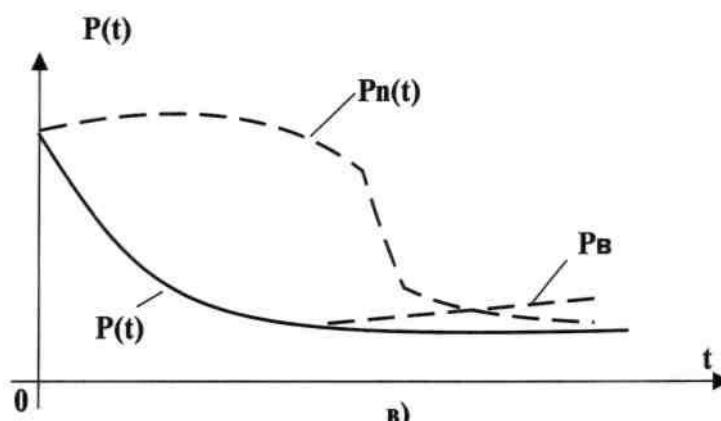


Рисунок 8.5 — Зависимости вероятности безотказной работы от наработки

До сих пор речь шла о вероятностных показателях надежности РЭС. По статистическим данным, полученным в процессе эксплуатации или испытания РЭС, можно вычислить:

$$P(t) = R(t) / R_0; \quad (8.59)$$

$$q(t) = n(t) / R_0 = 1 - p(t); \quad (8.60)$$

где R_0 — число поставленных на испытание РЭС;
 $R(t)$ — число работоспособных;
 $n(t)$ — число отказавших РЭС за время наработки t ;
 $R_0 = R(t) + n(t)$.

Вопросы оценки показателей надежности РЭС по статистическим данным будут рассмотрены ниже.

Восстанавливаемые РЭС.

Для восстанавливаемых объектов приведем только дополнительные показатели надежности.

Все показатели надежности для невосстанавливаемых РЭС в случае необходимости могут быть применены для оценки безотказности и восстанавливаемых РЭС.

Испытания на надежность восстанавливаемых РЭС могут быть рассмотрены в следующей последовательности. В начальный момент времени изделие РЭС поступает на испытание и работает до отказа.

При отказе происходит полное восстановление изделия, и оно вновь работает до отказа и т. д. Как правило, РЭС восстанавливаются агрегатным методом, т. е. заменой отказавшего изделия на исправное (или заменой отдельных деталей или сборочных единиц).

События отказов восстанавливаемых однотипных РЭС образуют поток однородных событий. В свою очередь события восстановления (замены) РЭС также образуют поток однородных событий восстановления.

При рассмотрении надежности восстанавливаемых изделий РЭС в смысле их безотказности время восстановления не учитывается, поэтому можно считать события отказа и восстановления совпадающими.

В качестве характеристик потока отказов восстанавливаемых радиоустройств обычно используются:

– ведущая функция потока, равная математическому ожиданию числа отказов восстанавливаемых РЭС в интервале наработки:

$$\bar{n}(t) = \sum_0^{\infty} n P_n(t),$$

где $P_n(t)$ — вероятность появления равно n отказов в интервале t ;

– интенсивность потока отказов:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{n}(t + \Delta t) - \bar{n}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{n}(t)}{dt}, \quad (8.61)$$

где $\bar{n}(t + \Delta t)$, $\bar{n}(t)$ — соответственно математические ожидания чисел отказов в интервалах $(t + \Delta t)$ и $(0, t)$;

– параметр потока отказов, представляющий собой плотность вероятности возникновения отказа восстанавливаемого изделия РЭС в рассматриваемый момент времени:

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_0(t, t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (8.62)$$

где $P_0(t, t + \Delta t)$ — вероятность того, что в интервале $(t, t + \Delta t)$, отказов не будет.

Наработка на отказ, равная отношению наработки t_{Σ} восстанавливаемых изделий РЭС к математическому ожиданию числа их отказов в течение этой наработки $\bar{n}(t + t_{\Sigma})$:

$$T_0(t, t_{\Sigma}) = \frac{t_{\Sigma}}{\bar{n}(t + t_{\Sigma})}. \quad (8.63)$$

Отличие параметра $\mu(t)$ от интенсивности $\omega(t)$ потока отказов состоит в следующем: если рассматривать малый интервал наработки $(t, t + dt)$, то $\mu(t)dt$ примерно равно вероятности появления ровно одного отказа в этом интервале, $\omega(t)dt$ — вероятности появления хотя бы одного отказа.

При испытаниях полагают, что отказы восстанавливаемых РЭС образуют ординарные пуассоновские потоки, для которых $\mu(t) = \omega(t)$ и справедливы соотношения

$$P_n(t_1, t_2) = \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \omega(u) du \right]^n}{n!} e^{-\int \omega(u) du}; \quad (8.64)$$

$$\bar{n}(t, t + t_\Sigma) = \int_{t_1}^{t+t_\Sigma} \omega(u) du; \quad (8.65)$$

$$T_0 = (t, t + t_\Sigma) = \frac{t_\Sigma}{\int_{t_1}^{t+t_\Sigma} \omega(u) du}. \quad (8.66)$$

Следует заметить, что при постоянной интенсивности отказов, т. е. $\lambda = \text{const}$, наработка на отказ равна наработке до отказа РЭС, т. е.

$$T_0 = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\lambda} = T_{\text{нр}}. \quad (8.67)$$

Выше были приведены единичные показатели надежности. Примером комплексного показателя надежности может служить коэффициент готовности

$$K_{\tilde{a}} = \frac{T_0}{T_0 + T_B}, \quad (8.68)$$

где T_0 — наработка на отказ;

T_B — среднее время восстановления.

Из формулы (8.68) следует, что коэффициент готовности характеризует одновременно два свойства надежности — безотказность и ремонтпригодность.

8.2.8. Специальные показатели надежности РЭС

С появлением РЭС, имеющих в своем составе цифровые вычислительные устройства, в практических расчетах надежности стали применяться специальные показатели, основными из которых являются:

- вероятность $A(a, t)$ заданной суммарной наработки a за фиксированное календарное время t ;
- вероятность $B(b, t)$ наличия интервала безотказной работы, большего заданной величины b , за фиксированное календарное время t ;
- вероятность $C^*(c, t)$ отсутствия интервала простоя, большего допустимой величины c , за фиксированное суммарное время простоя t .

Рассмотрим более подробно содержание перечисленных специальных показателей надежности РЭС.

1. Вероятность заданной суммарной наработки a за фиксированное календарное время t .

а) вероятностное определение:

$$A(a, t) = P \{ S(t) \geq a \}, \quad (8.69)$$

где a — заданный уровень суммарной наработки;

$S(t)$ — суммарная наработка за время t ;

б) статистическое определение:

$$A(a, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} S_i(t) \geq a, \quad (8.70)$$

где $N(0)$ — общее число устройств;

$S_i(t)$ — суммарная наработка i -го устройства за время t ;

$$S_i(t) \geq a = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i(t) \geq a \\ 0, & \text{если } S_i(t) < a \end{cases}.$$

Показатели $A(a, t)$ и $A(a, t)$ используются при оценке надежности систем, которые имеют перерывы в работе и могут включаться в любой момент времени t .

2. Вероятность наличия интервала безотказной работы, большего заданной величины b , за фиксированное календарное время t .

а) вероятностное определение:

$$B(b, t) = P \{ \exists T_i \geq b, T_i \in [0, t] \}, \quad (8.71)$$

где b — заданная величина интервала;

t — фиксированное календарное время;

$\exists$ — квантор «существует»;

T_i — интервал безотказной работы;

$B(b, t)$ — вероятность того, что за время t проявится хотя бы один интервал безотказной работы T_i , больший заданной величины b ;

б) статистическое определение:

$$B(b, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} [T_i, h_i]_b, \quad (8.72)$$

где $\{T, h\}_i$ — реализация последовательности интервалов безотказной работы и простоя для i -го устройства за время t ;

$$\left[T, h_i \right]_b = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in T, h_i \text{ и } t \leq b; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Показатели (8.69)–(8.72) используются для оценки надежности РЭС, в которых после сбоя или отказа возможно повторное выполнение прежней программы.

3. Вероятность отсутствия интервала простоя, большего допустимой величины c , за фиксированное суммарное время простоя t .

а) вероятностное определение:

$$\tilde{N}^*(\tilde{n}, t) = P \left(\forall h_i < c \mid S_B(t) = t, h_i \in [0, t] \right), \quad (8.73)$$

где h_i — интервал простоя (включая часть незавершенного последнего интервала h^*);

$S_B(t)$ — суммарное время простоя, т.е. $C^*(c, t)$ — вероятность того, что за суммарное время простоя не появится ни одного интервала простоя h_i (включая часть незавершенного последнего интервала h^*), большего заданной величины C ($\forall$ — квантор «для всех»);

б) статистическое определение:

$$\tilde{N}^*(\tilde{n}, t) = \frac{1}{N(0)} \sum_{i=1}^{N(0)} \left[h_i \right]_c, \quad (8.74)$$

где h_i — реализация последовательности интервалов безотказного простоя для i -го изделия РЭС за суммарное время простоя t .

Запись $\left[h_i \right]_c$ в выражении (8.74) означает:

$$\left[h_i \right]_c = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in h_i \text{ и } t \leq c; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Проще говоря, $C^*(c, t)$ — это доля общего числа РЭС, у которых в реализации времени простоя за суммарное время простоя t не окажется ни одного интервала простоя ξ (включая часть незавершенного простоя интервала h^*), большего заданной величины.

8.2.9. Оценка надежности РЭС вероятностными методами

Оценка показателей надежности (безотказности) вероятностными методами производится как на этапе проектирования, так и в процессах испытаний и эксплуатации РЭС. При оценке надежности сложных невосстанавливаемых РЭС предполагается, что интенсивности отказов составляющих ее элементов известны, а сама РЭС разделяется на такие элементы, отказы которых можно считать независимыми.

Соединение элементов системы называется последовательным (в смысле надежности), если отказ хотя бы одного из них приводит к отказу всей системы. Вероятность безотказной работы системы с последовательным соединением t элементов равна

$$P_c(t) = \prod_{k=1}^m P_k(t) = e^{-\int_0^t \sum_{k=1}^m \lambda_k(u) du}, \quad (8.75)$$

где $P_k, \lambda_k(u)$ относится к k -му элементу РЭС, а вероятность отказа системы равна

$$q_c(t) = 1 - P_c(t). \quad (8.76)$$

Интенсивность отказов РЭС с последовательным соединением элементов определяется суммой:

$$\lambda_c(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_k(t). \quad (8.77)$$

Средняя наработка до отказа РЭС:

$$T_{1c} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \lambda_c(u) du} dt. \quad (8.78)$$

По (8.75)–(8.78) можно оценить показатели РЭС при любых функциях интенсивности отказов. В частности, при $\lambda_k = \text{const}, k = 1, 2, 3, \dots, m$

$$\lambda_c(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_k; \quad (8.79)$$

$$T_1 = 1/\lambda_c; \quad (8.80)$$

$$P_c = e^{-\lambda_{ct}}. \quad (8.81)$$

Последовательное соединение элементов на структурной схеме надежности (рис. 8.6) называется также основным. Из анализа (8.75)–(8.78) следует, что чем больше элементов последовательно соединено в РЭС, тем ниже ее показатели надежности.



Рисунок 8.6 — Последовательное соединение элементов

Если, например, надежность РЭС должна быть равна $P_c(t) = 0,9$, а она состоит из 10 элементов, то надежность (в смысле вероятности безотказной работы) каждого элемента должна быть не менее 0,99. Однако если в РЭС 1000 элементов, надежность каждого из них уже должна иметь величину 0,9999.

При параллельном соединении элементов (рис. 8.7) отказ РЭС происходит только тогда, когда отказывают все элементы. Вероятность отказа РЭС при параллельном соединении элементов равна произведению вероятностей отказов отдельных элементов:

$$q_c(t) = \prod_{k=1}^m q_k(t) = \prod_{k=1}^m 1 - P_k(t). \quad (8.82)$$

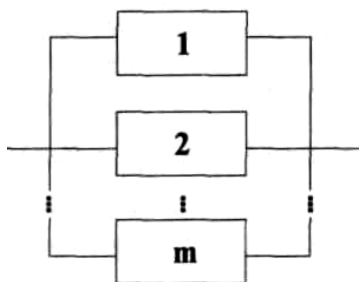


Рисунок 8.7 — Параллельное соединение элементов

Из анализа (8.82) следует, что с увеличением числа параллельно соединенных элементов вероятность безотказной работы системы повышается. Поэтому системы с параллельным соединением (сборочных единиц, блоков и т. д.) называются резервированными, а величина $m - 1$ считается кратностью резервирования.

Обычно параллельно соединенные элементы являются одинаковыми по конструкции. Если принять $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda = \text{const}$, то с учетом (8.50)–(8.52) формулу (8.46) можно преобразовать к виду

$$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k e^{-k\lambda t}. \quad (8.83)$$

Функция плотности вероятности наработки до отказа равна

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda(t)P(t). \quad (8.84)$$

По аналогии с (8.84) продифференцируем (8.83) и получим

$$f_c(t) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k k \lambda e^{-k\lambda t} = m \lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{m-1}. \quad (8.85)$$

Отсюда интенсивность отказов системы

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{m \lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{m-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})^m}. \quad (8.86)$$

Средняя наработка до отказа системы в этом случае будет равна

$$T_{1c} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k e^{-k\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right], \quad (8.87)$$

то есть величина T_{1c} возрастает с увеличением кратности резервирования $m - 1$.

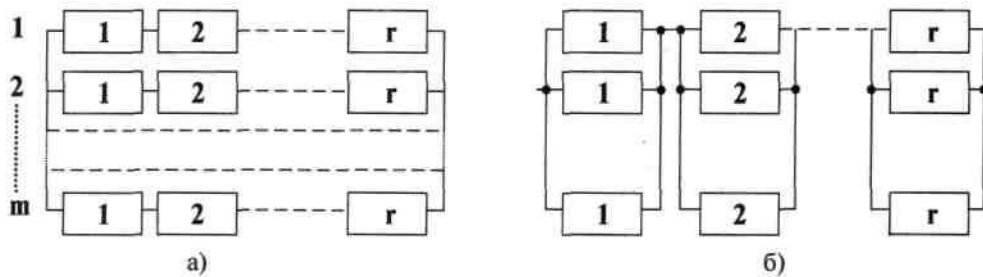


Рисунок 8.8 — Структурные схемы надежности с общим и отдельным видами резервирования:

a — общее резервирование; b — отдельное резервирование

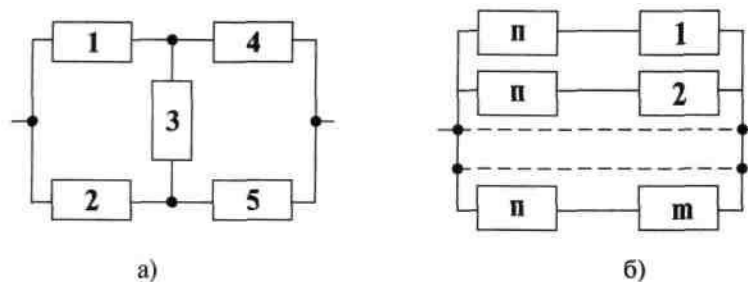


Рисунок 8.9 — Структурные схемы надежности со смешанным резервированием и резервированием замещением:

a — смешанное резервирование, b — схема резервирования замещением

На рисунках 8.8, 8.9 показаны структурные схемы надежности с различными видами резервирования. При расчете схем с общим резервированием (рис. 8.5, а) вначале используется формула для последовательного соединения элементов, а затем — параллельного. Для структурных схем вида б (см. рис. 8.8), наоборот, вначале подсчитывается вероятность безотказной работы для участков с параллельным соединением элементов, а затем — для последовательного соединения участков. Для схемы б (см. рис. 8.8) будем иметь

$$P_{\text{нб}}(t) = \prod_{i=1}^t \left[1 - \prod_{j=1}^r 1 - P_{ij}(t) \right]. \quad (8.88)$$

Более сложным является смешенное резервирование (рис. 8.9, а). Для оценки надежности такой системы используется каноническое уравнение

$$\prod_{k=1}^m (P_K + q_K) = 1. \quad (8.89)$$

Равенство (8.89) охватывает все 2^m возможных состояний системы из t элементов, образующих полную группу состояний. Например, полагая, что в схеме на рис. 8.9, а все элементы равнонадежны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_5 = \lambda$), получим

$$(p + q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3p^2 + 10p^2q^2 + 5pq^4 + q^5 = 1.$$

Будем считать, что система работоспособна, если сохраняется хотя бы одна цепь из исправных элементов, связывающих вход и выход системы.

Отказ системы произойдет, если откажут все элементы. Вероятность такого события равна q^5 . Отказ любых четырех элементов с вероятностью $5pq^4$, а также отказы трех элементов в комбинациях 123, 124, 125, 451, 452, 453, 135, 234 (вероятность $8p^2q^3$) и двух в комбинациях 12, 45 (вероятность $2p^3q^2$) приводят к нарушению работоспособности системы. Таким образом, вероятность отказа системы можно оценить с помощью уравнения

$$q_c = q^5 + 5pq^4 + 8p^2q^3 + 2p^3q^2,$$

а вероятность безотказной работы —

$$p_c = p^5 + 5p^4q + 8p^3q^2 + 2p^2q^3.$$

На практике находит применение приближенный способ оценки надежности РЭС по среднегрупповым интенсивностям отказов элементов. По этому способу подсчитывается количество m_j однотипных элементов, имеющих в системе (однотипных транзисторов, конденсаторов, диодов,

резисторов и т. д.). По справочникам определяется значение λ_i интенсивности отказов элементов, а интенсивность отказов системы оцениваются путем сложения суммарных интенсивностей отказов всех групп однотипных элементов, входящих в систему:

$$\lambda_c = \sum_{j=1}^K m_j \lambda_j, \quad (8.90)$$

где k — число групп однотипных элементов.

В оценке показателей надежности РЭС принимаются во внимание режимы их работы и воздействие на них различных физических факторов (температуры, вибрации, давления). На рисунке 8.10 приведены для примера такие зависимости для транзисторов, диодов и трансформаторов, где λ_0 — интенсивность отказов элементов по справочным данным.

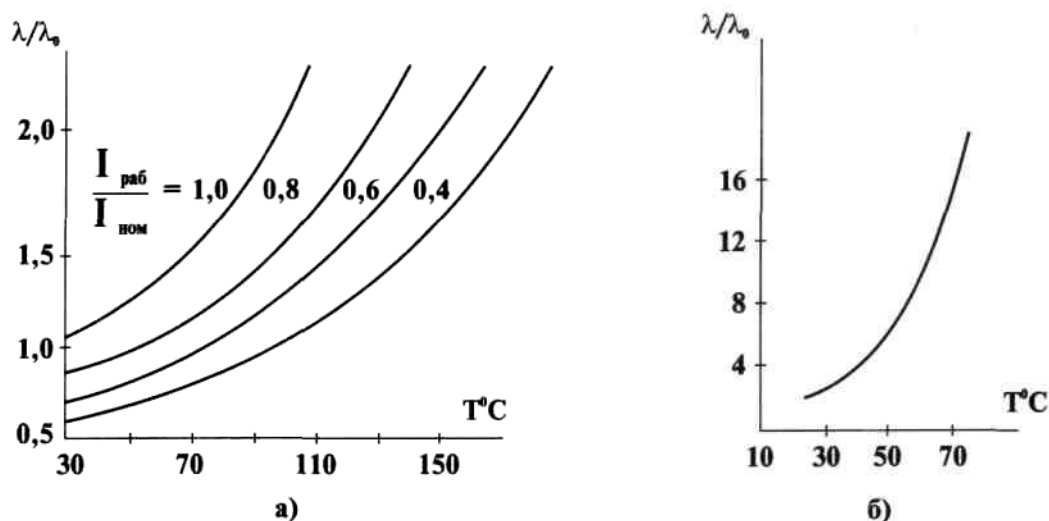


Рисунок 8.10 — Зависимость интенсивности отказов от температуры:

a — диодов и транзисторов; *б* — трансформаторов

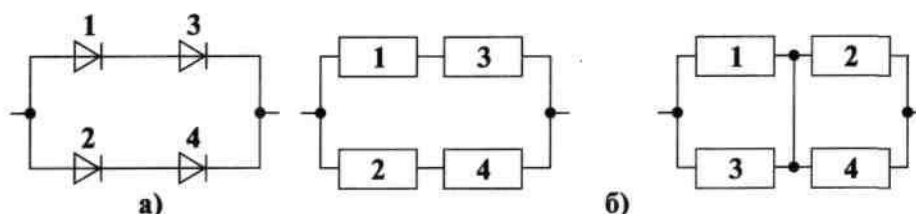


Рисунок 8.11 — Структурные схемы надежности:

a — по обрыву; *б* — по короткому замыканию

В общем случае табличные значения интенсивности отказов, полученные для нормальных условий (15 °С, 760 мм. рт. ст.), принято умножать

на эксплуатационный коэффициент $\alpha > 1$ и считать $\lambda = \alpha\lambda_0$. Значения коэффициентов устанавливается с учетом опыта эксплуатации или путем специальных поставленных испытаний.

Отметим некоторые особенности оценки надежности электрических схем РЭС, где возможны отказы элементов двух типов — обрыв цепи или короткое замыкание. Каноническое уравнение надежности для электрической схемы, состоящей из k элементов, имеет вид

$$\prod_{k=1}^m (P_k + q_{k(\hat{E}C)} + q_{k(0)}) = 1, \quad (8.91)$$

где P_k — вероятность безотказной работы k -го элемента;

$q_{k(\kappa\lambda)}$, $q_{k(0)}$ — вероятности короткого замыкания и обрыва k -го элемента.

Методику оценки надежности системы с учетом возможных обрывов и коротких замыканий рассмотрим на примере простой схемы, показанной на рисунке 8.11, для которой можно записать равенство

$$(p + q_{\kappa\lambda} + q_0)^4 = 1.$$

Число возможных состояний по приведенной формуле равно $3^4 = 81$, из них одно с вероятностью p^4 соответствует работоспособному состоянию всех четырех элементов, а остальные — различным комбинациям обрывов и коротких замыканий элементов. Анализ схемы (см. рис. 8.11) показывает, что в 39 случаях из 81 система сохраняет работоспособность, а вероятность безотказной работы определяется суммой

$$P_c = p^4 + 4p^3q_{обр} + 4p^3q_{\kappa\lambda} + 12p^2q_{обр}q_{\kappa\lambda} + 4p^2q_{\kappa\lambda}^2 + \\ + 2p^2q_{обр}^2 + 8pq_{обр}q_{\kappa\lambda}^2 + 4pq_{обр}^2q_{\kappa\lambda}.$$

Здесь, например, величине $4p^3q_{\kappa\lambda}$ отвечают короткие замыкания элементов в комбинациях 12, 34, 14, 32 при двух других исправных элементах. Заметим, что структурные схемы надежности, показанные на рис. 8.11 отдельно по обрыву и по короткому замыканию, различны.

8.2.10. Способы повышения надежности РЭС

Существующие методы повышения надежности можно осуществлять как на стадии проектирования, так и на стадии изготовления. В общем эти методы можно свести к следующим.

1. К общим методам повышения надежности относят:

- правильный выбор схем и элементов схем, а также режимов их работы;
- выбор соответствующих материалов и конструкции конечных решений РЭА;

- психофизические особенности операторов РЭС;
- соблюдение и совершенствование технологического процесса;
- контроль качества.

2. Прогностические.

Прогнозирование является важным методом повышения надежности, поскольку в результате его проведения получают научно обоснованные вероятностные данные о будущем состоянии объекта.

3. Граничные испытания.

Этот метод перспективен на стадии проектирования аппаратуры. Сущность его заключается в экспериментальном определении области устойчивой работы системы или отдельных ее узлов при воздействии различных возмущающих факторов.

4. Приработка изделия.

Приработка элементов достигается сокращением этапа приработки системы, которое характеризуется на данном этапе повышением интенсивности отказа.

Можно сформулировать следующие пути обеспечения высокой надежности РЭС:

- применение современных изделий электронной техники с таким сочетанием их характеристик, которое обеспечивает стабильную и безотказную работу РЭС;
- использование в ряде случаев облегченных режимов работы комплектующих изделий (например, перевод на 50% нагрузку диодов, транзисторов, конденсаторов и других комплектующих изделий электронной техники уменьшает интенсивность их отказов в 2–5 раз), наличие значительных запасов прочности в деталях и сборочных единицах.
- резервирование наиболее ответственных блоков и устройств РЭС;
- применение специальных схем и средств защиты РЭС от перегрузочных режимов.

Одним из эффективных способов повышения надежности выпускаемых комплектующих изделий электронной техники являются технологические тренировки. Технологической тренировкой называется испытание готовых изделий под повышенной нагрузкой с целью отбраковки из их числа потенциально ненадежных. Величину нагрузки выбирают такой, чтобы в процессе тренировки вызвать отказ у потенциально ненадежных изделий, не повреждая при этом годных. Отказавшие изделия изымаются, а выдержавшие испытания признаются годными к эксплуатации.

Технологические тренировки стараются проводить в период приработки (см. рис. 8.4, а, в) изделий. При тренировке изделий большое значение

имеют выбор вида нагрузки. Например, для полупроводниковых приборов и интегральных схем наибольший интерес при отбраковке потенциально ненадежных изделий представляют электрическая и термическая нагрузки.

Исследования показывают [11], что тренировки под электрической нагрузкой для полупроводниковых приборов более предпочтительны, чем их испытания под термической нагрузкой: работа полупроводниковых приборов и микросхем под электрической нагрузкой позволяет выявлять отказы, которые обычно нельзя обнаружить при термических нагрузках. Известны, например, причины отказов вследствие рассеяния мощности внутри прибора и возникновения градиента температуры между p – n переходом и корпусом прибора. При испытаниях под электрической нагрузкой возникают электрические поля, которые ускоряют миграцию ионов различных загрязнений к p – n переходу.

Иногда при тренировке микросхем и полупроводниковых приборов целесообразно применять комбинацию электрической и термической нагрузок, так как при приложенном напряжении могут возникать инверсные каналы, а повышенная температура будет ускорять отказ в этом случае за счет увеличения скорости носителей.

8.2.11. Резервирование РЭС

Резервирование представляет собой способ повышения надежности РЭС введением избыточности. Структурное резервирование предусматривает использование дополнительных, избыточных элементов структуры объекта, таких же по конструкции, как основные элементы. Эти избыточные элементы обеспечивают работоспособность РЭС в случае отказа основного. По способу включения выделяют резервирование постоянное, при котором резервированные элементы участвуют в функционировании РЭС наравне с остальными, и резервирование замещением, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного элемента.

По схеме включения различают общее резервирование, когда резервируются РЭС в целом, и отдельное резервирование, при котором резервируются отдельные элементы или их группы. Резервирование может быть также смешанным. По режиму работы резерв может быть нагруженным, т. е. работающим в том же режиме, что и основной элемент, ненагруженным, т. е. не включенным под нагрузку, и облегченным, когда резервный элемент находится в менее нагруженном режиме, чем основной.

Рассмотрим показатели надежности РЭС с резервированием. Были приведены формулы вероятности безотказной работы для РЭС с постоянно нагруженным общим (рис. 8.12, *а*) и отдельным резервированием (рис. 8.12, *б*).

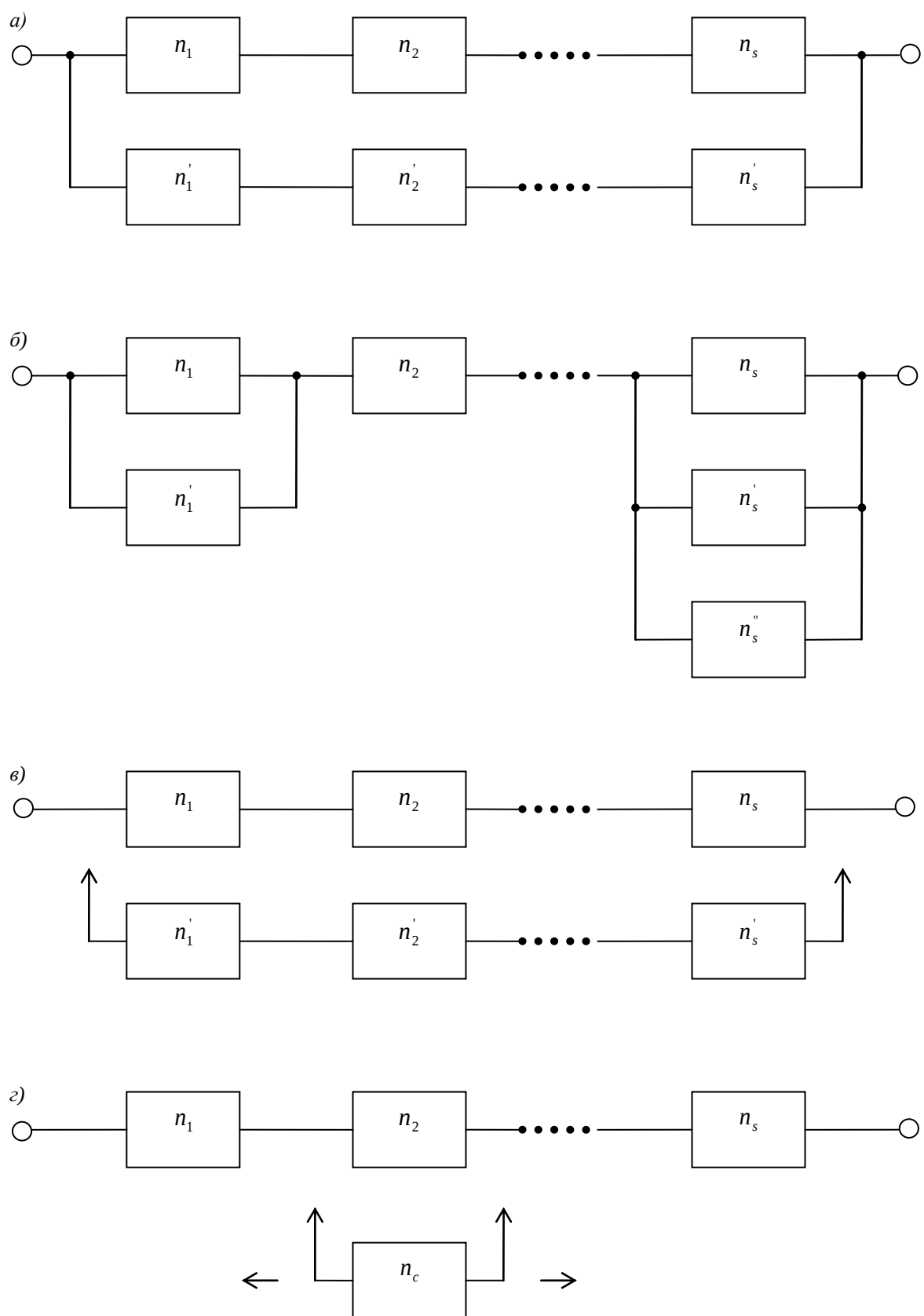


Рисунок 8.12 — Схемы резервирования

Оценим эффективность отдельного резервирования из отношения вероятностей отказа нерезервированной системы (основного соединения), когда $q_c = 1 - P_n(t)$, и резервированной с интенсивностью отказа $q_{cp} = 1 - P_{cp}(t)$, т. е.

$$\mu_{\delta\hat{a}\zeta\ddot{a}} = \frac{1 - P_0(t)}{1 - P_{\tilde{n}\delta}(t)} = \frac{1 - p^2(t)}{1 - 1 - 1 - p(t)^{m-2}}, \quad (8.91)$$

где $P(t) = P_{ij}(t)$, см. (8.88).

$P_{cp}(t)$ — вероятность безотказной работы системы с отдельным резервированием.

Эффективность общего резервирования

$$\mu_{\hat{a}\hat{u}} = \frac{1 - P_0(t)}{1 - P_{\tilde{n}o}(t)} = \frac{1 - p^2(t)}{[1 - p^2(t)]^m} = \frac{1}{[1 - p^2(t)]^{m-1}}, \quad (8.92)$$

где $P_{co}(t) = 1 - \prod_{j=1}^m \left[1 - \prod_{i=1}^r P_{ij}(t) \right]$ — вероятность безотказной работы системы

при общем резервировании. По аналогии с (8.92) здесь также $P(t) = P_{ij}(t)$.

Оба способа резервирования дают существенное увеличение вероятности безотказной работы. Для их сопоставления возьмем отношение

$$h = \frac{\mu_{\delta\hat{a}\zeta\ddot{a}}}{\mu_{\hat{a}\hat{u}}} = \frac{[1 - p^2(t)]^m}{1 - 1 - 1 - p(t)^{m-2}}. \quad (8.93)$$

Так как $p = 1 - q$, то

$$h = \frac{1 - 1 - q(t)^{2-m}}{1 - [1 - q^m(t)]^2}. \quad (8.94)$$

При $q < 0,1$, что на практике часто имеет место, $(1 - q)^a \approx 1 - aq$. Тогда $h \approx r^{m-1}$.

Таким образом, при равном количестве элементов эффективность отдельного резервирования в r^{m-1} раз больше, чем общего резервирования. Если требуется обеспечить заданную надежность резервированной системы $P_{с.зад}$, то при отдельном резервировании она достигается при меньшем количестве резервных элементов.

Под **резервированием** понимают способ обеспечения надежности изделия за счет использования дополнительных средств и возможностей, избыточных по отношению к минимально необходимым для выполнения требуемых функций.

Указанные выше средства и возможности определяют следующие разновидности резервирования РЭС: функциональное, временное, информационное и структурное.

При **функциональном резервировании** ряд устройств, не предназначенных специально для решения не свойственных им задач, берут на себя выполнение функций отказавших устройств при уменьшении показателей качества системы в целом [1].

Временное резервирование предполагает возможность использования объективно изменяющегося резерва времени для восстановления технических характеристик системы. В частности, если допустимое время потери информации в радиоэлектронном изделии оказывается больше, чем время восстановления, то и устранение отказа не отразится на значении коэффициента готовности указанного изделия.

Информационное резервирование связано с соответствующей организацией программного, математического и аппаратного обеспечения (ПО, МО, АО), предусматривающей исключение сбоев, проверку наиболее важных алгоритмов и компенсацию потери информации по одному из отказавших каналов информацией по другому каналу [46].

Структурное резервирование достигается путем введения в структуру РЭС дополнительных элементов.

При этом необходимо различать понятия: основной, резервный и резервируемый элемент изделия. **Основной** элемент необходим для выполнения требуемых функций без использования резерва. **Резервный** элемент предназначен для выполнения функций основного элемента в случае его отказа. Под **резервируемым** элементом понимается основной элемент, на случай отказа которого в изделии предусмотрены один или несколько **резервных** элементов.

В случае **общего резервирования** резервируется все изделие в целом (см. рис. 8.12, *а*), при **раздельном резервировании** — отдельные элементы изделия или их группы (см. рис. 8.12, *б*). При этом резервные элементы до начала выполнения ими функций основного элемента находятся в нагруженном, облегченном и ненагруженном режиме.

При нагруженном резерве резервные элементы находятся в режиме основного элемента, при этом интенсивность отказов основного λ_o и резервного λ_p элементов одинакова, т. е. $\lambda_o = \lambda_p$. При использовании облегченного резерва резервные элементы находятся в менее нагруженном

режиме, чем основной элемент, при этом справедливо неравенство $\lambda_o > \lambda_p$. В случае же ненагруженного резерва резервные элементы находятся в ненагруженном режиме и вероятностью отказа резервных элементов пренебрегают, считая $\lambda_p = 0$.

Резервирование именуется постоянным, если используется нагруженный резерв и при отказе любого из элементов в резервированной группе выполнение изделия требуемых функций осуществляется оставшимися элементами без переключений.

Резервирование, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного элемента, носит название **резервирование замещением** (см. рис. 8.12, в). При **скользящем резервировании замещением** группы основных элементов резервируются одним или несколькими резервными элементами, причем каждый из них может заменить любой из отказавших элементов данной группы (см. рис. 8.12, з).

Если в одном и том же объекте используются различные виды резервирования, то подобное сочетание носит название **смешанного резервирования**.

Для резервированных соединений РЭС важное значение имеет понятие **кратности резервирования**, которое определяется как отношение числа резервных элементов к числу резервируемых ими элементов, выраженное несокращаемой дробью

$$m = \frac{s - r}{r},$$

где s — общее число элементов расчета резервированного соединения;

r — число элементов, минимально необходимых для выполнения изделия требуемых функций;

$(s - r)$ — число резервных элементов.

Кратность резервирования записывается в виде простой дроби без сокращения. Так, если $m = \frac{6}{3}$, то это означает, что для нормальной работы схемы требуется не менее трех элементов, а число резервных равно шести.

8.2.12. Надежность системы с резервированием замещением

При резервировании замещением отключение отказавшего элемента и подключение резервного осуществляется с помощью переключателей П (см. рис. 8.6, б).

При нагруженном резерве общая надежность системы с резервированием замещением из-за отказов переключателей будет ниже, чем при по-

стоянно включенном резерве. Поэтому способ резервирования замещением целесообразен только при ненагруженном или облегченном резервах.

Рассмотрим случай ненагруженного резерва, полагая, что до момента включения он исправен с вероятностью 1. Основным элементом, проработав случайное время t_1 , отказывает и заменяется первым резервным элементом, работающим случайное время t_2 , и т. д. Проработав время t , отказывает последний m -й элемент, а с ним и вся резервированная система с общим временем наработки

$$t = \sum_{i=1}^m t_i, \quad (8.95)$$

Случайные величины t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) являются независимыми и поэтому распределение случайной величины t представляет собой распределение суммы m независимых случайных величин. В частности при $m = 2$ $t = t_1 + t_2$ и функция плотности распределения вероятностей находится по соотношению

$$f_2(t) = \int_0^t f_0(t_1) f_p(t - t_1) dt_1, \quad (8.96)$$

где $f_0(t)$, $f_p(t)$ — функции плотности вероятности случайной наработки до отказа соответственно основного и резервного элементов со своими переключателями.

Будем полагать, что распределение наработки до отказа элементов с переключателями, экспоненциальное с одинаковыми интенсивностями λ^* .

Тогда

$$f_2(t) = \int_0^t \lambda^* e^{-\lambda^* t_1} \lambda^* e^{-\lambda^* (t-t_1)} dt_1 = (\lambda^* t) \lambda^* e^{-\lambda^* t}. \quad (8.97)$$

Последовательно применяя (8.97) для $m = 3$, затем $m = 4$ и т. д., для кратности резервирования $(m - 1)$ получим

$$f_m(t) = (\lambda^* t)^{m-1} \lambda^* e^{-\lambda^* t}. \quad (8.98)$$

Проинтегрируем (7.98) по dt и найдем вероятность отказа резервированной системы:

$$q_m(t) = 1 - e^{-\lambda^* t} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\lambda^* t)^i}{i!}. \quad (8.99)$$

Например, при дублировании, когда $m = 2$,

$$q_2(t) = 1 - (1 + \lambda^* t) e^{-\lambda^* t}. \quad (8.100)$$

Средняя наработка до отказа системы находится усреднением (8.95):

$$T_c = M(t) = \sum_{i=1}^m M(t_i) = mT = \frac{m}{\lambda^*}. \quad (8.101)$$

Сравнивая среднюю наработку до отказа системы при резервировании замещением (8.101) и при постоянном резервировании (7.51) по их отношению, равному

$$\frac{T_c}{T_{1c}} = \frac{\lambda}{\lambda^*} = \frac{m}{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m})},$$

можно убедиться в том, что резервирование замещением при безотказных переключателях ($\lambda^* = \lambda$) эффективнее постоянного при любых значениях интенсивности λ отказов основного и резервного элементов. Например, при кратности резервирования $m - 1 = 3$ отношение $T_c / T_{1c} = 1,92$.

С учетом надежности переключателей, приняв в системе с резервированием замещением $\lambda^* = \lambda + \lambda_{II}$, резервирование замещением будет эффективнее при соблюдении неравенства

$$\lambda_{II} = \lambda \left(\frac{m}{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m})} \right).$$

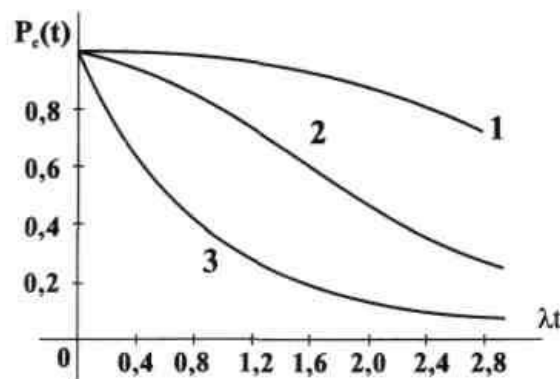


Рисунок 8.13 — Вероятность безотказной работы:

- 1 — резервирование замещением; 2 — постоянное резервирование;
3 — без резервирования

На рисунке 8.13 показаны кривые вероятностей безотказной работы при двух видах резервирования (резервирование замещением и постоянное) и при отсутствии резервирования. Из сравнения этих кривых видно, что система 1 с резервированием замещением имеет наибольшую вероятность безотказной работы по сравнению с системами 2 и 3.

8.2.13. Расчет надежности последовательно-параллельных структур РЭС

Расчет надежности РЭС по показателям надежности их составных частей относится к числу основных задач проектирования изделий и позволяет оценить различные варианты их компоновки с использованием справочных и нормативных данных о составляющих их элементах. При этом под элементами понимаются интегральные микросхемы (ИМС), резисторы, конденсаторы и др., выполняющие определенные функции и включенные в общую электрическую схему РЭС, а также ряд вспомогательных элементов, таких как паяные и разъемные составляющие конструкции и т. д.

Расчет надежности РЭС включает в себя целый ряд этапов, к числу которых следует отнести:

- определение видов и критериев отказа изделий;
- выбор состава рассчитываемых показателей и метода расчета надежности;
- составление структурной схемы и математической модели надежности изделия, связывающей показатели надежности с соответствующими характеристиками элементов;
- выполнение расчета надежности изделий с учетом данных по показателям надежности составляющих их элементов.

Одним из важнейших моментов в числе указанных этапов является составление структурной схемы надежности РЭС, позволяющей однозначно определить состояние системы (работоспособное или неработоспособное) по состоянию ее элементов.

Для многофункциональных РЭС структурные схемы могут составляться по каждой функции отдельно, в этом случае их обычно называют надежностно-функциональными схемами [46].

При составлении структурной схемы надежности элементы изделия могут быть соединены последовательно или параллельно в зависимости от их влияния на работоспособное состояние изделия.

Если отказ элемента, вне зависимости от его назначения, вызывает отказ изделия в целом, то данный элемент соединяют последовательно.

Если же отказ изделия возникает лишь при отказе всех или части однотипных элементов, то подобные элементы соединяются параллельно. Основные структурные схемы надежности представлены на рисунке 8.14.

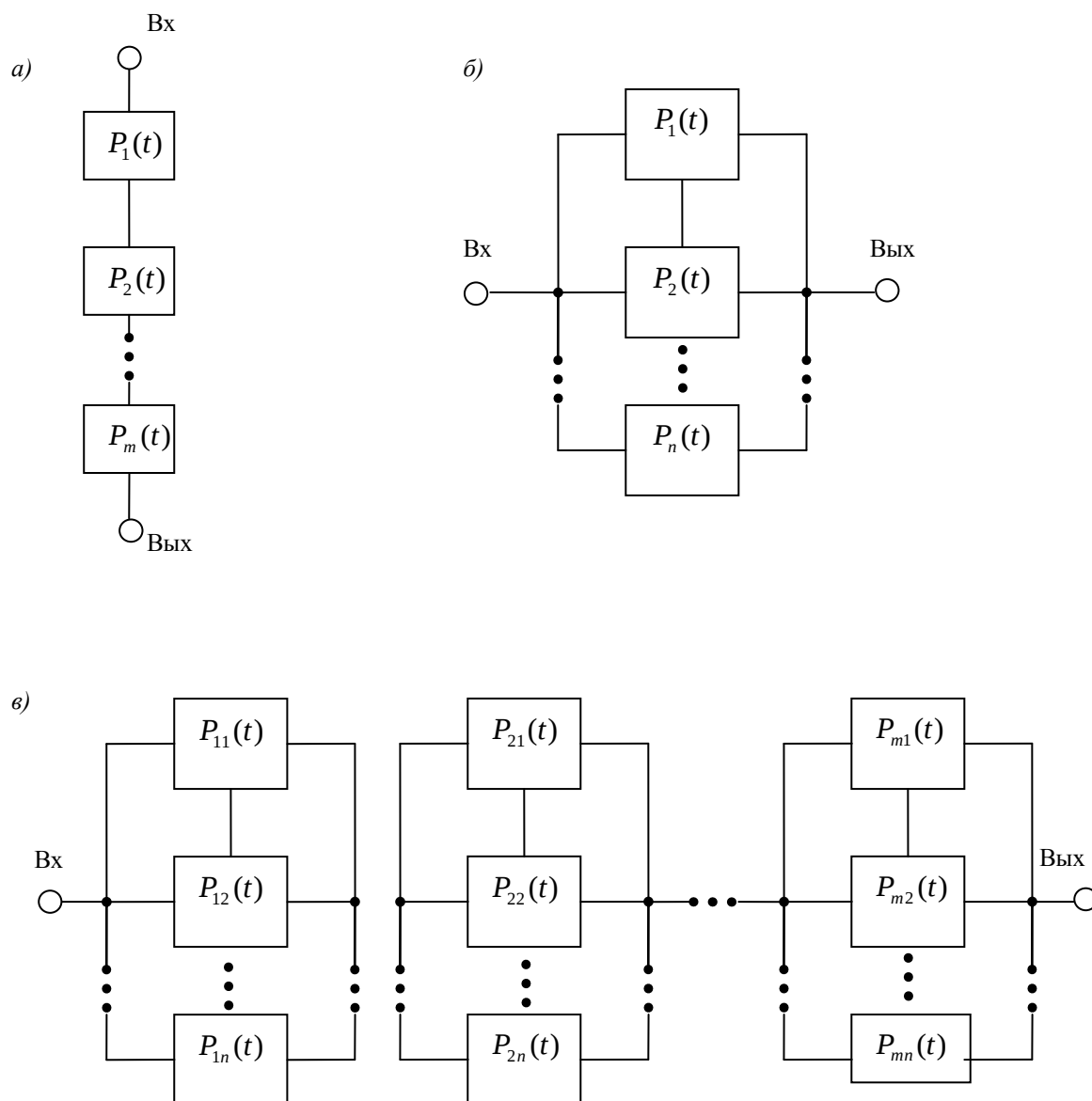


Рисунок 8.14 — Основные структурные схемы надежности:

a — последовательная; $б$ — параллельная;
 $в$ — последовательно-параллельная (смешанная)

Существующие методы расчета надежности РЭС могут быть разбиты на три основные группы в зависимости от сложности рассматриваемых изделий и особенностей их эксплуатации:

– простые структуры РЭС, отличающиеся простым последовательно-параллельным соединением элементов, без учета их восстановления;

- структурно-сложные РЭС, не сводящиеся к простому последовательно-параллельному соединению элементов, без учета их восстановления;
- структуры РЭС с восстанавливаемыми элементами.

Использование совокупности показателей, структурных схем, методов и моделей расчета надежности позволяет решать задачу выбора наиболее надежных функциональных элементов, узлов и блоков, из которых состоит РЭС, наиболее надежных конструкций ТЭЗ, панелей, рам, стоек и пр., а также определять рациональный порядок эксплуатации, профилактики и ремонта РЭС.

Расчет последовательно-параллельных структур надежности производится следующим образом. Если структурная схема надежности РЭС включает в себя m последовательно соединенных элементов, то вероятность безотказной работы изделия будет равна произведению вероятностей работы всех его элементов

$$P_E(t) = P_1(t)P_2(t)...P_m(t) = \prod_{i=1}^m P_i(t). \quad (8.102)$$

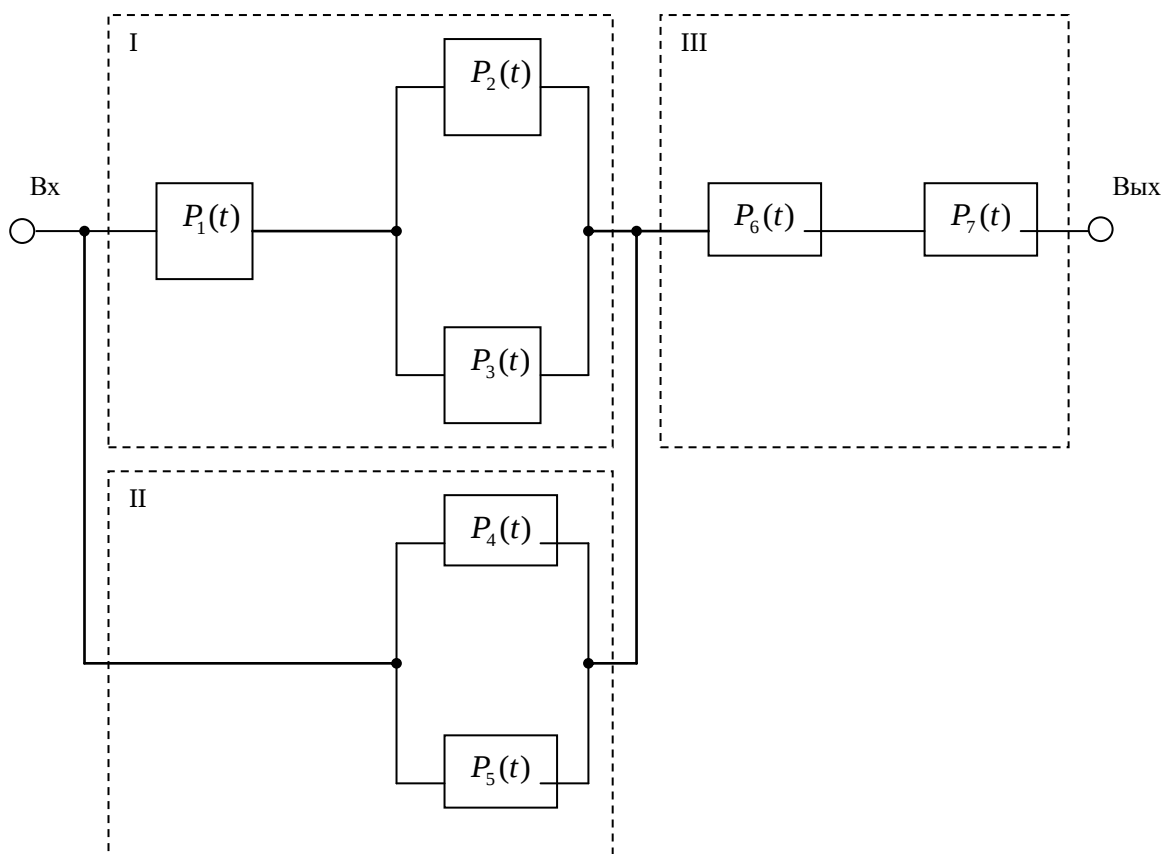


Рисунок 8.15 — Структурная схема расчета надежности РЭС

При равенстве вероятностей безотказной работы всех элементов изделия, т. е. при $P_1(t) = P_2(t) = \dots = P_m(t) = P_0(t)$ получаем $P_E(t) = P_0^m(t)$.

Если структурная схема надежности РЭС состоит из n параллельно включенных элементов и для работы изделия достаточно функционирования одного из них, то отказ изделия является совместным событием, возникающим при отказе всех параллельно включенных элементов:

$$Q_E(t) = Q_1(t)Q_2(t)\dots Q_n(t) = \prod_{j=1}^n Q_j(t). \quad (8.103)$$

В общем случае, при смешанном последовательно-параллельном соединении элементов результирующая вероятность безотказной работы всего изделия может быть определена при совместном использовании формул (8.102) и (8.103). В качестве примера рассмотрим структурную схему, приведенную на рисунке 8.15.

Разделим схему на цепи I, II и III. Тогда, с учетом принятых обозначений, получаем

$$P_E(t) = \{1 - [1 - P_I(t)][1 - P_{II}(t)]\}P_{III}(t),$$

где

$$P_I(t) = P_1(t)\{1 - [1 - P_2(t)][1 - P_3(t)]\};$$

$$P_{II}(t) = 1 - [1 - P_4(t)][1 - P_5(t)];$$

$$P_{III}(t) = P_6(t)P_7(t).$$

При экспоненциальном распределении времени безотказной работы элементов выражение (8.102) примет следующий вид:

$$P_E(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \dots e^{-\lambda_m t} = e^{-\lambda_c t},$$

где

$$\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

С учетом вышеизложенного

$$f_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t} \quad \text{и} \quad T_{1c} = \frac{1}{\lambda_c}.$$

В случае параллельного соединения n элементов, имеющих экспоненциальный закон распределения времени безотказной работы, выражение (8.103) может быть представлено в виде:

$$Q_E(t) = (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) \dots (1 - e^{-\lambda_n t}) = \prod_{j=1}^n (1 - e^{-\lambda_j t}).$$

При равенстве $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ получаем

$$Q_{\bar{E}}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n \quad \text{и} \quad P_{\bar{E}}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

Анализ надежности РЭС на стадиях проектирования осуществляется, как правило, в несколько этапов.

На стадии эскизного проекта проводится предварительный (ориентировочный) расчет надежности. При этом предполагается, что все однотипные элементы равнонадежны и имеют одинаковую интенсивность отказов, равную среднестатистическому ее значению. На стадии технического проекта осуществляется уточненный (окончательный) расчет надежности. При этом на основе испытаний опытного образца РЭС обеспечивается коррекция значений интенсивности отказов элементов, определяемая уровнем их нагрузок, а также характером изменения температуры окружающей среды, уровнем вибрации, колебаниями напряжений питания и др.

Влияние указанных величин на интенсивность отказов учитывают при помощи поправочных коэффициентов K_i :

$$\lambda = \lambda_0 K_1 K_2 \dots K_n,$$

где λ_0 — номинальное значение интенсивности отказов, соответствующее нормальным условиям эксплуатации; $K_1, K_2, \dots, K_n$ — поправочные коэффициенты, учитывающие значения электрической нагрузки, а также факторы режима использования и условий окружающей среды.

Данные по среднестатистическим значениям интенсивностей отказов элементов РЭС, соответствующих нормальным условиям эксплуатации, а также значения поправочных коэффициентов приводятся в монографии [31] и справочной литературе.

8.2.14. Расчет надежности структурно-сложных РЭС

В ряде случаев структурные схемы надежности не могут быть сведены к последовательно-параллельному соединению элементов. К числу подобных схем, в частности, относится мостиковая схема приведенная на рисунке 8.16, а также ряд других, использующих различные виды резервирования.

Расчет указанных структурно-сложных схем осуществляется с использованием целого ряда методов: перебора состояний, эквивалентных схем, минимальных путей и сечений, логико-вероятностных (с применением булевой алгебры) и др.

Упрощение структурной схемы надежности достигается путем рассмотрения H_i -го состояния особого элемента как безусловного, что позволяет свести ее к последовательно-параллельному соединению элементов.

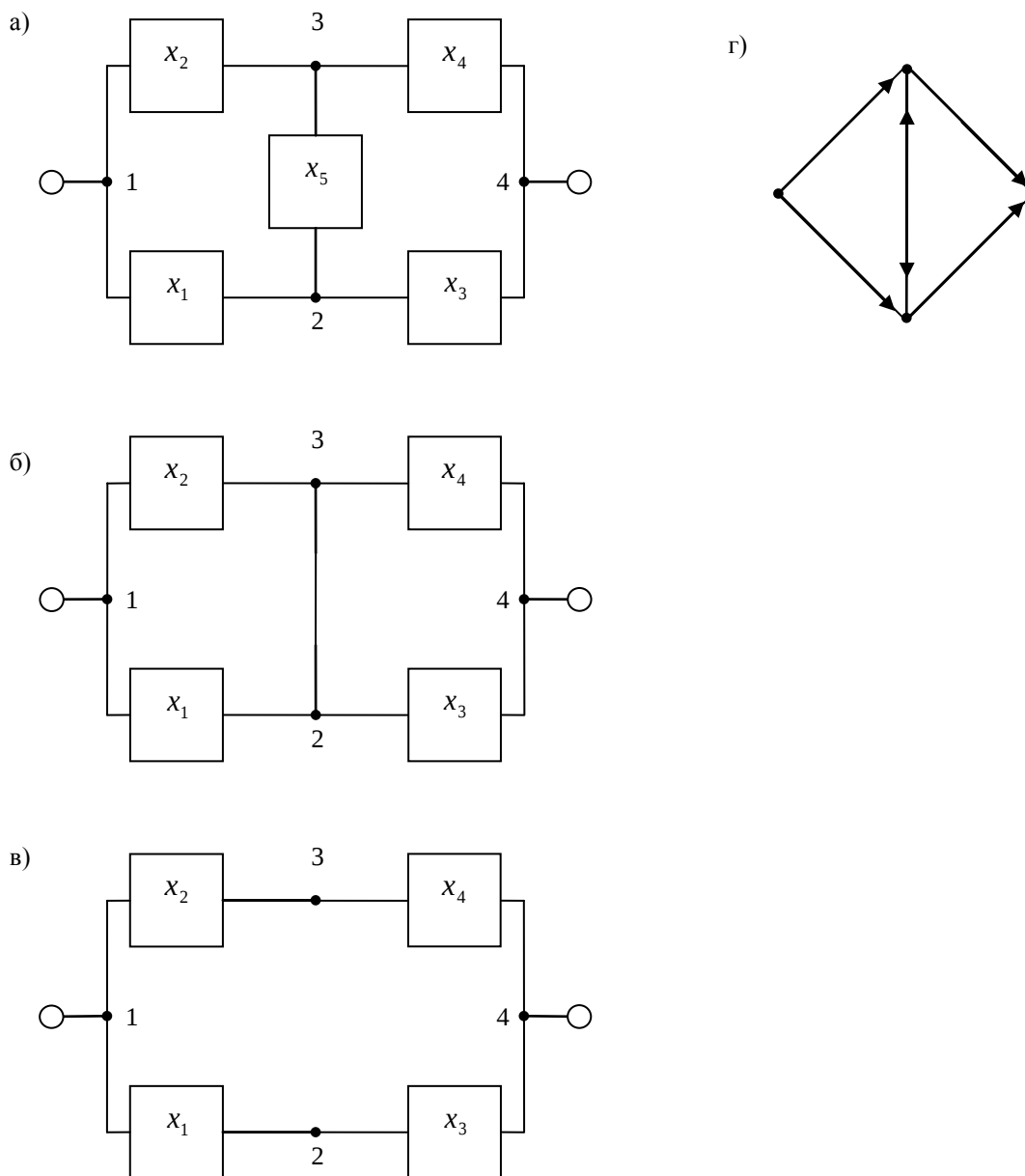


Рисунок 8.16 — Мостиковая схема соединения элементов:

a — исходная структурная схема; $б$ —

$в$ — трансформированные схемы; $г$ — граф переходов

В частности, при использовании указанного метода применительно к мостиковой схеме (см. рис. 8.16, a) в качестве особого элемента целесообразно рассмотреть 5-й элемент, который может обладать двумя возможными состояниями: H_1 — исправное и H_2 — неисправное, соответствующее отсутствию цепи. Введение особого элемента позволяет в случае его исправного состояния перейти к трансформированной структурной схеме $б$ (см. рис. 8.16) и в случае отказа — к структурной схеме $в$ (см. 8.16).

Если ввести обозначения $P\{H_1\} = P_5$ и $P\{H_2\} = Q_5$ и принять, что состояние B мостиковой схемы характеризует наличие цепи между ее входом

и выходом, то применительно к трансформированным структурным схемам $\bar{b}$ (см. рис. 8.16), и $\bar{v}$ (см. рис. 8.16) в соответствии с выражениями (8.102) — (8.11) получаем

$$P_{\bar{A}}\{B\} = P_5(1 - Q_1Q_2)(1 - Q_3Q_4),$$

$$P_{\bar{A}}\{B\} = Q_5[1 - (1 - P_1P_3)(1 - P_2P_4)] = Q_5(P_1P_3 + P_2P_4 - P_1P_2P_3P_4).$$

Вероятность B -го состояния всей мостиковой схемы в целом в этом случае составляет

$$P_a\{B\} = P_B\{B\} + P_{\bar{A}}\{B\}.$$

С использованием данного метода можно осуществить расчет надежности сложных структур РЭС, имеющих разнообразные перекрестные связи.

Для значительной части структурно-сложных РЭС, обладающих разветвленной иерархической структурой с определенным функциональным резервированием, отказы отдельных элементов или значительные изменения некоторых рабочих параметров не приводят к полному отказу системы, но несколько ухудшают качество ее функционирования.

Так, например, радиосвязное оборудование современных летательных аппаратов включает в себя, как минимум, коротковолновую и ультракоротковолновую радиостанции. При отказе одной из них качество и удобство связи, естественно, снижается, однако связь с землей может быть обеспечена. Применительно к рассмотренному случаю радиоэлектронные средства связи могут находиться в одном из четырех состояний:

H_0 — безотказная работа обеих радиостанций;

H_1 — отказ коротковолновой радиостанции;

H_2 — отказ ультракоротковолновой радиостанции;

H_3 — отказ обеих радиостанций.

Рассмотренный пример показывает, что структурно-сложная система в процессе функционирования проходит через ряд состояний, часть из которых может быть отнесена к подмножеству состояний исправной работы, а часть — к подмножеству состояний неисправной работы и полного отказа.

Способность данных структурно-сложных РЭС выполнять заданные функции в условиях возможного появления частичных отказов отражает их качество целевого функционирования, в связи с чем указанные РЭС следует оценивать с использованием показателя ЭЦФ.

При этом, так же как и в методе эквивалентных схем, основу данной оценки составляет формула полной вероятности.

В соответствии с вышесказанным, качество целевого функционирования указанного выше радиосвязного оборудования определяется [17]:

$$Q_T(t) = \sum_{H=0}^m P_H(t)[1 - K_{Q_{H_j}}],$$

где $P_H(t)$ — вероятность H -го состояния радиосвязного оборудования ($m=3$);
 $K_{Q_{H_j}}$ — коэффициент значимости H_j -го состояния при отказе одной или обеих радиостанций (коэффициент значимости отказа радиостанций).

Раскрывая вероятности каждого из состояний и обозначив вероятности безотказной работы коротковолновой и связной радиостанций как P_1 и P_2 , а вероятности их отказа, соответственно, как Q_1 и Q_2 , получаем

$$Q_T(t) = P_1P_2 + Q_1P_2[1 - K_{Q_{H_1}}] + P_1Q_2[1 - K_{Q_{H_2}}].$$

В данном выражении учтено, что в случае исправной работы обеих радиостанций коэффициент значимости $K_{Q_{H_0}} = 0$; в случае отказа обеих радиостанций коэффициент значимости $K_{Q_{H_3}} = 1$, в связи с чем последний член указанного выражения равен

$$Q_1Q_2[1 - K_{Q_{H_3}}] = 0.$$

Для расчета надежности структурно-сложных РЭС, отличающихся разветвленной структурой, большое распространение получили **логико-вероятностные методы**, использующие формализованное (аналитическое) описание условий работоспособности систем на языке алгебры логики. При использовании указанных методов в качестве модели системы выбирают структурную схему, являющуюся графическим изображением определенной совокупности ее структурных элементов и функционально логических связей между ними. Функцию алгебры логики (ФАЛ), связывающую состояние элементов с состоянием системы [37]

$$Y(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = Y(x_i),$$

именуют функцией работоспособности системы (ФРС). Следует подчеркнуть, что в указанной функции переменные x_i могут принимать значения только 0 или 1.

В алгебре логики рассматриваются три основные логические операции: отрицание, конъюнкция и дизъюнкция.

Отрицание высказывания A обозначается A' и читается: не A .

Конъюнкция, или логическое умножение высказываний A и B , обозначается $A \wedge B$ и читается: A и B .

Дизъюнкция, или логическое сложение высказываний A и B , обозначается $A \vee B$ и читается: A или B .

Для преобразования логических выражений применяются определенные правила и законы математической логики.

Всякая ФАЛ, записанная через конъюнкцию и дизъюнкцию (без отрицания), задает некоторую монотонную функцию $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой при любых наборах $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, таких, что $\alpha_i \leq \beta_i$, имеет место соотношение $Y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq Y(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Системы, удовлетворяющие данным условиям, называют системами с монотонной, или иначе когерентной, структурой. Для подобных структур функцию работоспособности системы можно записать с помощью так называемых кратчайших путей успешного функционирования и минимальных сечений отказов системы.

Кратчайший путь успешного функционирования системы представляет собой такую конъюнкцию ее элементов, когда ни один из них не может быть изъят без нарушения функционирования системы:

$$\rho_l = \bigwedge_{i \in k_{\rho_l}} x_i,$$

где k_{ρ_l} — множество номеров, соответствующих данному пути.

Минимальное сечение отказов системы представляет собой такую конъюнкцию из отрицаний ее элементов, когда ни один из них не может быть изъят без нарушения условий неработоспособности системы:

$$S_j = \bigwedge_{i \in k_{S_j}} x'_i,$$

где k_{S_j} — множество номеров, соответствующих данному сечению.

Условия работоспособности системы в целом могут быть записаны как в виде дизъюнкции всех имеющихся кратчайших путей успешного функционирования, так и с использованием конъюнкции отрицаний всех минимальных сечений отказов:

$$Y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{l=1}^g \rho_l = \bigvee_{l=1}^g \left[\bigwedge_{i \in k_{\rho_l}} x_i \right];$$

$$Y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{j=1}^m S'_j = \bigwedge_{j=1}^m \left[\bigvee_{i \in k_{S_j}} x_i \right].$$

Иными словами, условия работоспособности реальной системы могут быть представлены в виде условий работоспособности эквивалентной (в смысле надежности) системы, структура которой включает в себя параллельное соединение кратчайших путей успешного функционирования или последовательное соединение отрицаний минимальных сечений.

Функции алгебры логики, кроме аналитической записи в строчку, могут быть представлены в табличной форме, а также в виде логических матриц, которые широко используются при расчете надежности. При представлении логических уравнений в виде логических матриц конъюнкции обозначаются расположением логических символов в строке, а дизъюнкции — в столбце.

Так, если логическое уравнение имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_9) = x_1 \wedge x_5 \vee (x_4 \wedge x_6 \wedge x_9) \vee \\ \vee x_2 \wedge x_4 \wedge x_6 \wedge x_9 \vee (x_3 \wedge x_5 \wedge x_8) \wedge x_7,$$

то в матричной форме данное уравнение можно представить в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_9) = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_5 \\ \hline & x_4 x_6 x_9 \end{array} \right| x_7 = \left| \begin{array}{c} x_1 x_5 x_7 \\ x_1 x_4 x_6 x_7 x_9 \\ x_2 x_4 x_6 x_7 x_9 \\ x_2 x_3 x_4 x_5 x_7 x_8 \end{array} \right|$$

Вторая матрица уравнения записана в дизъюнктивной нормальной форме, для которой характерно наличие слагаемых, являющихся элементарными конъюнкциями различных рангов r вида:

$$x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_r^{a_r},$$

где

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } a_i = 1; \\ x_i', & \text{если } a_i = 0. \end{cases}$$

Поскольку $x_i x_i' = 0$ и $x_i x_i \dots x_i = x_i$, то все переменные в элементарной конъюнкции различны.

При приведении к нормальной форме логические матрицы упрощаются.

Для составления ФРС необходимо выполнить ряд последовательных шагов. Первым из них является нумерация всех вершин на структурной схеме системы, где под вершиной понимается точка пересечения элементов

схемы. В качестве последующего шага необходимо построить граф переходов (или иначе логических связей), который представляет собой структуру из вершин и ориентированных дуг. Обозначение дуг осуществляется в виде конъюнкций тех элементов, функционирование которых обеспечивает связь соответствующих вершин (см. рис. 8.16, з).

Если построение графа переходов оказывается сложным, используют его математическую копию — булеву матрицу переходов, состоящую из K строк и K столбцов, соответствующих числу K вершин структурной схемы. Если обозначить через C_{ij} элемент, находящийся на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы переходов $|C|$, то для него характерны следующие соотношения:

$$C_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{если } i \text{ и } j \text{ являются вершинами одного элемента;} \\ 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ являются вершинами разных элементов;} \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Построение функции работоспособности системы на основе матрицы целесообразно осуществлять с использованием ЭВМ. Формирование указанной функции заключается в умножении матрицы самой на себя r раз ($r \leq K$) и последующем преобразовании логических переменных в соответствии с правилами и законами алгебры логики.

Необходимо отметить, что для снижения размерности задачи при числе переменных более трех целесообразно применять декомпозицию функции работоспособности, основанную на теореме разложения ФАЛ:

$$Y(x_1, \dots, x_n) = x_i Y_1^{(i)}(x_1, \dots, 1, \dots, x_n) \vee x_i' Y_0^{(i)}(x_1, \dots, 0, \dots, x_n). \quad (8.104)$$

Таким образом, исходная функция преобразуется путем вынесения одной из переменных и ее отрицания в дизъюнкцию двух несовместимых высказываний. В первом высказывании аргумент x_i является утверждением, во втором — отрицанием x_i' . При этом функции $Y_1^{(i)}$ и $Y_0^{(i)}$ отличаются от функции Y тем, что в них вместо аргумента x_i введены, соответственно, 1 и 0. Переход от алгебраической формы записи функции работоспособности к вероятностной, если $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимы и несовместны, осуществляется путем простой замены x_i на $P(x_i)$ [46]. Так, вероятность события Y , заключающегося в появлении x_1 и x_2 , имеющих вероятности $P(x_1)$ и $P(x_2)$, записываются как $P(Y) = P(x_1 \vee x_2) = P(x_1) + P(x_2)$ а вероятность их совместного появления: $P(Y) = P(x_1 \wedge x_2) = P(x_1)P(x_2)$.

Если слагаемые в функции работоспособности содержат равные сомножители и события $x_1, \dots, x_n$ являются совместными, то переход к вероятностной форме осуществляется путем применения декомпозиции функции работоспособности в соответствии с соотношением (8.104) и с использованием формулы расчета вероятности суммы совместных событий [19]:

$$P(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n P(x_i) - \sum_{i,j} p(x_i \wedge x_j) \vee \\ \vee \sum_{i,j,k} P(x_i \wedge x_j \wedge x_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n).$$

Так, если $Y = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, то

$$P(Y) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) - P(x_1)P(x_2) - \\ - P(x_1)P(x_3) - P(x_2)P(x_3) + P(x_1)P(x_2)P(x_3).$$

Если $Y = x_1x_2 \vee x_3x_4$, то

$$P(Y) = P(x_1)P(x_2) + P(x_3)P(x_4) - P(x_1)P(x_2)P(x_3)P(x_4).$$

В качестве примера составим функцию работоспособности для рассмотренной ранее мостиковой системы, представленной на рисунке 8.16.

Граф переходов, соответствующий введенной нумерации вершин схемы, представлен на рисунке 5.16, z , матрица переходов — в таблице 8.2.

Таблица 8.2 — Матрица переходов

Вершина	Вершина			
	1	2	3	4
1	1	x_1	x_2	0
2	0	1	x_5	x_3
3	0	x_5	1	x_4
4	0	0	0	1

В результате перемножения указанной матрицы самой на себя 3 раза и проведения логических преобразований получаем

$$\|C\|^3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \vee x_2x_5 & x_2 \vee x_1x_5 & x_1x_3 \vee x_2x_3x_5 \vee x_2x_4 \vee x_1x_4x_5 \\ 0 & 1 & x_5 & x_3 \vee x_4x_5 \\ 0 & x_5 & 1 & x_4 \vee x_3x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Элемент полученной матрицы C_{14} , находящийся на пересечении первой строки и четвертого столбца, отражает взаимосвязь соответствующих вершин 1 и 4 исходной структурной схемы. В связи с этим функция работоспособности выглядит следующим образом:

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_3 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_4 \vee x_1 x_4 x_5 = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & x_4 x_5 \\ \hline x_2 & x_4 \\ \hline & x_3 x_5 \end{array} \right|.$$

Применяя теорему разложения к функции работоспособности мостиковой схемы, получаем

$$Y = x_5 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline 1 & x_4 \end{array} \right| \vee x_5' \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline 0 & x_4 \end{array} \right|.$$

В результате упрощения с помощью правил алгебры логики функция приобретает вид

$$Y = x_5 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & x_4 \end{array} \right| \vee x_5' \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline & 0 \end{array} \right| = x_5 \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \vee x_5' \left| \begin{array}{c|c} x_1 x_3 \\ \hline x_2 x_4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_5 & \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \\ \hline x_5' & \left| \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_4 \end{array} \right| \end{array} \right|.$$

или
$$Y(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = x_5 [(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)] \vee x_5' (x_1 x_3 \vee x_2 x_4).$$

Из полученного выражения следует, что мостиковая схема эквивалентна дизъюнкции двух последовательно-параллельных схем, причем в первой из них точки 2 и 3 замкнуты накоротко, а во второй — разомкнуты.

При введении обозначений $P(x_1) = P_1, P(x_2) = P_2, \dots, P(x_5) = P_5$ функция приводится к виду

$$\begin{aligned} P(Y) &= P_5 (P_1 + P_2 - P_1 P_2)(P_3 + P_4 - P_3 P_4) + Q_5 (P_1 P_3 + P_2 P_4 - P_1 P_2 P_3 P_4) = \\ &= P_5 (1 - Q_1 Q_2)(1 - Q_3 Q_4) + Q_5 (P_1 P_3 + P_2 P_4 - P_1 P_2 P_3 P_4). \end{aligned}$$

Полученное выражение для мостиковой схемы полностью совпадает с полученным ранее выражением вероятности безотказной работы при использовании метода разложения относительно особого момента.

8.2.15. Особенности расчета надежности ИМС

Для расчета надежности ИМС в общем виде приемлемы рассмотренные ранее статистические методы, основанные на учете и анализе внезапных отказов РЭС.

В основе статистических методов в расчете микросхем и микропорок положено предположение, что любая ИМС может рассматриваться как функциональный узел, состоящий из совокупности разнородных «дискретных» элементов или элементов и навесных компонентов. Таким образом, при расчете справедлив экспоненциальный закон надежности, и интенсивность отказов ИМС определяется путем суммирования интенсивностей отказов составляющих ИМС элементов или элементов и компонентов:

$$\lambda_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_{iy}(t) N_{iy} + \sum_{j=1}^n \lambda_{j\hat{e}}(t) N_{j\hat{e}},$$

где m, n — число элементов и компонентов ИМС;

$\lambda_{iy}(t), \lambda_{j\hat{e}}(t)$ — интенсивности отказов i -го типа элементов и j -го типа компонентов;

$N_{iy}, N_{j\hat{e}}$ — число элементов i -го типа и компонентов j -го типа.

Однако указанные методы не учитывают особенности интегрально-групповой технологии изготовления микросхем, а также механизмов и причин отказов ИМС. В связи с чем статистические методы расчета используются для сравнительной, ориентировочной оценки надежности различных вариантов построения РЭС на основе ИМС на этапе эскизного проектирования.

Определенная ограниченность статистических методов вызвала необходимость развития, поэтому используются физико-статистические методы, обеспечивающие учет конструктивно-технологических особенностей ИМС и анализ физики и причин их отказов.

Физические методы используются для расчета полупроводниковых ИМС. Их надежность определяется целым рядом компонентов надежности: внешние соединения, включая выводы корпусов ИМС; внутренние контактные соединения различных структурных областей полупроводников с металлическими пленочными проводниками и другими элементами; площадь кристаллов; корпуса ИМС.

В соответствии с изложенными при экспоненциальном расчете надежности обобщенная модель интенсивности отказов ИМС выглядит следующим образом [29]:

$$\lambda_{\hat{E} \hat{I} \hat{N}} = \lambda_{\hat{A} \hat{N}} + \lambda_{\hat{E} \hat{N}} + \lambda_{\hat{I}} + \lambda_{\hat{E}},$$

где $\lambda_{\hat{A} \hat{N}}, \lambda_{\hat{E} \hat{N}}, \lambda_{\hat{I}}, \lambda_{\hat{E}}$ — интенсивности отказов внешних соединений, внутренних контактных соединений, кристалла и корпуса ИМС.

Физический метод обеспечивает получение расчетных значений количественных показателей надежности, необходимых для разработки конструкторской документации полупроводниковых ИМС.

8.2.16. Моделирование как метод исследования надежности элементов и ЭВС

При решении практических задач по обеспечению и оценке показателей надежности ЭВС аналитические расчеты оказываются весьма трудоемкими, либо ими вообще нельзя пользоваться. В этих случаях удобно поставленные задачи решать моделированием на ЭВМ.

Пусть ЭВС состоит из n элементов. При моделировании в памяти ЭВМ для каждого из n элементов с учетом законов распределения их наработок до отказа получают реализации случайных значений наработок (времени) до отказа $t_i, i = 1, 2, \dots, n$. Считают, что отказ ЭВС в j -й реализации наступает при отказе хотя бы одного из n элементов. Поэтому, за момент (время) отказа всего ЭВС j -й реализации принимают минимальную случайную наработку элементов из n штук в данной $j - 1$ реализации ЭВС. Таким путем получают N реализаций ЭВС и, следовательно, N значений наработок ЭВС на отказ. Количественные характеристики надежности ЭВС определяют путем статистической обработки всех N значений наработок на отказ.

Статистическое значение вероятности безотказной работы ЭВС оценивают выражением

$$P(t_3) = \frac{N - n(t_3)}{N}, \quad (8.105)$$

где N — число реализаций ЭВС;

$n(t_3)$ — число отказавших ЭВС за время t_3 .

Пример 1. На испытании находилось 100 однотипных элементов. За 1000 часов отказало 6 элементов. Требуется определить вероятность безотказной работы для момента времени $t_3 = 1000$ ч.

Решение. По условию, $N = 100$. Для времени $t_3 = 1000$ ч имеем $n(t_3 = 1000 \text{ ч}) = 6$. Тогда по формуле (8.105) находим

$$P(1000) = \frac{N - n(t_3)}{N} = \frac{100 - 6}{100} = 0.94.$$

Статистическое значение интенсивности отказов для интервала времени Δt_i определяют по формуле

$$\lambda_i = \frac{n(\Delta t_i)}{N_{\tilde{N}Di} \cdot \Delta t_i}, \quad (8.106)$$

где $n(\Delta t_i)$ — число отказавших изделий в интервале времени Δt_i ;

Δt_i — ширина рассматриваемого интервала;

$N_{\tilde{N}Di}$ — среднее число изделий, исправно работающих в интервале времени Δt_i :

$$N_{\tilde{N}Di} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2}, \quad (8.107)$$

где N_i — число изделий, исправно работающих в начале интервала Δt_i ;

N_{i+1} — число изделий, исправно работающих в конце интервала Δt_i .

Пример 2. На испытании находилось $N = 100$ однотипных устройств. Число отказов фиксировалось через каждые 500 часов работы. Данные об отказах приведены в таблице:

$\Delta t_i, \text{ ч}$	$n(\Delta t_i)$	$\Delta t_i, \text{ ч}$	$n(\Delta t_i)$
0...500	5	1000...1500	3
500...1000	4	1500...2000	2

Требуется вычислить интенсивность отказов для рассматриваемых интервалов времени.

Решение. По условию примера ширина интервалов $\Delta t_i = 500$ ч. По формуле (8.107) определяем $N_{\tilde{N}D1}$:

$$N_{\tilde{N}D1} = \frac{N_1 + N_2}{2} = \frac{100 + 95}{2} = 97.5.$$

Аналогично $N_{\tilde{N}D2} = 93$; $N_{cp3} = 89,5$; $N_{cp4} = 87$.

Далее по формуле (8.106) вычисляем значения интенсивностей отказов для каждого рассматриваемого интервала времени:

$$\lambda(\Delta t_1) \approx \frac{n(\Delta t_1)}{\Delta t_1 \cdot N_{CP1}} = \frac{5}{500 \cdot 97.5} \approx 0.103 \cdot 10^{-3} \text{ 1/} \div.$$

Аналогично

$$\lambda(\Delta t_2) \approx 0.086 \cdot 10^{-3} \text{ 1 / ч};$$

$$\lambda(\Delta t_3) \approx 0.067 \cdot 10^{-3} \text{ 1 / ч}; \lambda(\Delta t_4) \approx 0.046 \cdot 10^{-3} \text{ 1 / ч}.$$

Интенсивность отказов, вычисленная по формуле (8.106), является постоянной в интервале времени Δt_i . Поэтому для приведенного примера можно записать

$$\lambda(\Delta t_1) = \lambda(250\div); \lambda(\Delta t_2) = \lambda(750\div) \text{ и т. д.}$$

Средняя наработка на отказ вычисляется на основе статистических данных по формуле

$$T_{\tilde{n}\delta} = \frac{\sum_{j=1}^N t_j}{N} \quad (8.108)$$

где t_j — время безотказной работы ЭВС, полученное в j -й реализации.

ТЕМА 9. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И КАЧЕСТВА РЭА

9.1. Прогнозирование качества и состояния как метод повышения эксплуатационных показателей РЭА

Дальнейшее повышение надежности РЭА является одним из важнейших условий технического прогресса во многих отраслях народного хозяйства. В связи с этим требования к безотказности и долговечности РЭА с каждым годом повышаются. С возрастанием роли и усложнением РЭА возрастает и значение предвидения ее состояния и качества, поскольку без предвидения нельзя управлять состоянием и качеством РЭА, нельзя своевременно предупреждать аварийные ситуаций.

В то же время в связи с высокими показателями надежности РЭА традиционные статистические методы оценки и контроля надежности на основе испытаний становятся все чаще неприемлемыми в силу высокой стоимости испытаний, ограниченности получаемой, при этом информации и низкой достоверности оценок надежности, значительной длительности их получения.

Таким образом, новые этапы развития техники вызвали к жизни новую техническую проблему — проблему прогнозирования состояния и качества РЭА.

Теория прогнозирования состояния и качества РЭА находится в состоянии становления и развития. Она располагается на стыке ряда научных дисциплин и теорий, таких как теория надежности, техническая диагностика, основы технических измерений и других.

Прогнозировать событие — значит предвидеть, предсказать будущее событие на основании изучения таких факторов, от которых оно зависит или которые ему сопутствуют. Научное прогнозирование основывается на изучении объективных закономерностей, которым подчиняются интересующие нас процессы и события. При этом используются две группы закономерностей:

- закономерности случайных событий или вероятностные (стохастические);
- закономерности детерминированные.

При прогнозировании события можно выделить два характерных подхода к решению поставленной задачи:

- прогнозирование будущего состояния данного события на основании изучения закономерности изменения данного события;
- прогнозирование будущего состояния данного события на основании изучения другого события (или группы других событий), связанного с данным.

Прогнозирование состояния и качества осуществляют на различных стадиях создания и использования изделий: на стадии проектирования, производства и эксплуатации.

На стадии проектирования прогнозирование применяют при решении вопросов совершенствования конструкции изделия, выбора оптимальных режимов технологии, подбора дискретных элементов, определения требований по надежности и т. д.

На стадии производства прогнозирование применяют для целей управления технологическими процессами, для отбраковки потенциально ненадежных изделий на отдельных технологических операциях, отбора изделий повышенной надёжности, оценки и контроля надежности и пр.

На стадии эксплуатации прогнозирование применяют для обоснования сроков проведения профилактических работ, определения ЗИП, оценки остаточного ресурса и т. п.

Все эти мероприятия позволяют создавать конструкции, которые наилучшим образом удовлетворяют предполагаемым условиям работы, своевременно предупредить отказы и применить такие рабочие условия и условия обслуживания изделий, которые наилучшим образом отвечают задаче обеспечения заданной надежности и эффективности.

9.2. Основные направления развития прогнозирования

В настоящее время существует большое количество методик, методов и способов прогнозирования. Однако все они основаны на двух крайних подходах: эвристическом и математическом.

Эвристический метод основан на использовании мнения специалистов в данной области знания и, как правило, используется для прогнозирования процессов, формализацию которых нельзя провести к моменту прогнозирования.

Несомненным достоинством метода эвристического прогнозирования является возможность избежать грубых ошибок, особенно в области скачкообразных изменений прогнозируемой величины. Это объясняется тем, что опрашиваются, как правило, высококвалифицированные специалисты в данной области знания. Однако этот метод является субъективным. Кроме того, он весьма сложный и трудоемкий.

Математические методы прогнозирования широко используются в настоящее время. Из математических методов прогнозирования в практике конструирования РЭА наибольшее распространение получили так называемые методы экстраполяции и методы распознавания образов (техническая диагностика). В свою очередь в зависимости от вида математической модели их можно разделить на вероятностные и квазидетерминированные.

При **вероятностном** прогнозировании на основании наблюдений на определенном промежутке времени определяют, например, коэффициент сноса и диффузий, а затем путем решения уравнения Колмогорова получают прогнозирующую вероятностную модель.

При **квазидетерминированном** прогнозировании на основании наблюдений на определенном промежутке времени определяют прогнозирующую детерминированную модель, при этом в качестве математического аппарата для определения неизвестных коэффициентов модели наиболее часто используют метод максимального правдоподобия (МНК, метод «взвешенных» наименьших квадратов и т. д.).

Основными достоинствами математических методов прогнозирования являются объективность получаемой информации, высокая точность (при правильно выбранной модели), а также возможность механизации процесса прогнозирования при применении современных вычислительных машин.

Однако эти методы требуют наличия четко сформулированной математической модели поведения прогнозируемого объекта.

Успешное решение задачи прогнозирования при применении математических методов определяется правильностью выбора математической

модели (адекватностью ее прогнозируемому процессу) и точностью оценки ее неизвестных параметров (коэффициентов).

Эвристическому и математическим методам прогнозирования присущи и определенные преимущества и некоторые недостатки. Вполне естественно поэтому стремление объединить достоинства этих методов и исключить их недостатки. Этого можно достичь, используя комбинированный метод прогнозирования.

Важное место в прогнозировании занимает анализ его результатов.

На основании анализа результатов прогнозирования можно, например, установить срок службы изделия, установить время проведения профилактических работ. Профилактическое обслуживание РЭА позволяет повысить ее надежность.

Для проведения профилактических мероприятий необходимо наличие ЗИПа (запасного имущества). Однако наличие ЗИПа вызывает увеличение стоимости, габаритов и массы РЭА. Поэтому перед конструктором при разработке РЭА всегда стоит задача оптимизации ЗИПа.

В общей проблеме конструирования РЭА большую роль и важное место занимает в настоящее время прогнозирование качества, поскольку качество определяет способность РЭА выполнять требуемые функции.

9.3. Методы распознавания образов и их использование при прогнозировании качества РЭА

9.3.1. Сущность методов распознавания образов

Под индивидуальным прогнозированием качества на основе информативных параметров в общем случае понимается предсказание момента наступления отказа конкретного изделия при его испытаниях или эксплуатации в заданных условиях и режимах на основе замеров некоторых электрофизических параметров этого изделия, несущих информацию о его качестве и состоянии (так называемых информативных параметров) до начала или в течение некоторого начального периода испытаний или эксплуатации.

В случае использования более одного информативного параметра (что обычно имеет место для РЭА) часто оказывается эффективным применение методов распознавания образов.

Методы распознавания образов обладают тем преимуществом, что позволяют получить характеристику изделия исходя из совокупности его параметров или признаков, что дает возможность максимально использовать имеющуюся информацию и получать в ряде случаев более точные результаты, чем при рассмотрении каждого параметра изделия в отдельности.

Достоинством этих методов является также их универсальность и возможность автоматизации всего процесса прогнозирования, начиная от измерения параметров до принятия решения о принадлежности изделия к тому или иному классу.

Однако данные методы являются лишь удобным аппаратом для обработки имеющихся статистических данных и не отражают физических явлений.

Кроме того, применение этих методов обычно предполагает возможность формирования обучающей выборки, содержащей достаточно большое количество отказавших и не отказавших изделий, которые прошли испытания или эксплуатацию в течение времени прогноза. В силу этого их применение в основном ограничивается изделиями массового или серийного производства со сравнительно небольшим ресурсом.

Основная идея применения распознавания образов для индивидуального прогнозирования качества состоит в следующем. Пусть, например, имеется некоторое количество изделий, прошедших испытания на время T и разделенных по результатам испытаний на два класса: отказавшие и не отказавшие в течение испытаний. Пусть также перед началом испытаний у изделий был измерен некоторый набор параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$. Задачу индивидуального прогнозирования качества можно сформулировать следующим образом: исходя из имеющиеся данных об изделиях предсказать исход испытаний произвольного изделия (т. е. отнести его к классу отказавших или не отказавших) на основании значения его параметров перед началом испытаний. Но такая формулировка задачи совпадает с формулировкой задачи распознавания образов: имеется обучающая последовательность объектов классов A и B , каждый из которых характеризуется вектором признаков $x_1, x_2, \dots, x_n$; требуется на основании обучающей последовательности построить правило, которое позволит отнести произвольный объект, не входящий в обучающую последовательность, к классу A или B , исходя из значений его признаков.

Аналогичным образом задача формулируется и в случае, когда имеется более двух классов изделий (например, классы отказавших на промежутках $[0, t_n]$, $[t_n, 2t_n]$, $[2t_n, 3t_n]$ т. д.). В ряде случаев для повышения точности прогноза в число параметров, характеризующих изделие, включаются параметры, измеряемые через некоторое время $\tau \ll T$ после начала испытаний. В этом случае прогнозирование заключается в предсказании исхода испытаний данного изделия на время T по результатам испытания этого изделия в течение времени τ .

Правило, с помощью которого производится отнесение изделий к тому или иному классу, называется прогнозирующим (решающим) правилом; параметры изделия (из числа информативных), на основании которых производится отнесение изделия к тому или иному классу, называются прогнозируемыми параметрами.

Выборка изделий, используемая для построения прогнозирующего правила, называется обучающей. Для изделий обучающей выборки должны быть известны значения прогнозирующих параметров (при решении задач по выбору наиболее информативной совокупности параметров — значения всех параметров исходной совокупности) и принадлежность к тому или иному классу. Обучающая выборка должна содержать достаточно большое количество изделий каждого класса. Минимально допустимое число изделий в каждом классе зависит от применяемого метода.

Достоверность индивидуального прогнозирования качества характеризуется вероятностью P_{12} того, что надежное в действительности изделие будет отнесено к ненадежным, и вероятностью P_{21} того, что ненадежное в действительности изделие будет отнесено к надежным. Для оценки этих вероятностей обычно производят индивидуальное прогнозирование некоторой выборки изделий с последующим проведением испытаний этой выборки и сравнением результатов прогноза с результатами испытаний.

Таким образом, при индивидуальном прогнозировании качества на основе распознавания образов необходимо:

- выбрать прогнозирующие параметры изделия;
- сформулировать представительную обучающую выборку (обучение);
- построить прогнозирующее правило;
- оценить вероятность ошибок при прогнозировании (экзамен).

9.3.2. Методы выбора информативных параметров

Выбор прогнозирующих параметров оказывает решающее влияние на точность прогнозирования. В связи с этим возникает задача оценки и сравнения информативности различных наборов параметров. С этой целью перед началом испытаний производят измерение всех параметров, которые могут быть информативными. После проведения испытаний сравнивают информативность различных наборов и выбирают наиболее информативный из них.

Выбор исходной совокупности параметров, подлежащих исследованию, является весьма важной самостоятельной задачей. Он производится на основании изучения деградационных процессов, анализа отказов, анализа производственного брака, производственного опыта, различных физических соображений и т. д.

При этом может оказаться, что некоторые из параметров (как правило, наиболее информативные) измерять нецелесообразно, ввиду отсутствия соответствующей аппаратуры и ограниченности ресурсов, ассигнованных на создание системы распознавания.

Поэтому для реализации максимально возможной эффективности системы распознавания в качестве информативных параметров следует использовать лишь те параметры, которые, с одной стороны, наиболее информативны и, с другой стороны, могут определяться имеющейся или случайно созданной измерительной аппаратурой.

Выбор наиболее информативной совокупности параметров осуществляют несколькими методами.

Полный перебор. Поскольку обычно прогнозирующие параметры статистически зависимы друг от друга, наиболее точной процедурой выбора информативной совокупности параметров из заданного набора является перебор всех возможных комбинаций параметров и сравнение их информативности. Практически такая процедура реализуется следующим образом. Пусть требуется выбрать из заданных N параметров наиболее информативную совокупность, состоящую не более чем из n параметров. Для решения этой задачи составляют всевозможные наборы из 1, 2, 3, ... параметров. Для каждого набора решают задачу обучения и экзамена и вычисляют меру информативности данного набора. Затем вычисленные значения сравнивают и выбирают наилучший набор.

Поскольку с ростом N число наборов быстро увеличивается, алгоритм полного перебора может быть практически реализован лишь при небольших N (обычно не больше 10).

Сокращенный перебор. При этом методе вначале оценивают информативность каждого отдельного параметра и выбирают параметр с наибольшей информативностью. Затем оценивают информативность всевозможных пар параметров, включающих выбранный параметр, и выбирают из них пару с наибольшей информативностью, затем оценивают информативность всевозможных троек, включающих выбранную пару, и т. д. Процесс заканчивают, когда добавление нового параметра или не увеличивает информативности набора, или увеличивает ее незначительно, или допустимое число параметров достигнуто.

Возможны и другие подходы.

Оценка информативности совокупности параметров производится при помощи соответствующих критериев, например:

1. Мера Шеннона:

$$I_x = H(\Theta) - H(\Theta / x), \quad (9.1)$$

где $H(\Theta)$ — исходная априорная неопределенность состояния системы или ее энтропия (до проведения экспериментов), причем

$$H(\Theta) = - \sum_{j=1}^2 P_j \log P_j ; \quad (9.2)$$

$H(\Theta/x)$ — полная условная энтропия системы распознавания при измерении всех возможных значений признака X :

$$H(\Theta/x) = - \sum_{j=1}^2 P_j \sum_{i=1}^n f_{ji} \log \frac{P_j \cdot f_{ji}}{P_1 f_{1i} + P_2 f_{2i}} . \quad (9.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

P_j — априорные вероятности отнесения объекта к j -ому классу;

f_{ji} — плотность распределения вероятностей в пространстве X для класса $j, j = 1, 2$;

x — пространство оцениваемой совокупности параметра.

2. Функция риска:

$$R(x) = C_1 P_{21} q_2 + C_2 P_{12} q_1 , \quad (9.4)$$

где P_{21}, P_{12} — оценка вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода, полученные при прогнозировании в пространства признаков x ;

q_1, q_2 — априорные вероятности 1-го и 2-го классов;

C_1, C_2 — цены ошибок 1-го и 2-го рода.

3. Вероятность правильного прогноза:

$$\check{I}(x) = 1 - P_{21} q_2 - P_{12} q_1 , \quad (9.5)$$

или же отношение числа правильно классифицированных изделий к общему числу предъявленных для прогнозирования и др.

Для определения информативности параметров можно использовать также коэффициенты корреляции и корреляционные соотношения.

9.3.3. Методы построения прогнозирующего правила.

Построение прогнозирующего правила состоит в нахождении некоей последовательности операций, позволяющей с наибольшей достоверностью отнести изделие к надежным или ненадежным, и обычно сводится к построению некоторой поверхности в пространстве прогнозных параметров.

Существует большое число методов построения прогнозирующего правила. Рассмотрим один из наиболее распространенных методов.

Метод статистических решений при аппроксимации распределений объектов в классах нормальными распределениями является в настоящее время одним из наиболее распространенных. Метод состоит в следующем.

По данным обучающей выборки вычисляют в отдельности для классов надежных (класс 1) и ненадежных (класс 2) изделий оценки элементов вектора средних значений и элементов ковариационной матрицы прогнозирующих параметров. Строят функцию логарифма отношения плотностей распределений в классах, которая определена в пространстве прогнозирующих параметров x и имеет вид

$$L(x) = \ln \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = -\frac{1}{2}(x - m_1)^T S_1^{-1}(x - m_1) + \frac{1}{2}(x - m_2)^T S_2^{-1}(x - m_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}, \quad (9.6)$$

где m_i — вектор оценок средних значений параметров для i -го класса;
 $i = 1, 2$;

S_i — оцененная ковариационная матрица для i -го класса;

S_i^{-1} — матрица, обратная S_i ;

ΔS_i — определитель матрицы S_i ;

T — знак транспонирования.

Прогнозирующее правило задается в виде функции $L(x)$ и некоторого порогового значения Λ , для выбора которого используют различные стратегии. Индивидуальное прогнозирование качества изделия состоит в следующем:

- а) измеряют вектор прогнозирующих параметров x данного изделия;
- б) вычисляют $L(x)$ и сравнивают с Λ ;
- в) если $L(x) > \Lambda$, изделие относят к надежным, если $L(x) \leq \Lambda$ — к ненадежным.

Выбор порога Λ имеет большое значение, поскольку от него зависит соотношение ошибок 1-го и 2-го рода и в целом качество прогнозирования.

Вероятности ошибок могут быть уменьшены за счет допущения возможности отказа от прогнозирования. В этом случае устанавливаются два порога: Λ_1 и Λ_2 ($\Lambda_1 > \Lambda_2$) и решение принимают в соответствии с правилом:

$L(x) > \Lambda_1$ — изделие надежно;

$\Lambda_2 \leq L(x) \leq \Lambda_1$ — отказ от прогнозирования;

$L(x) < \Lambda_2$ — изделие ненадежно.

Метод позволяет получить удовлетворительные результаты для широкого класса распределений, отличных от нормального.

Формальным условием применимости метода является выполнение требования о том, чтобы количество изделий каждого класса в обучающей выборке было не меньше количества признаков. Однако удовлетворительные результаты получаются обычно при отношении числа объектов к числу признаков, большем 3–10.

9.3.4. Оценка вероятностей ошибок при прогнозировании

Причинами возникновения ошибок при прогнозировании являются недостаточная информативность используемой совокупности признаков, неточность аппроксимации идеальной разделяющей поверхности, конечность обучающей выборки. Для оценки вероятностей ошибок при использовании конкретной методики прогнозирования применяют несколько методов. Рассмотрим один из них.

Экзамен по независимой выборке. К выборке изделий объема n применяют прогнозирующее правило и отмечают изделия, отнесенные правилом к надежным и ненадежным. Далее выборка проходит испытания на надежность и определяют действительно надежные и ненадежные изделия. Состоятельные оценки вероятностей ошибок находят по формулам

$$P_{12} = \frac{n_{12}}{n_1}; \quad P_{21} = \frac{n_{21}}{n_2} = \frac{n_{21}}{n - n_1}, \quad (9.7)$$

где P_{12} — оценка вероятности отнесения надежного изделия к ненадежным;
 P_{21} — оценка вероятности отнесения ненадежного изделия к надежным;
 n_{21} — число ненадежных изделий, отнесенных к надежным;
 n_{12} — число надежных изделий, отнесенных к ненадежным;
 n_1, n_2 — число надежных и ненадежных изделий в выборке; соответственно, при нем $n = n_1 + n_2$.

При решении задач по прогнозированию качества широко используют ЭВМ, разработано программное обеспечение.

9.3.5. Методы индивидуального статистического прогнозирования состояния

При индивидуальном прогнозировании состояния РЭА в основном применяют математические методы и, в частности, метод экстраполяции. Сущность этого метода заключается в следующем. Для получения прогноза экспериментально исследуют функцию состояния $F(x, t)$ индивидуального образца изделий в области T_1 и осуществляют оценку поведения этой функции в области T_2 , причем $T_1 \ll T_2$ (рис. 9.1).

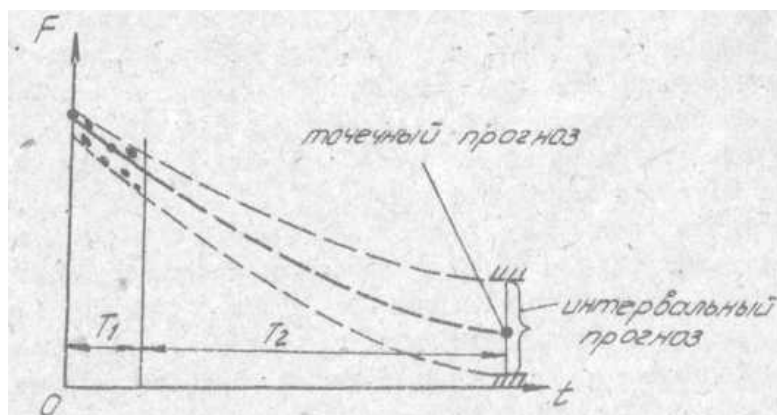


Рисунок 9.1 — К прогнозированию состояния

Прогнозирование состояний РЭА позволяет:

- количественно предсказать изменение характеристик РЭА на протяжении будущего отрезка времени в конкретной размерности;
- предсказать ожидаемую вероятность того, что характеристики изделия не выйдут за установленные допустимые границы.

В первом случае используют детерминированные математические модели, во втором — вероятностные.

Следует заметить, что ни одна задача прогнозирования состояния изделий не может быть решена точно из-за наличия случайных помех. Причинами этого являются: невозможность точного определения параметров модели (даже если ее вид выбран правильно) из-за наличия случайных помех на участке наблюдения, наличие случайных помех на участке прогнозирования.

С целью сведения к минимуму влияния случайных помех применяют специальные методы сглаживания (фильтрации) случайных процессов, которые позволяют получать максимальное правдоподобие между реальными процессами-оригиналами и их моделями.

Например, при использовании регрессионной прогнозирующей модели для получения максимального правдоподобия при обработке результатов экспериментальных исследований часто пользуются методом наименьших квадратов (МНК).

Прогнозирующие математические модели могут иметь различную форму. В случае использования детерминированной основы это может быть полином (9.8) (линейный, нелинейный), экспонента (9.9) и т. д.

$$y(t) = \sum_{i=0}^k b_i t^i; \quad (9.8)$$

$$y(t) = ae^{bt}. \quad (9.9)$$

Когда на изделие воздействует много факторов, модель (9.8) будет иметь вид

$$y(x, t) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + b_t t + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{it} x_i t + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + b_{tt} t^2 + \dots \quad (9.10)$$

Прогнозирование состояния РЭА с использованием детерминированной основы позволяет осуществить точечный прогноз с оценкой его точности.

ТЕМА 10. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

10.1. Классические методы поиска экстремума

Одной из важных задач в анализе является задача отыскания экстремума (наибольшего или наименьшего значения) целевой функции $f(x)$ n -мерного векторного аргумента x при некоторых ограничениях. Эту задачу можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \min f(x), \\ x \in X, \end{aligned} \quad (10.1)$$

где X — допустимое множество задачи.

Такая задача в зависимости от наличия ограничений или их отсутствия может быть решена следующими методами.

Метод дифференциального исчисления. Этот метод применяют при отсутствии каких-либо ограничений.

Экстремум находят путем решения системы n уравнений, полученных приравниванием к нулю частных производных от целевой функции, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.2)$$

Метод множителей Лагранжа. Этот метод применяют при наличии ограничений типа равенств и поэтому находят относительный экстремум.

Пусть требуется минимизировать функцию n переменных $f(x)$ при наличии ограничений типа равенств:

$$g_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.3)$$

Минимизация функции $f(x)$ методом Лагранжа состоит из следующих этапов:

1) составляют функцию $n + m$ переменных, которую называют функцией Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x); \quad (10.4)$$

2) вычисляют и приравнивают к нулю ее частные производные по x и λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= g_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

3) решают систему (10.5) $n + m$ уравнений относительно $n + m$ неизвестных $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Задачи с ограничениями по большому числу параметров приводят к системам уравнений, для решения которых требуется использование ЭВМ.

Методы вариационного исчисления. Задачей вариационного исчисления является отыскание функций, доставляющих экстремальное (максимальное или минимальное) значение некоторым величинам, которые зависят от этих функций и называются функционалом.

Функционал можно рассматривать как обобщение хорошо известного понятия функции, как функцию особого рода, в которой роль независимой переменной играет другая функция.

Простейшим примером функционала может служить определенный интеграл

$$I = \int_0^1 y dx, \quad (10.6)$$

где y — некоторая функция от x .

Функционалом является длина кривой.

Примером функционала еще более общего вида может быть выражение

$$I = \int_a^b F(x; y; y') dx, \quad (10.7)$$

т. е. определенный интеграл от некоторого выражения F , зависящего от независимого переменного x , искомой функции $y(x)$ и ее производной y' .

Если $y(x)$ доставляет экстремум функционалу (10.7), то необходимо, чтобы искомая функция удовлетворяла следующему условию (называемому условием Эйлера):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (10.8)$$

Если функционал зависит от n функций $y_i(x)$ ($i = 1, n$) т. е.

$$I = \int_{x_0}^{x_i} F(x; y_1, \dots, y_n; y_1', \dots, y_n') dx, \quad (10.9)$$

то, для того чтобы кривая $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ доставляла экстремум функционалу (10.9), необходимо, чтобы функции $y_i(x)$ удовлетворяли системе дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_1} = 0; \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_n} = 0. \end{array} \right. \quad (10.10)$$

В задачах вариационного исчисления встречаются функционалы, зависящие не только от первой, но и от старших производных искомой функции, например,

$$I = \int_{x_0}^{x_i} F(x; y; y', y'', \dots, y^{(n)}) dx. \quad (10.11)$$

Тогда кривая, доставляющая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0 \quad (10.12)$$

Однако наибольшее практическое значение имеет случай, когда на функцию, доставляющую экстремум функционалу, наложены некоторые ограничения. На практике в большинстве случаев приходится встречаться именно с этой задачей, поскольку в реальных устройствах мы должны считаться с ограниченностью усилий и напряжений в элементах конструкции, ограниченностью мощности источников управляющих воздействий и т. п.

Например, для того чтобы найти экстремум функционала (10.7) при условии

надо ввести промежуточную (вспомогательную) функцию

где $\lambda(x)$ — множитель Лагранжа, и искать обычными методами экстремум функционала

Аналогично задача решается, когда приходится иметь дело с интегральными ограничениями вида

Тогда промежуточная функция будет иметь вид

Принцип максимума. Для отыскания функции, доставляющей экстремум функционалу при наличии ограничений, можно также использовать методы, специально разработанные для задач с ограничениями, в частности так называемый принцип максимума, разработанный в 1956–1961 гг. Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками.

Принцип максимума применяют при анализе систем, поведение которых можно описать дифференциальными уравнениями

где x_i — координаты и т. п. объекта;
 U_i — управления (температура, напряжение, топливо и т. д.).

Ставится задача — найти управление $U_j(t)$, переводящее систему за время T из положения $x_i = x_i(0)$ в положение $x_i = x_i(T)$ и доставляющее минимум функционалу

$$I = \int_0^T f_0(x_i; U_j) dt. \quad (10.19)$$

В отличие от обычных задач вариационного исчисления, где все искомые функции равноправны, в принципе максимума разделяются фазовые координаты x_i и управления. Это разделение удобно в тех случаях, когда ограничения накладываются только на управления, а не на фазовые координаты, например:

$$|U_j| \leq 1. \quad (10.20)$$

Важную роль в принципе максимума играют вспомогательные переменные $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ и промежуточная функция, которую можно назвать гамильтонианом:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_k). \quad (10.21)$$

При помощи этой функции основная система уравнений (10.18) и уравнения, необходимые для определения вспомогательных переменных $\psi_i(t)$, записываются в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}; \quad (10.22)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (10.23)$$

Действительно, так как $\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i$, то уравнения (10.22) эквивалентны уравнениям (10.18); в то же время из уравнений (10.23) можно найти вспомогательные переменные $\psi_i(t)$. Основное необходимое условие, которому должно удовлетворять управление $U_j(t)$, для того чтобы быть оптимальным, формулируется в виде теоремы о максимуме: если $U_j(t)$ — оптимальное управление, то оно доставляет максимум функции H (10.21), т. е.

$$H(\psi_i, f_i, U_{j\hat{i}\hat{o}}) = M(\psi_i, f_i), \quad (10.24)$$

где M — знак максимума.

Пользуясь теоремой о максимуме, можно фактически определять оптимальные управления $U_j(t)$, доставляющие минимум функционалу (10.19) при учете уравнений связи (10.18).

Если на оптимальное управление $U(t)$ не наложено, ограничений, то необходимым условием максимума H является обращение в нуль производной по U , т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0. \quad (10.25)$$

Однако если управление ограничено неравенством (10.20), то максимум H может достигаться не только при U , удовлетворяющем условию (10.25), но и на границе области при $U = \pm 1$. Поэтому для определения оптимального управления в замкнутой области — управления, подчиненного ограничению (10.20), — следует уравнение (10.25) заменить более общим условием — условием максимума гамильтониана H по переменным $U_j(t)$.

Следует отметить, что для общего случая нелинейных систем удобнее использовать методы классического вариационного исчисления, в то время как в частном случае линейных систем выгоднее пользоваться методикой принципа максимума.

Дискретный принцип максимума. При планировании производственных процессов в автоматическом управлении и т. п. возникают задачи оптимального управления дискретного типа, в которых оптимизируемый процесс описывают системой уравнений

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= f_{it}(x_i(t), U_j(t)), \\ t &= \overline{0, N-1}, \\ i &= \overline{1, n}, \\ j &= \overline{1, m} \end{aligned} \quad (10.26)$$

где $U_j(t)$ — управляющее воздействие;

$x_i(t)$ — состояние исследуемой системы в дискретный промежуток времени t .

В начальный момент состояние системы задано:

$$x_i(0) = a_i. \quad (10.27)$$

При этом на управление наложено ограничение

$$|U_j(t)| \leq k_j. \quad (10.28)$$

В принятых обозначениях задача формулируется так: найти такие управления и фазовую траекторию, чтобы удовлетворить системе разностных уравнений (10.26), начальным условиям (10.27), ограничениям (10.28) и получить минимальное на множестве пар $\{x, U\}$, подчиняющихся (10.26)–(10.28), значение критерия

$$I(U, x) = f_{0N}(x_N) + \sum_{t=0}^{N-1} f_{0t}(x(t), U(t)), \quad (10.29)$$

где f_{0t} , $t = 0, N$ — скалярные функции.

В данном случае так же, как и в предыдущем разделе, вводят вспомогательные переменные $\psi_i(t)$ и промежуточную функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H_t(\psi(t+1), x(t), U(t)) &= f_{0t}(x(t), U(t)) + \sum_{i=1}^m \psi_i(t+1) f_{it}(x(t), U(t)) = \\ &= -f_{0t}(x(t), U(t)) + \psi(t+1) f_t(x(t), U(t)). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Вспомогательные переменные можно найти из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(N) &= \left. \frac{\partial f_{0N}(x(N))}{\partial x(N)} \right|_{x(N)=\tilde{x}(N)} ; \\ \tilde{\psi}(t) &= \frac{\partial H_t}{\partial x(t)}(\tilde{\psi}(t+1), \tilde{x}(t), \tilde{U}(t)), \quad t = \overline{N-1, 0} \end{aligned} \quad (10.31)$$

где $\tilde{X}, \tilde{U}$ — оптимальные фазовая траектория и управление.

При оптимальном управлении $U(t)=\tilde{U}$ гамильтониан

$$H_t(\tilde{\psi}(t+1), \tilde{x}(t), U(t))$$

достигает своего максимума.

10.2. Регулярные методы поиска экстремума

Регулярные (численные или прямые) методы решений задач оптимизации применяют в случае, когда классические методы нахождения экстремума сложны или когда функциональная зависимость неизвестна. Однако методика поиска экстремума как в том, так и в другом случае аналогична.

Среди регулярных методов поиска экстремума наибольшее распространение получили методы первого порядка, которые обычно называют градиентными.

Градиентные методы. Общая схема градиентного спуска. Напомним, что градиентом многомерной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют вектор, который аналитически выражается геометрической суммой частных производных по отдельным координатам:

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \overrightarrow{x_1} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \overrightarrow{x_2} + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \overrightarrow{x_n}. \quad (10.32)$$

При достижении функцией $f(x)$ экстремума (максимума или минимума)

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = 0. \quad (10.33)$$

Градиент скалярной функции $f(x)$ в некоторой точке x_k направлен в сторону наискорейшего возрастания функции и ортогонален линии уровня (поверхности постоянного значения $f(x)$, проходящей через точку x_k). Вектор, противоположный градиенту $f(x_k)$, — антиградиент — направлен в сторону наискорейшего убывания функции $f(x)$.

Необходимые условия экстремума (10.33) в общем случае представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, решение которых аналитическими методами часто связано с большими трудностями. Существо градиентных методов поиска экстремума заключается в следующем.

Выбирая в качестве направления спуска антиградиент функции $f(x)$ в точке x_k , мы приходим к итерационному процессу вида

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k); \quad \alpha_k > 0, k = \overline{0, 1, \dots} \quad (10.34)$$

или в общем виде

$$x_{i(k+1)} = x_{i(k)} - \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{(k)}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.35)$$

Все итерационные процессы, в которых направление движения на каждом шаге совпадает с антиградиентом (градиентом) функции, называют градиентными методами и отличают друг от друга способами выбора шага α_k .

При выполнении соответствующих условий сходимости оказывается, что для любого начального выбора $x_{i(k)}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \Leftrightarrow \|f'(x_k)\| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad k \rightarrow \infty, \quad (10.36)$$

где x^* — оптимальное значение.

Существует много различных способов выбора шага α_k , но наиболее распространены три: с постоянным шагом, с дроблением шага и метод наискорейшего спуска.

Методы с постоянным шагом. Рассмотрим процесс (10.34). Первая проблема, с которой мы сталкиваемся при его реализации, это выбор шага α_k . Достаточно малый шаг α_k обеспечит убывание функции, т. е. выполнение неравенства

$$f(x_k - \alpha_k f'(x_k)) < f(x_k), \quad (10.37)$$

но может привести к неприемлемо большому количеству итераций, необходимых для достижения точки минимума. С другой стороны, слишком большой шаг может вызвать неожиданный рост функции (невыполнение условия (10.37)) либо привести к колебаниям около точки минимума.

Для примера рассмотрим задачу минимизации функции $f(x) = ax^2$, где a — некоторое положительное число. Тогда формула (10.34) примет вид

$$x_{k+1} = (1 - 2\alpha_k a)x_k.$$

Очевидно, что при постоянном шаге α_k соответствующий процесс будет сходиться, если $0 < \alpha_k < 1/a$, и расходиться для $\alpha_k > 1/a$. Если принять $\alpha_k = 1/a$, то $x_1 = -x_0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = -x_0$ и т. д. Процесс будет расходящимся, но при этом значения аргумента (a , значит, и функции) повторяются. Расходимость такого рода обычно называют закливанием.

Градиентные методы с дроблением шага. В методе градиентного спуска с дроблением шага величина α_k выбирается так, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$f[x_k - \alpha_k f'(x_k)] - f(x_k) \leq -\varepsilon \lambda_k [f'(x_k)]^2, \quad (10.38)$$

где $0 < \varepsilon < 1$ — произвольно выбранная постоянная (одна и та же для всех итераций). Очевидно, что требование (10.38) на выбор шага более жесткое, чем условие (10.37), но имеет тот же смысл: функция должна убывать от итерации к итерации. Процесс (10.34) с выбором шага, удовлетворяющего неравенству (10.38), протекает следующим образом. Выбираем число $\alpha > 0$ одно и то же для всех итераций. На k -й итерации проверяем выполнение неравенства (10.38) при $\alpha_k = \alpha$. Если оно выполнено, полагаем $\alpha_k = \alpha$ и переходим к следующей итерации. Если нет, то шаг α_k дробим до тех пор, пока оно не выполнится.

Геометрически градиентный спуск с дроблением шага изображен на рисунке 10.1. Здесь изображена часть некоторой зигзагообразной траектории x_0, x_1, x_2 , ортогональная в каждой точке x_0, x_1, x_2 соответствующим линиям уровня. При продолжении соответствующих построений мы придем из начальной точки x в точку минимума x^* .

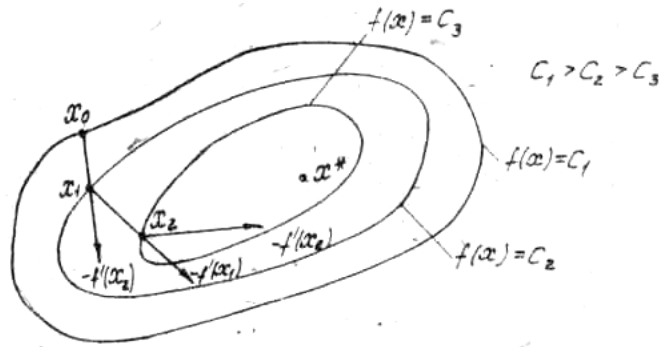


Рисунок 10.1 — Метод с дроблением шага

Метод наискорейшего спуска. Как показано выше, можно выбрать постоянную для всех итераций величину шага, обеспечивающую убывание функции от итерации к итерации. Однако обычно шаг при этом оказывается очень малым, что приводит к необходимости проводить большое количество итераций для достижения точки минимума. Поэтому методы спуска с переменным шагом являются более экономными. Процесс, на каждой итерации которого шаг α_k выбирается из условия минимума функции $f(x)$ в направлении движения, т. е.

$$f[x_k - \alpha_k f'(x_k)] = \min f[x_k - \alpha f'(x_k)], \quad (10.39)$$

называют методом наискорейшего спуска. В этом варианте градиентного спуска на каждой итерации требуется решать задачу одномерной минимизации (10.39). Разумеется, этот способ выбора α_k сложнее, чем рассмотренные в предыдущих разделах.

Геометрическая интерпретация метода наискорейшего спуска представлена на рисунке 10.2.

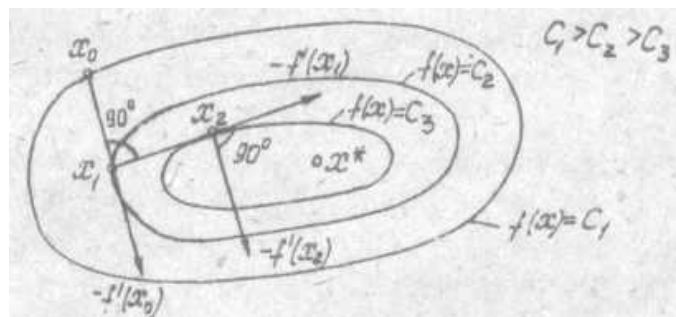


Рисунок 10.2 — Метод наискорейшего спуска

В этом методе в отличие от обычного градиентного спуска направление движения из точки x_k касается линии уровня в точке x_{k+1} . Последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \dots$ зигзагообразно приближается к точке минимума x^* , причем звенья этого зигзага ортогональны между собой.

Практически при реализации схемы (10.34) итерации прекращают, если для всех i ($i = 1, 2, \dots, n$) выполнены условия типа

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k) \right\| \leq \delta,$$

где δ — некоторое заданное число, характеризующее точность нахождения минимума.

Методы покоординатного спуска. Стремление уменьшить объем вычислительной работы, требуемой для осуществления одной итерации метода наискорейшего спуска, привело к созданию ряда других методов. Одним из них является метод покоординатного спуска.

Пусть $x_0 = x_{10}, \dots, x_{n0}^T$ — начальное приближение. Вычислим частную производную по первой координате $\frac{\partial f_0}{\partial x_1}$ и примем

$$x_1 = x_0 - \alpha_0 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} e_1,$$

где $e_1 = \{0, 1, \dots, 0\}^T$ — единичный вектор оси x_1 .

Следующая итерация состоит в вычислении точки x_2 по формуле

$$x_2 = x_1 - \alpha_1 \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} e_2,$$

где $e_2 = \{0, 1, \dots, 0\}^T$ — единичный вектор оси x_2 и т. д.

Таким образом, в методе покоординатного спуска мы спускаемся по ломаной, состоящей из отрезков прямых, параллельных координатным осям.

Геометрическая интерпретация метода для случая двух переменных представлена на рисунке 10.3.

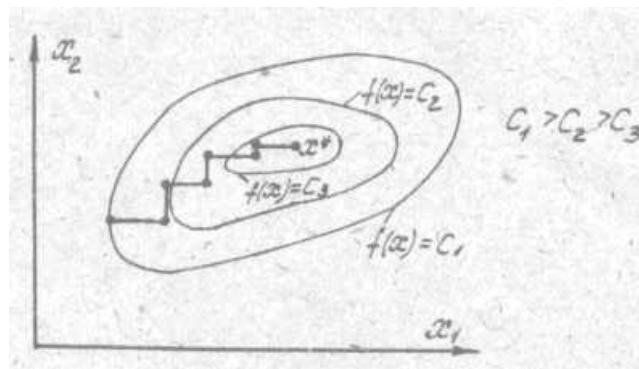


Рисунок 10.3 — Метод покоординатного спуска

Величина шага α_k выбирается на каждой итерации аналогично тому, как это делалось выше.

Релаксационные методы. Если линии уровня сильно вытянуты вдоль одной из осей, то рассмотренные градиентные методы начинают сходиться плохо. Этот факт хорошо интерпретируется геометрически и известен в литературе как «эффект оврагов». В этом случае при использовании упомянутых в предыдущих разделах градиентных методов наблюдается довольно быстрый спуск на «дно» оврага по наиболее чувствительным осям и затем медленное зигзагообразное движение в точку минимума.

Одним из выходов в создавшейся ситуации является соответствующий выбор шага по каждой из осей.

Итерационный процесс в координатной форме записывается следующим образом:

$$x_{i(k+1)} = x_{i(k)} - \alpha_{i(k)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k), \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.40)$$

Шаг по каждой из осей выбирают так, чтобы было выполнено одно из приведенных в предыдущих разделах условий: (10.37), (10.38) или (10.39).

Эвристические схемы. Иногда, используя градиентный спуск для минимизации функций со сложной топографической структурой, применяют некоторые эвристические схемы, которые идейно близки к релаксационному методу. Рассмотрим некоторые из таких процедур. Одна из них заключается в следующем.

1. Пусть в точке x_k вычислены все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Задаем малое число $\varepsilon \ll 1$ и полагаем $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, если $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon_1$. Таким образом, спуск производится лишь по тем переменным, в направлении которых производная функции достаточно велика. Это позволяет быстро опуститься на «дно оврага».

2. Задаем некоторое большое число $\varepsilon_2 \gg 1$ и используем градиентный метод, полагая $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, если $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \geq \varepsilon_2$. В этом случае перемещение происходит по «берегу» оврага вдоль его «дна».

Комбинируя процедуры 1 и 2, можно поступать следующим образом. В пространстве «быстрых переменных», т. е. с помощью алгоритма 1 мы спускаемся до тех пор, пока метод не заикливаясь. После этого мы «включаем» аналогичную процедуру 2 в пространстве «медленных переменных».

Создание диалоговых систем человек – машина и использование их в системах управления делает подобные комбинированные методы весьма эффективным средством использования идей оптимизации.

Другие идеи лежат в основе так называемого овражного метода.

Пусть x_0 и $\tilde{x}_0$ — две произвольно близкие точки (рис.10.4).

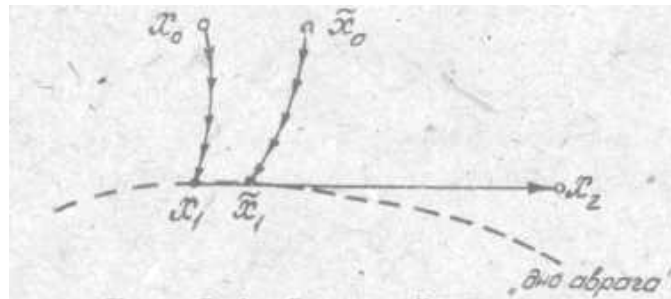


Рисунок 10.4 — Овражный метод

Из точки x_0 совершаем обычный градиентный спуск и после нескольких итераций с малым шагом α попадаем в точку x_1 . То же самое делаем для точки $\tilde{x}_0$, получая точку $\tilde{x}_1$. Две точки x_1 , $\tilde{x}_1$ лежат в окрестности «дна оврага». Соединяя их прямой, делаем, большой шаг λ в полученном направлении, перемещаясь «вдоль оврага». (Шаг λ называют овражным шагом). В результате получаем точку x_2 . В ее окрестности выбираем точку $\tilde{x}_2$ и повторяем процедуру.

Многие из релаксационных методов и метод овражного шага в том числе являются эвристическими и их сходимость строго не установлена. Значение подобных методов с увеличением мощности ЭВМ, пакетов прикладных программ диалоговых средств пользования ими непрерывно растет.

10.3. Методы случайного поиска

Если в любом регулярном методе в процессе поиска экстремума выбор начального приближения x_0 однозначно определяет всю траекторию поиска, то в методах случайного поиска движение на каждом шаге осуществляется случайным образом.

Существует достаточно большое число методов случайного поиска. Рассмотрим некоторые из них.

Простейший случайный поиск. Простейший случайный поиск заключается в случайном «бросании точки», осуществляемом по равномерному закону, в область допустимых значений параметров. При этом

очевидна вероятность попадания в некоторую область ε , для точек которой справедливо соотношение

$$f(x) - f(x^*) \leq \varepsilon \quad (10.41)$$

(т. е. в этой области значение целевой функции $f(x)$ не превосходит оптимального значения $f(x^*)$ на некоторую заданную величину ε), является конечной и определяется числом проводимых «бросаний».

Важнейшее достоинство этого поиска в том, что он не накладывает никаких ограничений на свойства области x допустимых параметров и целевую функцию $f(x)$. Недостатком его является необходимость большого числа испытаний. Если представить область допустимых значений x и область оптимума ε в виде n -мерных гипосфер радиусов ρ и ε соответственно, то вероятность попадания в область ε за одну пробу равна отношению объемов гипосфер, т. е.

$$p = \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^n. \quad (10.42)$$

Среднее число испытаний, которое необходимо осуществить до первого попадания в область ε , равно обратной величине

$$N_{\text{ср}} = \frac{1}{p} = \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right)^n. \quad (10.43)$$

Отсюда видно, что зависимость числа случайных проб от числа переменных n имеет характер показательной функции, т. е. растет чрезвычайно быстро с ростом числа переменных.

Эти соображения показывают нецелесообразность подобного метода случайного поиска экстремума многопараметрических процессов.

Случайный поиск по пробе. Определение значения целевой функции после случайных пробных шагов и сравнение этих значений с предыдущим шагом позволяет значительно сократить число проб и построить простые и эффективные алгоритмы случайного поиска. Применение таких алгоритмов поиска особенно эффективно при большом числе оптимизируемых параметров и ограничений.

В этих методах для перехода от $x_{i(k)}$ к $x_{i(k+1)}$ делается случайный шаг $\alpha S_i \varepsilon_i$, где α — величина шага; S_i — шкальный коэффициент; ε_i — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(-1, 1)$.

Наиболее простой алгоритм случайного поиска при минимизации целевой функций $f(x)$ задается итеративным выражением

$$x_{i(k+1)} = x_{i(k)} + \begin{cases} \alpha S_i \varepsilon_i, & \text{если } f(x_{i(k)} + \alpha S_i \varepsilon_i) \leq f(x_{i(k)}); \\ 0, & \text{если } f(x_{i(k)} + \alpha S_i \varepsilon_i) > f(x_{i(k)}); \end{cases}$$

$$(i = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, \dots).$$

Если при оптимизации поисковая точка выходит за пределы допустимой области, то шаг считается неудачным, а значения компонентов оптимизирующего вектора полагаются равными граничным. Если на какой-либо итераций делается подряд M неудачных попыток, то шаг поиска уменьшается в L раз.

Процесс оптимизации прекращается, если выполняется условие

$$\alpha < \alpha_{\min},$$

где $\alpha_{\min}$ — заданная константа, определяющая точность оптимизации.

Случайный поиск по наилучшей пробе. Алгоритм случайного поиска по наилучшей пробе состоит в следующем.

Из некоторой выбранной случайно или по определенному правилу точки $x_{(0)}$ из допустимой области X производится M случайных пробных шагов:

$$\Delta x_j = \alpha S \varepsilon_j \quad (j = \overline{1, M}),$$

где α — общий шаг поиска;

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ — случайный вектор с равномерным законом распределения;

S — матрица шкальных коэффициентов:

$$S = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_m \end{vmatrix}$$

$$S_i = \frac{x_{\max i} - x_{\min i}}{b_i};$$

b_i — постоянный для каждого оптимизируемого параметра коэффициент.

Затем вычисляют значения целевой функции (критерия эффективности) при всех пробах:

$$f_j(x_{(0)} + \Delta x_{j(0)}), \quad j = \overline{1, M}$$

и при минимизации целевой функции выбирают из всех проб наилучшую, которая приводит к наибольшему уменьшению критерия эффективности. Для этой наилучшей пробы $\Delta x_{H(0)}$ выполняются условия

$$\begin{cases} f(x(0) + \Delta x_{H(0)}) = \min_{j=1,2,\dots,M} f_j(x_{(0)} + \Delta x_{j(0)}); \\ f(x_{(0)} + \Delta x_{H(0)}) \leq f(x_{(0)}) \end{cases} \quad (10.44)$$

Рабочий шаг производят в направлении наилучшей пробы, определяемой из соотношения (10.44), т. е.

$$x_{(1)} = x_{(0)} + \Delta x_{H(0)}.$$

Далее из полученной точки $x_{(1)}$ снова делают M случайных пробных шагов и вновь выбирают наилучшую пробу $\Delta x_{H(1)}$ и производят рабочий шаг

$$x_{(2)} = x_{(1)} + \Delta x_{H(1)}$$

или в общем виде:

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} + \Delta x_{H(k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Спуск в направлении наилучшей пробы производят до тех пор, пока целевая функция убывает. Если в результате случайного спуска с шагом α_k на каком-либо шаге окажется, что для всех M пробных шагов целевая функция не убывает, т. е.

$$f(x_{(k)} + \Delta x_{j(k)}) > f(x_{(k)})$$

для всех $j = 1, M$, то шаг α принудительно уменьшают и дальнейший поиск производят с новым шагом.

Если какой-либо из компонентов x_i вектора оптимизируемых параметров X выходит за допустимую область, то этому компоненту присваивают граничное значение, т. е.

$$x_i = \begin{cases} x_{\max i}, & \text{если } x_i > x_{\max i}; \\ x_{\min i}, & \text{если } x_i < x_{\min i}. \end{cases} \quad (10.45)$$

Если на каком-либо шаге выполняется условие

$$\alpha < \alpha_{\min},$$

где $\alpha_{\min}$ — заданная достаточно малая положительная величина, характеризующая точность определения экстремума, то вектор X , соответствующий этому шагу, можно принять в качестве оптимального X^* и прекратить поиск.

Нетрудно видеть, что с увеличением числа проб направление наилучшей пробы приближается к направлению антиградиента. Однако при случайном поиске отпадает необходимость в вычислении градиента целевой функции, благодаря чему сокращаются потери на поиск при большом числе оптимизируемых параметров.

Представляет интерес сопоставление возможностей приведенных здесь одношаговых алгоритмов случайного поиска и аналоговых регулярных алгоритмов. Как показывают исследования, при больших расстояниях от оптимума с ростом числа переменных методы случайного поиска становятся более быстродействующими, чем градиентные. Однако это обстоятельство имеет место лишь при больших расстояниях от оптимума, с уменьшением же этого расстояния картина меняется на обратную. Поэтому при решении задач оптимизации многопараметрических систем с целью повышения быстродействия целесообразно на начальном этапе оптимизации осуществлять случайный поиск, а на заключительном — пользоваться регулярными методами.

10.4. Методы математического программирования

В течение последних двух десятилетий возник целый ряд разделов математики под общим названием математическое программирование, при помощи которого решают задачи оптимизации при наличии ограничений типа неравенств.

Рассмотрим наиболее распространенные методы математического программирования.

Линейное программирование.

Постановка задачи. В случае если ограничения и целевая функция имеют линейный характер, соответствующая задача оптимизации относится к задачам линейного программирования (планирования), для решения которых может быть использован хорошо разработанный математический аппарат. Линейные задачи часто встречаются в практике конструирования и технологии РЭА. В качестве примера можно привести задачу определения допусков на первичные параметры конструкции.

Пусть выходные параметры конструкции связаны с первичными параметрами зависимостями:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, m}. \quad (10.46)$$

Необходимо определить рациональную систему допусков на первичные параметры, при которых ошибки выходных параметров не превосходят заданных величин $\Delta y_{i \text{ доп}}$.

Очевидно, что случай, когда линейную функцию (10.51) нужно обратить не в минимум, а в максимум, сводится к предыдущему путем замены знака функции, т. е.

$$L' = -L = -C_1x_1 - C_2x_2 - \dots - C_nx_n.$$

Обычно при решении задач линейного программирования общую задачу сводят к так называемой основной задаче линейного программирования, содержащей только ограничения-равенства.

Покажем, как можно перейти к основной задаче линейного программирования.

Вначале все ограничения-неравенства задают в стандартной форме. Для системы (10.52) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n + b_i &\geq 0; \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j &\geq 0; \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - b_k &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10.53)$$

Неравенства вида [1], (10.52) сводятся к неравенствам вида [3], (10.52) простой переменной знака в обеих частях. Затем вводят новые неотрицательные добавочные переменные для перехода от неравенств к равенствам

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n + b_i; \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - b_j &= 0; \\ x_{n+k} &= a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - b_k \end{aligned} \right\}. \quad (10.54)$$

Таким образом, мы получили основную задачу линейного программирования с $n + m + (S - p)$ переменными.

Рассмотрим простейшие методы решения задач линейного программирования.

Графический метод.

Этот метод пригоден для решения ограниченного числа задач, для которых число свободных переменных превосходит число уравнений-ограничений не более чем на $2(n - m \leq 2)$.

Для упрощения выкладок рассмотрим решения задач этим методом на простейшем примере.

Пусть требуется найти максимум функции

$$L = 2x_1 + x_2 - 4 \quad (10.55)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{array} \right\} x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Вводя дополнительные переменные x_3 и x_4 , и учитывая, что $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$, можно записать

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = x_2 - x_1 + 4 \\ x_4 = -x_1 - 2x_2 + 8 \end{array} \right\}.$$

Таким образом, мы имеем 4 неизвестных и 2 независимых уравнения, т. е. $n - m = 2$.

Выберем в качестве свободных переменных, например, x_1 и x_2 и выразим через них остальные (базисные) переменные x_3 и x_4 (что в нашем случае уже осуществлено).

Геометрическая интерпретация задачи представлена на рисунке 10.5 (прямые $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ — оси координат; остальные ограничивающие прямые $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$; короткой штриховкой помечены допустимые полуплоскости).

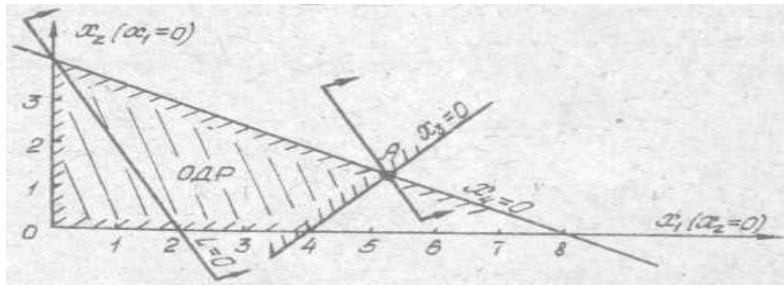


Рисунок 10.5 — Геометрическая интерпретация задачи

Как видно из расположения прямых и отмеченных полуплоскостей, допустимые решения для рассмотренной задачи существуют: они заполняют область допустимых решений (ОДР), которая на рисунке 10.5 показана редкой штриховкой.

Теперь возникает вопрос о нахождении из числа допустимых оптимального решения, т. е. такого, которое обращает в максимум линейную функцию (10.55) или в минимум функцию (10.55), взятую с обратным знаком.

Строим прямую $L = 0$ и отмечаем стрелками направление возрастания L . Перемещая линию параллельно самой себе в сторону возрастания L , получим наибольшее значение L в точке А (наиболее удаленной от начала координат в направлении стрелок). Обычно основную прямую строят в начале координат, а затем перемещают ее в направлении стрелок.

Координаты точки А (x_1^*, x_2^*) дают оптимальное решение. В точке А пересекаются две прямые: $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$, — поэтому

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 + 4 &= 0; \\ -x_1 - 2x_2 + 8 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Решая совместно, найдем $x_1^* = 5\frac{1}{3}$, $x_2^* = 1\frac{1}{3}$. Оптимум (максимум) линейной функции (10.55):

$$L^* = 2 \cdot 5\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} - 4 = 8.$$

Симплекс-метод.

Для нахождения решения задач ЛП в общем случае (при произвольном числе переменных) применяют вычислительные методы, из которых наиболее универсальным является так называемый симплекс-метод. Рассмотрим применение этого метода на конкретном примере.

Пусть имеется задача ЛП с ограничениями-неравенствами

$$\left. \begin{aligned} -5x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 2, \\ -x_1 + x_3 + x_4 &\leq 5, \\ -3x_1 + 5x_4 &\leq 7 \end{aligned} \right\}. \quad (10.56)$$

Требуется минимизировать линейную функцию

$$L = 5x_1 - 2x_3.$$

Приводя неравенство к стандартному виду (≥ 0) и вводя добавочные переменные x_5, x_6, x_7 , переходим к условиям-равенствам

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= x_1 + x_2 - 2x_3 + 2, \\ x_6 &= x_1 - x_3 - x_4 + 5, \\ x_7 &= 3x_1 - 5x_4 + 7 \end{aligned} \right\}. \quad (10.57)$$

Число переменных $n = 7$ на 4 превышает число уравнений $m = 3$. Значит, четыре переменных могут быть выбраны в качестве свободных.

Пусть в качестве свободных переменных выбраны x_1, x_2, x_3, x_4 . Положим, что они равны нулю, тогда $x_5 = 2$, $x_6 = 5$, $x_7 = 7$. Мы получим так называемое опорное решение (все базисные переменные положительны). При этих значениях переменных $L = 0$.

Однако это решение не оптимально, поскольку коэффициент при x_3 отрицателен и, увеличивая x_3 , можно уменьшить L , однако это опасно для x_5 и x_6 : они могут стать отрицательными. Наиболее «чувствительна» к изменению x_3 переменная x_5 , поэтому вводим ее в число свободных вместо x_3 и после соответствующих преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 + 1 \\ x_6 &= -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 - x_4 + 4 \\ x_7 &= 3x_1 - 5x_4 + 7 \end{aligned} \right\}.$$

Выразим L через новые свободные переменные:

$$L = -x_2 + x_3 - 2.$$

Опять решение не оптимально, поскольку коэффициент при x_2 отрицателен. Обменяем местами x_2 и x_6 , получим

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x_1 + x_6 - x_4 + 5 \\ x_2 &= -3x_1 - 2x_6 + x_5 - 2x_4 + 8 \\ x_7 &= 3x_1 - 5x_4 + 7 \end{aligned} \right\}.$$

Выразим L через свободные переменные:

$$L = 3x_1 + 2x_4 + 2x_6 - 10.$$

Полагая $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, получим $L = -10$.

Решение оптимально, при этом $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 7$.

Если опорное решение получается не сразу, то к нему приходят с помощью такой же процедуры обмена местами некоторых базисных и свободных переменных, переразрешая уравнения до тех пор, пока свободные члены не станут неотрицательными.

Нелинейное программирование.

В противоположность задачам линейного программирования, в которых и модель системы, и целевая функция линейны, для случаев, когда математическая модель нелинейна, разработаны новые вычислительные методы. Для оптимизации по нелинейным критериям систем, описываемых нелинейными уравнениями, используют численные или градиентные методы, а также их комбинации.

Общая задача нелинейного программирования заключается в следующем.

Необходимо найти с заданной степенью точности вектор X^* , обеспечивающий решение задачи:

$$L(x) = \max; \quad \varphi(x) \leq 0. \quad (10.58)$$

Здесь $L(x)$, $\varphi(x)$ — нелинейные функции.

Графическая иллюстрация общей нелинейной задачи показана на рисунке 10.6.

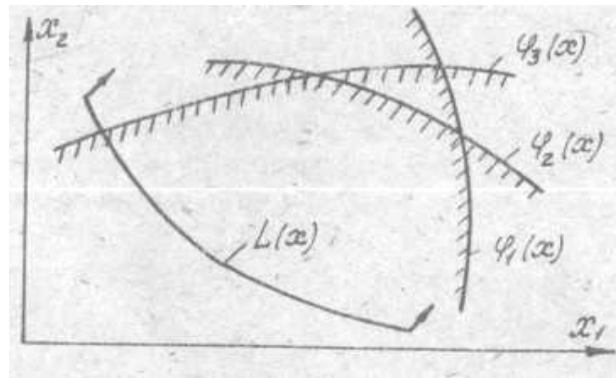


Рисунок 10.6 — Нелинейная задача с несколькими нелинейными ограничениями

Численных методов решения задачи (10.58) разработано уже достаточно много. Причем легче всего поддаются решению задачи квадратичного программирования. Затем идут задачи нелинейного выпуклого программирования, невыпуклого программирования. Достаточно трудно решать задачи поиска глобального экстремума и задачи нелинейного целочисленного программирования, а также задачи стохастического программирования.

Бесчисленные алгоритмы решения задачи нелинейного программирования в своей основе содержат итерационный процесс расчета нового приближения решения по ранее найденным:

$$X_{k+1} = F_k(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k), \quad k = \overline{0, 1}.$$

Здесь k — номер итерации. Алгоритмы в основном отличаются способом построения операторов $F_0, F_1, F_2, \dots$. На практике чаще всего используют наиболее простые схемы:

$$а) \quad X_{k+1} = F_k(x_k), \quad k = \overline{0, 1}$$

$$б) \quad X_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1} \quad k = \overline{0, 1}$$

Градиентные методы были рассмотрены в предыдущем разделе.

Целочисленное программирование.

Задачи целочисленного программирования отличаются от задач линейного и нелинейного программирования тем, что переменные могут принимать значения только в виде целых чисел.

Методы решения задач целочисленного программирования значительно отличаются от методов оптимизации, рассмотренных в предыдущих разделах, и по существу своему относятся к дискретной математике. Они не обладают таким единством, как, например, методы линейного и нелинейного программирования, и в большинстве представляют собой набор частных приемов, пригодных для решения частных задач. Однако их актуальность при разработке РЭА требует дальнейшего развития и совершенствования.

Условно все методы решения задач целочисленного программирования можно разделить на 4 группы:

- методы отсечения;
- комбинаторные методы,
- приближенные методы;
- другие методы.

Для пояснения методов отсечения рассмотрим простейший пример. Максимизировать функцию

$$L = x_1 + x_2. \quad (10.59)$$

при ограничениях

$$3x_1 + x_2 \leq 18; \quad 2x_1 + 8x_2 \leq 45; \quad 4x_1 - 3x_2 \leq 8,$$

где x_1, x_2 — целые положительные числа.

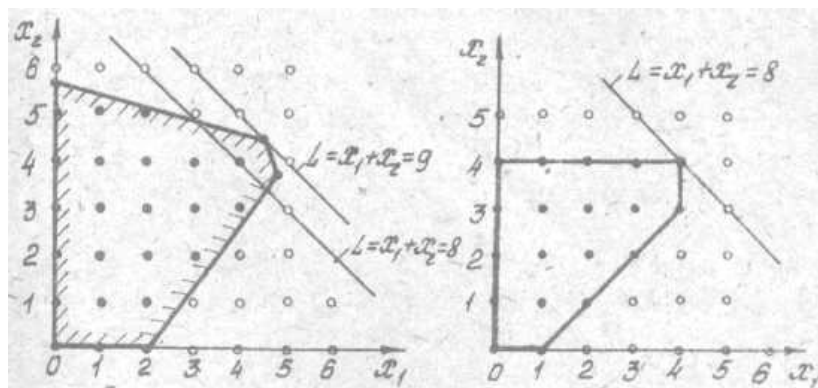


Рисунок 10.7 — К решению целочисленной задачи при ограничениях

На рисунке 10.7 многогранник ограничений выделен штриховкой, а точки целочисленной решетки, входящей во множество точек, выделены черным цветом.

Оптимальное значение целевой функции (10.59) для непрерывной задачи (без ограничений целочисленности) достигается в точке $(x_1 = x_2 = 4,5)$ и равно 9. Оптимальное же значение для целочисленной задачи равно 8 и достигается в точке $(x_1 = x_2 = 4)$.

На рисунке 10.7, б отдельно показано множество целочисленных точек и целочисленный многоугольник.

Таким образом, решение целочисленной задачи совпадает с решением следующей непрерывной задачи.

Максимизировать $L = x_1 + x_1$.

$$x_2 \leq 4; \quad x_1 \leq 4; \quad x_1 - x_2 \leq 1; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Основной проблемой при реализации метода отсечения является определение способа построения правильного отсечения.

Комбинаторные методы решения задач целочисленного программирования основаны на той или иной идее направленного перебора вариантов, в результате которого путем перебора сокращенного числа допустимых решений отыскивается оптимальное решение. Перебор осуществляют с помощью определенного комплекса правил, которые позволяют исключить подмножества вариантов, не содержащие оптимальной точки. Большинство комбинаторных методов не используют процедуру метода последовательного улучшения плана. Они имеют более «простую арифметику» по сравнению с методами отсечения и более «сложную логику». Основное содержание этих методов составляют динамическое программирование и совокупность способов решения, объединенных термином *метод ветвей и границ*.

При решении практических целочисленных задач больших размерностей требуется совершать большое число шагов. Зачастую это является непреодолимым препятствием даже для современных ЭВМ. Поэтому исследователи разрабатывают (наряду с точными) приближенные методы, позволяющие отыскивать приближенное решение задачи за приемлемое время.

Динамическое программирование.

Динамическое программирование представляет собой особый математический метод оптимизации решений, специально приспособленный для исследования многошаговых (многоэтапных) операций.

Общая задача динамического программирования заключается в следующем.

Из множества допустимых управлений U_{don} найти такое управление U , которое переводит физическую систему из начального состояния $X_0 \in X_{\hat{a}i}$ в конечное $X_{\hat{e}i} \in X_{0\hat{e}i}$ так, чтобы некоторый критерий $K(U)$ обращался в максимум.

При этом система должна находиться в допустимой области, т. е.

$$X \in X_{\text{дп}}.$$

Таким образом, в задачах динамического программирования рассматриваются:

- управляемая система, т. е. система, которая со временем может менять свое состояние (причем оказывается возможным управлять этим процессом);
- критерий K , который численно выражает нашу заинтересованность в достижении тех или иных результатов;
- начальное состояние системы X_0 , ограниченное некоторыми условиями $X_{0\text{дп}}$;
- конечное состояние системы $X_{\text{кон}}$ также ограниченное некоторыми условиями $X_{\text{кон дп}}$;
- управление, которое может иметь ряд ограничений $U \in U_{\text{дп}}$.

Выбор управления означает выбор определенной траектории точки в фазовом пространстве, определенного закона движения. На рисунке 10.8 изображена схема для случая двухфазовых координат.



Рисунок 10.8 — Фазовое пространство

В терминах фазового пространства задача динамического программирования формулируется следующим образом.

Найти такое (оптимальное) управление U , под влиянием которого точка X фазового пространства переместится из начальной области X_0 в конечную область $X_{\text{кон}}$, не выходя из допустимой области $X_{\text{дп}}$ так, чтобы при этом критерий K обратился в максимум.

Для динамического программирования, являющегося численным методом, характерен следующий прием: процесс перемещения разделяется на ряд последовательных шагов (или этапов) (переход к дискретной задаче) и производится последовательная оптимизация каждого из них, начиная с последнего шага. На каждом шаге отыскивается условное оптимальное

управление (при всевозможных предположениях о результатах предыдущего шага), а затем, когда процесс доведен до исходного состояния X_0 , снова повторяется вся последовательность шагов, но уже от первого до последнего и из множества условных оптимальных управлений выбирается одно.

Таким образом, однократное решение сложной задачи заменяется многократным решением простой.

При этом используется принцип оптимальности. Оптимальная стратегия имеет следующее свойство: каковы бы ни были начальное состояние и принятое начальное решение, все остальные решения на последующих шагах должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, возникшего в результате первого решения.

Требования к структуре процессов, исследуемых методом динамического программирования:

- небольшое число фазовых координат;
- **управляемый процесс марковский**;
- критерий обладает свойством аддитивности (т. е. его значение определяется суммированием частных значений, достигнутых на отдельных шагах).

Эвристическое программирование.

За последнее время все большее распространение при решении на ЭВМ оперативных задач планирования управления начинают получать эвристические методы. Это объясняется прежде всего тем, что в целом ряде случаев инженер, принимающий решения, интересуется не скрупулезно точным решением конкретной задачи, а качественно-количественной картиной ситуации, характеризующейся, однако, достаточно высокой достоверностью. Иными словами, инженер часто предпочитает получить быстрый и не очень точный ответ на поставленную задачу, чем тратить время на добывание точных исходных данных (которые, кстати сказать, часто так и остаются неточными) и получение точного и полного решения задачи.

Использование эвристического программирования весьма перспективно при решении задач большой размерности, решением которых занимается большое количество специалистов (их опыт позволяет получить те или иные эвристические правила и общие идеи для составления эвристических программ). К числу таких процессов относится, прежде всего, процесс проектирования РЭС.

Действительно, при проектировании каких-либо РЭС возможно огромное количество вариантов решения. Опытный конструктор, как правило, сразу отбрасывает большинство вариантов, руководствуясь своим опытом.

При проектировании широко используются разного рода эвристические правила и формулы, основанные на опыте предыдущего проектирования. Можно привести много примеров таких правил и формул. Достаточно

сказать, что окончательную оценку конструкции опытный конструктор часто дает, исходя из критерия «смотрится», т. е. (соблюдается ли определенное сочетание соотношений) или «не смотрится».

Выявление этих правил может в значительной степени упростить процесс проектирования РЭС.

В направлении эвристического программирования сделано пока еще немного.

Можно назвать некоторые весьма распространенные классы задач линейного (в основном целочисленного) программирования, которые можно решить методами эвристического программирования: задачи о назначениях, распределительные задачи, транспортные, задачи, задачи коммивояжера.

Стохастическое программирование.

Стохастическим программированием называют раздел математического программирования, изучающий теорию и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации о параметрах условий задачи.

В одних случаях опыт, статистика и исследование процессов, определяющих изменение исходных данных, позволяют установить те или иные вероятностные характеристики параметров задачи. Соответствующие этому случаю ситуации называют ситуациями с риском. В других случаях нет оснований для каких бы то ни было суждений о статистических закономерностях явлений, способных изменить предполагаемые значения параметров задачи. Ситуации этого типа называют неопределенными.

К моделям стохастического программирования приводят не только ситуации, связанные с неопределенностью или риском. Анализ сложных детерминированных экстремальных задач, требующих чрезмерно большого перебора вариантов, иногда целесообразно сводить к исследованию некоторых стохастических задач. Недостаток вычислительных средств эквивалентен в некотором смысле недостатку информации об условиях задачи.

Постановка задач стохастического программирования существенным образом зависит от целевых установок и информационной структуры задачи.

Не все задачи стохастического программирования являются аналогами детерминированных экстремальных задач.

Естественный на первый взгляд путь анализа задач стохастического программирования — замена случайных параметров их средними значениями и вычисления оптимальных планов полученных таким образом детерминированных задач — далеко не всегда приводит к приемлемому решению. Отсюда необходимость в разработке моделей управления в условиях неполной информации и методов, позволяющих их исследовать.

В приложениях стохастическое программирование используется для решения задач двух типов. В задачах первого типа прогнозируются стохас-

тические характеристики поведения множества идентичных в том или ином смысле экстремальных систем (пассивное стохастическое программирование). Модели второго типа предназначены для построения методов и алгоритмов планирования и управления в условиях неопределенности (активное стохастическое программирование). Процесс вынесения решения в этих задачах чередуется с процессом наблюдения. Этап наблюдения позволяет менять структуру и параметры модели и, как следствие этого, структуру алгоритмов вынесения решения.

Рассмотрим некоторые постановки задач стохастического программирования.

Для многих стохастических задач ограничения имеют вероятностный вид

$$P \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \right\} \geq P_i, \quad 0 < P_i \leq 1, \quad i = \overline{1, m} \quad x \geq 0. \quad (10.60)$$

Такая запись означает, что под планом задачи понимается вектор $x \geq 0$, который обеспечивает выполнение i -го неравенства системы:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = \overline{1, m}.$$

с вероятностью P , большей заданной величины P_i . Для ограничений, нарушение которых приводит к большим потерям, естественно выбирать P_i близкие к единице.

Задачи стохастического программирования с условиями-ограничениями вида (10.60) называют задачами с вероятностными ограничениями.

ТЕМА 11. ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

11.1. Основные понятия

Теория ПЭ охватывает практически все встречающиеся на практике варианты исследования объектов. В дальнейшем будут рассмотрены следующие типовые задачи экспериментального исследования:

- поиск значений параметров системы, обеспечивающих достижение оптимального значения показателя качества исследуемого объекта при известных ограничениях на значения этих параметров;

- перебор всех допустимых сочетаний значений параметров системы с целью поиска оптимального варианта нерационален по затратам ресурсов.

Для решения указанной задачи ТПЭ предлагает такую последовательность проведения опытов, которая позволяет применить градиентные методы поиска: при априорно неизвестной функции, связывающей показатель качества с параметрами системы; при приближенном аналитическом описании функциональной связи показателей качества с параметрами системы по результатам проведенного эксперимента. Традиционные методики проведения экспериментов из-за зависимости компонентов восстанавливаемого аналитического описания не позволяют определить раздельное влияние каждого фактора на результирующий показатель, т. е. эти методики обеспечивают получение аналитических зависимостей, пригодных лишь для решения интерполяционных задач. В отличие от них ТПЭ дает возможность оценить вклад каждого параметра в значение показателя, т. е. приближенно восстановить закон функционирования объекта по экспериментальным данным. Полученное аналитическое описание объекта можно использовать: для предварительного исследования вариантов построения системы или в интересах построения модели старшей системы, включающей данный объект на правах элемента; для оценки дифференциального влияния уровней параметров системы на показатель качества. Такая задача возникает в случае, когда параметры системы являются по своей природе качественными или когда количественные параметры могут принимать небольшое число различных значений.

Кроме указанных, существуют и другие задачи, решаемые с помощью ТПЭ, например, испытания образцов техники. Планирование должно позволить оценить степень соответствия показателей качества образцов заданным требованиям при минимальном объеме испытаний (**отсеивающие эксперименты**). Предназначены выявить параметры, незначительно влияющие на показатель качества системы. Соответствующие планы применяют на начальных этапах исследования, когда нет конкретных сведений о влиянии тех или иных параметров. Отсеивание несущественных факторов снижает трудоемкость решения задач оптимизации или приближенного аналитического описания системы (**адаптивное планирование**). Применяется в условиях управления технологическим процессом, когда система управления все время должна приспосабливаться к конкретным условиям функционирования, а возможно, и предсказывать дальнейшее развитие процесса.

Решение задач с применением ТПЭ предусматривает использование априорной информации об изучаемом процессе для выбора общей последовательности управления экспериментами, которая уточняется после очередного этапа проведения исследований на основе вновь полученных све-

дений. Тем самым достигается возможность рационального управления экспериментами при неполном первоначальном знании характеристик исследуемого объекта. Целесообразность применения ТПЭ тем выше, чем сложнее исследуемая система.

В ТПЭ исследуемый объект (реальный объект, модель объекта) рассматривается как «черный ящик», имеющий входы v (управляемые независимые параметры) и выходы y [3, 6].

Переменные v принято называть *факторами*. Теория ПЭ изучает только активный тип экспериментов, когда имеется возможность независимо и целенаправленно менять значения факторов v во всем требуемом диапазоне. Факторы в эксперименте бывают качественными и количественными. Качественные факторы можно квантифицировать или приписать им числовые обозначения, тем самым перейти к количественным значениям. В дальнейшем будем считать, что все факторы являются количественными и представлены непрерывными величинами (если другое не оговорено особо). Переменным v можно сопоставить геометрическое понятие *факторного пространства* — пространства, координатные оси которого соответствуют значениям факторов. Совокупность конкретных значений всех факторов образует точку в многомерном факторном пространстве. Примерами факторов являются: интенсивность потока запросов к базе данных, скорость передачи данных по каналу, объем запоминающего устройств. Кроме того, на объект воздействуют возмущающие факторы, они являются случайными и не поддаются управлению.

Область планирования задается интервалами возможного изменения факторов $v_{i\min} < v_i < v_{i\max}$ для $i = 1, 2, \dots, k$, где k — количество факторов. В теории ПЭ часто используют нормализацию факторов, т. е. преобразование натуральных значений факторов в безразмерные (кодированные) величины. Переход к безразмерным значениям x_i задается преобразованием

$$x_i = (v_i - v_{i0}) / \Delta v_i, \quad (11.1)$$

где v_i — натуральное значение фактора;

v_{i0} — натуральное значение основного уровня фактора, соответствующее нулю в безразмерной шкале;

Δv_i — интервал варьирования.

Совокупность основных уровней всех факторов представляет собой точку в пространстве параметров, называемую центральной точкой плана или центром эксперимента. С геометрической точки зрения нормализация факторов равноценна линейному преобразованию пространства факторов, при

Активный эксперимент включает: систему воздействий, при которых воспроизводится функционирование объекта; регистрацию отклика объекта. **План эксперимента** задает совокупность данных, определяющих количество, условия и порядок реализации опытов. **Опыт** составляет элементарную часть эксперимента и предусматривает воспроизведение исследуемого явления в конкретных условиях с последующей регистрацией результата. В условиях случайности в одних и тех же условиях проводятся параллельные (повторные) опыты в интересах получения статистически устойчивых результатов. Опыт u предполагает задание конкретных значений факторам $v_u = v_{1u}, v_{2u}, \dots, v_{ku}$, а совокупность значений факторов во всех N точках плана эксперимента образует матрицу плана

Строки матрицы соответствуют опытам, столбцы — факторам, элемент матрицы v_{iz} задает значение z -го фактора в i -м опыте.

Вследствие влияния на результаты экспериментов случайных воздействий истинные значения коэффициентов можно определить только приближенно. Оценку $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_h)$ вектора неизвестных параметров b находят по результатам экспериментов, в ходе которых получают значения y_u

при заданных значениях факторов $\mathbf{v}_u$. Эти оценки обычно рассчитываются с помощью метода наименьших квадратов (МНК) на основе выборок значений факторов и откликов системы на воздействия [8]. В качестве оценки β вектора b выбирается такое значение, которое минимизирует $\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N (y'_u - y_u)^2$, где y'_u — вычисленное на модели значение функции отклика в u -й точке факторного пространства. Приравнивая нулю частные производные от данной квадратичной формы, взятые по переменным $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_h$, можно получить систему уравнений вида $\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N (y'_u - y_u) f(v_i) = 0$, где $i = 0, 1, 2, \dots, h$. Значение β находят путем решения этой системы уравнений. Решение системы возможно при линейной независимости базисных функций.

Если не принимать специальных мер, то оценки коэффициентов β станут взаимозависимыми, и полученное выражение для функции отклика можно рассматривать только как интерполяционную формулу, что затрудняет ее физическую интерпретацию и последующие расчеты. Однако, формируя специальным образом матрицу плана, можно получить независимые значения β . И эти величины будут характеризовать вклад каждого фактора в значение функции отклика.

Итак, задача заключается в определении общей формы записи функции отклика y' . В большинстве случаев вид этой функции, получаемый из теоретических соображений, является сложным для практического применения, а при неполном знании объекта вообще неизвестен. По данным причинам функцию целесообразно представить в универсальном, удобном для практического применения виде, чему соответствует представление в виде полинома. Тогда системой базисных функций является совокупность степенных функций с целыми неотрицательными значениями показателей степени. Полиномиальная форма представления функции отклика примет вид

$$y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \dots + \beta_{k-1,k} x_{k-1} x_k + \beta_{11} x_1^2 + \dots + \beta_{kk} x_k^2 + \dots + \varepsilon, \quad (11.3)$$

где ε — случайная составляющая функции отклика (величина, характеризующая ошибку опыта).

Такая функция отклика линейна относительно неизвестных коэффициентов и будет полностью определена, если известны степень полинома и коэффициенты. Степень полинома задается исследователем априорно и уточняется в ходе исследования. На практике наибольшее распространение

получили полиномы первого и второго порядка, соответственно, линейные и квадратичные модели. Коэффициенты полинома принято называть **эффектами факторов**.

Иногда функцию отклика целесообразно представить в другом виде, например, в виде степенной функции, так как достижение заданной точности требует применения полинома высокого порядка. Однако использование функций, нелинейных относительно неизвестных параметров, усложняет вычисления, затрудняет оценку их свойств. В некоторых случаях задачу можно упростить путем искусственного преобразования нелинейной функции в линейную. При этом требуется соответствующее преобразование и результатов экспериментов.

Применение ТПЭ основано на ряде допущений, а именно [2, 6]:

- функция отклика содержит в своем составе неслучайную и случайную составляющую. Многие показатели качества автоматизированных систем обработки информации носят случайный характер. Это требует многократного повторения опытов в одних и тех же условиях в целях получения статистически устойчивых результатов, а получаемые оценки показателей должны обладать свойствами состоятельности, эффективности, несмещенности и достаточности. Оценки типовых показателей формируются путем усреднения результатов наблюдений. Поэтому при достаточно большом количестве наблюдений можно считать, что случайная составляющая ε распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, что позволяет получить несмещенную оценку математического ожидания функции отклика в конкретной точке плана. Будем также считать, что величина ε имеет дисперсию, не зависящую от значений факторов. Иначе говоря, результаты, полученные путем усреднения повторных опытов в каждой точке плана, представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины;

- факторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ измеряются с пренебрежимо малой ошибкой по сравнению с ошибкой в определении величины y (учет помех в задании факторов приводит к трудно разрешимым проблемам в оценке коэффициентов функции отклика). Ошибка в определении значения функции отклика объясняется не столько погрешностью измерений, сколько влиянием на результат работы системы неучтенных или случайных факторов, например, различиями в формируемой последовательности случайных чисел при статистическом моделировании;

- дисперсии среднего значения функции отклика в различных точках равны друг другу (выборочные оценки дисперсии однородны). Это означает, что при многократных повторных наблюдениях над величиной y_i при

некотором наборе значений $v_{1u}, v_{2u}, \dots, v_{ku}$ получаемая оценка дисперсии среднего значения не будет отличаться от оценки дисперсии, полученной при многократных наблюдениях для любого другого набора значений независимых переменных $v_{1s}, v_{2s}, \dots, v_{ks}$.

Указанные допущения позволяют использовать их для расчетов коэффициентов полинома МНК, который дает эффективные и несмещенные оценки коэффициентов и обеспечивает простоту проведения самих расчетов. Применение МНК, вообще говоря, не требует соблюдения нормального распределения результатов наблюдения. Этот метод в любом случае дает решение, минимизирующее сумму квадратов отклонений результатов наблюдения от значений функции отклика. Допущение о нормальном распределении используется при проведении различного рода проверок, например, при проверке адекватности функции отклика и экспериментальных данных. Естественно, что точность оценок коэффициентов функции отклика повышается с увеличением числа опытов, по которым вычисляются коэффициенты.

11.2. Критерии оптимальности и типы планов

В настоящее время используется свыше 20 различных критериев оптимальности планов, которые подразделяются на две основные группы. К первой группе относят критерии, связанные с ошибками оценок коэффициентов, а ко второй — с ошибкой оценки поверхности отклика [2, 3, 6]. Далее будут охарактеризованы только те критерии, которые наиболее часто применяются при решении задач оптимизации, описания поверхности отклика и оценки влияния факторов.

Критерии первой группы представляют интерес для задач оптимизации, выделения доминирующих (наиболее значимых) параметров на начальных этапах решения оптимизационных задач или для выявления несущественных параметров в задачах восстановления закономерности функционирования объекта. Геометрическое истолкование свойств ошибок коэффициентов связано со свойствами эллипсоида их рассеяния, определяемого математическим ожиданием и дисперсией значений ошибок. Пространственное расположение, форма, и размер эллипсоида полностью зависят от плана эксперимента.

Критерию D -оптимальности соответствует минимальный объем эллипсоида рассеяния ошибок (минимум произведения всех дисперсий коэффициентов полинома). В соответствующем плане эффекты факторов максимально независимы друг от друга. Этот план минимизирует ожидаемую

ошибку предсказания функции отклика. Критерию A -оптимальности соответствует план с минимальной суммарной дисперсией всех коэффициентов. Критерию E -оптимальности — план, в котором максимальная дисперсия коэффициентов будет минимальна.

Выбор критерия зависит от задачи исследования. Так, при изучении влияния отдельных факторов на поведение объекта применяют критерий E -оптимальности, а при поиске оптимума функции отклика — D -оптимальности. Если построение D -оптимального плана вызывает затруднения, то можно перейти к A -оптимальному плану, построение которого осуществляется проще.

Критерии второй группы используются при решении задач описания поверхности отклика, определения ограничений на значения параметров. Основным здесь является критерий G -оптимальности, который позволяет построить план с минимальным значением наибольшей ошибки в описании функции отклика. Применение G -оптимального плана дает уверенность в том, что в области планирования нет точек с чрезмерно большой ошибкой описания функции.

Среди всех классов планов основное внимание в практической работе уделяется ортогональным и ротатабельным планам.

Ортогональным называется план, для которого выполняется условие парной ортогональности столбцов матрицы планирования, в частности,

для независимых переменных $\sum_{u=1}^N x_{iu}x_{ju} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, k},$ где N — ко-

личество точек плана эксперимента, k — количество независимых факторов. При ортогональном планировании коэффициенты полинома определяются независимо друг от друга — вычеркивание или добавление слагаемых в функции отклика не изменяет значения остальных коэффициентов полинома. Для ортогональных планов эллипсоид рассеяния ориентирован в пространстве так, что направления его осей совпадают с направлениями координат пространства параметров.

Использование **ротатабельных** планов обеспечивает для любого направления от центра эксперимента равнозначность точности оценки функции отклика (постоянство дисперсии предсказания) на равных расстояниях от центра эксперимента. Это особенно важно при решении задач поиска оптимальных значений параметров на основе градиентного метода, так как исследователь до начала экспериментов не знает направление градиента и поэтому стремится принять план, точность которого одинакова во всех направлениях. В ряде случаев при исследовании поверхности отклика тре-

буется униморфность модели, а именно, соблюдение постоянства значений дисперсии ошибки в некоторой области вокруг центра эксперимента. Выполнение такого требования целесообразно в тех случаях, когда исследователь не знает точно расположение области поверхности отклика с оптимальными значениями параметров. Указанная область будет определена на основе упрощенной модели, полученной по результатам экспериментов.

По соотношению между количеством оцениваемых неизвестных параметров модели и количеством точек плана эксперимента все планы подразделяются на три класса: **ненасыщенные** — количество параметров меньше числа точек плана; **насыщенные** — обе величины одинаковы; **сверхнасыщенные** — количество параметров больше числа точек плана. Метод наименьших квадратов применяют только при ненасыщенном и насыщенном планировании, и он не применим для сверхнасыщенного планирования.

Для некоторых планов важную роль играет свойство **композиционности**. Так, композиционные планы для построения полиномов второго порядка получают добавлением некоторых точек к планам формирования линейных функций. Это дает возможность в задачах исследования сначала попытаться построить линейную модель, а затем, при необходимости, добавив наблюдения, перейти к моделям второго порядка, используя ранее полученные результаты и сохраняя при этом некоторое заданное свойство плана, например, его ортогональность.

Между критериями оптимальности и методами построения оптимальных планов экспериментов существует жесткая связь. Построение планов производится или с использованием каталогов планов или с использованием непосредственно методов планирования экспериментов, что является непростой задачей и требует достаточно высокой квалификации исследователя в области ТПЭ.

Кроме рассмотренных критериев в планировании экспериментов вполне естественно применяется критерий минимума числа экспериментов, т. е. среди всех планов желательно выбирать такой, который требует минимального числа опытов при соблюдении требований к качеству оценки функции или ее параметров.

Как было отмечено выше, одной из областей применения ТПЭ является решение задач оптимизации, причем непосредственно для поиска оптимальных решений используются градиентные методы. Вычисление оценки градиента осуществляется на основе обработки экспериментальных данных. Хотя градиентный метод оптимизации не является составной частью ТПЭ, в целях удобства освоения материала далее приведено его краткое изложение.

11.3. Планы для решения задач оптимизации

11.3.1. Постановка задачи оптимизации

Поиск оптимальных значений параметров является одной из важных задач, решаемых при создании новых технических систем, управлении производством или технологическими процессами. В соответствии с теорией эффективности необходимо [1]:

- сформировать критерий эффективности (функцию отклика в терминах ТПЭ). В большинстве случаев эффективность определяется совокупностью показателей, характеризующих частные свойства исследуемой системы и выполняемой ею операции. Критерий эффективности строится на множестве значений частных показателей с использованием теории полезности или методов векторной оптимизации. В некоторых случаях критерий эффективности удастся построить на множестве значений одного показателя, переведя все остальные показатели в разряд ограничений;
- выделить управляемые и неуправляемые параметры (факторы) системы и среды, оказывающие существенное влияние на критерий эффективности;
- определить ограничения на значения параметров.

Задача оптимизации заключается в нахождении экстремума функции отклика в области допустимых значений параметров. Чтобы найти экстремум, необходимо иметь описание поверхности отклика в диапазоне варьирования параметров, что далеко не всегда удастся получить исходя из теоретических соображений, так как функция отклика в аналитическом виде может быть априори неизвестна.

Реализация задачи оптимизации, основанная на применении ТПЭ, как и любой задачи экспериментального исследования, начинается с определения объекта анализа, цели исследования, изучения сущности исследуемого процесса, анализа имеющихся ресурсов, возможности проведения экспериментов с изучаемым объектом в необходимом диапазоне изменения факторов.

Объектом анализа выступает заданный критерий эффективности исследуемой системы, рассматриваемый как функция от существенных параметров системы и внешней среды. Система может представлять собой реальный физический объект или его модель — физическую или математическую (имитационную, сложную аналитическую).

Изучение процесса функционирования объекта позволяет выявить факторы, оказывающие существенное влияние на функцию отклика. Выбор существенных переменных потенциально определяет степень достижения адекватности получаемой модели: отсутствие в исходном перечне существенных параметров, да еще и произвольно меняющихся в ходе экспери-

мента, не позволяет правильно решить задачу оптимизации; включение несущественных параметров усложняет модель, вызывает значительное увеличение объема экспериментов, хотя по результатам исследования несущественность соответствующих параметров будет выявлена.

Для каждой переменной следует определить диапазон и характер изменения (непрерывность или дискретность). Ограничения на диапазон изменений могут носить принципиальный или технический характер. Принципиальные ограничения факторов не могут быть нарушены при любых обстоятельствах. Эти ограничения задаются исходя из физических представлений (например, емкость устройств памяти всегда имеет положительное значение). Второй тип ограничений связан с технико-экономическими соображениями, например, с наличием соответствующего аппаратно-программного комплекса, принятой технологией обработки информации.

Выделение области изменения факторов не является формальной задачей, а основывается на опыте исследователя. В рамках области допустимых значений факторов необходимо выделить начальную область планирования эксперимента. Этот выбор включает определение основного (нулевого) уровня как исходной точки построения плана и интервалов варьирования. Интервал варьирования задает относительно основного уровня значения фактора, при которых будут производиться эксперименты. Обычно интервалы являются симметричными относительно центрального значения. Интервал варьирования должен отвечать двум ограничениям: его применение не должно приводить к выходу фактора за пределы области допустимых значений; он должен быть больше погрешности задания значений фактора (в противном случае уровни фактора станут неразличимыми). В пределах этих ограничений выбор конкретного значения является неформальной процедурой, учитывающей ориентировочную информацию о кривизне поверхности функции отклика.

Фактор должен быть управляемым, т. е. экспериментатор может поддерживать его постоянное значение в течение всего опыта. Для фактора необходимо указать его конкретные значения и средства контроля. Сам фактор должен быть первичным, ибо сложно управлять фактором, который в свою очередь является функцией других факторов. Для каждого фактора следует указать точность его задания и поддержания в ходе эксперимента.

Одновременное изменение факторов предполагает их совместимость, что означает осуществимость и безопасность всех их сочетаний. Необходимо также обеспечить независимость изменения каждого фактора, что означает возможность установления любого значения фактора вне связи со значениями других факторов.

Цель исследования, требуемая точность получаемых результатов, имеющиеся ресурсы ограничивают множество допустимых моделей функции отклика (с усложнением модели и повышением точности оценки показателей резко возрастает объем необходимых опытов) и соответственно определяют план проведения экспериментов.

11.3.2. Полный факторный эксперимент типа 2^k

На начальных этапах оптимизации для определения градиента применяют неполные полиномы второго порядка или линейные полиномы [2, 5, 6]. Вычисление оценок коэффициентов таких полиномов осуществляется на основе обработки результатов реализации наиболее простых планов, в которых каждый фактор принимает только два значения ($v_{i \min}$ или $v_{i \max}$), расположенные симметрично относительно нулевого уровня или центра плана по данному фактору. Значения уровней варьирования выбирает исследователь, исходя из возможного диапазона изменения каждого фактора и возможности применения линейной аппроксимации функции отклика в выбранном диапазоне изменений параметра. Без ограничения общности можно считать, что кодированные значения x_i принимают значения -1 и $+1$ соответственно (принято обозначать $-$ или $+$). Множество всех точек в k -мерном пространстве, координаты которых являются комбинациями « $+$ » и « $-$ », называется полным факторным планом или планом **полного факторного эксперимента** типа 2^k (ПФЭ). Количество точек в этом плане $N = 2^k$.

Для примера возьмем полный факторный эксперимент с тремя независимыми переменными x_1 , x_2 и x_3 (таблица 11.1).

Таблица 11.1

Матрица планирования								Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y
+	–	–	–	+	+	+	–	y_1
+	–	–	+	+	–	–	+	y_2
+	–	+	–	–	+	–	+	y_3
+	–	+	+	–	–	+	–	y_4
+	+	–	–	–	–	+	+	y_5
+	+	–	+	–	+	–	–	y_6
+	+	+	–	+	–	–	–	y_7
+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Второй, третий и четвертый столбцы таблицы соответствуют собственно плану экспериментов, пятый – восьмой столбцы содержат значения

произведений независимых переменных. Фиктивная переменная $x_0 = 1$ (первый столбец) введена для единообразия записи расчетных формул коэффициентов полинома. Строки соответствуют опытам: например, первая строка характеризует эксперимент, в котором все независимые переменные находятся на нижнем уровне.

Существует несколько способов построения подобных матриц планирования. В частности, можно воспользоваться приемом, характерным для записи последовательности двоичных чисел. В столбце последней переменной x_3 знаки меняются поочередно, в столбце предпоследней переменной x_2 — чередуются через два элемента, третьей справа переменной x_1 — через четыре элемента. Аналогично строится матрица для любого количества переменных, порядок перечисления переменных не играет роли. Столбцы с произведениями переменных вычисляются путем умножения значений элементов в соответствующих столбцах простых переменных.

Из анализа матрицы планирования легко видеть, что полный факторный эксперимент обладает свойствами:

– **ортогональности**: сумма парных произведений элементов любых двух различных столбцов равна нулю. В частности, для простых переменных:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{0, k};$$

– **симметричности**: сумма всех элементов любого столбца, за исключением первого, равна нулю, например: $\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0, \quad i = \overline{1, k};$

– **нормированности**: сумма квадратов элементов любого столбца равна числу опытов; так, для i -й переменной $\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N, \quad i = \overline{0, k}.$

Первые два свойства обеспечивают независимость оценок коэффициентов модели и допустимость их физической интерпретации. Нарушение этих свойств приводит к взаимной зависимости оценок и невозможности придания смысла коэффициентам.

Включение в матрицу планирования переменных вида x_i^2 приведет к появлению единичных столбцов, совпадающих друг с другом и со столбцом x_0 . Следовательно, нельзя будет определить, за счет чего получено значение β_0 . Поэтому планы ПФЭ 2^k не применимы для построения функции отклика в виде полного полинома второй степени.

11.3.3. Оценки коэффициентов функции отклика

Эксперимент, проведенный по плану, представленному в таблице 11.1, позволяет оценить коэффициенты неполного полинома третьей степени $y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3$ или линейной функции $y' = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$. Первый вид полинома позволяет оценить не только влияние отдельных факторов, но и один из часто встречающихся видов нелинейности, когда эффект одного фактора зависит от уровня других факторов, т. е. присутствует эффект взаимодействия факторов. Эффект взаимодействия вида $x_i x_j$ называют парным, $x_i x_j x_k$ — тройным, и т. д. С ростом количества факторов число возможных взаимодействий быстро увеличивается. Суммарно количество всех коэффициентов функции отклика такого типа равно числу опытов полного факторного эксперимента.

Оценки коэффициентов полинома определяются на основе метода наименьших квадратов и для рассматриваемого типа ПФЭ вычисляются по простым соотношениям [8, стр. 29]:

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u, \quad i = \overline{0, k}; \\ \beta_{i, \dots, m} &= \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} \dots x_{mu} \bar{y}_u, \quad i = \overline{1, k}, \quad m > i.\end{aligned}\tag{11.1}$$

Здесь величина $\bar{y}_u$ соответствует значению отклика y_u в указанной точке факторного пространства при отсутствии повторных опытов или является оценкой математического ожидания $\bar{y}_u = \frac{1}{r_u} \sum_{i=1}^{r_u} y_{ui}$ значений функции отклика по всем r_u повторным опытам в данной точке. Повторные опыты проводятся в тех случаях, когда на функционирование системы оказывают влияние случайные воздействия. Количество повторных опытов в разных точках плана может различаться.

Допустима следующая интерпретация оценок коэффициентов:

- β_0 соответствует значению функции отклика в центре проводимого эксперимента;
- β_i равен приращению функции при переходе значения фактора i с нулевого уровня на верхний (это вклад фактора в значение функции);
- β_{ij} равен нелинейной части приращения функции при одновременном переходе факторов i и j с нулевого уровня на верхний и т. п.

Ошибки в определении коэффициентов полинома можно охарактеризовать соответствующей дисперсией. С учетом того, что кодированные

значения факторов принимают значения $+1$ и -1 , оценка дисперсии коэффициента определяется соотношением

$$\sigma^2(\beta_i) = D\left[\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_u \bar{y}_u\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{u=1}^N D(\bar{y}_u) = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N D(\bar{y}_u) \right]. \quad (11.2)$$

Следовательно, оценка дисперсии всех коэффициентов одинакова и определяется только дисперсией средних значений функции отклика и числом опытов. Эту формулу можно применять, если количество опытов во всех точках плана одинаково. При факторном эксперименте, в отличие от классического, одновременно варьируются все факторы, поэтому каждый коэффициент полинома определяется по результатам всех экспериментов, тем самым оценка дисперсии коэффициентов получается в N раз меньше средней дисперсии всех опытов. Оценка дисперсии среднего значения в конкретной точке плана $D(\bar{y}_u) = \sigma_u^2 / r_u$, где σ_u^2 — оценка дисперсии функции отклика в точке u , r_u — число повторных опытов в этой точке плана [7, стр. 50]. Дисперсия оценок всех коэффициентов одинакова, поэтому ПФЭ рассмотренного типа являются ротатабельными.

При использовании неполных полиномов k -го порядка количество точек плана равно количеству оцениваемых параметров. Поэтому не остается степеней свободы для проверки гипотезы об адекватности представления результатов эксперимента заданной математической моделью. Если применять полиномы первой степени, то тогда остаются степени свободы для проверки гипотезы об адекватности модели.

11.3.4. Дробный факторный эксперимент

С ростом количества факторов k число точек плана в ПФЭ растет по показательной функции 2^k . Планы ПФЭ позволяют получить несмещенные оценки градиента функции отклика в центральной точке, но в случае применения линейного полинома оказываются недостаточно эффективными по количеству опытов при большом числе независимых переменных, так как остается слишком много степеней свободы на проверку адекватности модели. Например, при $k = 5$ на проверку адекватности линейной модели остается 26 степеней. Хотя большое количество опытов и приводит к существенному снижению погрешности в оценке коэффициентов, все же такое число степеней свободы для проверки адекватности является чрезмерным.

Таким образом, в случаях, когда используются только линейные приближения функции отклика, количество опытов следует сократить, используя для планирования так называемые **регулярные дробные реплики**

ПФЭ, содержащие подходящее число опытов и сохраняющие основные свойства матрицы планирования. Реплика, включающая только половину экспериментов ПФЭ, называется полурепликой, включающая четвертую часть опытов — четвертьрепликой, и т. д. Краткое обозначение указанных дробных реплик — 2^{k-1} , 2^{k-2} соответственно.

Построение регулярной дробной реплики или проведение **дробного факторного эксперимента** (ДФЭ) типа 2^{k-p} предусматривает отбор из множества k факторов $k-p$ основных, для которых строится план ПФЭ. Этот план дополняется p столбцами, которые соответствуют остальным факторам. Каждый из этих столбцов формируется по специальному правилу, а именно, получается как результат поэлементного умножения не менее двух и не более $k-p$ определенных столбцов, соответствующих основным факторам. Иначе говоря, в дробных репликах p линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия. Но именно такое построение матрицы планирования и позволяет обеспечить ее симметричность, ортогональность и нормированность.

Таблица 11.2

Матрица планирования				Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	y
+	–	–	+	y_1
+	–	+	–	y_2
+	+	–	–	y_3
+	+	+	+	y_4

Правило образования каждого из p столбцов ДФП называют **генератором плана**. Каждому дополнительному столбцу соответствует свой генератор (для плана типа 2^{k-p} должно быть задано p различных генераторов). Генератор задается как произведение основных факторов, определяющее значение элементов соответствующего дополнительного столбца матрицы планирования. Примером записи генератора для плана 2^{3-1} служит выражение $x_3 = x_1x_2$ (см. табл.11.2). Матрица планирования ДФП типа 2^{k-p} содержит $k+1$ столбец и $N = 2^{k-p}$ строк.

11.3.5. Оценки коэффициентов функции отклика в дробном факторном эксперименте

Применение дробных реплик ведет к смешиванию оценок параметров модели, а их построение предполагает исключение из рассмотрения некоторых взаимодействий факторов. Оценки смешиваются в связи с тем, что каждый из p столбцов дробного факторного плана совпадает с некоторым произведением основных факторов.

Запись плана в виде 2^{k-p} не дает полной характеристики регулярной дробной реплики, так как основные эффекты можно приравнять к различным эффектам взаимодействия. Правило смешивания, определяющее коррелированные основные эффекты и эффекты взаимодействия, удобно описывать с помощью **определяющего контраста реплики**. Определяющий контраст полуреплики получается путем умножения генерирующего соотношения на его же левую часть, а так как для любой кодированной переменной $x_i^2 = 1$, то левая часть формулы определяющего контраста всегда равна единице и обозначается I . В частности, для ДФП типа 2^{3-1} и генератора $x_3 = x_1 x_2$ имеет место определяющий контраст $I = x_1 x_2 x_3$ (генератор умножается на переменную x_3 , следовательно, $x_3 x_3 = I = x_1 x_2 x_3$).

Чтобы определить, с какими параметрами смешана оценка коэффициента данного фактора, следует умножить обе части определяющего контраста на этот фактор. Учитывая равенство $x_i^2 = 1$, получим порядок смешивания оценок коэффициентов при использовании конкретного плана. Для плана 2^{3-1} и определяющего контраста $I = x_1 x_2 x_3$ порядок смешивания факторов следующий:

$$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3; \quad x_2 = x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3; \quad x_3 = x_1 x_2 x_3^2 = x_1 x_2.$$

Оценки коэффициентов линейной модели для этого плана эксперимента не могут быть получены отдельно и будут смешанными:

$$\beta_1^* = \beta_1 + \beta_{23}; \quad \beta_2^* = \beta_2 + \beta_{13}; \quad \beta_3^* = \beta_3 + \beta_{12}.$$

Планы типа 2^{k-p} являются ортогональными для моделей с взаимодействиями. Поэтому для вычисления оценок коэффициентов получаются простые формулы, как и для ПФЭ:

$$\beta_i^* = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u, \quad i = \overline{0, k}.$$

Планы дробных реплик строят различным образом, но так, чтобы соблюдались основные свойства матрицы планирования. Например, ДФП 2^{3-1} можно представить одной из двух полуреplik, генераторами которых являются $x_3 = x_1 x_2$ и $x_3 = -x_1 x_2$ соответственно. Определяющие контрасты этих полуреplik: $x_3^2 = I = x_1 x_2 x_3$ и $x_3^2 = I = -x_1 x_2 x_3$.

Смешивание факторов задается соотношениями:

а) первая полуреплика: $x_1 = x_2 x_3; \quad x_2 = x_1 x_3; \quad x_3 = x_1 x_2;$

б) вторая полуреплика: $x_1 = -x_2 x_3; \quad x_2 = -x_1 x_3; \quad x_3 = -x_1 x_2.$

Коэффициенты линейного полинома полуреplik:

а) $\beta_1^* = \beta_1 + \beta_{23}; \quad \beta_2^* = \beta_2 + \beta_{13}; \quad \beta_3^* = \beta_3 + \beta_{12};$

б) $\beta_1^* = \beta_1 - \beta_{23}; \quad \beta_2^* = \beta_2 - \beta_{13}; \quad \beta_3^* = \beta_3 - \beta_{12}.$

Реализовав обе полуреплики, путем сложения и вычитания значений коэффициентов β_i^* можно получить отдельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия. Такой вариант плана, по сути, соответствует ПФЭ.

Разрешающая способность полуреplik (возможность отдельного определения коэффициентов уравнения) зависит от генерирующих соотношений. Так, если для плана 2^{4-1} выбрать генерирующее соотношение $x_4 = x_1 x_2$, то получим реплику с контрастом $I = x_1 x_2 x_4$ и разрешающей способностью $x_1 = x_2 x_4$ и т. д. Здесь линейные эффекты определяются совместно с парными взаимодействиями. Очевидно, что в первую очередь следует пренебречь взаимодействием более высоких порядков из-за их более низкой вероятности существования по сравнению с парными. У полуреplik с контрастом $I = x_1 x_2 x_3 x_4$ или равноценным $I = -x_1 x_2 x_3 x_4$ линейные эффекты будут определяться совместно уже только с тройными взаимодействиями. Это повышает точность оценок параметров модели, так как величина смещения в оценке коэффициента потенциально уменьшается. С ростом количества независимых переменных растет разрешающая способность полуреplik, позволяя оценивать отдельно сначала линейные эффекты, затем парные, тройные взаимодействия и т. д. Но при этом растет и избыточность экспериментов.

Реплики можно строить высокой степени подробности, тем самым сокращая количество экспериментов. Пусть необходимо изучить влияние пяти переменных и известно, что все эффекты взаимодействия пренебрежимо малы. Для линейного приближения следует определить шесть коэффициентов, что потребует применения плана с количеством точек не менее шести. Ближайшее большее число, соответствующее целой степени 2, равно восьми, это дает возможность получить дробную реплику, эквивалентную ПФЭ 2^3 , т. е. реплику 2^{5-2} или четвертьреплику. Для построения четвертьреплики необходимы два генерирующих соотношения. В целях построения такой реплики целесообразно пожертвовать тройным и одним из двойных взаимодействий. Пусть этим двойным взаимодействием будет $x_1 x_2$. Тогда можно построить четыре различные четвертьреплики, каждая из которых задается двумя генерирующими соотношениями:

- а) $x_4 = x_1 x_2$; $x_5 = x_1 x_2 x_3$;
- б) $x_4 = x_1 x_2$; $x_5 = -x_1 x_2 x_3$;
- в) $x_4 = -x_1 x_2$; $x_5 = x_1 x_2 x_3$;
- г) $x_4 = -x_1 x_2$; $x_5 = -x_1 x_2 x_3$.

Определяющие контрасты каждой четвертьреплики задаются двумя соотношениями:

- а) $I = x_1 x_2 x_4$; $I = x_1 x_2 x_3 x_5$;
- б) $I = x_1 x_2 x_4$; $I = -x_1 x_2 x_3 x_5$;

- в) $I = -x_1 x_2 x_4$; $I = x_1 x_2 x_3 x_5$;
 г) $I = -x_1 x_2 x_4$; $I = -x_1 x_2 x_3 x_5$.

Из этой совокупности четвертьреплик следует выбрать только одну. Например, выберем реплику, задаваемую первой парой генерирующих соотношений. Матрица планирования ДФП получается из матрицы ПФЭ 2^{k-p} для $k - p$ основных факторов добавлением p столбцов, элементы которых вычисляются по соответствующим генерирующим соотношениям, (табл. 11.3).

Таблица 11.3

Матрица планирования						Вектор результатов
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+	—	—	—	+	—	y_1
+	+	—	—	—	+	y_2
+	—	+	—	—	+	y_3
+	+	+	—	+	—	y_4
+	—	—	+	+	+	y_5
+	+	—	+	—	—	y_6
+	—	+	+	—	—	y_7
+	+	+	+	+	+	y_8

Для полной характеристики разрешающей способности четвертьреплик вводят обобщающие определяющие контрасты, третий компонент которых получается путем перемножения попарно первых двух контрастов. Для выбранной четвертьреплики обобщающий определяющий контраст $I = x_1 x_2 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_5 = x_3 x_4 x_5$.

Все совместные оценки находятся путем умножения обобщающего определяющего контраста последовательно на x_1 , x_2 и т. д. В рассматриваемом случае совместные оценки задаются соотношениями

$$x_1 = x_2 x_4 = x_2 x_3 x_5 = x_1 x_3 x_4 x_5;$$

$$x_2 = x_1 x_4 = x_1 x_3 x_5 = x_2 x_3 x_4 x_5;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_5 = x_1 x_2 x_4 x_5 = x_1 x_2 x_3 = x_3 x_4.$$

Оценки коэффициентов линейного полинома задаются соотношениями

$$\beta_1^* = \beta_1 + \beta_{24} + \beta_{235} + \beta_{1345};$$

$$\beta_2^* = \beta_2 + \beta_{14} + \beta_{135} + \beta_{2345}, \text{ и т. д.}$$

Разрешающая способность выбранной четвертьреплики невысокая — все линейные эффекты определяются совместно с парными взаимодействиями. Этой репликой можно пользоваться для оценки линейных эффектов

при условии равенства нулю соответствующих парных взаимодействий. Если такой уверенности нет, то следует применить полуреплику (что требует в два раза большего количества точек плана эксперимента по сравнению с четвертьрепликой) с генерирующим соотношением $x_5 = x_1x_2x_3x_4$, пользуясь которым, можно разделить все линейные эффекты и парные взаимодействия.

Построение обобщающего определяющего контраста для реплик более высокой степени дробности производится аналогично четвертьреплике: исходные контрасты сначала перемножаются попарно, получаются контрасты первого уровня; затем контрасты первого уровня снова перемножаются попарно, получаются контрасты второго уровня, и так далее, пока не будет исчерпана возможность перемножения. Если получается два и более одинаковых контрастов, то из них оставляется только один. Обобщающий определяющий контраст составляется путем перечисления выражений для всех сформированных контрастов.

Взаимодействие факторов, выбранных в качестве генераторов плана, может быть значимым или незначимым. Для построения дробных реплик следует выбирать незначимые взаимодействия, которые выбираются по физическим соображениям на основе априорных сведений. Следует учитывать, что ДФЭ позволяет получить несмещенную оценку градиента функции отклика тогда и только тогда, когда ее обобщающий определяющий контраст больше трех. Наличие смещения в оценке градиента увеличивает количество шагов оптимизации, вносит систематическую ошибку в описание функции отклика.

11.4. Обработка результатов эксперимента

11.4.1. Предварительная обработка

После того как составлен план проведения эксперимента, можно приступить к его проведению. Вопросы непосредственного осуществления эксперимента рассматривать не будем, а перейдем к обработке результатов. Сущность обработки результатов эксперимента во многом одинакова для различных областей применения — поиска оптимума функции, описания поверхности отклика и др.

Необходимо учитывать, что любой эксперимент сопровождается погрешностями (методическими, измерений) и содержит элементы неопределенности (случайности). Проведение повторных опытов не дает полностью совпадающих результатов. Поэтому процедура обработки должна учитывать эти обстоятельства. Обработка результатов включает предварительную обработку результатов экспериментов, вычисление оценок коэффициентов

функции отклика и проведение ряда проверок: однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели и значимости коэффициентов [2, 5, 6]. Расчетные соотношения будут приведены в предположении, что в каждой точке плана производится различное количество повторных опытов r_u .

В ходе предварительной обработки вычисляются следующие параметры для всех точек $u = \overline{1, N}$ плана экспериментов:

- среднее значение функции отклика: $\bar{y}_u = \frac{1}{r_u} \sum_{i=1}^{r_u} y_{ui}$;
- несмещенная оценка дисперсии функции отклика:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{r_u - 1} \sum_{i=1}^{r_u} (y_{ui} - \bar{y}_u)^2 .$$

Для данной величины количество степеней свободы $\phi_u = r_u - 1$;

– оценка дисперсии среднего значения функции отклика (**оценка дисперсия воспроизводимости**): $D(\bar{y}_u) = \sigma_u^2 / r_u = D_u$.

На основе частных оценок вычисляется средняя величина оценки дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика по всей области планирования

$$\sigma^2(y) = \frac{\sum_{u=1}^N (r_u - 1) D_u}{\sum_{u=1}^N (r_u - 1)} = \frac{\sum_{u=1}^N (r_u - 1) D_u}{\sum_{u=1}^N r_u - N} . \quad (11.3)$$

Эта оценка является несмещенной и ее можно рассматривать как случайную величину с количеством степеней свободы $\phi(y) = \sum_{u=1}^N r_u - N$.

Именно величину $\sigma^2(y)$ следует использовать как оценку дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика вместо $\frac{1}{N} \sum_{u=1}^N D(\bar{y}_u)$ в выражении (11.2).

11.4.2. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости

Необходимым условием применения метода наименьших квадратов для расчета оценок коэффициентов модели является **однородность** оценок дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика во всех точках плана. Поэтому обязательным этапом обработки должна быть проверка статистической гипотезы об однородности совокупности дисперсий

воспроизводимости. В условиях различного количества опытов в точках плана применяют критерии Фишера или Бартлетта [8, стр. 12].

Если количество повторных опытов в каждой точке плана достаточно велико (больше 7), то средние значения функции отклика можно считать распределенными по нормальному закону. Проверка однородности по критерию Фишера сводится к проверке гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин:

- из совокупности оценок дисперсии среднего значения функции отклика выбирается минимальное $D_{u \min}$ и максимальное $D_{u \max}$ значения с числом степеней свободы соответственно $\varphi_{u \min}$ и $\varphi_{u \max}$;

- вычисляется значение критерия Фишера $F = D_{u \max} / D_{u \min}$, которое сравнивается с критическим значением $F_{кр} = F(\alpha; \varphi_{u \max}; \varphi_{u \min})$, где α — уровень значимости (обычно α выбирают в пределах от 0,01 до 0,1). Критическая область является односторонней (альтернативная гипотеза допускает между проверяемыми оценками дисперсии соотношение $D_{u \max} > D_{u \min}$). Критическое значение определяют по специальным таблицам или с использованием стандартных функций математических пакетов;

- гипотеза об однородности оценок дисперсии воспроизводимости в различных точках плана принимается, если условие $F \leq F_{кр}$ выполняется, и отвергается в противном случае.

Существенным недостатком критерия Фишера является игнорирование всех оценок дисперсии воспроизводимости, кроме максимального и минимального значения.

Проверка однородности по Бартлетту учитывает оценки дисперсии воспроизводимости во всех точках плана и производится на основе вычисления критерия

$$B = \frac{2,303 \left\{ \varphi(y) \lg D_u - \sum_{u=1}^N (r_u - 1) \lg D_u \right\}}{1 + \frac{1}{3(N-1)} \left[\sum_{u=1}^N \frac{1}{(r_u - 1)} - \frac{1}{\varphi(y)} \right]}.$$

Случайная величина B при справедливости гипотезы об однородности дисперсий распределена приближенно как **хи-квадрат** с $N - 1$ степенями свободы, если все $r_u > 3$. Следовательно, критическое значение $B_{кр} = \chi^2(\alpha; N - 1)$, оно определяется по специальным таблицам или с использованием стандартных функций математических пакетов. Если $B \leq B_{кр}$, то гипотеза об однородности принимается, если $B > B_{кр}$ — отвергается.

Критерий Бартлетта чувствителен к отклонениям распределения от нормального, поэтому к результатам сравнения следует относиться осторожно, а при одинаковом объеме опытов в различных точках плана лучше применять критерий Кохрена [8, стр. 13].

Итак, если не выявлена неоднородность дисперсии воспроизводимости, то обработку результатов экспериментов можно продолжать дальше. В противном случае следует выявить и устранить причины неоднородности. Обычно неоднородность является следствием принятых решений по организации и проведению экспериментов.

Во-первых, возможно в экспериментальном исследовании не учтен некоторый существенный фактор (факторы), который изменялся в ходе опытов. Такой фактор (факторы) следует выявить, включить в модель или обеспечить его стабильность в ходе исследований и повторить опыты.

Во-вторых, количество повторных опытов в точках плана с большой дисперсией функции отклика проведено недостаточно. Действительно, дисперсия функции отклика σ_u^2 может существенно различаться в разных точках плана. Так, дисперсия среднего количества заявок в очереди для одноканальной системы массового обслуживания при пуассоновском входном потоке и экспоненциально распределенном времени обслуживания равна $\rho / (1 - \rho)^2$, где ρ — загрузка системы. Иначе говоря, эта дисперсия заведомо неоднородна при изменении загрузки. В частности, изменение загрузки от 0,8 до 0,9 приводит к увеличению дисперсии в 4,5 раза. Поэтому для обеспечения однородности дисперсии воспроизводимости среднего значения в точке плана при $\rho = 0,9$ следует провести в 4,5 раза больше повторных опытов по сравнению с точкой плана, в которой $\rho = 0,8$.

Итак, неоднородность можно снизить за счет уменьшения интервала варьирования факторов или увеличения количества опытов в соответствующих точках плана. Изменение интервалов варьирования влечет необходимость повторения опытов во всех точках плана. Поэтому из указанных способов снижения неоднородности следует выбрать тот, который требует меньшего количества новых опытов.

После того как установлена однородность дисперсии воспроизводимости, можно приступить к вычислению оценок коэффициентов функции отклика. Оценки коэффициентов функции отклика вычисляются по формулам (3.1). Результаты вычислений этих оценок всегда отличаются от нуля. Но это не значит, что они являются значимыми, т. е. сами коэффициенты не равны нулю. Проверку значимости оценок обычно осуществляют после проверки адекватности модели.

11.4.3. Проверка адекватности модели

Проверка адекватности математической модели данным эксперимента проводится только в случае ненасыщенного планирования на основе сопоставления дисперсии воспроизводимости среднего значения функции отклика $\sigma^2(y)$ и дисперсии адекватности. Оценка дисперсии адекватности характеризует отклонения между результатами наблюдений и значениями, формируемыми по функции отклика

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N-m} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u - y_u'^2, \quad N > m,$$

где m — количество оцениваемых коэффициентов модели;

$\bar{y}_u$ — среднее значение результатов наблюдения в u -й точке плана;

y_u' — значение отклика в этой же точке, предсказанное на модели.

Количество степеней свободы дисперсии адекватности $\varphi_a = N - m$. При насыщенном планировании нет степеней свободы и сумма отклонений равна нулю.

Проверка адекватности сводится к проверке гипотезы об однородности оценки дисперсии воспроизводимости $\sigma^2(y)$ с количеством степеней свободы $\varphi(y)$ и оценки дисперсии адекватности. Проверка осуществляется по критерию Фишера аналогично рассмотренной выше проверке однородности дисперсий воспроизводимости. Оценки дисперсий в формуле расчета критерия расставляются так, чтобы его величина была больше единицы, критическая область является двусторонней.

Если вычисленное значение критерия меньше критического, то нет оснований для сомнений в адекватности модели. Однако положительный исход статистической проверки не гарантирует достоверной адекватности, а тем более истинности модели, хотя и не противоречит такому предположению. Когда гипотеза отклоняется, следует вывод о неадекватности модели, следовательно, она заведомо не является истинной. Дальнейшее применение неадекватной модели обычно нецелесообразно, и надо принять меры по ее совершенствованию.

Причиной неадекватности могут являться: ошибки в организации и проведении опытов, например, неконтролируемое изменение неучтенных в модели факторов; погрешности в задании исходных данных и в измерении результатов; большой размах варьирования факторов и другие причины. Иначе говоря, анализ причин неадекватности требует серьезного изучения сущности исследуемого процесса и методов его исследования.

11.4.4. Проверка значимости оценок коэффициентов модели

Проверка значимости оценок коэффициентов полинома производится на основе проверки статистической гипотезы о равенстве математического ожидания случайной величины нулю, т. е. проверки условия $b_i = 0$ для всех коэффициентов. Проверка осуществляется с помощью критерия Стьюдента $t_i = (|\beta_i| - 0) / \sigma(\beta_i) = |\beta_i| / \sigma(\beta_i)$.

Критическое значение $t_{кр} = t(\alpha; \varphi(y))$ находится стандартным образом: критическая область является двусторонней, так как коэффициент может быть положительным или отрицательным; количество степеней свободы соответствует количеству степеней свободы для оценки дисперсии воспроизводимости $\varphi(y)$. Если вычисленное значение критерия больше $t_{кр}$, то данный коэффициент отличается от нуля и оставляется в уравнении функции отклика, иначе коэффициент незначим. Отсутствие значимости коэффициента в моделях описания поверхности отклика говорит о целесообразности исключения соответствующего слагаемого из уравнения (частный градиент равен нулю).

После проверки значимости коэффициентов может оказаться, что все коэффициенты незначимы. Эти выводы являются следствием одной из следующих причин:

- достигнута область оптимума функции отклика. Следует перейти к построению функции на основе полных полиномов второго порядка;
- интервал варьирования факторов слишком мал. Необходимо увеличить интервал варьирования факторов;
- отклик системы не зависит от выбранных факторов. В выбранной области значений факторы не оказывают влияние на функцию отклика, или для анализа выбраны несущественные факторы.

Формальных правил выявления соответствующих ситуаций нет.

Рассмотренные этапы обработки результатов экспериментов должны выполняться не только в случае полного или дробного факторного эксперимента, но и при реализации других планов оптимизации и описания поверхности отклика.

В условиях относительно небольшого влияния случайности на значение функции отклика (например, случайные ошибки измерительных приборов) в каждой точке плана проводится только по одному опыту. Очевидно, что в такой ситуации оценка дисперсии воспроизводимости невозможна. Следовательно, проверки однородности дисперсии воспроизводимости и адекватности модели не проводятся. И только в условиях ненасыщенного планирования возможна проверка значимости коэффициентов полинома, если в качестве дисперсии коэффициентов взять величину $\sigma^2(\beta_i) = \sigma_a^2/N$ с количеством степеней свободы $\varphi_a = N - m$.

11.5. Планы для описания поверхности отклика

11.5.1. Композиционные планы

Применение линейных планов совместно с методом градиентного поиска оптимума позволяет достичь окрестностей точки оптимума. Поиск оптимального решения в этой области требует перехода от линейных моделей к моделям более высокого порядка — как минимум к полиномам второй степени [2, 6]. Полином второго порядка содержит $N = (k + 1)(k + 2) / 2$ эффектов:

$$y' = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i, j=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2, \quad j > i. \quad (11.4)$$

Построение такой модели требует применения плана, в котором каждая переменная принимает хотя бы три различных значения. Существуют различные подходы к построению планов второго порядка. Можно воспользоваться ПФЭ типа 3^k , но такие планы обладают большой избыточностью. Например, для трех переменных количество точек плана составит 27, а количество оцениваемых коэффициентов в функции отклика равно 10. В соответствии с идеей пошагового эксперимента планирование рационально осуществлять путем добавления специально подобранных точек к «ядру», образованному планированием для линейного приближения. Такие планы называют **композиционными** (последовательными), они позволяют использовать информацию, полученную в результате реализации линейного плана.

Композиционные планы используются обычно на заключительном этапе исследования, когда модель приходится подбирать последовательно, начиная с простейшего линейного уравнения, которое потом достраивается до полной квадратичной формулы. В этом случае композиционные планы дают выигрыш по числу опытов по сравнению с другими планами. Эти планы можно применять и при непосредственном построении функции отклика в виде полинома (11.4).

Решение подобных задач основано на применении ортогональных или ротатабельных **центральных композиционных планов** (ЦКП). Эти планы используют в качестве ядра полный факторный эксперимент или минимально возможные регулярные дробные реплики типа 2^{k-p} . В качестве дробной реплики применяют такую, в которой два любых парных взаимодействия по модулю не равны друг другу

$$|x_i x_j| \neq |x_s x_z| \quad (11.5)$$

для любых попарно различных индексов. Именно план ПФЭ или дробные реплики, удовлетворяющие указанному условию, служат ядром ЦКП. На практике широкое распространение получили два типа ЦКП, известные как планы Бокса и Хартли. Понятие “центральный” означает, что факторы принимают значения, симметричные относительно центра плана.

Центральный композиционный план второго порядка называют планом Бокса, если его ядром является ПФЭ 2^k или регулярная реплика типа 2^{k-p} , для которой парные взаимодействия не равны по модулю линейным факторам: $x_i \neq \pm x_s x_z$; $s \neq z$; $i, s, z = 1, 2, \dots, k$ и, кроме того, выполняется условие (11.5). Применение ПФЭ или регулярных реплик, отвечающих этим условиям, позволяет получить несмещенные оценки коэффициентов модели (11.4). Из условий построения дробной реплики следует, что разрешающая способность ядра плана должна быть больше четырех, т. е. определяющий контраст должен содержать не менее пяти переменных. Следовательно, ядром плана Бокса при $k < 5$ является ПФЭ, а при $k \geq 5$ может быть ДФЭ. План Бокса можно сделать ортогональным либо ротатабельным. Но нельзя добиться одновременного и строгого соблюдения обоих свойств. В некоторых случаях ЦКП можно сделать *приближенно* и ортогональным, и ротатабельным, если вначале построить ротатабельный план, а затем подобрать необходимое количество опытов в центральной точке.

Центральный композиционный план второго порядка называют планом Хартли, если его ядром является регулярная реплика типа 2^{k-p} , в которой некоторые парные взаимодействия равны по модулю линейным факторам. Иначе говоря, ЦКП второго порядка будет или планом Бокса или планом Хартли. Планы Хартли более экономны по числу опытов, чем планы Бокса, но уступают им по точности оценки коэффициентов, кроме того, их нельзя сделать ни ортогональными, ни ротатабельными. Такой план не позволяет получить раздельные оценки соответствующих коэффициентов. Планы Хартли целесообразно применять, если известно, что часть эффектов b_j или b_{ji} в модели отсутствует (следовательно, простые эффекты можно смешивать с парными взаимодействиями, не теряя в разрешающей способности плана) или тогда, когда дисперсия наблюдений относительно мала.

11.5.2. Ортогональные центральные композиционные планы

В планах Бокса к ядру, построенному на основе ПФЭ или ДФЭ, добавляется одна точка в центре плана с координатами $(0, 0, \dots, 0)$ и $2k$ «звездных» точек с координатами $(\pm \gamma, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm \gamma)$. Построенный таким образом план будет ЦКП второго порядка. Общее количество точек

плана при использовании композиционного планирования составит $N = N_0 + 2k + 1$, где N_0 — количество точек ядра плана. В таблицах 11.4 и 11.5 содержится описание соответствующих матриц планирования для ЦКП при $k = 2$. Количество опытов для данного плана $N = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$. Аналогично строятся ЦКП для произвольного числа факторов, при этом каждый фактор варьируется на пяти уровнях: $-\gamma$; -1 ; 0 ; 1 ; γ .

Таблица 11.4

Ядро плана	
x_1	x_2
+	+
—	+
+	—
—	—

Таблица 11.5

Дополнительные точки	
x_1	x_2
γ	0
$-\gamma$	0
0	γ
0	$-\gamma$
0	0

В матрице плана второго порядка не у всех столбцов соблюдается условие симметрии и не все пары столбцов ортогональны. Например, рассмотрим ЦКП второго порядка для трех переменных (табл. 11.6).

Таблица 11.6

План	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2
ПФЭ 2^3	+	—	—	—	+	+	+	+	+	+
	+	+	—	—	—	—	+	+	+	+
	+	—	+	—	—	+	—	+	+	+
	+	+	+	—	+	—	—	+	+	+
	+	—	—	+	+	—	—	+	+	+
	+	+	—	+	—	+	—	+	+	+
	+	—	+	+	—	—	+	+	+	+
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Звездный план	+	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2	0	0
	+	γ	0	0	0	0	0	γ^2	0	0
	+	0	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2	0
	+	0	γ	0	0	0	0	0	γ^2	0
	+	0	0	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2
	+	0	0	γ	0	0	0	0	0	γ^2
Центр плана	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \neq 0$, $\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 x_{ju}^2 \neq 0$, так как $x_{iu}^2 \neq 0$ для всех строк плана. Для устранения

асимметрии и нарушений ортогональности ЦКП Бокса необходимо провести преобразование квадратичных параметров и специальным образом выбрать величину плеча γ .

Чтобы добиться соблюдения свойства симметричности, следует перейти от x_i^2 к центрированным величинам $x_i^* = x_i^2 - x_{i\text{cp}}^2$ (сумма центрированных величин равна нулю). Среднее значение $x_{i\text{cp}}^2$, как видно из таблицы 11.6, для всех x_i^2 одинаково и равно

$$c = (N_0 + 2\gamma^2)/N. \quad (11.6)$$

Тогда исходную квадратичную модель (11.4) можно преобразовать:

$$\begin{aligned} y' &= b_0 + b_1x_1 + \dots + b_1x_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{k-1,k}x_{k-1}x_k + \\ &+ b_{11}(x_1^2 - x_{1\text{cp}}^2 + x_{1\text{cp}}^2) + \dots + b_{kk}(x_k^2 - x_{k\text{cp}}^2 + x_{k\text{cp}}^2) = \\ &= d_0 + b_1x_1 + \dots + b_1x_k + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{k-1,k}x_{k-1}x_k + b_{11}x_1^* + \dots + b_{kk}x_k^*, \end{aligned}$$

где $d_0 = b_0 + b_{11}x_{1\text{cp}}^2 + \dots + b_{k-1,k}x_{k\text{cp}}^2 = b_0 + c(b_{11} + \dots + b_{k-1,k})$.

Исходная и преобразованная модели эквивалентны, кроме того, в них все коэффициенты, за исключением нулевого, совпадают.

После преобразования получим матрицу планирования, табл. (11.7).

Таблица 11.7

План	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*
ПФЭ 2^3	+	—	—	—	+	+	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	—	—	—	—	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	—	+	—	—	+	—	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	+	—	+	—	—	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	—	—	+	+	—	—	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	—	+	—	+	—	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	—	+	+	—	—	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
	+	+	+	+	+	+	+	$1-c$	$1-c$	$1-c$
Звездный план	+	$-\gamma$	0	0	0	0	0	γ^2-c	$-c$	$-c$
	+	γ	0	0	0	0	0	γ^2-c	$-c$	$-c$
	+	0	$-\gamma$	0	0	0	0	$-c$	γ^2-c	$-c$
	+	0	γ	0	0	0	0	$-c$	γ^2-c	$-c$
	+	0	0	$-\gamma$	0	0	0	$-c$	$-c$	γ^2-c
	+	0	0	γ	0	0	0	$-c$	$-c$	γ^2-c
Центр плана	+	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$

Нетрудно заметить, что в этой таблице суммы элементов по всем столбцам, за исключением столбца x_0 , равны нулю, т. е. в преобразованной таблице соблюдается свойство симметричности.

Но столбцы квадратичных членов не являются ортогональными при произвольных значениях γ :

$$\sum_{u=1}^N (x_{iu}^2 - c)(x_{ju}^2 - c) = \sum_{u=1}^N x_{iu}^* x_{ju}^* \neq 0, \quad i \neq j.$$

Ортогонализация столбцов, т. е. приравнивание $\sum_{u=1}^N x_{iu}^* x_{ju}^*$ к нулю, достигается специальным выбором величины γ . Это значение величины γ находится из уравнения

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^* x_{ju}^* = N_0(1-c)^2 - 4c(\gamma^2 - c) + (2k-4)c^2 + c^2 = 0$$

или

$$\begin{aligned} N_0 - 2cN_0 + N_0c^2 - 4c\gamma^2 + 4c^2 + 2kc^2 - 4c^2 + c^2 = \\ = N_0 - 2(N_0 + 2\gamma^2)c + c^2(N_0 + 2k + 1) = N_0 - 2c^2N + c^2N = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $c^2N = N_0$. Тогда $c = (N_0/N)^{1/2}$.

Подставим найденное значение величины c в уравнение (11.6):

$$(N_0/N)^{1/2} = (N_0 + 2\gamma^2)/N.$$

Решив уравнение, найдем величину γ , которая придает матрице планирования (в том числе табл. 5.4) свойство ортогональности:

$$\gamma = \{[(N N_0)^{1/2} - N_0]/2\}^{1/2}. \quad (11.7)$$

Значения γ , обеспечивающие ортогональность, например, для ядер $2^2, 2^3, 2^4, 2^{5-1}$, составляют соответственно 1; 1,215; 1,414; 1,547.

Оценки коэффициентов регрессии определяются по модифицированной матрице независимых переменных (см. табл. 11.7):

$$\beta_i = \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u / \sum_{u=1}^N x_{iu}^2, \quad i = \overline{1, m}.$$

В приведенной формуле $m = C_{k+2}^2$ и обозначает общее количество оцениваемых коэффициентов полинома, за исключением нулевого.

Оценка коэффициента $d_0 = \sum_{u=1}^N \bar{y}_u / N$, тогда $\beta_0 = d_0 - c \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_{jj}$.

Оценки дисперсии коэффициентов:

$$\sigma^2(\beta_i) = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \sigma^2(\bar{y}_u) / \left[\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \right]^2; \quad \sigma^2 d_0 = \sum_{u=1}^N \sigma^2(\bar{y}_u) / N^2;$$

$$\sigma^2 \beta_0 = \sigma^2(d_0) + c^2 \sum_{i=1}^k \sigma^2(\beta_{ii}),$$

где $\sigma^2(\bar{y}_u)$ — оценка дисперсии среднего значения функции отклика в u -й точке плана.

Оценка дисперсии функции отклика:

$$\sigma^2 y = \sigma^2(\beta_0) + \sum_{1 \leq i \leq k} x_i^2 \sigma^2 \beta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} x_i^2 x_j^2 \sigma^2 \beta_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq k} (x_i^2 - c)^2 \sigma^2(\beta_{ii}).$$

Оценки дисперсии коэффициентов являются различными, так как вычисляются по разным совокупностям точек плана. Оценка дисперсии функции отклика зависит не только от расстояния до заданной точки от центра, но и от ее положения в пространстве, т. е. ортогональный план второго порядка не являются ротатабельным.

Проверка однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели, значимости коэффициентов полинома в случае применения ортогональных ЦКП второго порядка осуществляется по рассмотренной выше схеме.

11.5.3. Ротатабельные центральные композиционные планы

В некоторых случаях ортогональное планирование второго порядка не отвечает потребностям практики — при описании поверхности отклика, особенно в окрестностях точки оптимума, более значимой является оценка дисперсии уравнения в целом, чем оценка дисперсии отдельных коэффициентов полинома. В этом случае обычно стремятся к равномерности распределения информации в уравнении функции отклика по всем направлениям. Такому положению отвечают ротатабельные планы. Кроме сказанного, подобные планы второго порядка позволяют минимизировать систематические ошибки, связанные с неадекватностью представления результатов полиномами второго порядка. Но построение ротатабельного плана второго порядка более сложно, чем ортогонального, а сама задача построения не имеет однозначного решения. Один из подходов к построению таких планов состоит в следующем [2].

Путем специального подбора звездного плеча γ ЦКП Бокса можно сделать ротатабельным, иначе говоря, ЦКП Бокса можно сделать или ортогональным или ротатабельным.

Точки ротатабельного ЦКП Бокса второго порядка располагают на концентрических гиперсферах, количество которых не менее двух. Первая гиперсфера может быть вырожденной, т. е. представлять собой центральную точку плана, ее радиус $\rho_1 = 0$. Именно такая сфера часто используется на практике.

Вторая гиперсфера соответствует вписанному в нее кубу, выбранному в качестве ядра плана. Для ядра $x_i = \pm 1$, следовательно, радиус этой гиперсферы $\rho_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)^{1/2} = (k)^{1/2}$. Ядро представляет собой ПФЭ вида 2^k или ДФЭ вида 2^{k-p} , причем должно соблюдаться условие $(k - p)/4 > 3/4$. Следовательно, с учетом ограничений на ЦКП Бокса, если $k \geq 5$, то в качестве ядра можно использовать полуреплику, если $k \geq 8$, ядром может служить четверть реплика.

Третья гиперсфера имеет радиус $\rho_3 = 2^{k/4}$ для ядра в виде ПФЭ и радиус $\rho_3 = 2^{(k-p)/4}$ для ядра в виде ДФЭ.

Таким образом, каждый фактор в ротатабельном ЦКП Бокса варьируется на пяти уровнях. В некоторых случаях радиусы второй и третьей гиперсферы совпадают:

$$n = 2; \quad \rho_2 = 2^{1/2}; \quad \rho_3 = 2^{2/4} = 2^{1/2};$$

$$n = 8 \text{ и } p = 2; \quad \rho_2 = 8^{1/2} = 2^{3/2}; \quad \rho_3 = 2^{(8-2)/4} = 2^{3/2}.$$

Пример 1. Построить матрицу ротатабельного ЦКП Бокса второго порядка для трех факторов.

Решение. Ядром плана является ПФЭ вида 2^3 (радиус соответствующей гиперсферы $\rho_2 = 3^{1/2} = 1,732$). Звездные точки располагаются на гиперсфере с радиусом $\rho_3 = 2^{3/4} = 1,682$ и имеют координаты $(\pm 1,682; 0; 0)$, $(0; \pm 1,682; 0)$, $(0; 0; \pm 1,682)$. Матрица планирования включает три гиперсферы и соответствует **таблице 5.3**, в которой $\gamma = 1,682$. План содержит 15 точек и является ненасыщенным — количество оцениваемых коэффициентов 10.

В таблице 11.8 приведены минимально необходимые сведения для составления рассмотренного вида ротатабельных ЦКП.

Таблица 11.8

Количество факторов	Число точек ПФЭ	Число звездных точек	Значение γ
2	4	4	1,414
3	8	6	1,682
4	16	8	2,000
5	32	10	2,378
5, полуреплика	16	10	2,000
6	64	12	2,828
6, полуреплика	32	12	2,378
7	128	14	3,364
7, полуреплика	64	14	2,828

Коэффициенты модели и их дисперсии рассчитываются по формулам [2]:

$$A = 1 / \left[2\lambda_4 (k+2)\lambda_4 - k\lambda_2^2 \right];$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{3N} \sum_{u=1}^N x_{iu}^4; \quad \lambda_2 = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2;$$

$$\beta_0 = \frac{A}{N} 2\lambda_4^2(k+2) \sum_{u=1}^N \bar{y}_u - 2\lambda_2\lambda_4 \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \bar{y}_u;$$

$$\beta_i = \frac{1}{N\lambda_2} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u;$$

$$\beta_{ii} = \frac{A}{N} \left[(k+2)\lambda_4 - k\lambda_2^2 \right] \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \bar{y}_u + (\lambda_2^2 - \lambda_4) \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 \bar{y}_u - 2\lambda_2\lambda_4 \sum_{u=1}^N \bar{y}_u;$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{N\lambda_4} \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u;$$

$$\sigma^2(\beta_0) = 2A\lambda_4^2(k+2)\sigma^2(\bar{y}) / N;$$

$$\sigma^2(\beta_i) = \sigma^2(\bar{y}) / (N\lambda_2);$$

$$\sigma^2(\beta_{ij}) = \sigma^2(\bar{y}) / (N\lambda_4);$$

$$\sigma^2(\beta_{ii}) = A \left[\lambda_4(k+1) - (k-1)\lambda_2^2 \right] \sigma^2(\bar{y}) / N.$$

Представленные формулы справедливы для ротатбельного планирования при любом количестве независимых переменных. Такое планирование не позволяет получить независимые оценки для всех коэффициентов модели, коррелированными оказываются коэффициенты (β_0, β_{ii}) и (β_{ii}, β_{ij}) . Взаимную связь этих пар коэффициентов можно охарактеризовать ковариациями:

$$\text{cov}(\beta_0, \beta_{ii}) = -2\sigma^2(\bar{y}) \lambda_4 A / N;$$

$$\text{cov}(\beta_{ii}, \beta_{ij}) = \sigma^2(\bar{y}) (1 - \lambda_4) A / N.$$

Проверка однородности дисперсии воспроизводимости, адекватности модели и значимости коэффициентов модели производится по схеме, рассмотренной в разделе 4.

Если повторные наблюдения имеются только в центре плана, то $\bar{y}_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}$ и величина $\sigma_v^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{u=1}^{n_0} (y_{0u} - \bar{y}_0)^2$ будет несмещенной оценкой дисперсии ошибок наблюдения. При ненасыщенном планировании остаточная сумма $S_R^2 = \sum_{u=1}^N r_u (\bar{y}_u - \hat{y}'_u)^2$ отличается от нуля. Здесь y'_u — величина, предсказанная уравнением модели, $\bar{y}_u$ — найденная экспериментально. Величина $\sigma_R^2 = S_R / [N - (k + 1)(k + 2)/2]$ характеризует неадекватность модели и также является несмещенной оценкой дисперсии ошибок наблюдения.

На основании рассчитанных величин можно провести все необходимые проверки коэффициентов и модели в целом.

Иногда интерес представляет информация о функции отклика в некоторой окрестности центра плана. В этом случае следует добиться одинаковой погрешности модели внутри гипертсферы единичного радиуса. План, обеспечивающий такое свойство функции отклика, называется униформ-ротатабельным. Для его формирования достаточно обеспечить равенство дисперсии в центре плана ($\rho_0 = 0$) и на поверхности гипертсферы радиуса $\rho_2 = 1$. Этого добиваются подбором числа наблюдений n_0 в центре плана, а именно, параметр λ_4 следует взять равным положительному корню квадратного уравнения

$$2\lambda_4(\lambda_4 - 1)(k + 2) + \lambda_4(k + 1) - (k - 1) = 0.$$

Рассмотренное композиционное планирование представляет собой один из возможных подходов к построению ротатабельных планов второго порядка.

11.5.4. Композиционные планы типа B_n

Планы типа B_n представляют собой симметричные планы второго порядка с ядром в виде ПФЭ 2^k или ДФЭ 2^{k-p} , дополненные $2k$ -звездными точками с плечом $\gamma = 1$ и опытами в центре плана. Иначе говоря, эти планы состоят из 2^k (2^{k-p}) вершин k -мерного гиперкуба с координатами ± 1 , из $2k$ центров $(n-1)$ -мерных граней и некоторого числа опытов в центре гиперкуба. Количество точек плана с ядром из ПФЭ составляет $N = 2^k + 2k + 1$, для ДФЭ $N = 2^{k-p} + 2k + 1$. В каждой точке проводится равное число опытов. Планы этого типа имеют минимальное количество уровней варьирования факторов, равное трем, что позволяет более точно выдерживать режимы

работы изделий при натурных испытаниях по сравнению с планами, в которых требуется большее число уровней изменения управляемых переменных. Планы типа B_n близки к D - и G -оптимальным планам.

Обычно результаты опытов в нулевой точке служат для проверки гипотезы об адекватности модели экспериментальным данным. Если оценку параметров выполнять по результатам опытов в звездных точках и точках ядра, то [2]

$$\beta_0 = \frac{1}{2(k-1)} \left(\sum_{u=N_1+1}^N \bar{y}_u - \frac{1}{2^{n-1-p}} \sum_{u=1}^{N_1} \bar{y}_u \right);$$

$$\beta_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{u=N_1+1}^N x_{iu}^2 \bar{y}_u - \beta_0;$$

$$\beta_i = (2 + 2^{k-p})^{-1} \sum_{u=1}^N x_{iu} \bar{y}_u;$$

$$\beta_{ij} = (2^{k-p})^{-1} \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} \bar{y}_u;$$

где N_1 — число точек ядра плана;

$\bar{y}_u$ — среднее значение отклика в u -й точке, полученное по r опытам.

Если некоторые коэффициенты незначимы, то остальные уточняются по специальным формулам.

11.5.5. Каталоги оптимальных планов

Построение оптимальных планов для произвольных функций отклика представляет сложную задачу. Для облегчения решения такой задачи для некоторых типовых функций отклика составлены каталоги оптимальных планов [5, 9]. Рассмотрим некоторые из них для случаев, когда многомерное пространство допустимых значений факторов представляет собой куб или шар. Соответственно, допустимые области значений факторов должны удовлетворять условиям:

- для куба $-1 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2, \dots, k$;
- для шара $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \leq 1$.

1. Функция отклика представляет собой полином порядка q одного фактора ($k = 1$):

$$y' = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_q x^q, q = 1, 2, \dots$$

Примеры A -оптимальных планов представлены в таблице 11.9, D -оптимальных планов — в таблице 11.10. Соблюдение свойства оптимальности планов требует выполнения определенных соотношений по количеству реализаций в каждой точке плана. Это соотношение задается значением веса w_j . Например, значение веса, равное 0,152, означает, что в соответствующей точке плана в ходе исследования следует провести 0,152-ю часть всех опытов. Для A -оптимальных планов веса точек различны, для D -оптимальных планов веса всех точек одинаковы.

Таблица 11.9

Степень полинома, q	Значения фактора x / вес точки плана w				
	$x_{(1)} / w_1$	$x_{(2)} / w_2$	$x_{(3)} / w_3$	$x_{(4)} / w_4$	$x_{(5)} / w_5$
2	-1,0 / 0,25	0,0 / 0,5	1,0 / 0,25	—	—
3	-1,0 / 0,152	-0,468 / 0,348	0,468 / 0,348	1,0 / 0,152	—
4	-1,0 / 0,107	-0,683 / 0,25	0,0 / 0,286	0,683 / 0,25	1,0 / 0,107

Таблица 11.10

Степень полинома, q	Значения фактора x				
	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$
2	-1,0	0,0	1,0	—	—
3	-1,0	-0,447	0,447	1,0	—
4	-1,0	-0,655	0,0	0,655	1,0

2. Выше были рассмотрены композиционные планы для оценки коэффициентов полной квадратичной функции (11.4) от k факторов. Кроме них, существуют оптимальные планы на кубе, которые предусматривают выбор множеств точек с целочисленными координатами:

- точка в центре куба (множество M_0). Все координаты равны нулю;
- множество точек M_k , соответствующих вершинам куба. Все координаты равны ± 1 . Количество точек 2^k ;
- множество M_{k-1} середин ребер (все координаты равны 1, за исключением одной нулевой координаты). Количество точек $k2^{k-1}$;
- множество центров граней размерности $k-l$ (l координат равно нулю). Количество точек равно $C_k^{k-l}2^{k-l}$, $l = 2, 3, \dots, k-1$.

В таблице 11.11 приведены веса множества M_j , $j = 0, 1, 2, \dots, k$ для различного количества факторов. Для получения веса конкретной точки плана следует вес соответствующего множества разделить на количество точек в множестве. Как видно из таблицы 5.11, каждый фактор варьируется на трех уровнях, и не все сочетания множеств допустимы для конкретного плана.

Таблица 11.11

Критерий оптимальности плана	Количество переменных, k	Множество точек плана						
		M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
D	2	0,0962	0,3206	0,5832	–	–	–	–
	3	0,0655	–	0,4242	0,5103	–	–	–
	4	0,0474	–	–	0,5021	0,4506	–	–
	5	0,0368	–	–	–	0,5622	0,4021	–
	6	0,0216	–	–	–	–	0,6097	0,3297
A	2	0,376	0,391	0,233	–	–	–	–
	3	0,425	–	0,569	0,060	–	–	–
	4	0,370	–	0,552	–	0,078	–	–
	5	0,427	–	0,573	–	–	–	–
	6	0,404	–	–	0,556	–	0,040	–

Пример 2. Составить D -оптимальный план для $k = 3$.

Решение. План представлен в таблице 11.12. Он включает: точку с нулевыми координатами; двенадцать точек, соответствующих центрам ребер трехмерного куба; восемь точек, соответствующих вершинам куба. Этот план не включает точки, соответствующие центрам граней трехмерного куба.

Таблица 11.12

№	x_1	x_2	x_3	Характеристика множества
1	0	0	0	Множество M_0 . Вес точки $w_j = 0,0655$ Множество M_2 . Суммарный вес точек множества = 0,4242. Количество точек $2 \cdot k \cdot (k - 1)$. Вес одной точки: $w_j = 0,4242 / 12 = 0,0353$
2	+ 1	+ 1	0	
3	– 1	+ 1	0	
4	+ 1	– 1	0	
5	– 1	– 1	0	
6	+ 1	0	+ 1	
7	– 1	0	+ 1	
8	+ 1	0	– 1	
9	– 1	0	– 1	
10	0	+ 1	+ 1	
11	0	– 1	+ 1	
12	0	+ 1	– 1	
13	0	– 1	– 1	
14	+ 1	+ 1	+ 1	Множество M_3 . Суммарный вес точек множества = 0,5103. Количество точек $2^k = 8$. Вес одной точки: $w_j = 0,5103 / 8 = 0,0638$
15	– 1	+ 1	+ 1	
16	+ 1	– 1	+ 1	
17	– 1	– 1	+ 1	
18	+ 1	+ 1	– 1	
19	– 1	+ 1	– 1	
20	+ 1	– 1	– 1	
21	– 1	– 1	– 1	

3. Оптимальные планы на шаре единичного радиуса для построения полных квадратичных моделей включают следующие множества точек:

- точку в центре шара (множество M_0). Все координаты равны нулю;
- множество точек с координатами $(\pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm 1)$.

Это множество M_1 содержит $2k$ точек;

– множество M_2 точек, соответствующих вершинам вписанного в шар многомерного куба. Координаты вершин куба принимают значения $\pm k^{1/2}$. Количество вершин куба равно 2^k .

В таблице 11.13 приведены веса множества M_j , $j = 0, 1, 2$ для различного количества факторов k . Расчет веса конкретной точки плана производится делением веса соответствующего множества на количество точек в множестве. Как видно из таблицы 11.13, каждый фактор варьируется на пяти уровнях.

Таблица 11.13

Критерий оптимальности	Количество факторов, k	Множество точек		
		M_0	M_1	M_2
A	2	0,2918	0,2932	0,4148
	3	0,1924	0,2586	0,5488
	4	0,1377	0,2256	0,6368
	5	0,1044	0,2000	0,6976
	6	0,0825	0,1750	0,7425
D	2	0,1667	0,4167	0,4167
	3	0,1000	0,3600	0,5400
	4	0,0667	0,3111	0,6222
	5	0,0476	0,2721	0,6803
	6	0,0357	0,2411	0,7232

Пример 3. Составить D -оптимальный план на шаре для $k = 3$.

Решение. D -оптимальный план имеет матрицу планирования для основных переменных, представленную в таблице 11.14. Количество точек плана равно 15, каждый фактор варьируется на пяти уровнях.

По своим параметрам представленный план во многом аналогичен центральному композиционному плану Бокса. Отличие заключается в величине радиуса гипертсферы — он равен единице (в ЦКП Бокса радиусы превышают единичное значение).

План на шаре более экономичен по сравнению с планом на кубе по количеству точек (аналогичный план на кубе содержит 21 точку), но вместо трех уровней варьирования фактора предполагает пять уровней.

Таблица 11.14

№	Фактор			Вес точки плана	Примечание
	x_1	x_2	x_3		
1	0	0	0	0,1000	Множество M_0
2	1	0	0	0,0600	Множество M_1 . Суммарный вес 0,3600. Количество точек — 6.
3	– 1	0	0	0,0600	
4	0	1	0	0,0600	
5	0	– 1	0	0,0600	
6	0	0	1	0,0600	
7	0	0	– 1	0,0600	
8	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	Множество M_2 . Суммарный вес 0,5400. Количество точек — 8.
9	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	
10	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	
11	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	0,0675	
12	$3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	
13	$-3^{-1/2}$	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	
14	$3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	
15	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	$-3^{-1/2}$	0,0675	

11.6. Планы для оценки влияния факторов

11.6.1. Планы на латинских квадратах

При составлении планов поиска оптимальных значений функции и описания поверхности отклика предполагалось, что факторы представляют собой непрерывные величины. Однако некоторые параметры систем носят дискретный характер и принимают только относительно небольшое количество значений, например, емкость запоминающих устройств, тактовая частота системной шины персонального компьютера. Другие факторы по своей природе имеют не количественную, а качественную природу, в частности, однотипные изделия выпускаются целым рядом изготовителей. Этим изделиям можно приписать некоторые обозначения в номинативной шкале измерений.

Таким образом, существуют параметры (характеристики), принимающие ограниченное количество значений, задаваемых в количественной или качественной шкале измерений. Необходимо в условиях воздействия других факторов оценить влияние таких параметров на показатель качества системы или определить их значимость. Полный перебор возможных сочетаний параметров системы потребует чрезмерно большого количества опытов. С целью рационального сокращения экспериментальных исследований применяют специальный вид планов — планы на латинских квадратах.

Латинский квадрат характеризуется особым расположением некоторого числа символов в ячейках, сгруппированных в строки и столбцы

так, что каждый символ встречается один раз в каждой строке и в каждом столбце. Пример латинского квадрата размером $n \times n$ для $n = 3$ представлен в таблице 11.14.

Таблица 11.14

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Для любого $n > 2$ существует множество вариантов построения латинских квадратов. Количество вариантов латинских квадратов с ростом n быстро увеличивается и определяется формулой

$$N(n, n) = n!(n-1)!L(n).$$

Некоторые значения $L(n)$ представлены в таблице 11.15.

Таблица 11.15

n	1	2	3	4	5	6
$L(n)$	1	1	1	4	56	9048

Латинскому квадрату можно сопоставить план эксперимента, в котором строки соответствуют различным значениям одного фактора, столбцы — значениям другого, а латинские буквы — значениям третьего фактора, т. е. латинский квадрат позволяет исследовать влияние не более чем трех факторов, причем все факторы варьируются на одинаковом количестве уровней. Можно ослабить это требование путем приравнивания какого-либо уровня другому. Пример представления плана на латинском квадрате для факторов L, P, Z , каждый из которых варьируется на четырех уровнях ($n = 4$), приведен в таблице 11.16.

Таблица 11.16

	P_1	P_2	P_3	P_4
L_1	Z_1	Z_3	Z_4	Z_2
L_2	Z_2	Z_1	Z_3	Z_4
L_3	Z_3	Z_4	Z_2	Z_1
L_4	Z_4	Z_2	Z_1	Z_3

Применение плана, построенного на основе латинского квадрата, позволяет оценить дифференциальный (разностный) эффект пар уровней, но не дает информации о взаимодействии между факторами (иначе говоря, факторы не зависят друг от друга). Так, сумма результатов экспериментов, соответствующих столбцу j , будет оценивать эффект P_j , усредненный

по всем L и Z . Тогда дифференциальный эффект увеличения значения фактора P от уровня 1 до уровня 2, усредненный по всем L и Z , можно оценить по разности между суммой значений функции отклика столбца 2 и столбца 1. Порядок перечисления уровней факторов роли не играет.

В частности, рассмотренный план позволяет оценить влияние размера видеопамати графического адаптера (P) на скорость вывода видеоизображений при различном быстродействии (L) процессора компьютера и разном разрешении дисплея (Z). Применительно к рассмотренному примеру для трех факторов при четырех уровнях варьирования ПФЭ требует $4^3 = 64$ опытов, а с применением латинского квадрата — только 16. Экономия достигается за счет потери информации о взаимодействии факторов.

Приведенный пример является одним из возможных расположений уровней факторов, позволяющих получить **несмещенные** оценки главных эффектов. Различные латинские квадраты одного размера можно накладывать друг на друга, образуя **греко-латинские квадраты**. Например, два латинских квадрата 3×3 можно преобразовать в греко-латинский квадрат

a	b	c		α	β	χ		$a\alpha$	$b\beta$	$c\chi$	
b	c	a	$\times$	χ	α	β	$=$	$b\chi$	ca	$a\beta$	$.$
c	a	b		β	χ	α		$c\beta$	$a\chi$	ba	

Здесь латинские буквы образуют один латинский квадрат, а греческие буквы — другой латинский квадрат. Каждая латинская буква встречается в паре с конкретной греческой буквой только один раз. С помощью этого греко-латинского квадрата можно оценить главные эффекты четырех трехуровневых факторов (фактора строк, фактора столбцов, римских и греческих букв), проведя только 9 опытов.

Если наложить друг на друга три различных варианта латинских квадратов, то получится план **гипер-греко-латинского квадрата**. С его помощью можно оценить главные эффекты пяти факторов (фактора строк, столбцов и трех расположений квадратов). В частности, для пяти трехуровневых факторов потребуется провести только 9 опытов вместо 243 опытов при переборе всех возможных сочетаний факторов.

Итак, планы латинских (греко-латинских) квадратов используются в тех случаях, когда требуется оценить влияние факторов, варьируемых более чем на двух уровнях и заранее известно, что между факторами нет взаимодействий или этими взаимодействиями можно пренебречь. Имеются таблицы латинских и греко-латинских квадратов различных размеров, за исключением одного случая — не существует греко-латинского квадрата для 6 уровней факторов.

11.6.2. Оценка значимости фактора

Когда основным источником погрешности являются случайные ошибки измерений, то в точках плана обычно проводятся однократные опыты. В такой ситуации ошибки различных опытов считают взаимно независимыми случайными величинами, распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и одинаковой, хотя и неизвестной, дисперсией. Следовательно, функция отклика в различных точках плана также распределена нормально. Ее математические ожидания неизвестны и могут быть различными. Оценка влияния фактора в этих условиях проводится на основе применения метода дисперсионного анализа, суть которого заключается в определении значимости различий между средними значениями функции отклика для разных значений исследуемого фактора [3, 7]. Такое сравнение производится не путем непосредственного сравнения средних значений, а путем сопоставления факторной дисперсии функции отклика и остаточной дисперсии, вызванной случайными причинами. Если дисперсия функции отклика, порожденная воздействием различных значений фактора, значительно превышает остаточную дисперсию, то фактор оказывает существенное влияние на функцию отклика. А это значит, что и средние значения функции отклика на разных уровнях фактора различаются существенно.

Итак, исходными данными являются:

- план на латинском (греко-латинском, гипер-греко-латинском) квадрате с количеством уровней изменения факторов, равном n . Пусть уровни анализируемого фактора P соответствуют столбцам квадрата;

- матрица значений функции отклика $Y = [y_{kj}]$ размерностью $n \times n$;

- уровень значимости для проверки статистической гипотезы α .

Дисперсионный анализ включает следующие шаги.

1. Вычисление среднего значения функции отклика по всем опытам и среднего значения по различным уровням фактора P :

$$y_{\bar{n}\delta} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj};$$

$$y_{\delta}(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{kj}, \quad j = \overline{1, n}.$$

2. Оценка факторной дисперсии:

$$\mu_{2,\delta} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n [y_{\bar{n}\delta} - y_{\delta}(j)]^2.$$

3. Оценка остаточной дисперсии:

$$\mu_{2,\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{n^2 - 1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [y_{\hat{\sigma}}(j) - y_{kj}]^2.$$

4. Оценка значимости фактора P производится на основе метода проверки статистических гипотез. Нулевая гипотеза H_0 соответствует равенству средних значений функции отклика при различных значениях фактора. В этом случае факторная и остаточная дисперсия являются несмещенными оценками неизвестной генеральной дисперсии функции отклика и поэтому не должны существенно различаться. Очевидно, если оценка факторной дисперсии не превышает оценку остаточной дисперсии, то справедлива гипотеза H_0 . Альтернативная гипотеза H_1 соответствует утверждению, что факторная дисперсия существенно больше остаточной дисперсии, следовательно, средние значения также значимо различаются. Проверка осуществляется на основе критерия Фишера $F = \mu_{2,\phi} / \mu_{2,ост}$. Критическое значение критерия $F_{кр} = F(\alpha; n - 1; n^2 - n)$ находят стандартным образом: здесь $n - 1$ соответствует количеству степеней свободы факторной дисперсии, а $n^2 - n$ — количеству степеней свободы остаточной дисперсии. Если выполняется условие $F > F_{кр}$, то фактор P существенно влияет на функцию отклика, иначе влияние фактора не существенно.

Критерий Фишера применим только при сравнении дисперсий нормально распределенных величин. Если такой уверенности нет, то к полученному выводу следует относиться осторожно.

В случае проведения повторных опытов в точках плана распределение средних значений функции отклика будет приближаться к нормальному с увеличением количества опытов. И применение критерия Фишера будет достаточно обосновано.

11.6.3 Оценка дифференциального эффекта уровней фактора

Дифференциальный эффект уровней позволяет оценить изменение среднего значения функции отклика системы при переходе фактора с уровня j на уровень i . При этом следует учитывать, что на это изменение оказывают воздействие и случайные причины, а не только анализируемый фактор. Как и в дисперсионном анализе, здесь возможны различные варианты решения задачи в зависимости от наличия априорной информации и повторных опытов в точках плана. Рассмотрим два типовых варианта обработки данных [3].

В первом варианте рассматривается следующая ситуация:

– результаты измерений в различных точках независимы, повторные опыты отсутствуют;

– предполагается нормальное распределение значений функции отклика в различных точках плана, дисперсии распределения неизвестны, но одинаковы (случайность значений обусловлена ошибками измерений).

Данный вариант соответствует сравнению двух средних значений нормально распределенных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны, но предположительно одинаковы. Сравнение предполагает выполнение следующих шагов.

1. Вычисление средних значений функции отклика для двух сравниваемых значений факторов (уровни факторов соответствуют столбцам j и i латинского квадрата):

$$y_{\hat{o}}(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{kj}, \quad y_{\hat{o}}(i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ki}.$$

2. Вычисление оценок дисперсии функции отклика для выбранных уровней факторов:

$$\mu_2(j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [\hat{o}_o(j) - y_{kj}]^2, \quad \mu_2(i) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [\hat{o}_o(i) - y_{ki}]^2.$$

3. Прежде сравнения средних следует проверить однородность оценок дисперсии по критерию Фишера. Дисперсии расставляются так, чтобы значение критерия было больше единицы, например, при $\mu_2(j) > \mu_2(i)$ критерий $F = \mu_2(j) / \mu_2(i)$. Если однородность нарушена, то проводить сравнение средних неправомерно, следует устранить выявленное нарушение или отказаться от данного варианта проверки.

4. Если неоднородность дисперсий не обнаружена, то можно установить значимо или незначимо различаются средние значения функции отклика для двух значений факторов, используя критерий Стьюдента. Гипотеза H_0 соответствует утверждению $y_{\phi}(j) = y_{\phi}(i)$. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы выступает положительное значение случайной величины

$$T = [y_{\phi}(j) - y_{\phi}(i)] / [\mu_2(j)/n + \mu_2(i)/n]^{0,5}.$$

Здесь $\mu_2(j)/n$ и $\mu_2(i)/n$ дисперсии среднего значения случайной величины, которые, как известно, в n раз меньше дисперсии этой величины. Критерий T является случайной величиной, которая при справедливости гипотезы H_0 имеет распределение Стьюдента с $2n - 2$ степенями свободы.

Критическая область зависит от вида альтернативной гипотезы H_1 . Если H_1 соответствует $y_\phi(j) \neq y_\phi(i)$, то критическая область является двусторонней. Критическое значение $t_{кр}$ находится стандартным образом по заданной величине уровня значимости α и количеству степеней свободы. При $T > t_{кр}$ нулевая гипотеза отвергается, следовательно, фактор оказывает существенное влияние на функцию отклика.

Если H_1 соответствует $y_\phi(j) > y_\phi(i)$ или $y_\phi(i) > y_\phi(j)$, то критическая область будет правосторонней. В остальном проверка аналогична предыдущему случаю.

Во втором варианте рассматривается следующая ситуация:

– в точках плана проведены повторные опыты. Количество опытов в разных точках плана может различаться. Пусть m — количество всех опытов при значении фактора P_j ; q — при значении фактора P_i . Причем $m > 30$ и $q > 30$;

– результаты измерений функции отклика в различных опытах независимы.

В такой ситуации выборочные средние функции отклика распределены приближенно нормально, а оценки дисперсии являются достаточно хорошими приближениями к генеральным дисперсиям.

Порядок проверки гипотезы о значимости влияния фактора на уровнях j и i следующий.

Вычисляются средние значения функции отклика $y_\phi(j)$ и $y_\phi(i)$ по всем опытам при значениях фактора P_j и P_i . Затем рассчитываются оценки дисперсии функции отклика $\mu_2(j)$ и $\mu_2(i)$ для двух значений фактора.

Гипотезе H_0 соответствует утверждение $y_\phi(j) = y_\phi(i)$. Поэтому в качестве критерия можно взять величину

$$u = |y_\phi(j) - y_\phi(i)| / \{D_\phi(j)/m + D_\phi(i)/q\}^{0,5},$$

которая в случае справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (величина u является центрированной и нормированной). Проверка гипотез осуществляется аналогично случаям, рассмотренным выше, только вместо распределения Стьюдента применяется распределение стандартизованной нормальной величины.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дайте определение системы, подсистемы, внешней среды и связи в системах.
2. Как составляется математическая модель системы и в чем состоят ограничения первого и второго рода?
3. Перечислите основные принципы системного подхода и поясните их суть.
4. Укажите различия между детерминированными и вероятными, статическими и динамическими математическими моделями.
5. Изобразите в виде структурной схемы абстрактное представление технологического процесса и процесса конструирования РЭС.
6. Укажите назначение САПР и сформулируйте основные принципы ее построения.
7. Изобразите укрупненную структурную схему САПР.
8. Перечислите состав технических средств, входящих в РЭС различных типов, и укажите их назначение.
9. Конструкторские, технологические и эксплуатационные ошибки. Отказы. Типы отказов.
10. Резервирование. Виды. Назначение. Способы резервирования. Кратность резервирования.
11. Назовите необходимые данные для расчета надежности по постепенным отказам.
12. В чем состоит суть физического моделирования?
13. Разъясните содержание математического моделирования и вычислительного эксперимента.
14. Дайте определение формальным математическим моделям ЭВА.
15. На основании чего строятся физические (электрические, физико-топологические, технологические) математические модели РЭС. Характеристика резервирования как метода повышения надежности РЭС.
16. Оценка безотказности ЭВС при наличии постоянного резервирования.
17. Оценка безотказности ЭВС при наличии резервирования замещением.
18. Основные задачи оптимального резервирования.
19. Метод динамического программирования для решения задач оптимального резервирования.
20. Параметры в конструировании ЭВС и их вероятностный смысл.
21. Вероятностное описание независимых параметров.
22. Характеристики основных моделей законов распределения параметров: нормальная, равномерная и экспоненциальная модели.
23. Определение законов распределения параметров на основе опытных данных. Гистограммы — статистический аналог плотности распределения параметров.
24. Применение критериев согласия Пирсона для проверки гипотезы функции распределения $F(x)$.
25. Характеристика основных законов распределения времени безотказной работы элементов ЭВС.
26. Основные показатели надежности элементов и ЭВС.
27. Определение наработки до отказа по известным законам распределения.
28. Определение показателей безотказности ЭВС при различных законах распределения времени безотказной работы элементов.

29. Каковы задачи теории планирования эксперимента?
30. В чем разница между активным и пассивным экспериментом?
31. Что называется фактором и откликом?
32. Какой вид обычно имеют создаваемые модели?
33. Как строится матрица планирования эксперимента?
34. Что означают знаки + и – в матрицах планирования эксперимента?
35. Как выбирать значения факторов для проведения измерений?
36. Какую пользу приносит переход от натуральных значений факторов к кодированным?
37. Для чего проводятся параллельные опыты?
38. Как проверяется однородность дисперсий опытов и что нужно предпринять, если дисперсии оказались неоднородными?
39. Зачем нужно проверять значимость коэффициентов модели?
40. Для чего проверяется адекватность модели?
41. Что можно предпринять, если линейная модель окажется неадекватной?
42. Какие преимущества имеет ДФЭ перед ПФЭ?
43. Каков недостаток имеется у ДФЭ и как его можно уменьшить?
44. Как строится матрица планирования ДФЭ?
45. Что такое генерирующее соотношение?
46. Как выбирается правая часть генерирующего соотношения?
47. Что такое и как получить определяющий контраст?
48. Для чего используются определяющие контрасты?
49. Почему оценки коэффициентов модели получаются неточными?
50. Как найти число определяющих контрастов, зная число генерирующих соотношений?
51. Какую Функции ($F(x)$ или $W(x)$) обычно используют для проверки гипотезы о нормальном законе распределения?
52. Что является экспериментально полученным аналогом функции $W(x)$?
53. Как строится гистограмма?
54. Когда полезно немного удлинить диапазон значений, на котором строится гистограмма?
55. Какая величина служит для оценки степени расхождения гистограммы и графика функции $W(x)$?
56. Как найти теоретическую и экспериментальную вероятность попадания значения параметра n в заданный интервал?
57. Почему при нахождении P_i использовалась табличная функция, а не формула?
58. Если степень расхождения гистограммы и графика функции $W(x)$ будет возрастать, как будет изменяться значение χ^2 ?
59. Что означает равенство на единице площади всей гистограммы?
60. Зависит ли значение χ^2 от числа интервалов разбиения?
61. Метод имитационных воздействий. Применение. Принцип построения.
62. Использование имитационного воздействия.
63. Теория распознавания образов. Основные элементы.
64. Ошибка прогноза. Средняя ошибка прогноза. Определение.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Кофанов, Ю. Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭС : учеб. для ВУЗов / Ю.Н. Кофанов — М. : Радио и связь, 1991. — 359 с.
2. Норенков, И. П. САПР : Система автоматизированного проектирования : учеб. пособие для ВУЗов : в 9 кн. / И. П. Норенков. — М. : Высш. шк., 1987. — Кн. 1 : Принципы построения и структуры. — 123с.
3. Варламов, Р. Г. Компоновка радиоэлектронной аппаратуры / Р. Г. Варламов. — М. : Сов. радио, 1975. — 352 с.
4. Конструирование и расчет больших гибридных интегральных схем. Микросборка и аппаратуры на их основе / под ред. Б. Ф. Высоцкого. — М. : Радио и связь, 1981. — 216 с.
5. Микроэлектроника : учеб. пособие для ВТУЗов : в 9кн. /под ред. Л. А. Коледова. — М. : Высш. шк., 1987. — Кн. 5 : Качество и надежность интегральных микросхем / И. Я. Козырь. — 144 с.
6. Яншина, А. А. Теоретические основы конструирования, технология и надежности ЭВА : учеб. пособие для ВУЗов. — М. : Радио и связь, 1983. — 312 с.
7. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1969. — 576 с.
8. Зажигаев, Л. С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л. С. Зажигаев, А. А. Кишьяна, Ю. И. Романиков. — М. : Атомиздат, 1978. — 232 с.
9. Румшинский, Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента : справоч. рук. — М. : Наука, 1971. — 192 с.
10. Герасимович, А. И. Математическая статистика : учеб. пособие для инженерно-техн. и экон. специальностей ВТУЗов. — Минск. : Выш. шк., 1983. — 279 с.

Дополнительная

1. Закс, Л. Статистическое оценивание / Л. Закс. — М. : Статистика, 1976. — 598 с.
2. Герчук, Я. П. Графики в математико-статистическом анализе / Я. П. Герчук. — М. : Статистика, 1972. — 77 с.
3. Шиндовский, Э. Статистические методы управления качеством / Э. Шиндовский, О. Шюрц. — М. : Мир, 1976. — 598 с.
4. Львович, А. Я. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА : учеб. пособие для ВУЗов / А. Я. Львович, В. Н. Фролов. — М. : Радио и связь, 1986. — 192 с.

5. Адлер, К. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / К. П. Адлер, Е. В. Маркова, Е. В. Грановский. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1976. — 279 с.
6. Собаль, И. М. Метод Монте-Карло / И. М. Собаль. — 4-е изд., доп. — М. : Наука, 1985. — 78 с.
7. Фомин, А. В. Допуски в радиоэлектронной аппаратуре / А. В. Фомин, В. Ф. Борисов, В. В. Чермощенский. — М. : Сов. радио, 1973. — 129 с.
8. Надежность в технике. Основные понятия, термины и определения : ГОСТ 27002–89. — Введ. 15.11.89. — М. : Ин-т машиноведения АН СССР; Межотраслевой научн.-техн. Комплекс «Надежность машин»; Гос. ком. СССР по упр. качеством продукции и стандартам, 1989.
9. Надежность и эффективность в технике : справ. : в 10 т. **Методология. Организация. Терминология** / под ред. А. И. Рембезы. — М. : Машиностроение, 1986. — 224 с.
10. Беляев, Ю. К. Надежность технических систем : справ. \ Ю. К. Беляев [и др.]; под ред. И. Я. Ушакова. — М. : Радио и связь, 1985. — 608 с.
11. Надежность и эффективность в технике : справ. : в 10 т. / редкол.: В. С. Адуевский [и др.]. — М. : Машиностроение, 1987. — Т 2 : Математические методы в теории надежности и эффективности / под ред. Б. В. Гнеденко. — 280 с.
12. Широков, А. М. Надежность радиоэлектронных устройств : учеб. пособие для ВУЗов / А. М. Широков. — М. : Высш. шк., 1972. — 272 с.
13. Шишонак, Н. А. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники / Н. А. Шишонак, В. Ф. Репкин, Л. Л. Барвенский; под ред. Н. А. Шишонка. — М. : Сов. радио, 1964. — 552 с.
14. Боровиков, С. М. Надежность радиоэлектронных устройств: учеб. пособие для студентов радиоэлектронных специальностей / С. М. Боровиков. — М. : БГУИР, 1997. — 80 с.
15. Улинич, Р. Б. Практическое обеспечение надежности РЭА при проектировании / Р. Б. Улинич. — М. : Радио и связь, 1985. — 112 с.
16. Чернышев, А. А. Основы надежности полупроводниковых приборов и интегральных микросхем / А. А. Чернышев. — М. : Радио и связь, 1988. — 256 с.
17. Прогнозирование количественных характеристик процессов / Ю. В. Чув [и др.]. — М. : Сов. радио, 1975. — 398 с.
18. Каскаров, Д. В. Прогнозирование технического состояния надежности радиоэлектронной аппаратуры / Д. В. Каскаров, Т. А. Голенкевич, А. В. Мозгалевский. — М. : Сов. радио, 1974. — 222 с.
19. Боровиков, С. М. Результаты исследования эффективности некоторых алгоритмов индивидуального прогнозирования метода пороговой логики / С. М. Боровиков // **межвузовской. сб. "Испытание и защита РЭА"** — М. : ВЗМИ, 1982.
20. Акулич, Е. Л. Математическое программирование / Е. Л. Акулич. — М. : Высш. шк., 1993. — 336 с.

21. Фурунжиров, Р. И. Вычислительная техника и ее применение : учеб. пособие для ВУЗов / Р. И. Фурунжиров. — М. : Высш. шк., 1975. — 400 с.

22. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности : лаборатор. практикум для студентов специальности «Проектирование и производство радиоэлектронных средств» : в 2 ч. / под ред. С. М. Боровикова. — М. : БГУИР, 1997. — Ч. 2. — 65 с.

23. Цветков, А. Ф. Вероятностное моделирование : учеб. пособие / А. Ф. Цветков. — Рязань : РРТИ, 1989. — 64 с.

24. Асатурян, В. И. Теория планирования эксперимента : учеб. пособие для ВУЗов / В. И. Асатурян. — Радио и связь, 1983. — 248 с.

25. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА : лаборатор. работы / С. М. Боровиков [и др.]. — Минск : МРТИ, 1987. — 68 с.

26. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. — Минск : Высш. шк., 1983. — 279 с.

27. Ермаков, С. М. Математическая теория оптимального эксперимента : учеб. пособие / С. М. Ермаков, А. А. Миглявский. — М. : Наука, 1987. — 320 с.

28. Микулик, Н. А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике : справоч. пособие / Н. А. Микулик, Г. Н. Рейзина. — Минск : Высш. шк., 1991. — 184 с.

29. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум) : учеб. пособие / В. П. Бородюк [и др.]; под ред. Г. Н. Круга. — М. : Высш. шк., 1983. — 216 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ	5
ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	6
ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	7
ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ	7
ТЕМА 1. РОЛЬ И МЕСТО ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ПРОИЗВОДСТВА (ТПП) В СТРУКТУРЕ ПРИБОРОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ	10
1.1. Уровни и этапы проектирования	12
1.2. Этапы проектирования	13
1.3. Методы проектирования	14
1.4. Требования, предъявляемые к процессу проектирования. Схема процесса проектирования	16
ТЕМА 2. ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К РЭС. ХАРАКТЕРИСТИКА УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ РЭС. КЛИМАТИЧЕСКОЕ ИСПОЛНЕНИЕ РЭС. КАТЕГОРИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИЗДЕЛИЙ РЭС	19
2.1. Механические факторы	25
2.2. Общие технические требования к радиоэлектронным средствам	26
ТЕМА 3. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОЕКТИРОВАНИЮ И ПРОИЗВОДСТВУ РЭС. СЛОЖНОСТЬ РЭС. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. РАДИОЭЛЕКТРОННОЕ СРЕДСТВО КАК МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. ПРИЗНАКИ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА	32
ТЕМА 4. СИСТЕМНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ РЭС	38
4.1. Формальные и физические математические модели	41
4.2. Требования, предъявляемые к математическим моделям	43
4.3. Математические модели электронных схем ЭВА	44
4.4. Математические модели монтажного пространства	48
ТЕМА 5. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ	49
5.1. Математические модели законов распределения	52
5.2. Определение законов распределения параметров на основе опытных данных	67
ТЕМА 6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА РЭС В ВИДЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	73
6.1. Общая структура	73
6.2. Простейший поток	74
6.3. Число требований в заданном интервале	76
6.4. Интервал между двумя последовательными требованиями	78
6.5. Время обслуживания и время ожидания	78
6.6. Время ожидания требований в очереди	79
6.7. Теория массового обслуживания в производственных задачах	79
6.8. Процесс производства РЭА на предприятии как сложная система, функционирующая в условиях случайных возмущений	84

ТЕМА 7. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СТАБИЛЬНОСТИ ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЭС И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТОЧНОСТИ	85
7.1. Анализ точности при конструировании и разработке технологий	85
7.2. Анализ стабильности конструкций и устойчивости технологических процессов	92
7.3. Анализ закономерностей изменения свойств конструкции РЭА при длительном функционировании	94
7.4. Расчет функциональной точности РЭС	104
7.5. Расчет технологической точности производства РЭС	107
ТЕМА 8. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РЭС. РЕЗЕРВИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РЭС	109
8.1. Основные термины и определения	109
8.2. Показатели надежности	112
ТЕМА 9. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И КАЧЕСТВА РЭА	169
9.1. Прогнозирование качества и состояния как метод повышения эксплуатационных показателей РЭА	169
9.2. Основные направления развития прогнозирования	171
9.3. Методы распознавания образов и их использование при прогнозировании качества РЭА	172
ТЕМА 10. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ	180
10.1. Классические методы поиска экстремума	180
10.2. Регулярные методы поиска экстремума	186
10.3. Методы случайного поиска	192
10.4. Методы математического программирования	196
ТЕМА 11. ТЕОРИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА	208
11.1. Основные понятия	208
11.2. Критерии оптимальности и типы планов	214
11.3. Планы для решения задач оптимизации	217
11.4. Обработка результатов эксперимента	227
11.5. Планы для описания поверхности отклика	233
11.6. Планы для оценки влияния факторов	246
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	253
ЛИТЕРАТУРА	255

Учебное издание

АЛЕКСЕЕВА Татьяна Анатольевна

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ РЭС**

Учебно-методический комплекс для студентов специальности
1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование РЭС»
очной и заочной форм обучения

Редактор *В. В. Ржеусская*
Дизайн обложки

Подписано в печать 2014. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 9,28. Уч.-изд. л. 8,13. Тираж 30 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.