

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

# ФИЗИКА

В двух частях

Часть 1

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов  
технических высших учебных заведений*

Новополоцк  
ПГУ  
2009

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73  
Ф50

АВТОРЫ:

С. А. ВАБИЩЕВИЧ, В. А. ГРУЗДЕВ, Г. А. ДУБЧЁНОК,  
В. Г. ЗАЛЕССКИЙ, Г. М. МАКАРЕНКО

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. физики БГТУ И.И. НАРКЕВИЧ;  
канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. физики БНТУ П.Г. КУЖИР

Ф50            **Физика** : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / С. А. Вабищевич [и др.]. –  
Новополоцк: ПГУ, 2009. – 272 с.  
ISBN 978-985-418-933-8.

Включает три модуля: «Механика материальной точки», «Механика материальных тел. Модель системы материальных точек», «Молекулярно-кинетическая теория. Основы термодинамики». Объединение содержательного материала этих модулей в одну книгу обусловлено рабочей программой дисциплины на один семестр, а также тем, что в основу модуля «Молекулярно-кинетическая теория. Основы термодинамики» положена модель классической механики движения частиц газа.

Предназначен для студентов технических высших учебных заведений.

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-418-933-8 (Ч. 1)  
ISBN 978-985-418-932-1

© УО «Полоцкий государственный университет», 2009

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 1. МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	8
УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	10
1.1. Краткое содержание теоретического материала.....	11
1.2. Методические указания к лекционным занятиям.....	20
1.3. Методические указания к практическим занятиям.....	21
1.4. Примеры решения задач.....	24
1.5. Задачи для самостоятельного решения.....	32
УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	34
2.1. Краткое содержание теоретического материала.....	35
2.2. Методические указания к лекционным занятиям.....	49
2.3. Методические указания к практическим занятиям.....	50
2.4. Примеры решения задач.....	52
2.5. Задачи для самостоятельного решения.....	67
УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	73
3.1. Краткое содержание теоретического материала.....	75
3.2. Методические указания к лекционным занятиям.....	84
3.3. Методические указания к практическим занятиям.....	85
3.4. Примеры решения задач.....	86
3.5. Задачи для самостоятельного решения.....	95
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 2. МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.....	98
УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. СТАТИКА.....	101
1.1. Краткое содержание теоретического материала.....	102
1.2. Методические указания к лекционным занятиям.....	107
1.3. Методические указания к практическим занятиям.....	108
1.4. Примеры решения задач.....	109
1.5. Задачи для самостоятельного решения.....	112
УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	114
2.1. Краткое содержание теоретического материала.....	115
2.2. Методические указания к лекционным занятиям.....	127
2.3. Методические указания к практическим занятиям.....	128
2.4. Примеры решения задач.....	129
2.5. Задачи для самостоятельного решения.....	142
УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	145
3.1. Краткое содержание теоретического материала.....	146
3.2. Методические указания к лекционным занятиям.....	150
3.3. Методические указания к практическим занятиям.....	150
3.4. Примеры решения задач.....	151
3.5. Задачи для самостоятельного решения.....	157

УЧЕБНЫЙ БЛОК 4. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ .....	158
4.1. Краткое содержание теоретического материала .....	158
4.2. Методические указания к лекционным занятиям .....	165
4.3. Методические указания к практическим занятиям.....	165
4.4. Примеры решения задач .....	166
4.5. Задачи для самостоятельного решения .....	170
УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 3. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ .....	172
УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. ЗАКОНЫ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА .....	174
1.1. Краткое содержание теоретического материала .....	175
1.2. Методические указания к лекционным материалам.....	190
1.3. Методические указания к практическим занятиям.....	191
1.4. Примеры решения задач .....	193
1.5. Задачи для самостоятельного решения .....	206
УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА.....	209
2.1. Краткое содержание теоретического материала .....	210
2.2. Методические указания к лекционным материалам.....	221
2.3. Методические указания к практическим занятиям.....	222
2.4. Примеры решения задач .....	223
2.5. Задачи для самостоятельного решения .....	232
УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. ТЕРМОДИНАМИКА. АГРЕГАТНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА .....	234
3.1. Краткое содержание теоретического материала .....	235
3.2. Методические указания к лекционным материалам.....	253
3.3. Методические указания к практическим занятиям.....	254
3.4. Примеры решения задач .....	256
3.5. Задачи для самостоятельного решения .....	263
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	265
ЛИТЕРАТУРА .....	271

## ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс разрабатывался как система взаимосвязанных и взаимодополняющих средств и способов обучения, проектируемых в соответствии с учебной программой и выбранным дидактическим процессом, необходимых и достаточных для реализации требований образовательного стандарта. Предполагается, что УМК по учебной дисциплине «Физика» будет способствовать системному решению следующих **задач**:

- контроль исходного уровня подготовки обучающихся физике;
- выбор необходимых, в том числе обусловленных исходным уровнем подготовки технологий организации процесса обучения;
- организация перманентного контроля результатов обучения, необходимого для своевременной корректировки процесса обучения (обратная связь) и обеспечения требуемых результатов конечного контроля подготовки студента.

В данный УМК заложены следующие **функции**:

- методическое обеспечение курса физики;
- предоставление дидактических средств, объединенных конечными целями обучения;
- адаптация содержания курса физики к образовательному стандарту специальности;
- предоставление обучающимся возможности приобретения новых знаний и развития новых навыков и умений;
- развитие творческой активности и потенциала студента.

Основой УМК является обобщенный для технических специальностей стандарт по курсу физики как необходимый уровень естественнонаучной подготовки к изучению общеобразовательных и специальных дисциплин.

Для **студентов** УМК предлагает:

- рекомендации по выбору учебников и методических пособий, необходимых для достижения целей обучения при минимизированном бюджете учебного времени;
- рекомендации по самоорганизации и содержанию самостоятельной работы над курсом как одной из самых эффективных форм обучения новым навыкам и умениям;
- методические материалы для различных форм учебного процесса;
- перечень требований для самооценки и выбор уровня обучения, что необходимо для реализации индивидуальной «траектории» обучения.

Для **преподавателей** учебно-методический комплекс будет полезным, во-первых, при адаптации курса физики к учебным программам специальных дисциплин, на чем обычно настаивают выпускающие кафедры, но не удалением «ненужных» разделов и тем, а вариацией уровня изучения

тех или иных разделов при сохранении целостности курса физики как естественнонаучной дисциплины. Во-вторых, УМК избавляет от значительной рутинной работы по подготовке материалов контроля. И, в-третьих, позволяет унифицировать оценку знаний, умений и навыков при контроле, проводимом на разных специальностях и различными преподавателями.

Обычно курс физики для технических специальностей изучается в течение двух – трех семестров, поэтому УМК построен по модульно-блочному принципу. Учебный модуль представляет собой единицу курса, единство которой основано на используемой физической модели или на совокупности физических явлений, относимых к единому классу. В свою очередь, учебный модуль состоит из учебных блоков, формируемых на тех же принципах, но с большей детализацией. Как и УМК, каждый модуль и блок представляют содержание в виде завершеного элемента в структуре учебного курса; содержат собственные цели обучения; конкретное технологическое и методическое обеспечение обучения; предусматривают текущий и итоговый контроль наряду с элементами самоконтроля.

Настоящее издание охватывает три модуля и содержит учебную программу к этим модулям; перечень рекомендуемой литературы с указанием рекомендуемых разделов; перечень требований к знаниям, умениям и навыкам; краткое содержание теоретического материала; примеры решения типовых задач; задачи для самостоятельного тренинга, некоторые справочные таблицы.

Учебно-методический комплекс разработан коллективом преподавателей кафедры физики Полоцкого государственного университета в составе профессора Г.М. Макаренко, доцентов С.А. Вабищевича и В.Г. Залесского, старшего преподавателя Г.А. Дубченка, под общим руководством профессора В.А. Груздева.

### Методические указания для студентов

При изучении курса физики рекомендуется использовать настоящий учебно-методический комплекс следующим образом:

1. По заданной теме необходимо найти соответствующий *модуль* и *блок* учебного материала.

2. Прочитать *краткое содержание* теоретического материала блока, выписать основные (базовые) формулы, к которым относятся формулы-определения и формулы – физические законы. Например,  $\vec{p} = m\vec{v}$  (импульс тела) – формула-определение;  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  (мгновенная скорость) – формула-

определение;  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$  (проекция ускорения на ось OX) – формула-определение. Но  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  – закон;  $F_x = -kx$  – закон.

3. Выучить (запомнить) *базовые формулы*. Методика запоминания может быть различной, поэтому целесообразно пользоваться наиболее эффективной (привычной) для студента.

4. Прочитать раздел «Студент должен знать». Оценить *соответствие* своих знаний требованиям. При необходимости вернуться к «Краткому содержанию» для повторного прочтения либо обратиться к учебнику или учебному пособию.

5. Обратиться к разделу «Вопросы для самоконтроля». Ответить на вопросы. Если возникают затруднения с ответами, вернуться к разделу «Краткое содержание» или к рекомендуемой литературе.

6. После ответов на вопросы для самоконтроля перейти к разделу «Примеры решения задач». Студенты должны изучить приведенные в разделе *примеры решения типовых задач* до полного их понимания.

7. Обратиться к разделу «Студент должен уметь». Проверить соответствие своих умений предъявляемым требованиям. Одним из способов проверки может быть *составление алгоритма* ваших действий для определения (нахождения) требуемых величин по заданным. В случае возникновения затруднений надо обратиться к примерам решения типовых задач или за консультацией к преподавателю.

8. Приступить к *решению задач* из раздела «Задачи для самостоятельного решения». При этом рекомендуется следующий порядок действия:

8.1. Сконцентрируйте заданные величины, переведите их в систему СИ.

8.2. Сделайте необходимый *рисунок*, поясняющий физическую суть задачи.

8.3. Попробуйте записать предварительный ответ, т.е. формулу (уравнение) для искомой величины. Если в этой формуле (уравнении) содержатся неизвестные (не данные в условии) величины, то запишите известные вам формулы для этих неизвестных величин. Полученная система уравнений позволяет найти искомую в задаче величину.

8.4. Получите *решение задачи* в общем виде (без подстановки конкретных значений величин).

8.5. Проверьте полученный ответ *методом анализа размерностей*. После этого можно находить значение искомой величины.

9. После приобретения требуемых знаний и навыков можно приступать к *контрольному тестированию* (по рекомендации преподавателя) успешности обучения в компьютерном классе или выполнению контрольных заданий. Результаты тестирования или выполнения контрольных заданий сформируют *рейтинговую оценку* ваших знаний.

## УЕБНЫЙ МОДУЛЬ 1. МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В данном учебном модуле рассматриваются основные законы, закономерности и принципы классической механики в упрощенной модели объектов – модели «материальной точки». Эта модель облегчает изучение базовых понятий и законов механики, ограничивая их рассмотрением только *поступательного движения*. В то же время модель «материальной точки» позволяет сформировать достаточную базу знаний для описания новых видов движения, присущих системам материальных точек, образующих жидкие и твердые тела: *течение жидкости* и *вращательное движение* твердого тела, *статическое состояние* твердых тел.

Модуль содержит три учебных блока:

1. Кинематика материальной точки.
2. Динамика материальной точки.
3. Колебательное движение материальной точки.

В *первом блоке* рассматриваются общепринятые кинематические параметры поступательного движения и связь между ними. Используются элементы дифференциального и интегрального исчисления для определения параметров поступательного движения. Рассматриваются различные виды поступательного движения и основные закономерности, относящиеся к ним. Поясняются принципы суперпозиции и относительности движения.

Во *втором блоке* рассматриваются контактные и неконтактные взаимодействия материальных точек на основе законов Ньютона. Вводятся понятие системы материальных точек и механические параметры системы. Рассматриваются виды механической энергии и принцип эквивалентности работы и энергии, законы сохранения энергии и импульса материальных точек и их систем.

В *третьем блоке* рассматриваются колебания материальной точки под действием упругих (квазиупругих) сил, виды колебательных движений. На основе принципа суперпозиции движений демонстрируется сложение колебаний при различных условиях. Вводятся понятия поляризации, интерференции, когерентности и векторных диаграмм.

Для приобретения запланированных в модуле навыков в каждом учебном блоке даны примеры решения типовых задач.



### Учебно-методическая структура модуля

УМ 1. Механика материальной точки		
Учебный блок 1. Кинематика материальной точки	Учебный блок 2. Динамика материальной точки	Учебный блок 3. Колебательное движение материальной точки
<ul style="list-style-type: none"> <li>– системы координат;</li> <li>– кинематические характеристики движения;</li> <li>– средняя и мгновенная скорости;</li> <li>– среднее и мгновенное ускорения;</li> <li>– движение по окружности;</li> <li>– принципы относительности и суперпозиции движений</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– законы Ньютона;</li> <li>– силы в природе;</li> <li>– центр масс системы;</li> <li>– работа и энергия;</li> <li>– поле сил;</li> <li>– взаимодействие материальных точек</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– две формы уравнения колебаний;</li> <li>– энергия при колебательном движении;</li> <li>– затухающие колебания;</li> <li>– вынужденные колебания;</li> <li>– резонанс;</li> <li>– сложение колебаний</li> </ul>

### Методическая программа модуля

Тема занятия	Цель занятия	Вид занятия	Часы
1. Механика материальной точки	формирование новых знаний	вводная лекция	1
2. Кинематика движения материальной точки	формирование новых знаний	лекция	1
3. Прямолинейное движение материальной точки	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
4. Кинематика движения материальной точки по окружности и криволинейного движения	формирование новых знаний	лекция	2
5. Криволинейное движение материальной точки и движение по окружности	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
6. Динамика поступательного движения. Основные понятия и законы	формирование новых знаний	лекция	2
7. Силы в природе. Законы Ньютона. Импульс силы, импульс материальной точки	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
8. Законы сохранения в механике материальной точки	формирование новых знаний	лекция	2
9. Работа и энергия в механике. Силовое поле	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
10. Колебательное движение материальной точки	формирование новых знаний	лекция	2
11. Две формы уравнения колебаний	углубление и систематизация навыков	практическое занятие	2
12. Виды колебаний. Сложение колебаний. Резонанс	формирование новых знаний	лекция	2
13. Механика материальной точки	формирование новых знаний	лабораторное занятие	4
14. Вынужденные и затухающие колебания. Сложение колебаний	формирование новых знаний	практическое занятие	1
15. Механика материальной точки	занятие-проверка результатов обучения	итоговое занятие	1

## УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Кинематика** – раздел механики, в котором изучается движение тел, но не рассматриваются причины, вызывающие это движение.

В настоящем учебном блоке рассматриваются закономерности поступательного движения тел с использованием модели материальной точки (м.т.). Движение тела можно считать поступательным, если все элементы (точки) тела движутся по одинаковым траекториям, т.е. траекториям, которые могут быть полностью совмещены соответствующим параллельным переносом точек траекторий. Так как одинаковые траектории элементов тела могут быть получены при одинаковых закономерностях их движения, тело можно представить безразмерной точкой, обладающей массой всего тела (материальной точкой).

Для описания движения используются *системы координат*. Программа данного учебного блока предусматривает получение навыков использования *прямоугольной* (декартовой) и *сферической* систем координат.

*Критерием* выбора той или иной системы координат являются наибольшая простота получаемых уравнений движения и наименьшее их количество.

Для успешного изучения учебного материала данного блока студент должен

**иметь представление:**

- об основных кинематических характеристиках движения;

**обладать навыками:**

- использования прямоугольной системы координат;
- сложения и вычитания векторов;
- дифференцирования и интегрирования простейших функций.

### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Система сферических и прямоугольных координат. Связь систем координат	лекция, самост.	[7]
Траектория, путь, перемещение, уравнение траектории	самост.	[6]
Скорость: средняя, мгновенная	самост.	[8]
Ускорение: среднее, мгновенное	самост.	[9]
Движение по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение. Нормальное, тангенциальное, полное ускорение. Криволинейное движение.	лекция	[5]
Принцип относительности и суперпозиции движений. Сложение скоростей и ускорений	лекция	[10]

## Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– способы задания положения материальной точки в декартовой и сферической системах координат;</li> <li>– основные кинематические величины, характеризующие движение материальной точки: траектория, перемещение, пройденный путь, скорость и ускорение материальной точки;</li> <li>– основные кинематические величины, характеризующие движение материальной точки по окружности: угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение;</li> <li>– связь между линейными и угловыми кинематическими величинами;</li> <li>– принципы относительности и суперпозиции движений: сложение перемещений, скоростей, ускорений.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– определять координаты точки по ее радиус-вектору;</li> <li>– определять радиус-вектор точки по ее координатам;</li> <li>– находить модуль и направление векторов скорости и ускорения материальной точки по известной зависимости от времени ее радиус-вектора;</li> <li>– рассчитывать модуль перемещения и пройденный путь;</li> <li>– получать уравнение траектории движения материальной точки;</li> <li>– использовать принцип независимости движений при решении задач по кинематике материальной точки;</li> <li>– находить тангенциальное, нормальное, полное ускорения материальной точки и радиус кривизны траектории при криволинейном движении;</li> <li>– находить угловую скорость, угловое, нормальное, тангенциальное и полное ускорения при круговом движении по зависимости от времени угла поворота радиус-вектора</li> </ul>

### 1.1. Краткое содержание теоретического материала

Положение материальной точки в пространстве в данный момент времени задается с использованием *системы координат* относительно некоторой *точки* (тела) *отсчета*, которая является началом системы координат. Направленный отрезок прямой, соединяющий точку отсчета  $O$  (рис. 1.1) и материальную точку (м.т.), называется *радиус-вектором* ( $\vec{r}$ ). Для описания положения м.т. используют системы координат, в частности

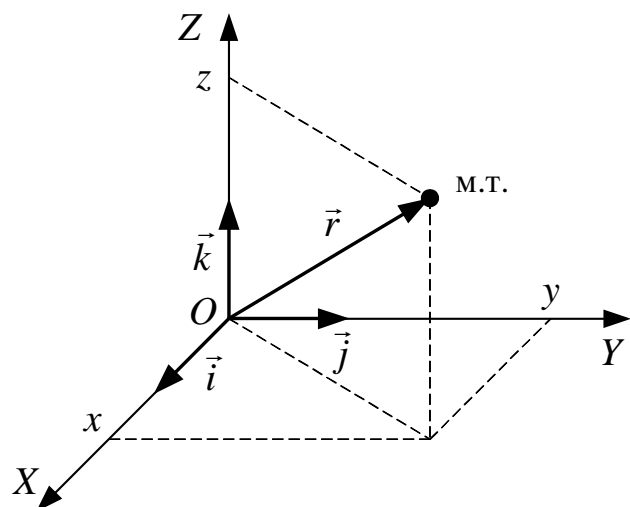


Рис. 1.1

прямоугольную (см. рис. 1.1). В этой системе проекции вектора  $\vec{r}$  на взаимно перпендикулярные оси координат  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  имеют длины  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно. Если выбраны (заданы) орты (единичные векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) системы координат, то радиус-вектор имеет направление

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1)$$

Модуль вектора  $\vec{r}$  определяется формулой

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

В ряде случаев, например, при движении м.т. по сферической поверхности, удобно использовать сферическую систему координат, в которой параметрами являются модуль радиус-вектора  $r$ , азимутальный угол  $\beta$  и полярный угол  $\alpha$  (рис. 1.2).

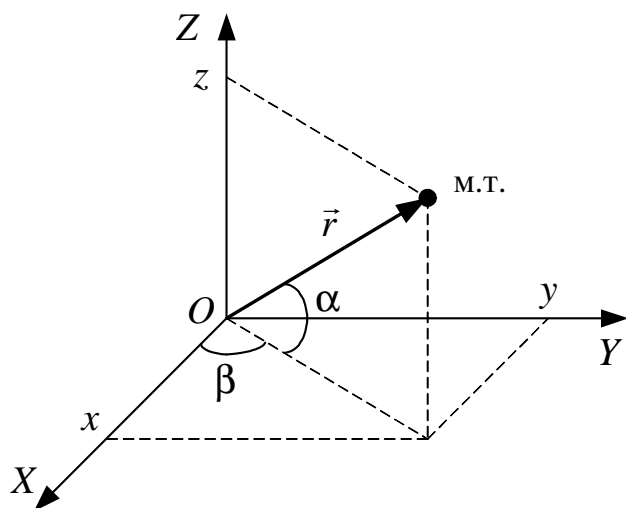


Рис. 1.2

При этом параметры прямоугольной и сферической систем координат связаны соотношениями (2), (3) и (4).

$$\beta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \quad (3)$$

или

$$\alpha = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (4)$$

Таким образом, в любой выбранной системе координат достаточно трех параметров для описания положения материальной точки. Сферическая система координат в дальнейшем будет привлекаться только в тех случаях, где она более удобна, чем прямоугольная.

При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются со временем, а сама материальная точка (конец вектора  $\vec{r}$ ) описывает в пространстве линию, которая называется ее *траекторией*.

**Законом движения** и одновременно *уравнением траектории в векторной форме* называется зависимость радиус-вектора материальной точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (5)$$

Это уравнение эквивалентно трем уравнениям для координат

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (6)$$

Для получения уравнения траектории материальной точки в явном виде из равенств (6) необходимо исключить время  $t$ . По форме траектории движение бывает *прямолинейным* и *криволинейным*. Если при движении материальная точка находится все время в одной плоскости, то такое движение называется *плоским*. При этом можно использовать двухмерную систему координат, например,  $XOY$ ,  $XOZ$  или  $ZOY$ .

**Вектор перемещения и отрезок пути материальной точки.**

Скалярную величину  $\Delta S$ , равную длине траектории, описанной точкой за данный промежуток времени, называют *отрезком пути* материальной точки (*путем*). Путь положителен всегда и в процессе движения может только возрастать.

Пусть за время  $\Delta t$  материальная точка переместилась из точки  $M$  в точку  $M'$ , пройдя вдоль траектории отрезок пути  $\Delta S$  (рис. 1.3). Вектор  $\Delta \vec{r}$ , проведенный из начальной точки  $M$  в конечную точку  $M'$ , называется *вектором перемещения* материальной точки за время  $\Delta t$ ,

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

или

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}, \quad (7)$$

где  $\Delta x = x' - x$ ;  $\Delta y = y' - y$ ;  $\Delta z = z' - z$ .

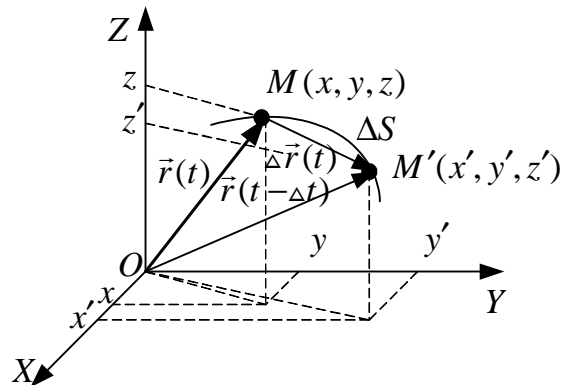


Рис. 1.3

Из рис. 1.3 видно, что при криволинейном движении отрезок пути  $\Delta S$  не равен величине вектора перемещения:

$$\Delta \vec{r} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

*Вектором средней скорости* за время  $\Delta t$  называется отношение вектора перемещения материальной точки ко времени, за которое оно совершено

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} = \langle v_x \rangle \vec{i} + \langle v_y \rangle \vec{j} + \langle v_z \rangle \vec{k}. \quad (8)$$

Направление вектора  $\langle \vec{v} \rangle$  совпадает с вектором  $\Delta \vec{r}$  (см. рис. 1.3), а его модуль

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \sqrt{\langle v_x \rangle^2 + \langle v_y \rangle^2 + \langle v_z \rangle^2} = \sqrt{\left\{ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right\}^2 + \left\{ \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\}^2 + \left\{ \frac{\Delta z}{\Delta t} \right\}^2}. \quad (9)$$

Средней путевой скоростью за время  $\Delta t$  называется отношение отрезка пути  $\Delta S$  к  $\Delta t$ :

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (10)$$

Средняя путевая скорость является *скалярной* величиной.

Так как  $\Delta S = |\Delta \vec{r}|$  только в случае движения с неизменной по направлению скоростью, то в общем случае средняя путевая скорость не совпадает с модулем вектора средней скорости:  $v_{cp} \neq |\langle \vec{v} \rangle|$ .

Вектор скорости  $\vec{v}(t)$  материальной точки (мгновенная скорость) в данный момент времени  $t$  определяется как предел, к которому стремится вектор средней скорости  $\langle \vec{v} \rangle$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$  при безграничном уменьшении промежутка времени  $\Delta t$ :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (11)$$

где  $d\vec{r}$  – вектор перемещения материальной точки за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ .

Заметим, что при  $\Delta t \rightarrow 0$  вектор  $\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{r}$  и в любой момент времени направлен по касательной к траектории движения материальной точки, а по абсолютной величине

$$|d\vec{r}| = dS; \quad (12)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} \right\} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (13)$$

где проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (14)$$

а модуль вектора скорости

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^2 + \left\{ \frac{dy}{dt} \right\}^2 + \left\{ \frac{dz}{dt} \right\}^2}. \quad (15)$$

Таким образом, вектор мгновенной скорости  $\vec{v}(t)$  материальной точки (линейная скорость) направлен по касательной к траектории в сторону движения, его проекции на оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  определяются формулами (14), а абсолютная величина – выражением (15).

Модуль вектора мгновенной скорости (используя (12) также можно определить с помощью выражения

$$v = |\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}, \quad (16)$$

т.е. взяв производную от перемещения по времени.

Пусть материальная точка, перемещаясь по своей траектории (рис. 1.4), находилась в момент времени  $t$  в точке  $M$ , а в момент времени  $t + \Delta t$  – в точке  $M'$ . Векторы скорости  $\vec{v}(t)$  и  $\vec{v}(t + \Delta t)$  в точках  $M$  и  $M'$  направлены по касательным к траектории. Поскольку движение материальной точки криволинейное, то направления

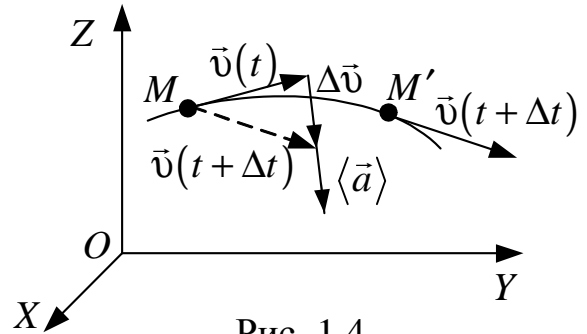


Рис. 1.4

и  $\vec{v}(t + \Delta t)$  не совпадают. Перенесем вектор  $\vec{v}(t + \Delta t)$ , не изменяя его направления, в точку  $M$  и соединим вектором  $\Delta\vec{v}$  конец вектора  $\vec{v}(t)$  с концом перенесенного вектора  $\vec{v}(t + \Delta t)$ :

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t). \quad (17)$$

*Вектором среднего ускорения* за время  $\Delta t$  называют отношение приращения вектора скорости  $\Delta\vec{v}$  ко времени, за которое приращение произошло

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (18)$$

Направление вектора  $\langle \vec{a} \rangle$  совпадает с направлением  $\Delta\vec{v}$  (см. рис. 1.4).

Выражение (18) при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, определяет *вектор ускорения* материальной точки в момент времени  $t$  (мгновенное ускорение)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (19)$$

где  $d\vec{v}$  – приращение вектора скорости за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ .

Выражение (19) можно записать в виде

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (20)$$

Следовательно, проекции вектора ускорения на координатные оси

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad (21)$$

а модуль вектора ускорения

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left\{\frac{dv_x}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{dv_y}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{dv_z}{dt}\right\}^2}. \quad (22)$$

Следует отметить, что понятие, аналогичное физической величине  $v_{cp}$  (см. формулу 10), для ускорения не используется. Если речь идет о среднем ускорении, то имеется в виду *вектор среднего ускорения*  $\langle \vec{a} \rangle$  (см. формулу (18)).

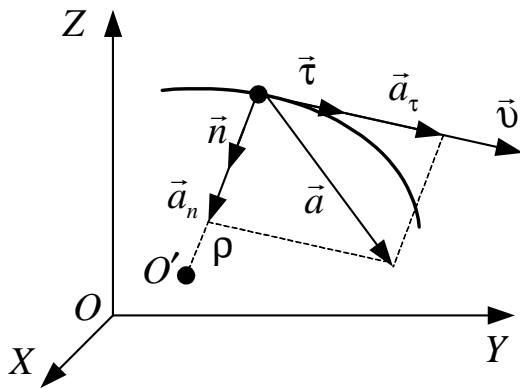


Рис. 1.5

Если движение материальной точки криволинейное, то вектор ускорения  $\vec{a}$  всегда можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1.5)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad (23)$$

где  $\vec{a}_n$  – *нормальное* (или *центростремительное*) и  $\vec{a}_\tau$  – *тангенциальное* (или *касательное*) ускорения материальной точки,

$\vec{a}$  – полное ускорение материальной точки. Вектор  $\vec{a}_n$  всегда направлен к центру кривизны траектории  $O'$  в точке  $M$ , а вектор  $\vec{a}_\tau$  лежит на касательной к траектории в точке  $M$  и может быть направлен как в сторону движения, так и в противоположную сторону. Такое разложение вектора ускорения  $\vec{a}$  часто необходимо в связи с тем, что вектор скорости материальной точки  $\vec{v}$  может изменяться как по направлению, так и по модулю. Нормальное ускорение  $\vec{a}_n$  характеризует быстроту изменения направления вектора скорости материальной точки. Тангенциальное ускорение  $\vec{a}_\tau$  характеризует быстроту изменения модуля скорости материальной точки.

Можно показать, что вектора нормального  $\vec{a}_n$  и тангенциального  $\vec{a}_\tau$  ускорения определяются соотношениями

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = a_n \vec{n}; \quad (24)$$



$$\vec{a}_\tau = \frac{d\nu}{dt} \vec{\tau} = a_\tau \vec{\tau}, \quad (25)$$

где  $a_n = |\vec{a}_n|$ ,  $a_\tau = |\vec{a}_\tau|$  – модули векторов нормального и тангенциального ускорения соответственно,  $\nu = |\vec{\nu}|$  – модуль вектора скорости материальной точки;  $\rho$  – радиус кривизны траектории в данный момент времени,  $\vec{\tau}$  – единичный вектор, направленный по касательной в данной точке траектории,  $\vec{n}$  – единичный вектор, перпендикулярный к касательной в данной точке траектории.

Из (24) – (25) видно, что  $a_n \geq 0$  (причем  $a_n = 0$  при прямолинейном движении:  $\rho \rightarrow \infty$ ),  $a_\tau > 0$  при ускоренном движении материальной точки (как показано на рис. 1.5.),  $a_\tau < 0$ , если материальная точка движется замедленно, и  $a_\tau = 0$  при равномерном движении.

Из (23) и рис. 1.5 следует, что модули векторов  $\vec{a}, \vec{a}_n, \vec{a}_\tau$  связаны между собой соотношением

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (26)$$

Понятия скорости и ускорения являются относительными и зависят от выбора системы координат. Пусть имеется неподвижная система отсчета  $K$  и система отсчета  $K'$ , движущаяся поступательно (углы между осями  $OX$  и  $O'X'$ ,  $OY$  и  $O'Y'$ ,  $OZ$  и  $O'Z'$  остаются все время постоянными) относительно  $K$  (рис. 1.6).

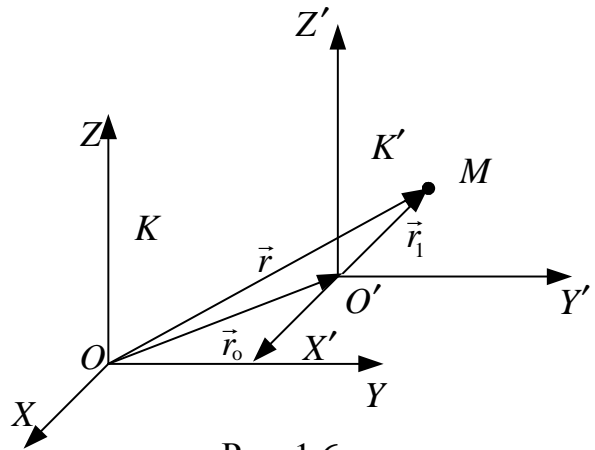


Рис. 1.6

Положение материальной точки  $M$  в системах отсчета  $K$  и  $K'$  в один и тот же момент времени определяется радиус-векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_1$  соответственно. Из рис. 1.6 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1, \quad (27)$$

где  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор начала координат  $O'$  системы  $K'$  в системе  $K$ . Взяв производную по времени от левой и правой частей уравнения (27), получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{\nu} = \vec{\nu}_0 + \vec{\nu}_1, \quad (28)$$

где  $\vec{\nu}$  – скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета  $K$ ;  $\vec{\nu}_1$  – скорость материальной точки относительно поступательно

движущейся системы отсчета  $K'$ ,  $\vec{v}_0$  – скорость поступательного движения системы отсчета  $K'$  относительно системы  $K$  – *переносная скорость*.

Продифференцировав (28) еще раз по времени, получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1, \quad (29)$$

где  $\vec{a}$  – ускорение материальной точки в системе  $K$ ;  $\vec{a}_1$  – ее ускорение в системе  $K'$ ,  $\vec{a}_0$  – ускорение системы отсчета  $K'$  относительно  $K$ . Соотношения (28) и (29) представляют собой правила сложения скоростей и ускорений в частном случае поступательного движения системы  $K'$ .

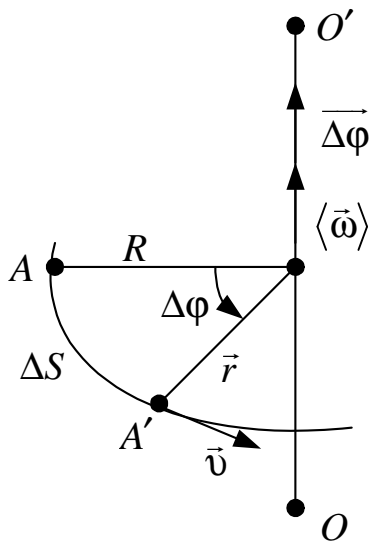


Рис. 1.7

Пусть материальная точка совершает движение по окружности радиусом  $R$  (рис. 1.7). Скорость движения материальной точки  $\vec{v}$  направлена по касательной к траектории и перпендикулярна к радиус-вектору материальной точки  $\vec{r}$ , а величина радиус-вектора  $|\vec{r}| = R$  не меняется со временем.

При описании движения по окружности мерой перемещения материальной точки за малый промежуток времени  $\Delta t$  может служить вектор  $\vec{\Delta\phi}$ . По модулю он равен углу поворота  $\Delta\phi$  радиус-вектора за время  $\Delta t$  и на-

правлен перпендикулярно к плоскости движения материальной точки по правилу правого винта.

*Средней угловой скоростью*  $\langle \vec{\omega} \rangle$  материальной точки на данном участке движения называется величина

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\vec{\Delta\phi}}{\Delta t},$$

а угловую скорость  $\vec{\omega}$  определим как предел, к которому стремится  $\langle \vec{\omega} \rangle$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{\omega} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}, \quad (30)$$

где  $d\vec{\phi}$  – угол, на который поворачивается радиус-вектор материальной точки  $\vec{r}$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ .

Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен (как и вектор  $\overline{d\varphi}$ ) вдоль оси вращения радиус-вектора, и его направление можно определить по правилу правого винта.

Найдем связь между модулем угловой скорости  $\omega$  и модулем линейной скорости  $v$  материальной точки. За время  $\Delta t$  материальная точка пройдет путь  $\Delta S$  по дуге окружности радиусом  $R$  (см. рис. 1.7). При этом, переходя к дифференциалам при  $\Delta t \rightarrow 0$ , можем записать

$$dS = R d\varphi. \quad (31)$$

Поскольку модуль линейной скорости (см. формулу (16))

$$v = \frac{dS}{dt},$$

то

$$v = \frac{R d\varphi}{dt} = \omega R,$$

или в векторном виде, т.к.  $|\vec{r}| = R$ ,

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (32)$$

Угловым ускорением  $\varepsilon$  движения материальной точки называется величина, равная пределу, к которому стремится отношение приращения угловой скорости  $\Delta \vec{\omega}$  за промежуток времени  $\Delta t$  к этому промежутку времени при стремлении последнего к нулю:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (33)$$

т.е. производной от угловой скорости по времени.

Угловое ускорение также является векторной величиной. При ускоренном вращении  $\vec{\varepsilon}$  совпадает с вектором  $\vec{\omega}$ , при замедленном вращении  $\vec{\varepsilon}$  противоположен  $\vec{\omega}$ .

Используя соотношения (32) – (33), можно найти модули нормального  $a_n$  и тангенциального  $a_\tau$  ускорений материальной точки при ее движении по окружности радиусом  $R$ :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R; \quad (34)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R. \quad (35)$$

Тогда модуль ускорения материальной точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (36)$$

## 1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Кинематика движения материальной точки</b></p> <p>Система сферических и прямоугольных координат. Связь систем координат.</p> <p>Скорости: средняя, мгновенная.</p> <p>Ускорение: среднее, мгновенное.</p> <p>Траектория, путь, уравнение траектории, перемещение</p>	<p>лекция + самост.</p> <p>самост.</p> <p>самост.</p> <p>лекция + самост.</p>	<p>[8], п. 1.21</p> <p>[10], пп. 1 – 4</p> <p>[8], пп. 1.1 – 1.2</p> <p>[7], пп. 1.2 – 1.3</p>	<p>Вопросы для самоконтроля</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Что такое материальная точка? Приведите примеры.</li> <li>2. Что называется системой отсчета?</li> <li>3. Как, зная законы изменения координаты точки, определить законы изменения проекций ее скорости и ускорения на ось координат?</li> <li>4. Как определить векторы скорости и ускорения материальной точки, если известен закон изменения ее радиус-вектора относительно начала координат?</li> <li>5. Как можно получить уравнение траектории, если известен закон изменения радиус-вектора материальной точки?</li> <li>6. Чему равно расстояние между двумя точками в пространстве? Как определить расстояние в данный момент времени между двумя движущимися материальными точками, если известны законы изменения их скоростей в одной и той же системе отсчета и начальные координаты?</li> </ol>
<p><b>Кинематика криволинейного движения материальной точки</b></p> <p>Криволинейное движение.</p> <p>Угловая скорость и угловое ускорение.</p> <p>Нормальное, тангенциальное, полное ускорения.</p> <p>Принцип относительности и суперпозиция движений.</p> <p>Сложение скоростей и ускорений</p>	<p>лекция + лекция + самост.</p> <p>лекция + самост.</p> <p>лекция</p> <p>лекция</p>	<p>[7], пп. 1.5</p> <p>[8], пп. 1.2</p> <p>[10], п. 4</p> <p>[5], пп. 1.3 – 1.4</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Что называется угловым перемещением материальной точки?</li> <li>2. Как, зная закон изменения углового ускорения материальной точки и начальные условия, найти ее угловую скорость и угловое смещение в данный момент времени?</li> <li>3. Как рассчитать угловое перемещение и угловую скорость при равномерном вращательном движении?</li> <li>4. Какая связь существует между линейными и угловыми характеристиками движения материальной точки?</li> <li>5. В чем состоит принцип независимости движения?</li> <li>6. Какие составляющие ускорения называют нормальной и тангенциальной? Как они направлены? Каково изменение скорости они характеризуют?</li> <li>7. Из чего складывается ускорение при движении материальной точки, брошенной под углом к горизонту? Чему равно ускорение?</li> <li>8. Что характеризует кривизну траектории? Как рассчитать радиус кривизны траектории?</li> </ol>

### 1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Прямлинейное движение материальной точки	<p>Определение кинематических характеристик движения (скорость, ускорение, путь, перемещение)</p>	<p>1. Необходимо помнить, что кинематические величины (за исключением пути) – векторные, т.е. для их определения требуется найти модуль (длину вектора) и направление в выбранной системе координат.</p> <p>2. Путь положительен при любом направлении движения и может только возрастать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• в случае прямолинейного равномерного движения путь равен модулю разности координат <math>\Delta S =  x(t) - x(t_0) </math>;</li> <li>• если движение неравномерное, то при определении пути поступают следующим образом: <ul style="list-style-type: none"> <li>– определяют закон изменения скорости и ускорения;</li> <li>– определяют моменты времени <math>t_i</math>, когда скорость обращается в ноль (точка разворота), определяют отрезки пути, соответствующие промежуткам времени <math>[t_1 - t_0]</math>, <math>[t_2 - t_1]</math>, <math>[t_3 - t_2]</math> ...;</li> <li>– определяют общий путь как сумму отрезков пути</li> </ul> <math display="block">\Delta S =  x(t_1) - x(t_0)  +  x(t_2) - x(t_1)  + \dots \quad \text{или} \quad \Delta S = \int_{t_0}^{t_1}  v_x(t)  dt + \int_{t_1}^{t_2}  v_x(t)  dt + \dots</math> </li> </ul> <p>3. Средняя путевая скорость является скалярной величиной, равной отношению пути, пройденного материальной точкой за время <math>\Delta t</math>, ко времени, затраченному на этот путь,</p> $v_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots}$	<p>[1], №№ 1.1 – 1.2 [11], №№ 1.3 – 1.8 [12], №№ 1.1 – 1.7</p>
	<p>Определение уравнения движения по известным кинематическим характеристикам</p>	<p>1. Выбор системы отсчета может быть произвольным. Начало отсчета удобно совмещать с положением точки в начальный момент времени, а направление одной из осей удобно совмещать с направлением движения.</p> <p>2. Уравнение траектории может задаваться неявно: <math>x = x(t)</math>, <math>y = y(t)</math>, <math>z = z(t)</math>. Исключив время, можно получить уравнение траектории в явном виде. Например, при движении в плоскости <math>y = y(x)</math>, а при движении в пространстве <math>y = y(x)</math> и <math>z = z(x)</math>. Пояснить, что означает каждое из уравнений.</p>	<p>[12], №№ 1.10 – 1.25 [11], №№ 1.11 – 1.17 [2], №№ 1.4 – 1.6</p>

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Криволинейное движение материальной точки	Определение кинематических характеристик криволинейного движения	<p>1. Для материальной точки движение по любого вида траектории является только поступательным, поэтому решение задач на определение кинематических характеристик криволинейного движения принципиально не отличается от решения подобных задач с прямолинейным движением материальной точки.</p> <p>2. Упрощению решения таких задач часто способствует применение принципа суперпозиции движений, суть которого в данном случае заключается в разложении движения материальной точки на прямолинейные движения ее по осям координат, рассмотрение каждого из этих движений независимо от других. После этого можно определять кинематические характеристики криволинейного движения, например,</p> $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}; \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$ <p>3. В некоторых случаях (когда известен радиус кривизны траектории материальной точки в каждой точке этой траектории) задачи удобно решать в системе координат, точка отсчета которой в каждый момент времени совпадает с центром кривизны траектории – мгновенным центром кривизны. При этом криволинейное движение рассматривается как ряд последовательных движений материальной точки по окружностям вокруг мгновенных центров кривизны. При этом <math>\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n</math>; <math>\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}</math>, <math>\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}</math>, где <math>\vec{\tau}</math> – единичный вектор, направленный по касательной к траектории, <math>\vec{n}</math> – единичный вектор, направленный к центру кривизны траектории. Иногда величина ускорения <math>\vec{a}</math> бывает известна (например, ускорение свободного падения).</p> <p>4. Соотношение между этими ускорениями и скоростью определяется с помощью формул (23) – (26) (см. также рис. 1.5).</p>	[2], №№ 1.41, 1.43, 1.45 – 1.50 [12], №№1.26 – 1.38 [11], №№1.31 – 1.37 [2], № 1.7

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Криволинейное движение материальной точки	<p>Определение относительной скорости и траектории в выбранной системе координат</p>	<p>1. Если известны скорости двух тел <math>\vec{v}_1, \vec{v}_2</math> относительно некоторой системы отсчета, то, связав движущуюся систему отсчета с одним из тел, относительную скорость в этой системе можно определить из соотношения <math>\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{отн}</math> или <math>\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2</math>.</p> <p>2. Траектория движения в данной системе координат определяется зависимостью <math>\vec{r}</math> от <math>t</math>.</p> <p>3. Замена системы отсчета на другую систему, движущуюся относительно данной равномерно и прямолинейно, приведет к изменению <math>\vec{v}_{отн}, \vec{r}_i</math>, но ускорение <math>\vec{a}_i</math> сохранится (<math>i = 1, 2</math>).</p>	<p>[2], № 1.8 [12], №№ 1.39–1.42 [11], № №1.38, 1.94</p>
Решение задач на принцип суперпозиции движений. Определение экстремальных значений параметров движения		<p>1. Сложное (криволинейное) движение в плоскости <math>XOY</math> можно представить как совокупность простых движений относительно соответствующих осей: <math>x = f_1(t), y = f_2(t)</math>.</p> <p>2. Выбрав систему координат, можно определить соответствующие компоненты скорости и ускорения, продифференцировав функции <math>f_1(t)</math> и <math>f_2(t)</math>.</p> <p>3. Составить систему уравнений и решить ее относительно искомого величин.</p> <p>4. Определить зависимости этих величин (например, дальность полета от угла бросания) от значений параметров, задающих движения, и найти экстремум функции.</p>	<p>[12], №№ 1.44, 1.48</p>

## 1.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** Самолет пролетел расстояние из города  $A$  в город  $B$  со скоростью  $v_1 = 800$  км/ч, а обратно – половину пути со скоростью  $v_2 = 900$  км/ч, а вторую половину со скоростью  $v_3 = 700$  км/ч. Определить среднюю путевую скорость самолета за все время полета. (**Уровень 1**).

**Решение.** При движении из города  $A$  в город  $B$  самолет пролетел расстояние  $\Delta S_1 = S$  (где  $S$  – расстояние между городами) за время  $\Delta t_1$ . Так как по условию задачи скорость при этом была постоянной, то  $\Delta S_1 = v_1 \Delta t_1$ . При полете из города  $B$  в город  $A$  самолет на первую половину пути  $\Delta S_2 = S/2$  затратил время  $\Delta t_2$ , а на вторую половину пути  $\Delta S_3 = S/2$  – время  $\Delta t_3$ . При этом  $\Delta S_2 = v_2 \Delta t_2$ ,  $\Delta S_3 = v_3 \Delta t_3$ . По определению средней путевой скорости

$$v_{cp} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}.$$

Следовательно,

$$v_{cp} = \frac{2S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{2v_2} + \frac{S}{2v_3}} = \frac{4v_1v_2v_3}{2v_2v_3 + v_1v_3 + v_1v_2} \approx 794 \text{ км/ч.}$$

*Ответ:*  $v_{cp} = \frac{4v_1v_2v_3}{2v_2v_3 + v_1v_3 + v_1v_2} \approx 794 \text{ км/ч.}$

**Пример 2.** Материальная точка  $M$  движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону  $\vec{r} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$  (м). Найти уравнение траектории  $y = f(x)$  точки, а также определить значения нормального, тангенциального, полного ускорений точки и радиус кривизны траектории в момент времени  $\tau = 1$  с. (**Уровень 2**).

**Решение.** Для определения уравнения траектории материальной точки в виде  $y = f(x)$  запишем закон движения в координатной форме

$$x = 2t; \quad y = 3t^2.$$

Следовательно,

$$t = x/2; \quad y = 3x^2/4.$$

В произвольный момент времени  $t$  скорость и ускорение точки равны

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 6t\vec{j} \text{ (м/с);} \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{j} \text{ 9 (м/с}^2\text{),}$$

а в момент времени  $\tau$

$$\vec{v}(\tau) = 2\vec{i} + 6\tau\vec{j} = 2\vec{i} + 6\vec{j} \text{ (м/с);} \quad \vec{a}(\tau) = \vec{a}(t) = 6\vec{j} \text{ (м/с}^2\text{).} \quad (1)$$



Поскольку точка  $M$  движется по кривой, лежащей в плоскости  $XOY$ , вектор ускорения можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие – нормальное и тангенциальное ускорения, лежащие в этой же плоскости (см. рисунок):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \text{ причем } a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad (2)$$

а их абсолютные значения

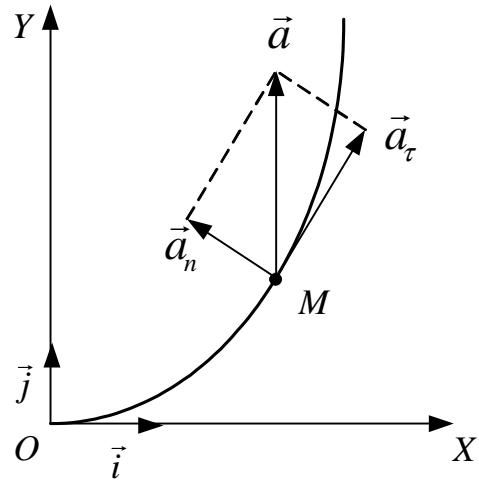
$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Модуль вектора скорости точки в произвольный момент времени равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 36t^2}, \quad (3)$$

тангенциальное ускорение

$$a_\tau(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{36t}{\sqrt{4 + 36t^2}}$$



в момент времени  $\tau$  примет значение

$$a_\tau(\tau) = \frac{36\tau}{\sqrt{4 + 36\tau^2}} \approx 5,6 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

Нормальное ускорение точки можно найти из выражения (2) в момент времени  $\tau$

$$a_n(\tau) = \sqrt{a^2(\tau) - a_\tau^2(\tau)}, \quad (5)$$

или с учетом (1) и (4)

$$a_n(\tau) = \sqrt{36 - \frac{324\tau^2}{1 + 9\tau^2}} \approx 1,9 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы найти радиус кривизны траектории в момент времени  $\tau$ , воспользуемся приведенной выше формулой для  $a_n$  с учетом выражений (3) и (5):

$$R = \frac{v^2}{a_n} \approx 21,1 \text{ м.}$$

*Ответ:*  $y = 3x^2/4$ ;  $a_n(\tau) = 1,9 \text{ м/с}^2$ ;  $a_\tau(\tau) = 5,6 \text{ м/с}^2$ ;  $a(\tau) = 6 \text{ м/с}^2$ ;  $R \approx 21,1 \text{ м.}$

**Пример 3.** Материальная точка движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону  $\vec{r} = \alpha t \vec{i} + (\beta t^2 - \gamma t^3) \vec{j}$  (м), где  $\alpha = 1$  м/с,  $\beta = 3$  м/с<sup>2</sup>,  $\gamma = 4$  м/с<sup>3</sup>. Найти максимальную скорость точки. (**Уровень 2**).

**Решение.** Координаты материальной точки изменяются по закону

$$x = \alpha t; \quad y = \beta t^2 - \gamma t^3. \quad (1)$$

Проекция скорости движения на оси координат

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 2\beta t - 3\gamma t^2. \quad (2)$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta t - 3\gamma t^2)^2} \quad (3)$$

с течением времени изменяется. Скорость максимальна в момент времени, соответствующий максимуму величины проекции  $v_y$ . Исследуя зависимость (2) на экстремум, определим производную

$$\frac{dv_y}{dt} = 2\beta - 6\gamma t.$$

Из условия экстремума ( $\beta - 3\gamma t = 0$ ) следует, что  $t = \frac{\beta}{3\gamma}$ .

Поскольку вторая производная  $v_y(t)$  по времени отрицательна

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -6\gamma,$$

функция  $v_y(t)$  имеет только максимум, поэтому момент времени  $t$  соответствует максимуму проекции скорости  $v_y$  и максимуму величины скорости:

$$v_{\max} = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta t - 3\gamma t^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^4}{9\gamma^2}} = 1,25 \text{ м/с}.$$

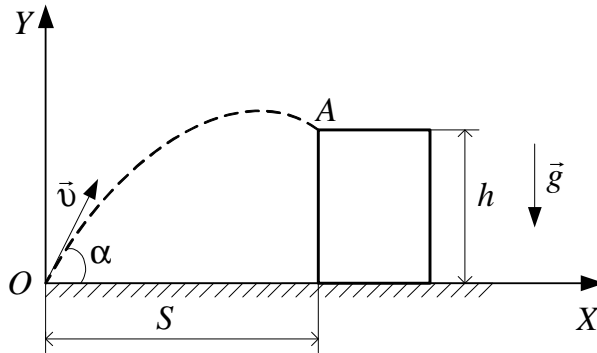
*Ответ:*  $v_{\max} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^4}{9\gamma^2}} = 1,25 \text{ м/с}.$

**Пример 4.** С какой наименьшей скоростью и под каким углом к горизонту надо бросить мяч, чтобы забросить его на крышу дома высотой  $A$  с расстояния  $S$  от дома? Соппротивлением воздуха пренебречь. (**Уровень 3**).

**Решение.** Выберем систему координат  $XOY$  так, как показано на рисунке. Тогда зависимость координат мяча от времени имеет вид

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

Поскольку мяч должен быть заброшен на крышу дома с минимальной начальной скоростью, то, очевидно, нужно рассмотреть бросок, при котором мяч попадет в точку  $A$ . Уравнения (1), записанные для момента времени, когда мяч оказался в точке  $A$ , принимают вид



где мяч оказался в точке  $A$ , принимают вид

$$S = v_0 \tau \cos \alpha ;$$

$$h = v_0 \tau \sin \alpha - \frac{g \tau^2}{2}$$

и позволяют получить зависимость начальной скорости  $v_0$  мяча от угла  $\alpha$

$$\tau = \frac{S}{v_0 \cos \alpha} ; \quad h = v_0 \frac{S}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g S^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

или

$$h = S \operatorname{tg} \alpha - \frac{g S^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} ; \quad v_0^2 = \frac{g S^2}{2 \cos^2 \alpha (S \operatorname{tg} \alpha - h)} .$$

Так как в числителе последнего выражения стоит постоянная величина, то начальная скорость будет минимальна, если знаменатель  $f(\alpha) = \cos^2 \alpha (S \operatorname{tg} \alpha - h)$  будет максимален. Исследуя функцию  $f(\alpha)$  на экстремум, получим

$$\frac{df}{d\alpha} = -2 \sin \alpha \cos \alpha (S \operatorname{tg} \alpha - h) + \cos^2 \alpha \frac{S}{\cos^2 \alpha} = 0 ,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h + \sqrt{h^2 + S^2}}{S} .$$

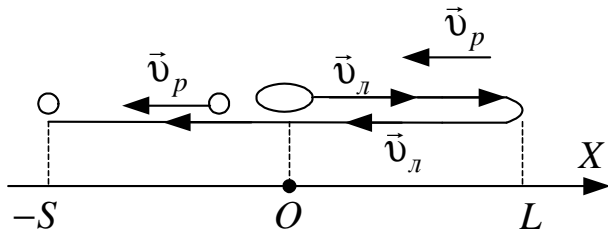
Найденное значение угла  $\alpha$  соответствует наименьшей начальной скорости мяча (поскольку при  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  необходимая начальная скорость мяча  $v_0 \rightarrow \infty$ ).

Следовательно, минимальная скорость, с которой надо бросить мяч, равна

$$v_{0 \min} = \frac{\sqrt{g S^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}}{2(S \operatorname{tg} \alpha - h)} = \sqrt{g(\sqrt{S^2 + h^2} + h)} .$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{h + \sqrt{h^2 + S^2}}{S} , \quad v_{0 \min} = \sqrt{g(\sqrt{S^2 + h^2} + h)} .$$

**Пример 5.** Турист плывет на моторной лодке против течения реки. Проплывая мимо одного из причалов, он теряет спасательный круг. Через четверть часа он обнаруживает пропажу, поворачивает назад и догоняет круг на расстоянии  $S = 2$  км от причала, вблизи которого он его потерял. Какова средняя скорость течения реки, если мощность двигателя лодки не изменялась? (Уровень 3).



**Решение.** Введем систему координат, ось  $Ox$  которой направим против течения реки, а начало отсчета  $O$  поместим в точку, в которой турист потерял спасательный круг (см. рисунок).

Скорость моторной лодки относительно выбранной системы отсчета может быть представлена в виде векторной суммы скорости лодки в стоячей воде  $\vec{v}_l$  и скорости течения  $\vec{v}_p$

$$\vec{v} = \vec{v}_l + \vec{v}_p. \quad (1)$$

После того как турист потерял спасательный круг, он продолжал плыть против течения реки со скоростью  $v_{1x} = v_l - v_p$ , а после того как обнаружил пропажу, стал плыть по течению реки со скоростью  $v_{2x} = -(v_l + v_p)$ . Очевидно, что

$$L = v_{1x} \Delta t_1 = (v_l - v_p) \Delta t_1; \quad S + L = |v_{2x}| \Delta t_2 = (v_l + v_p) \Delta t_2, \quad (2)$$

где  $L$  – расстояние, которое турист проплыл до разворота;  $\Delta t_1, \Delta t_2$  – время движения лодки до и после разворота соответственно, причем  $\Delta t_1 = 0,25$  ч.

За время  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$  спасательный круг проплыл расстояние  $S$  со скоростью  $v_p$ , следовательно,  $S = v_p \Delta t$ . (3)

Выразив время  $\Delta t_2$  из (3) и подставив в (2), получим

$$\Delta t_2 = \frac{S}{v_p} - \Delta t_1; \quad S + (v_l - v_p) \Delta t_1 = (v_l + v_p) \left( \frac{S}{v_p} - \Delta t_1 \right).$$

Отсюда находим  $v_p = \frac{S}{2\Delta t_1} = 4$  км/ч.

Решение задачи может быть гораздо короче, если использовать движущуюся систему отсчета, связанную со спасательным кругом.

Относительно такой системы отсчета до и после разворота лодка двигалась с одинаковой по модулю скоростью, равной  $v_l$ . Поскольку до

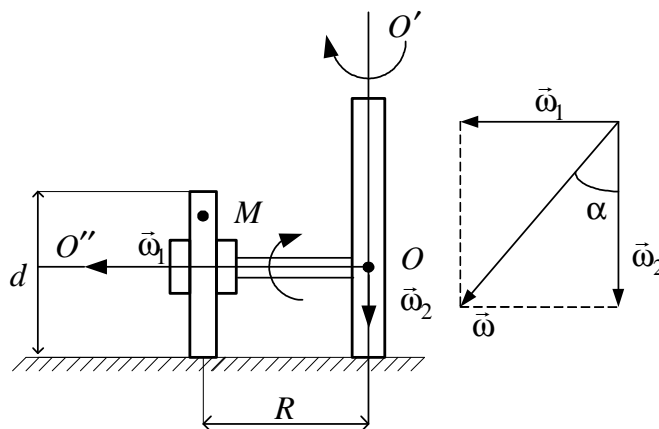
разворота лодка плыла в течение времени  $\Delta t_1$ , то и обратно она затратит столько же времени. За это время тело отсчета (т.е. спасательный круг) пройдет путь  $S$  со скоростью  $\vec{v}_p$ :

$$S = v_p 2\Delta t_1; \quad v_p = \frac{S}{2\Delta t_1} = 4 \text{ км/ч.}$$

Ответ:  $v_p = \frac{S}{2\Delta t_1} = 4 \text{ км/ч.}$

**Пример 6.** Колесо диаметром  $d = 7$  см, насаженное на горизонтальную ось, катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью  $v = 16,8$  м/с, по окружности с радиусом  $R = 12$  см. Найти величину результирующей угловой скорости точки на ободе колеса и угол ее наклона к вертикали. (Уровень 4).

**Решение.** Пусть колесо катится так, что сверху его движение выглядит происходящим по часовой стрелке (см. рисунок). Точка  $M$  на ободе колеса одновременно участвует в двух движениях: вращении вокруг оси  $OO'$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_2$  и вращении вокруг оси  $OO''$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_1$ , направленной вдоль оси  $OO''$ . Вектор результирующей угловой скорости равен сумме  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$ :



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

Так как векторы  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$  взаимно перпендикулярны, то

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (1)$$

$$\text{и } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (2)$$

Угловая скорость  $\vec{\omega}_2$  численно равна отношению линейной скорости вращения точки  $M$  относительно оси  $OO'$  к радиусу вращения:

$$\omega_2 = \frac{v}{R}. \quad (3)$$

Численное значение угловой скорости  $\vec{\omega}_1$  найдем из условия, что колесо катится по плоскости без скольжения. Отсутствие скольжения означает, что численное значение линейной скорости точки  $M$  равно скорости центра колеса. Поэтому

$$\omega_1 = \frac{2v}{d}. \quad (4)$$

Заменяя в формулах (1) и (2)  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$  выражениями (3) и (4), получаем окончательно:  $\omega = \sqrt{\frac{4v^2}{d^2} + \frac{v^2}{R^2}} = \frac{v}{dR} \sqrt{4R^2 + d^2}$  и  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2R}{d}$ . Произведя вычисления, имеем

$$\omega = \frac{16,8}{7 \cdot 12} \sqrt{4 \cdot 144 + 49} = 5 \text{ рад/с}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 12}{7} = 73^\circ 15'.$$

*Ответ:*  $\omega = 5 \text{ рад/с}; \alpha = 73^\circ 15'$ .

**Пример 7.** Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось  $x$ ) имеет вид  $x(t) = A + Bt + Ct^2$ , где  $A = 5 \text{ м}$ ,  $B = 4 \text{ м/с}$ ,  $C = -1 \text{ м/с}^2$ . Построить график зависимости координаты  $x$  и пути  $S$  от времени. Определить среднюю скорость  $\langle v_x \rangle$  за интервал времени от 1 с до 6 с. Найти среднюю путевую скорость  $\langle v \rangle$  за тот же интервал времени. (Уровень 5).

**Решение.** Для построения графика зависимости координаты точки от времени найдем характерные значения координаты (начальное и максимальное) и моменты времени, соответствующие указанным координатам и координате, равной нулю.

Начальная координата соответствует моменту  $t_0 = 0$ . Ее значение равно  $x_0 = x(0) = A = 5 \text{ м}$ .

Максимального значения координата достигает в тот момент, когда точка начинает двигаться обратно (скорость меняет знак). Этот момент времени найдем, приравняв к нулю первую производную от координаты по времени:  $v_x = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct_1 = 0$ , откуда  $t_1 = -\frac{B}{2C} = 2 \text{ с}$ . Максимальная координата  $x_{\max} = x(2) = 9 \text{ м}$ . Момент времени  $t$ , когда координата  $x = 0$ , найдем из выражения

$$x = A + Bt + Ct^2 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно  $t$ :

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

Подставим значения  $A, B, C$  и произведем вычисления:  $t = (2 \pm 3)$  с. Таким образом, получаем два значения времени:  $t_2 = 5$  с и  $t' = -1$  с. Второе значение времени отбрасываем, так как оно не удовлетворяет условию задачи ( $t \geq 0$ ).

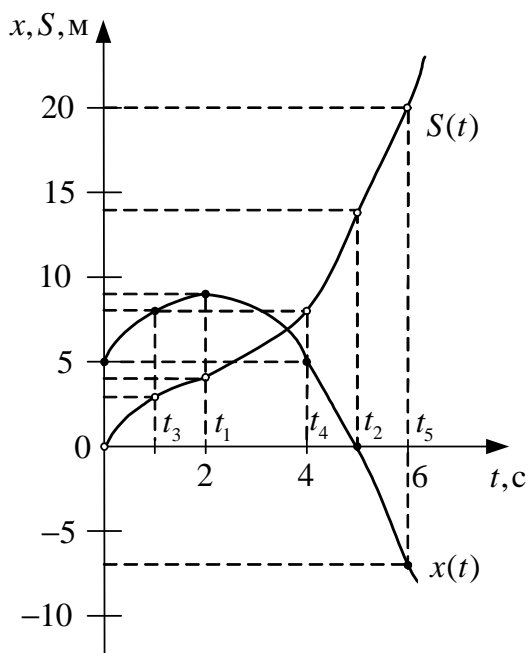
График зависимости координаты точки от времени представляет собой кривую второго порядка. Поэтому кроме трех вычисленных ранее характерных значений координаты найдем еще три значения координаты, соответствующие моментам  $t_3 = 1$  с,  $t_4 = 4$  с и  $t_5 = 6$  с:  $x_3 = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8$  м;  $x_4 = A + Bt_4 + Ct_4^2 = 5$  м;  $x_5 = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7$  м. Полученные данные представим в виде табл. 1:

Таблица 1

Время, с	$t_0 = 0$	$t_3 = 1$	$t_1 = 2$	$t_2 = 5$	$t_4 = 4$	$t_5 = 6$
Координата, м	$x_0 = 5$	$x_3 = 8$	$x_1 = 9$	$x_2 = 0$	$x_4 = 5$	$x_5 = -7$

Используя данные табл. 1, чертим график зависимости координаты от времени (см. рисунок).

График зависимости пути от времени построим, исходя из следующих соображений: 1) до момента изменения знака скорости путь и координата связаны соотношением  $S(t) = x(t) - x_0$ ; 2) начиная с момента  $t_1$  точка движется в обратном направлении и, следовательно, координата ее убывает, а путь продолжает возрастать, поскольку для этого участка график зависимости пути от времени является зеркальным отображением графика зависимости координаты  $S(t) = |x(t) - x(t_1)| + (x(t_1) - x_0)$ . Для соответствующих промежутков времени полученные значения приведем в табл. 2.



Средняя скорость  $\langle v_x \rangle$  (по перемещению) за заданный интервал времени определяется выражением

$$\langle v_x \rangle = \frac{x_5 - x_3}{t_5 - t_3}.$$

Подставим значения  $x_5, x_3, t_5, t_3$  из таблицы и произведем вычисления:

$$\langle v_x \rangle = \frac{-7 - 8}{6 - 1} = -3 \text{ м/с}.$$

Среднюю путевую скорость  $\langle v \rangle$  находим из выражения

$$\langle v \rangle = \frac{|x(t_5) - x(t_1)| + (x(t_1) - x(t_3))}{t_5 - t_3} \quad \text{или} \quad \langle v \rangle = \frac{S(t_5) - S(t_3)}{t_5 - t_3}.$$

Таблица 2

Время, с	$t_0 = 0$	$t_3 = 1$	$t_1 = 2$	$t_2 = 5$	$t_4 = 4$	$t_5 = 6$
Путь, м	0	3	4	13	8	20

Подставив значения из табл. 1 или табл. 2, получим

$$\langle v \rangle = \frac{20 - 3}{6 - 1} \approx 3,4 \text{ м/с.}$$

Заметим, что средняя путевая скорость всегда положительна.

*Ответ:*  $\langle v_x \rangle = -3 \text{ м/с}$ ,  $\langle v \rangle = 3,4 \text{ м/с}$ .

### 1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Скорость течения реки  $v = 3 \text{ км/ч}$ , а скорость движения лодки относительно воды  $v_1 = 6 \text{ км/ч}$ . Определите, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперек реки [60°; **уровень 1**].
2. Тело движется равноускоренно с начальной скоростью  $v_0$ . Определите ускорение тела, если за время  $t = 2 \text{ с}$  оно прошло путь  $s = 16 \text{ м}$  и его скорость  $v = 3v_0$  [4 м/с<sup>2</sup>; **уровень 1**].
3. Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью  $v_1 = 16 \text{ км/ч}$ , вторую половину пути – со скоростью  $v_2 = 12 \text{ км/ч}$ . Определите среднюю скорость движения велосипедиста [13,7 км/ч; **уровень 2**].
4. Тело падает с высоты  $h = 1 \text{ км}$  с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какой путь пройдет тело: 1) за первую секунду своего падения; 2) за последнюю секунду своего падения [1) 4,9 м; 2) 132 м; **уровень 2**].
5. Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимость их координат от времени задается уравнениями  $x_1 = At + Bt^2$  и  $x_2 = Ct - Dt^2 + Ft^3$ . Определите скорость  $u$  первого автомобиля относительно второго [ $u = A - C + 2(B + D)t - 3Ft^2$ ; **уровень 2**].
6. Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом  $r = 3 \text{ м}$  задается уравнением  $s = At^2 + Bt$  ( $A = 0,4 \text{ м/с}^2$ ,  $B = 0,1 \text{ м/с}$ ). Для момента времени  $t = 1 \text{ с}$  после начала движения определите ускорения: 1) нормальное; 2) тангенциальное; 3) полное [1) 0,27 м/с<sup>2</sup>; 2) 0,8 м/с<sup>2</sup>; 3) 0,84 м/с<sup>2</sup>; **уровень 2**].



7. В течение времени  $t$  скорость тела задается уравнением вида  $v = A + Bt + Ct^2$  ( $0 \leq t \leq \tau$ ). Определите среднюю скорость за промежуток времени  $\tau$  [ $\langle v \rangle = A + \frac{1}{2}B\tau + \frac{1}{3}C\tau^3$ ; **уровень 3**].
8. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением  $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$  ( $C = 0,1 \text{ м/с}^2$ ,  $D = 0,03 \text{ м/с}^3$ ). Определите: 1) через какое время после начала движения ускорение тела будет равно  $a = 2 \text{ м/с}^2$ ; 2) среднее ускорение тела за этот промежуток времени [1) 10 с; 2)  $1,1 \text{ м/с}^2$ ; **уровень 3**].
9. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом  $r = 4 \text{ м}$ , задается уравнением  $a_n = A + Bt + Ct^2$  ( $A = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $B = 6 \text{ м/с}^3$ ,  $C = 9 \text{ м/с}^4$ ). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время  $t_1 = 5 \text{ с}$  после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени  $t = 1 \text{ с}$  [1)  $6 \text{ м/с}^2$ ; 2) 85 м; 3)  $17,1 \text{ м/с}^2$ ; **уровень 4**].
10. Диск радиусом  $R = 10 \text{ см}$  вращается так, что зависимость модуля линейной скорости точек, лежащих на ободу диска, от времени задается уравнением  $v = At + Bt^2$  ( $A = 0,3 \text{ м/с}^2$ ,  $B = 0,1 \text{ м/с}^3$ ). Определите момент времени, для которого вектор полного ускорения  $\vec{a}$  образует с радиусом колеса угол  $\varphi = 4^\circ$  [2 с; **уровень 4**].
11. Миномет установлен под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту на крыше здания, высота которого  $h = 40 \text{ м}$ . Начальная скорость  $v_0$  мины равна  $50 \text{ м/с}$ . Требуется: 1) написать кинематические уравнения движения и уравнения траектории и начертить эту траекторию с соблюдением масштаба; 2) определить время  $\tau$  полета мины, максимальную высоту  $H$  ее подъема, горизонтальную дальность  $S$  полета, скорость  $v$  в момент падения мины на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.  
*Указание.* Начало координат поместить на поверхности земли так, чтобы оно находилось на одной вертикали с минометом, и чтобы вектор скорости  $\vec{v}$  лежал в плоскости  $XOY$ .
- [1)  $y = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$ ;  $x = v_0 t \cos \alpha$ ;  $y = h + xt \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$ ; 2) 9,67 с; 136 м; 242 м; 57,3 м/с; **уровень 5**].
12. Мяч, брошенный горизонтально с начальной скоростью  $v_0 = 11,2 \text{ м/с}$ , ударяется о стенку. Высота места удара мяча о стенку на  $\Delta h = 2,5 \text{ м}$  меньше высоты, с которой брошен мяч. Найти, на каком расстоянии  $l$  находится стенка от места бросания, и угол  $\varphi$ , под которым направлен вектор скорости мяча в момент удара о стенку. Сопротивление воздуха не учитывать. [8 м;  $58^\circ$ ; **уровень 5**].

## УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Динамика** – раздел механики, изучающий движение тела под действием других тел.

Меру взаимодействия тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорение, называют *силой*. Сила – векторная величина, ее действие характеризуется численным значением (модулем), направлением действия и точкой приложения.

При изучении данного блока студенты должны

**иметь представление:**

- о способах задания положения материальной точки;
- об основных кинематических характеристиках движения и связях между ними;
- о принципах суперпозиции и относительности механического движения;

**обладать навыками:**

- определения характеристик движения  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$  графическим и аналитическим способами.

### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
1. Законы Ньютона. Сила. Понятия «импульс тела», «импульс силы», «инерциальные системы отсчета»	самост., лекция	[5] [6] [7] [8] [9] [10]
2. Силы в механике. Сложение сил. Законы всемирного тяготения, Гука, Архимеда	самост., лекция	
3. Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса	лекция	
4. Работа и энергия в механике. Кинетическая энергия. Мощность	лекция, самост.	
5. Поле сил. Центральные силы и потенциальная энергия	самост.	
6. Полная механическая энергия. Закон сохранения энергии в механике	лекция	
7. Законы сохранения при упругих и неупругих взаимодействиях. Рассеяние частиц*	лекция, самост.	

\* Материал изучается ознакомительно.

### Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– определение импульса силы и правила сложения сил;</li> <li>– законы Ньютона;</li> <li>– законы сохранения импульса и механической энергии;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– вычислять ускорение и другие характеристики движения материальной точки с учетом различных видов взаимодействий (упругости, трения, сопротивления, силы Архимеда);</li> </ul>

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– характеристики взаимодействия и соответствующие законы (закон всемирного тяготения, закон Гука, закон Архимеда и т.д.);</li> <li>– определение работы, мощности и их связь с энергией;</li> <li>– параметры столкновений материальных точек;</li> <li>– понятие центра масс системы материальных точек;</li> <li>– характеристики силового поля</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– рассчитывать характеристики движения материальных точек после столкновения;</li> <li>– применять законы сохранения импульса и механической энергии в замкнутой системе;</li> <li>– рассчитывать положение центра масс системы материальных точек; вычислять работу переменной силы;</li> <li>– рассчитывать характеристики силового поля</li> </ul>

## 2.1. Краткое содержание теоретического материала

*Свободно движущейся материальной точкой* или *свободной материальной точкой (телом)* можно назвать материальную точку, действием на которую всех других материальных объектов можно пренебречь. Если с такой точкой (телом) связать систему отсчета, то в такой системе движение других свободных тел выглядит особо просто: оно происходит прямолинейно и равномерно, то есть с постоянной по величине и направлению скоростью ( $\vec{v} = \text{const}$ ). Это утверждение составляет содержание **закона инерции**. Система отсчета, связанная со свободным телом, называется *инерциальной системой отсчета*. Закон инерции констатирует факт существования инерциальных систем отсчета и носит название **первого закона Ньютона**. Для практического применения (решения задач) более полезна следующая формулировка первого закона Ньютона: *если результирующая всех сил, действующих на материальную точку (тело), равна нулю, то тело покоится или совершает равномерное и прямолинейное движение*. Инерциальных систем отсчета можно выбрать бесчисленное множество. Однако характер движения тела не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. В этом суть одного из фундаментальных законов физики – **принципа относительности**. Следует понимать, что все используемые в физическом эксперименте системы отсчета являются инерциальными лишь с большей или меньшей степенью точности. Например, инерциальная система отсчета, связанная с Землей (геоцентрическая или лабораторная), является инерциальной лишь приблизительно; система отсчета, связанная с Солнцем (гелиоцентрическая), является более точной.

Из первого закона Ньютона следует, что при свободном движении материальной точки скорость ее в инерциальной системе отсчета остается постоянной ( $\vec{v} = \text{const}$ ). В общем случае сохраняется не скорость, а произведение скорости  $\vec{v}$  на массу материальной точки  $m$ . Эта величина носит название *импульса материальной точки*  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Если же материальная

точка взаимодействует с другими материальными точками (телами), то ее скорость изменяется:  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ , причем

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (1)$$

где  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  – силы, действующие на точку со стороны других материальных точек.

Это уравнение является математической формулировкой **второго закона Ньютона**.

Общая формулировка второго закона Ньютона имеет следующий вид: *скорость изменения импульса точки равна равнодействующей силе, действующей на точку,*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}, \quad (2)$$

где  $\vec{F}$  – результирующая сила, которая определяется как векторная сумма всех сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , действующих на точку.

Уравнение (2) может быть записано следующим образом:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \quad (3)$$

где произведение  $\vec{F}dt$  получило название *импульса силы*.

Уравнения (2) и (3) являются векторными. Учитывая принцип суперпозиции движений, вместо (2) можно записать три скалярных уравнения, которые для декартовой системы координат имеют вид

$$dp_x = F_x dt; \quad dp_y = F_y dt; \quad dp_z = F_z dt.$$

Все силы в природе являются силами взаимодействия. Этот факт выражает суть **третьего закона Ньютона**: *с какой силой тело 1 действует на тело 2, с такой же силой, но противоположной по направлению, тело 2 действует на тело 1:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (4)$$

Все силы в природе делятся на *фундаментальные* и *нефундаментальные*. Последние в конечном итоге могут быть сведены к действию фундаментальных сил. К *фундаментальным* относятся силы гравитационного взаимодействия, силы электромагнитного взаимодействия, сильного и слабого взаимодействий (они рассматриваются в разделе ядерной физики). К *нефундаментальным* относятся сила Архимеда, силы упругости, сила трения и т.д.

Для решения большинства практических задач механики необходимо знать:

- силу гравитационного взаимодействия (закон всемирного тяготения)

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} \quad \text{или} \quad F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad (5)$$

где  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$  – гравитационная постоянная;

- силы упругой деформации при растяжении (сжатии)

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{либо} \quad \vec{F} = -k\vec{x}, \quad (6)$$

где  $k = \frac{ES}{l_0}$  – коэффициент упругости,  $\sigma = F/S$  – механическое напряжение,

$E$  – модуль Юнга,  $\Delta l = |\vec{x}|$  – абсолютное удлинение (сокращение) тела при деформации;

- нормальную силу реакции опоры  $\vec{N}$  – возникает в том случае, когда какое-либо тело расположено на подставке (подвесе), которая деформируется и действует на тело с силой  $\vec{N}$ . По третьему закону Ньютона со стороны тела на подвес также действует сила  $\vec{P} = -\vec{N}$  (*вес тела*). Необходимо помнить, что вес тела приложен не к телу, а к подставке (подвесу), на которой оно находится;

- силы трения и сопротивления движению:

- сила сухого трения  $F_{mp}$  – препятствует движению тела,  $F_{mp} = \mu N$ , где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения, зависящей от природы и состояния соприкасающихся поверхностей;  $N$  – нормальная реакция опоры, по которой движется тело;

- разновидностью сухого трения является трение покоя; сила трения покоя по модулю равна результирующей сил, стремящихся сдвинуть тело, и направлена противоположно ей; максимальное значение силы трения покоя приблизительно равно силе трения скольжения;

- сила вязкого трения, которая обращается в ноль одновременно с относительной скоростью движения;

- сила внутреннего трения в жидкости и газе

$$\vec{F}_{mp} = -\eta \left| \frac{d\mathbf{v}}{dz} \right| S \vec{n}, \quad (7)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости (внутреннее трение);  $S$  – площадь взаимодействующих слоев жидкостей;  $d\mathbf{v}/dz$  – градиент скорости в направлении, перпендикулярном к движущимся слоям;  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении движения слоя;

- силы трения (сопротивления) при относительном движении твердого тела и жидкости, твердого тела и газа:

а) при небольших относительных скоростях сила растет линейно со скоростью

$$\vec{F}_{mp} = -b_1 \vec{v}; \quad (8)$$

б) при больших относительных скоростях силы сопротивления пропорциональны квадрату (и даже кубу) скорости  $v$ :

$$\vec{F}_{mp} = -b_2 |\vec{v}|^2 \vec{n}, \quad (9)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  – коэффициенты сопротивления, зависящие от формы и размеров тела, состояния его поверхности, свойств окружающей среды и определяются, как правило, на опыте;

- силу инерции – фиктивная сила, которая определяется фактом движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета (системы, движущейся поступательно с ускорением  $a_0$ )

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0. \quad (10)$$

Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета принимает вид

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_{ин}. \quad (11)$$

Сила  $\vec{F}_{ин}$  является фиктивной, так как мы не можем указать тело, действующее на данную материальную точку. Это такая сила, которую нужно прибавить к реальным силам, чтобы учесть факт ускоренного движения самой системы отсчета.

*Системой материальных точек* будем называть совокупность материальных точек, связанных (взаимодействующих) между собой.

*Импульсом системы материальных точек* называется векторная сумма импульсов  $n$  материальных точек

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (12)$$

Из (12) следует

$$Mr_c = \sum m_i r_i, \quad (13)$$

что представляет, по сути, правило преобразования системы материальных точек в одну материальную точку с массой  $M$ , равной сумме масс всех материальных точек, и положением  $M$  в пространстве, задаваемым радиус-вектором  $r_c$ , при поступательном движении системы материальных точек. Возможность такого преобразования позволяет ввести понятие *центра масс (центра инерции)* системы материальных точек, положение которого в пространстве определяется радиус-вектором  $\vec{r}_c$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (14)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор материальной точки массой  $m_i$ .

Скорость центра масс системы  $n$  точек общей массой  $M = \sum_{i=1}^n m_i$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{1}{M} \vec{p}, \quad (15)$$

где импульс системы материальных точек  $\vec{p} = M \vec{v}_c$ . Если масса тела распределена непрерывно, то от суммирования необходимо перейти к интегрированию по объему тела  $V$ :

$$M = \int_V dm = \int_V \rho dV.$$

Для системы материальных точек аналогично, как и для одной материальной точки, можно записать выражение для второго закона Ньютона и ускорения центра масс системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k; \quad \vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i, \quad (16)$$

где  $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k$  – сумма всех внешних сил, действующих на систему материальных точек.

Импульс системы материальных точек изменяется только под действием внешних сил  $\vec{F}_k$ , поэтому в замкнутой системе материальных точек (в отсутствие внешнего воздействия на них) изменение импульса равно нулю, что бы ни происходило внутри системы, т.е.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \quad (17)$$

**Это закон сохранения импульса системы.** Суть этого закона может быть отражена и другой формулировкой: *любые силы, действующие внутри замкнутой системы материальных точек, не могут изменить состояния центра масс системы (его покоя или равномерного прямолинейного движения).*

Важным свойством сил является их способность совершать работу. Из курса физики средней школы известно, что *работа* постоянной силы на

прямолинейном участке пути – это скалярная величина, равная произведению силы на перемещение и на косинус угла между ними.

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \alpha. \quad (18)$$

В общем случае работу по перемещению тела по произвольной криволинейной траектории  $L$  можно определить согласно выражению

$$A = \int_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (19)$$

где  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  – функция зависимости силы от радиус-вектора.

В частном случае прямолинейного перемещения тела из точки с радиус-вектором  $\vec{r}_1$  в точку с радиус-вектором  $\vec{r}_2$  под действием силы с изменяющимся модулем и неизменным направлением относительно перемещения работу можно определить по формуле

$$A_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} |F(r)| dr. \quad (20)$$

Работа силы, совершенная в единицу времени, называется мощностью

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$

В этом случае выражение для работы приобретает вид

$$A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt. \quad (21)$$

Из (21) следует, что если сила, действующая на точку, перпендикулярна к скорости, то работа такой силы равна нулю. Воспользовавшись выражениями  $\vec{p} = m\vec{v}$ ,  $d\vec{p} = m \cdot d\vec{v}$ ,  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  и (21), можно записать

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \vec{v} dt = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{v} dt = \int_1^2 \vec{v} d\vec{p} = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (22)$$

Скалярная величина  $K = \frac{mv^2}{2}$  называется *кинетической энергией*.

Следующее из (22) выражение  $A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$  является **теоремой**

**о кинетической энергии:** работа результирующей силы по перемещению материальной точки равна приращению ее кинетической энергии.



По результату действия на тело силы отличаются и поэтому разделяются на *консервативные* и *неконсервативные силы*. Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы траектории (пути) между двумя точками пространства, а зависит только от начального и конечного положений тела. Иначе говоря, работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю. Примером консервативных сил является сила тяжести. Работа силы тяжести, с учетом скалярного произведения векторов  $\vec{g}$  и  $\vec{r}_{1,2}$  (рис. 2.1), определяется выражением

$$A_{12} = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = m\vec{g}\vec{r}_{1,2} = mg(h_1 - h_2).$$

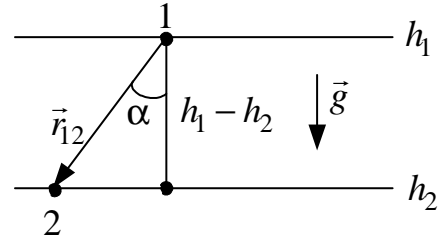


Рис. 2.1.

Скалярная величина  $\Pi = mgh$  называется *потенциальной энергией*.

Поскольку, с одной стороны, выполняется теорема о кинетической энергии, а с другой – работа определяется изменением потенциальной энергии, взятой с обратным знаком

$$A_{12} = \Delta K = \frac{m\nu_2^2}{2} - \frac{m\nu_1^2}{2} \quad \text{и} \quad A_{12} = -\Delta\Pi = mgh_1 - mgh_2,$$

то можно прийти к выводу:

$$mgh_1 + \frac{m\nu_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{m\nu_2^2}{2}.$$

Таким образом, при движении в *поле силы тяжести* сохраняется *полная* механическая энергия, которая складывается из кинетической ( $K = \frac{m\nu^2}{2}$ ) и потенциальной энергий ( $\Pi = mgh$ )

$$W = \frac{m\nu^2}{2} + mgh = \text{const}. \quad (23)$$

К консервативным силам относятся *центральные силы*. Это силы, всегда направленные по радиус-вектору, соединяющему материальную точку и некоторую точку в пространстве, и зависящие только от расстояния до этой точки. Сама эта точка называется *центром силы* или *силовым центром*. В качестве примера рассмотрим силу гравитационного взаимодействия

$$\vec{F} = \gamma \frac{mM}{r^3} \vec{r}.$$

Совместим начало отсчета с точкой  $O$ , где расположен центр масс тела массой  $M$  (силовой центр) (рис. 2.2). Работа гравитационной силы по

перемещению материальной точки массой  $m$  из положения 1 в положение 2 определяется выражением

$$A_{12} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 F(r) dr_F = - \int_{r_2}^{r_1} \gamma \frac{mM}{r^2} dr_F = \gamma mM \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (24)$$

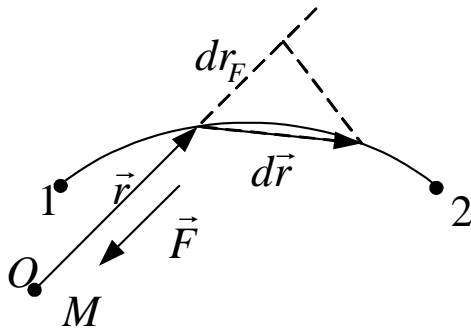


Рис. 2.2

где  $dr_F = dr \cos \alpha$  – проекция вектора  $d\vec{r}$  на линию действия силы  $\vec{F}$  (см. рис. 2.2).

Знак «-» в формуле (24) возникает в результате скалярного произведения векторов  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ , угол между которыми является тупым.

Величину  $\Pi = -\gamma \frac{mM}{r}$  называют *потенциальной энергией* тела массой  $m$  в

гравитационном поле тела (силового центра) массой  $M$ .

Для количественной характеристики силового поля в данной точке используют понятия *напряженности* (силовая характеристика) и *потенциала* (энергетическая характеристика) поля.

*Напряженность поля* определяют как силу, действующую в данной точке поля на материальную точку единичной массы,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = \gamma \frac{M}{r^3} \vec{r}. \quad (25)$$

Векторы силы и напряженности совпадают по направлению. Силовые поля можно изобразить с помощью *силовых линий* – это линии, касательные к которым в каждой точке пространства совпадают с направлением вектора напряженности.

Потенциал поля в данной точке соответствует потенциальной энергии тела единичной массы

$$\varphi = \frac{\Pi}{m} = -\gamma \frac{M}{r}, \quad (26)$$

или определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении тела единичной массы из данной точки в точку на бесконечном расстоянии от силового центра.

Геометрическое место точек поля, обладающих одинаковым потенциалом, называют *эквипотенциальной поверхностью* (рис. 2.3). Силовые линии в любой точке поля всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

Между силовой ( $\vec{E}$ ) и энергетической ( $\varphi$ ) характеристиками потенциального поля существует связь:

$$d\varphi = -E_r dr$$

или

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad (27)$$

где  $E_r$  – проекция вектора напряженности на направление вектора  $\vec{r}$ ;  $r$  – расстояние от силового центра до рассматриваемой точки поля.

Если поле создано несколькими силовыми центрами, то результирующая напряженность и потенциал определяются по принципу суперпозиции полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i; \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Принцип суперпозиции является следствием **принципа независимости действия сил**: *результатирующее ускорение, которое приобретает материальная точка под действие нескольких сил, есть векторная сумма ускорений, которое сообщает материальной точке каждая сила в отдельности.*

Силы, не являющиеся центральными, называют *неконсервативными силами*. К ним, прежде всего, относятся *диссипативные силы* (преобразующие механическую энергию в другие виды энергии), например, силы трения.

Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы материальных точек из ее некоторого начального состояния в другое состояние, принимаемое за начало отсчета потенциальной энергии (может приниматься произвольно), называется *потенциальной энергией* системы материальных точек в этом начальном состоянии. При этом потенциальная энергия системы материальных точек является функцией только координат системы. Обычно начало отсчета потенциальной энергии (нулевой уровень) выбирается таким образом, чтобы расчет потенциальной энергии был наиболее прост.

У систем, на которые действуют только консервативные силы, полная механическая энергия остается неизменной, поскольку могут происходить только превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно.

Изменение потенциальной энергии системы в поле консервативных сил можно определять, используя понятие центра масс системы.



Рис. 2.3

Зная действующую на центр масс силу как функцию координат  $\vec{F}(x, y, z)$ , потенциальную энергию можно определить интегрированием

$$\Delta\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1) - \Pi(0) = -A_{01} = A_{10} = \int_1^0 \vec{F}(r) d\vec{r}.$$

Другая задача – вычисление силы  $\vec{F}(x, y, z)$  по заданной потенциальной энергии  $\Pi(x, y, z)$  решается дифференцированием; поскольку  $d\Pi = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ , то

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z};$$

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left( \frac{\partial\Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z} \vec{k} \right), \quad (28)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные ортогональные векторы. Величина, стоящая в скобках, является *градиентом потенциальной энергии*. Градиент скалярной функции – это вектор, указывающий, в каком направлении и как быстро изменяется данная скалярная величина.

Выражение (28) можно переписать в виде

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi,$$

т.е. сила  $\vec{F}$  поля равна минус градиенту потенциальной энергии.

Учитывая эквивалентность работы и энергии, работу по перемещению материальной точки  $m$  из положения 1 в положение 2 в поле консервативных сил можно определить, используя разность потенциалов поля между этими точками:

$$A_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2),$$

причем указанная материальная точка  $m$  может быть центром масс системы материальных точек.

Силы взаимодействия материальных точек, образующих систему (внутренние силы), также обуславливают потенциальную энергию системы материальных точек. Изменение этой энергии зависит от изменения расстояний между материальными точками системы (деформации системы). Примером потенциальной энергии деформации (упругого сжатия или растяжения системы материальных точек) является потенциальная энергия деформации пружины

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

где  $k$  – жесткость пружины, зависящая от геометрических размеров пружины и свойств материала,  $x$  – абсолютное изменение длины пружины при деформации.

В общем случае на  $i$ -тую материальную точку системы могут действовать внутренние силы  $\vec{F}_{ik}$  со стороны  $k$ -той точки системы, внешняя консервативная сила  $\vec{F}_i$  и внешняя неконсервативная сила  $\vec{F}_i^*$ . Уравнение движения  $i$ -той точки в этом случае имеет вид

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^*, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Умножив скалярно обе части уравнения на  $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$  и сложив уравнения всех  $N$  точек, получаем

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N \vec{F}_{ik} \right) d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* d\vec{r}_i.$$

Левая часть соответствует приращению кинетической энергии

$$dK = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i.$$

Правая часть содержит слагаемые:

– убыль потенциальной энергии взаимодействия между материальными точками, образующими систему,

$$-d\Pi_{\text{вз}} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N \vec{F}_{ik} \right) d\vec{r}_i;$$

– убыль потенциальной энергии материальной точки во внешнем поле консервативных сил

$$-d\Pi_{\text{вн}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i;$$

– работа внешних неконсервативных сил

$$dA_{\text{вн}}^* = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* d\vec{r}_i.$$

После несложных преобразований получаем **закон изменения механической энергии** в виде

$$d(K + \Pi_{\text{вз}} + \Pi_{\text{вн}}) = dA_{\text{вн}}^*.$$

Величину  $W = K + \Pi_{\text{вз}} + \Pi_{\text{вн}}$  называют полной механической энергией системы материальных точек. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то полная механическая энергия системы сохраняется:

$$W = K + \Pi_{\text{вз}} + \Pi_{\text{вн}} = \text{const}. \quad (29)$$

Полная механическая энергия замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.

Если в замкнутой системе кроме консервативных сил действуют также внутренние неконсервативные силы (силы трения), то полная механическая энергия системы не сохраняется:

$$dW = d(K + \Pi_{\text{вз}}) = dA_{\text{внут}}.$$

Действие сил трения приводит к диссипации части полной механической энергии, т.е. превращению ее в другие виды энергии, при этом выполняется более общий закон сохранения энергии (механической и немеханической).

Важным применением законов сохранения является установление соотношений между начальными и конечными параметрами движения, например, до и после столкновения тел.

Под *столкновением* понимают процесс взаимодействия, сопровождающийся обменом импульсами и энергиями, в результате чего могут происходить различные процессы (тела могут соединяться в одно; могут возникать новые тела и т.д.).

Различают *упругие столкновения*, которые происходят без перехода механической энергии в другой вид энергии (без изменения внутреннего состояния взаимодействующих тел), и *неупругие столкновения*, сопровождающиеся преобразованием части механической энергии в другой вид и изменением внутреннего состояния взаимодействующих тел.

Наиболее простым случаем является упругое столкновение двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся вдоль одной прямой (так называемый *центральный удар* двух тел). Обозначим скорости и импульсы материальных точек до взаимодействия  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1, \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$  и после взаимодействия  $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{p}'_1 = m_1\vec{v}'_1, \vec{p}'_2 = m_2\vec{v}'_2$ .

Закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{(p'_1)^2}{2m_1} + \frac{(p'_2)^2}{2m_2} \quad \text{или} \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}.$$

Закон сохранения импульса  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ .

После несложных преобразований получаем

$$\vec{p}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{p}_1 + 2m_2\vec{p}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{p}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{p}_2 + 2m_1\vec{p}_1}{m_1 + m_2}$$

или

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (30)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

**А.**  $\vec{p}_2 = 0$  – вторая частица до взаимодействия покоилась (рис. 2.4):

$$p'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 \quad \text{или} \quad v'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1;$$

$$p'_{2x} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1; \quad v'_{2x} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_1. \quad (31)$$

Если  $m_1 = m_2$ , то частицы обмениваются скоростями ( $v'_{1x} = 0$ ,  $v'_{2x} = v_1$ ).

Если  $m_1 \ll m_2$ , то покоящаяся частица (стена) останется на месте, а налетающая отскочит назад с той же скоростью:  $v'_{1x} \approx -v_1$ ;  $v'_{2x} \approx 0$ .

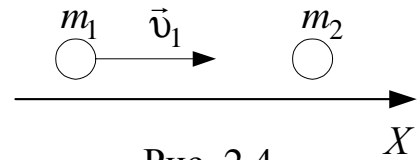


Рис. 2.4

Если  $m_1 \gg m_2$ , то налетающая частица продолжит движение с той же скоростью, а покоящаяся отлетит с удвоенной скоростью:  $v'_{1x} \approx v_1$ ;  $v'_{2x} \approx 2v_1$ .

**Б.** Шары движутся навстречу друг другу (рис. 2.5). В этом случае можно использовать формулы (31).

**В.** Шары догоняют друг друга (рис. 2.6). Необходимо отметить, что столкновение возможно только в том случае, если  $v_1 > v_2$ . Иначе первый шар не догонит второй.

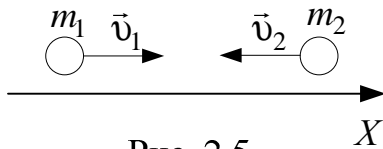


Рис. 2.5

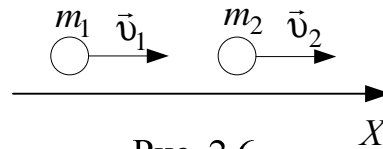


Рис. 2.6

Частным случаем неупругого столкновения тела массой  $m_1$  с неподвижным телом массой  $m_2$  является абсолютно неупругий удар, после которого частицы  $m_1$  и  $m_2$  (после удара) образуют единое целое, движущееся со скоростью  $\vec{v}'$ .

Закон сохранения импульса  $\vec{p}_1 = \vec{p}'$ , где  $p' = (m_1 + m_2)v'$ .

Начальная кинетическая энергия  $K = p_1^2 / 2m_1$ .

После столкновения  $K' = \frac{(p')^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{(p_1)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} K$ .

Часть механической энергии при неупругом столкновении переходит в другой вид, например, превращается в тепло  $Q$

$$Q = K - K' = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K.$$

Полученные для столкновений материальных точек соотношения могут быть использованы при изучении взаимодействия атомов и элементарных частиц.

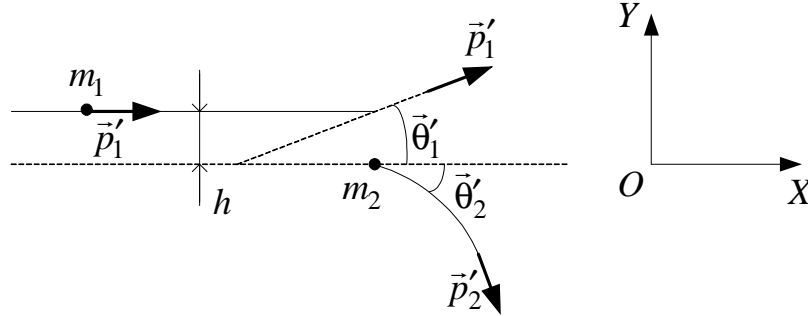


Рис. 2.7

Поскольку эти взаимодействия обусловлены существованием сил притяжения и отталкивания (центральные силы), то соотношения имеют более сложный вид. Однако, как и ранее, они определяются

законами сохранения импульса и энергии. Для реальных тел, которые можно считать материальными точками, но конечных поперечных размеров, результат их взаимодействия может отличаться от рассмотренного ранее. Такое столкновение, показанное на рис. 2.7, получило название «*рассеяние частиц*».

Параметр  $h$  носит название *прицельного расстояния* (*прицельный параметр*) и характеризует степень отклонения от центрального (лобового) удара. Для упругого столкновения законы сохранения с учетом выбранной системы координат могут быть записаны в виде

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 (v_1')^2}{2} + \frac{m_2 (v_2')^2}{2};$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos \theta_1' + m_2 v_2' \cos \theta_2';$$

$$0 = m_1 v_1' \sin \theta_1' + m_2 v_2' \sin \theta_2'.$$

Эта система уравнений при определенных допущениях позволяет связать прицельный параметр  $h$  и начальные скорости  $v_1$  и  $v_2$  с углами рассеяния  $\theta_1'$  и  $\theta_2'$  и скоростями после рассеяния  $v_1'$  и  $v_2'$  взаимодействующих частиц  $m_1$  и  $m_2$ .



## 2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Динамика поступательного движения. Основные понятия и законы</b>            Законы Ньютона. Понятия импульса тела, импульса силы.            Силы в механике. Сложение сил. Законы всемирного тяготения, Гаука, Архимеда.            Центр масс системы материальных точек. Закон сохранения импульса</p>	<p>лекция + самост.            лекция + самост.            лекция + самост.</p>	<p>[5], пп. 1.7 – 1.10            [8], п. 2.2            [7], пп. 2.1 – 2.4            [5], п. 1.8            [8], п. 3.3            [7], п. 2.5;            [5], п. 1.12</p>	<p>1. Сформулируйте законы Ньютона.            2. Сила. Что она характеризует? Примеры сил.            3. Что определяет импульс силы? Как связан импульс силы с изменением импульса тела?            4. В каких случаях применим закон сохранения импульса? Когда применение этого закона невозможно?            5. Как найти положение центра масс системы материальных точек? Что он характеризует?            6. Как движется центр масс при свободном падении тела?</p>
<p><b>Законы сохранения в механике материальных точек</b>            Работа и энергия в механике. Кинетическая энергия. Мощность. Эквивалентность работы и энергии.            Полная механическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.            Поле сил. Центральные силы и потенциальная энергия.            Законы сохранения при упругих и неупругих взаимодействиях. Рассеяние частиц</p>	<p>лекция            лекция + самост.            лекция            лекция</p>	<p>[5], п. 1.14            [10], п. 13            [5], п. 1.18            [8], п. 4.1            [3], п. 5.4            [[5], пп. 1.19 – 3.5            [8], пп. 3.3 – 3.5,            [10], п. 1.5</p>	<p>1. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. Что изменится при появлении сил диссипации?            2. Как определить работу переменной силы?            3. В каком случае сила, действующая на тело, не совершает работы?            4. В каких случаях не применим закон сохранения механической энергии?            5. Какие характеристики поля вы знаете? Что они характеризуют?            6. Столкновения. Какой импульс передаст материальная точка при упругом ударе о стену?</p>

### 2.3. Методические указания к практическим занятиям

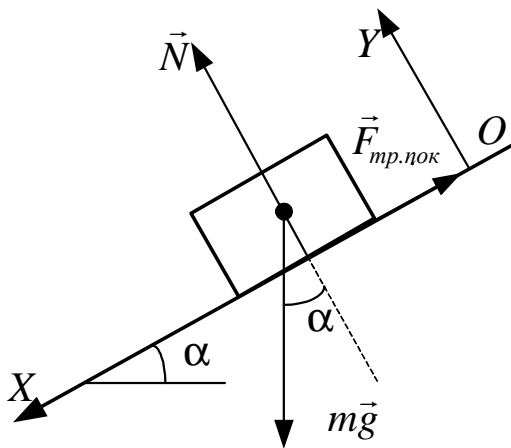
Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
1	2	3	4
Силы. Законы Ньютона	<p>Определение закона движения материальной точки или системы материальных точек по известным силам</p> <p>Определение силы по известному закону движения материальной точки</p>	<p>1. Сделать чертеж, указав все тела и связи между ними (нити, пружины и т.д.).</p> <p>2. Изобразить все силы, приложенные к телам, движение которых изучается. При этом необходимо учитывать, что на данное тело могут действовать силы только со стороны других объектов: со стороны Земли – <math>m\vec{g}</math>; со стороны пружины – <math>(-k\vec{x})</math>; со стороны опоры – сила реакции – <math>\vec{N}</math>; со стороны соприкасающихся тел – сила трения <math>\vec{F}_{тр}</math>.</p> <p>При изображении сил, приложенных к телу, не обязательно их прикладывать к строго определенным точкам (например, силу тяжести – к центру масс); можно воспользоваться правилом переноса векторов сил вдоль линии их действия.</p> <p>3. Если в задаче рассматривается движение системы из нескольких тел, связанных между собой, то для каждого из них можно выбрать свою систему отсчета, направив одну из координатных осей по направлению движения этого тела.</p> <p>4. Для каждого из тел записать второй закон Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат.</p> <p>5. Дополнить уравнения динамики кинематическими соотношениями так, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных, и решить полученную систему уравнений.</p>	<p>[2], №№ 2.2, 2.4 – 2.8, 2.12 – 2.15 [12], №№ 2.2 – 2.8</p> <p>[2], №№ 2.29 – 2.32 [11], №№ 1.47 – 1.61</p>
Законы сохранения. Столкновения	<p>Определение кинематических параметров тел после соударения</p>	<p>1. Сделать чертеж, на котором указать начальные и конечные импульсы тел системы и направление внешних сил. Векторы <math>\vec{p}_1</math>, <math>\vec{p}_2</math> и <math>\vec{F}_{вн}\Delta t</math> должны образовывать замкнутый треугольник векторов.</p> <p>2. Выбрать систему координат так, чтобы удобнее было проецировать на них векторы.</p> <p>3. Записать уравнения закона сохранения импульса и энергии и второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие оси.</p> <p>4. Дополнить систему уравнений кинематическими соотношениями, чтобы полная система уравнений стала замкнутой</p>	<p>[2], №№ 2.62 – 2.70 [12], №№ 2.83 – 2.91 [11], №№ 1.105, 1.113 – 1.115</p>

1	2	3	4
Законы сохранения. Столкновения	<p>Определение работы силы и ее мощности</p>	<p>1. Сделать чертёж, на котором указать все силы, действующие на тело.</p> <p>2. Выянить – работу какой силы нужно найти. В ее качестве может выступать и равнодействующая сила. Если сила неизвестна из условия задачи, то ее следует найти из уравнений динамики (см. выше).</p> <p>3. Определить угол <math>\alpha</math> между направлениями векторов перемещения и силы, а также проекцию вектора силы на направление движения тела <math>F_s</math>.</p> <p>4. Используя кинематические соотношения, определить вектор перемещения или пределы изменения координаты.</p> <p>5. Вычислить работу по одному из соотношений: <math>A_{12} = \int_1^2 F_s(s) ds</math>; <math>A_{12} = F_s \cos \alpha = F_s s</math>;</p> $A_{12} = \int_1^2 P(t) dt.$ <p>6. Вычислить мощность силы по одному из подходящих соотношений: <math>P = dA/dt</math>, <math>P = \vec{F}\vec{v}</math>.</p>	<p>[2], №№ 2.62 – 2.70 [12], №№ 2.57 – 2.69 [11], №№ 1.81 – 1.94</p>
	<p>Определение полной механической энергии и ее составляющих</p>	<p>1. Сделать чертёж, на котором изобразить систему в двух (нескольких) положениях.</p> <p>2. Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Если тело расположено выше нулевого уровня, то потенциальная энергия в поле силы тяжести положительная, если ниже – отрицательная.</p> <p>3. Если в системе присутствуют диссипативные силы, то необходимо определить работу этих сил.</p> <p>4. Применить закон сохранения механической энергии или изменения механической энергии с учетом работы сил трения.</p> <p>5. Дополнить полученные уравнения требуемым числом уравнений динамики, так, чтобы общее число уравнений соответствовало числу неизвестных величин.</p> <p>Иногда целесообразно записать закон сохранения энергии для начального и конечного состояний и дополнить его законом сохранения для каких-либо промежуточных состояний.</p> <p>Необходимо учитывать, что при переходе к различным движущимся инерциальным системам отсчета полная энергия меняется, поэтому целесообразно использовать неподвижные относительно Земли системы отсчета</p>	<p>[2], № № 2.117 – 2.123 [12], №№ 2.70 – 2.90</p>

## 2.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** У бруска одна сторона гладкая, а другая шероховатая. Если его положить на наклонную плоскость шероховатой стороной, он будет находиться в равновесии на грани соскальзывания. С каким ускорением брусок будет соскальзывать, если его перевернуть? Коэффициент трения между шероховатой стороной бруска и поверхностью наклонной плоскости равен  $\mu = 0,2$ . (Уровень 2).

**Решение.** Рассмотрим равновесие бруска на наклонной плоскости, когда он лежит на ней шероховатой стороной.



На брусок действуют три силы: сила тяжести  $m\vec{g}$  (где  $m$  – масса бруска), сила реакции поверхности плоскости  $\vec{N}$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{тр.пок}$ , препятствующая соскальзыванию бруска (см. рисунок).

Направим ось  $OX$  системы координат вдоль наклонной плоскости и запишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.пок},$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX : ma = mg \sin \alpha - F_{тр.пок}; \quad (1)$$

$$OY : 0 = N - mg \cos \alpha, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – угол, который наклонная плоскость образует с горизонтом.

Учитывая, что тело находится в равновесии на грани соскальзывания,  $\vec{a} = 0$ ,  $F_{тр.пок} = \mu N$ , из (1) и (2) находим

$$F_{тр.пок} = \mu mg \cos \alpha; \quad 0 = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha;$$

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Полученный результат позволяет сделать полезный вывод: если коэффициент трения между телом и поверхностью наклонной плоскости удовлетворяет условию  $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ , то тело будет находиться в равновесии и самопроизвольно не будет соскальзывать с плоскости; если  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ , то тело будет находиться в равновесии на грани соскальзывания; если  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ , то тело будет соскальзывать с плоскости.

Рассмотрим движение бруска по наклонной плоскости, когда он лежит на ней гладкой стороной ( $\mu = 0$ ). Теперь на брусок действуют две силы: сила тяжести и сила реакции. Легко понять, что уравнения движения бруска в проекциях на оси системы координат совпадут с уравнениями (1) и (2) при  $F_{mp.} = 0$ . Поскольку в выбранной системе координат перемещение по оси  $OY$  отсутствует, то для описания движения достаточно уравнения движения в проекции на ось  $OX$ :

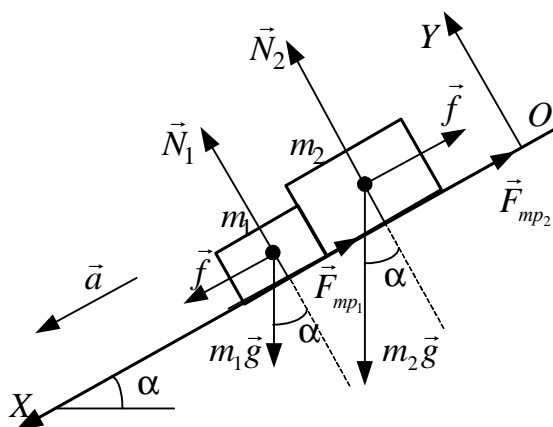
$$OX : ma = mg \sin \alpha .$$

Отсюда находим  $a = g \sin \alpha$ , или с учетом выражения (3)

$$a = g \sin \alpha = g \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = g \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \approx 1,9 \text{ м/с}^2 .$$

Ответ:  $a = g \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \approx 1,9 \text{ м/с}^2$ .

**Пример 2.** На наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, удерживают два соприкасающихся бруска так, как показано на рисунке. Массы брусков  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг, коэффициенты трения брусков о плоскость равны  $\mu_1 = 0,25$  и  $\mu_2 = 0,1$  соответственно. Найти силу  $f$  взаимодействия между брусками, если их отпустить. (**Уровень 2**).



**Решение.** Поскольку коэффициенты трения брусков меньше  $\operatorname{tg} \alpha \approx 0,58$ , то каждый из брусков, будучи предоставленным самому себе, соскальзывал бы с наклонной плоскости. Если бруски начинают движение из положения, показанного на рисунке, то возможны два различных варианта движения брусков:

- брусок массой  $m_1$  движется быстрее бруска массой  $m_2$ . В этом случае сила взаимодействия между брусками  $f = 0$ ;
- бруски движутся вместе с одинаковыми ускорениями.

Выясним, какой случай соответствует условию данной задачи. Для этого найдем ускорения брусков  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , если бы они двигались независимо друг от друга.

На каждый из брусков при этом действуют три силы: тяжести  $m\vec{g}$ , реакции опоры  $\vec{N}$  и трения  $\vec{F}_{mp}$ . Запишем уравнения движения брусков

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp}; \quad m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{mp}$$

в проекциях на оси системы координат:

$$OX: \quad m_1a_1 = m_1g \sin \alpha - F_{mp1};$$

$$OY: \quad 0 = N_1 - m_1g \cos \alpha;$$

$$OX: \quad m_2a_2 = m_2g \sin \alpha - F_{mp2};$$

$$OY: \quad 0 = N_2 - m_2g \cos \alpha,$$

или с учетом соотношений  $F_{mp1} = \mu_1 N_1$ , и  $F_{mp2} = \mu_2 N_2$ :

$$a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha); \quad a_2 = g(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha).$$

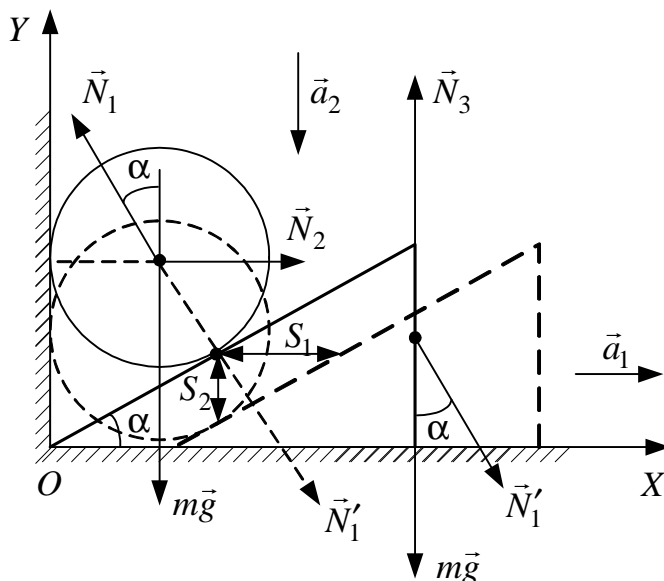
Так как по условию задачи  $\mu_1 > \mu_2$ , то, очевидно,  $a_1 < a_2$ . Следовательно, бруски будут двигаться вместе с одинаковым ускорением, величину которого найдем из уравнений движения при условии, что бруски взаимодействуют между собой с силой  $\vec{f}$ :

$$m_1a = m_1g \sin \alpha - \mu_1 m_1g \cos \alpha + f; \quad m_2a = m_2g \sin \alpha - \mu_2 m_2g \cos \alpha - f.$$

Отсюда находим

$$f = \frac{m_1 m_2 (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2} g \approx 0,85 \text{ Н.}$$

$$\text{Ответ: } f = \frac{m_1 m_2 (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2} g \approx 0,85 \text{ Н.}$$



**Пример 3.** Между наклонной плоскостью клина, расположенного на горизонтальной поверхности, и вертикальной стенкой кладут шар такой же массы, что и клин (см. рисунок). Определить ускорение клина, если угол при его основании  $\alpha = 30^\circ$ . Трение не учитывать. (Уровень 4).

**Решение.** На шар действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила реакции  $\vec{N}_1$  со стороны клина

и сила реакции  $\vec{N}_2$  стенки. На клин действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила давления  $\vec{N}'_1$  со стороны шара и сила реакции  $\vec{N}_3$  пола. Под действием этих сил шар будет двигаться вертикально вниз с ускорением  $\vec{a}_2$ , а клин – горизонтально с ускорением  $\vec{a}_1$ .

Запишем уравнения движения клина и шара

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N}'_1 + \vec{N}_3; \quad m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2$$

в проекциях на оси системы координат  $XOY$ :

$$OX: ma_1 = N_1 \sin \alpha; \quad (1)$$

$$OY: -ma_2 = -mg + N_1 \cos \alpha, \quad (2)$$

где учтено, что  $N_1 = N'_1$ .

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо еще одно соотношение, связывающее какие-либо из неизвестных величин –  $a_1$ ,  $a_2$  и  $N_1$ . Поскольку связь между ускорениями  $a_1$ ,  $a_2$  и силой  $N_1$  дают уравнения движения (1), (2), то, очевидно, нужно найти связь между ускорениями тел.

Из рисунка видно, что если шар опустится на расстояние  $S_2$ , то клин сместится на  $S_1$ , причем

$$S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}; \quad S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}; \quad S_2 = S_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

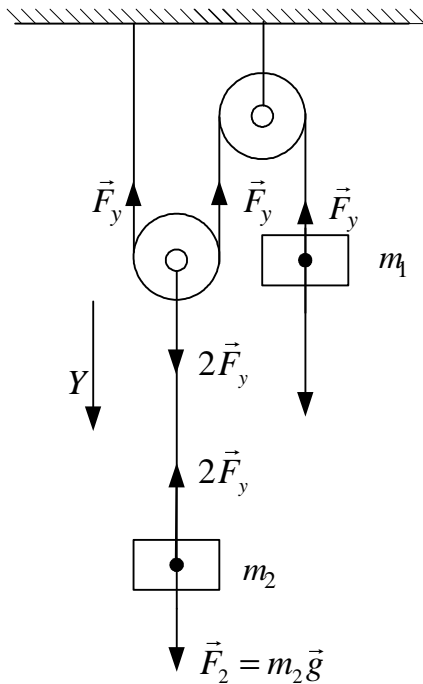
Решив систему уравнений (1) – (3) относительно  $a_1$ , получим

$$N_1 = \frac{ma_1}{\sin \alpha}; \quad ma_2 = mg - \frac{ma_1}{\sin \alpha} \cos \alpha; \quad a_1 \operatorname{tg} \alpha = g - \frac{a_1}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$a = a_1 = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx 4,24 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx 4,24 \text{ м/с}^2.$$

**Пример 4.** Два тела, имеющие массы  $m_1 = 10$  кг и  $m_2 = 25$  кг, подвешены на блоках, как показано на рисунке. Найдите натяжение нитей и силы давления на оси блоков. Трением, массой блоков и нитей пренебечь. Нить считать нерастяжимой. (Уровень 3).



**Решение.** Допустим, что тело 2, подвешенное к подвижному блоку, опускается.

За время  $t$  тело 2 опустится на высоту

$$h = \frac{a_2 t^2}{2},$$

а тело 1 поднимется на высоту  $2h = \frac{a_1 t^2}{2}$ , поэтому  $a_1 = 2a_2$ . Тела движутся с

различными ускорениями. Применим второй закон Ньютона к каждому телу в отдельности. Систему отсчета свяжем с Землей, и ось  $Y$  направим по направлению

движения тел. Тогда запишем:  $\vec{F}_y + \vec{F}_1 = m_1 \vec{a}$ ;

$$\vec{F}_2 + 2\vec{F}_y = m_2 \vec{a}$$

или

$$m_2 g - 2F_y = m_2 a_2; \quad -F_y + m_1 g = -m_1 a_1.$$

Полученное положительное значение  $a_2$  подтверждает предположенное направление движения тел. Решив эту систему уравнений, найдем  $a_2 = \frac{g(m_2 - 2m_1)}{m_2 + 4m_1} = 0,77 \text{ м/с}^2$ . Сила натяжения нитей

$$F_y = m_1(2a_2 + g) = 113,4 \text{ Н}.$$

Сила давления на оси блоков  $2F_y = 226,8 \text{ Н}$ .

$$\text{Ответ: } F_y = m_1(2a_2 + g) = 113,4 \text{ Н}; \quad 2F_y = 226,8 \text{ Н}.$$

**Пример 5.** Мяч массой  $m = 60 \text{ г}$  свободно падает на пол с высоты  $H = 2 \text{ м}$  и подскакивает на высоту  $h = 1 \text{ м}$ . Определить продолжительность удара, если среднее значение реакции пола  $\langle F \rangle = 2 \text{ Н}$ . Сопротивлением воздуха пренебречь. (Уровень 3).

**Решение.** При падении с высоты  $H$  на пол мяч приобретает некоторую скорость  $\vec{v}_1$  и в момент касания поверхности пола имеет импульс  $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ . Поскольку за время удара  $\Delta t$  мяч действует на пол со средней силой  $\langle \vec{F} \rangle$ , то по третьему закону Ньютона пол действует на мяч с такой же по величине силой  $\langle \vec{F}' \rangle = -\langle \vec{F} \rangle$ , но направленной противоположно силе  $\langle \vec{F} \rangle$ . Кроме силы  $\langle \vec{F}' \rangle$  во время удара на мяч действует сила тяжести  $m\vec{g}$ . Под действием импульсов этих сил импульс мяча изменяется и становится равным  $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ .



Запишем второй закон Ньютона в виде

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = (\langle \vec{F}' \rangle + m\vec{g})\Delta t$$

в проекции на ось  $OX$  системы координат (см. рисунок):

$$p_2 + p_1 = (\langle F' \rangle - mg)\Delta t$$

или

$$m(v_1 + v_2) = (\langle F \rangle - mg)\Delta t.$$

Скорость мяча  $\vec{v}_1$  в момент касания пола и скорость  $\vec{v}_2$  в момент отскока найдем, записав кинематические уравнения движения мяча вблизи поверхности Земли:

а) при падении мяча вниз

$$H = \frac{1}{2}gt_1^2; \quad v_1 = gt_1;$$

б) при движении мяча вверх

$$h = v_2t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2; \quad 0 = v_2 - gt_2.$$

Отсюда находим

$$v_1 = \sqrt{2gH}; \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

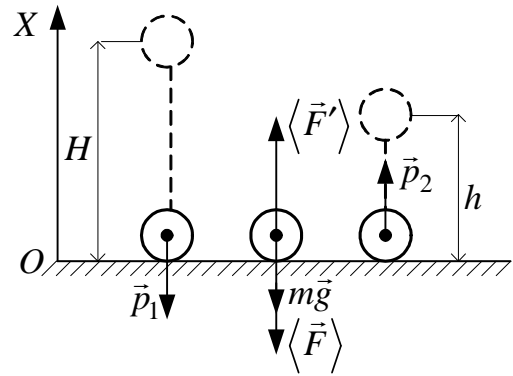
Следовательно,

$$m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh}) = (\langle F \rangle - mg)\Delta t,$$

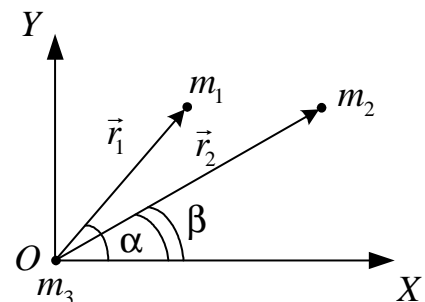
а искомая продолжительность удара

$$\Delta t = \frac{m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh})}{\langle F \rangle - mg} \approx 0,45 \text{ с.}$$

Ответ:  $\Delta t = \frac{m(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh})}{\langle F \rangle - mg} \approx 0,45 \text{ с.}$



**Пример 6.** Определить центр масс материальных точек, изображенных на рисунке и лежащих в плоскости листа. Массы точек  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = 3$  кг, углы  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , радиус-векторы  $r_1 = 1$  м,  $r_2 = 2$  м. (Уровень 2).



**Решение.** Для решения задачи введем систему координат  $XOY$ , оси которой показаны на рисунке. Определить центр масс системы материальных точек означает определить координаты  $X_c$  и  $Y_c$  центра масс. Пусть положение центра масс определяется радиус-вектором  $\vec{r}_c$ . Тогда условие для определения центра масс можно записать в виде

$$\vec{r}_c M_c = m_3 \vec{0} + m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2. \quad (1)$$

Запишем это условие в проекциях на координаты:

$$\begin{aligned} \text{на ось } OX: \quad M_c X_c &= m_1 r_1 \cos \alpha + m_2 r_2 \cos \beta + m_3 0; \\ \text{на ось } OY: \quad M_c Y_c &= m_1 r_1 \sin \alpha + m_2 r_2 \sin \beta + m_3 0, \end{aligned} \quad (2)$$

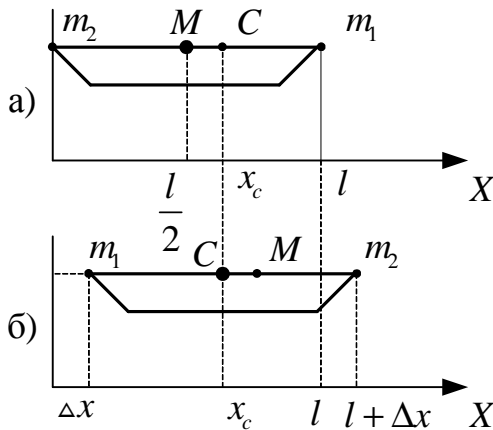
где  $M_c = m_1 + m_2 + m_3$ .

Решая (2), получим

$$x_c = \frac{m_1 r_1 \cos 45^\circ + m_2 r_2 \cos 30^\circ}{m_1 + m_2 + m_3} = 0,695;$$

$$y_c = \frac{m_1 r_1 \sin 45^\circ + m_2 r_2 \sin 30^\circ}{m_1 + m_2 + m_3} = 0,451.$$

*Ответ:*  $x_c = 0,695$  м,  $y_c = 0,451$  м.



$C$  – центр масс;  $M$  – центр масс лодки

**Пример 7.** Лодка длиной  $l = 3$  м и массой  $M = 120$  кг стоит на спокойной воде (см. рисунок). На носу и корме находятся два рыбака массой  $m_1 = 90$  кг и  $m_2 = 60$  кг. На какое расстояние сместится лодка относительно воды, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь. (**Уровень 3**).

**Решение.** Будем рассматривать лодку и рыбаков как одну

систему. На тела системы действуют внешние силы: сила тяжести и сила Архимеда. Обе эти силы направлены вертикально, и их результирующая равна нулю. Поскольку по условию задачи сопротивлением воды следует пренебречь, внешние силы в горизонтальном направлении на систему не

действуют. Следовательно, в направлении возможного перемещения лодки система «лодка – рыбаки» замкнута, и проекция импульса на ось  $OX$  меняться не будет.

Представим импульс системы в виде

$$\vec{P} = M_{сист} \vec{v}_c,$$

где  $M_{сист} = M + m_1 + m_2$  – масса системы;  $\vec{v}_c$  – скорость ее центра масс.

Так как при перемещении рыбаков  $(\vec{P})_x = \text{const}$ , то и  $\vec{v}_c = \text{const}$ . Поскольку лодка и рыбаки первоначально покоились, то проекция  $v_{cx} = 0$ , т.е. при перемещении рыбаков положение центра масс системы не изменит своего положения относительно воды, но изменит свое положение относительно лодки на  $\Delta x$ .

В начальный момент координата центра масс лодки с рыбаками определяется равенством  $m_2 \cdot 0 = M \frac{l}{2} + m_1 l = (m_1 + m_2 + m_3) x_c$ , из которого следует

$$x_c = \frac{M \frac{l}{2} + m_1 l}{m_1 + m_2 + M}. \quad (1)$$

Во время перемещения рыбаков по лодке она движется так, чтобы положение центра масс системы оставалось неизменным. Учитывая, что  $m_1 > m_2$ , смещение центра масс системы относительно лодки произойдет влево, а смещение лодки – вправо, также на величину  $\Delta x$ .

$$m_1 \Delta x + M \left( \Delta x + \frac{l}{2} \right) + m_2 (l + \Delta x) = (m_1 + m_2 + M) x_c$$

и

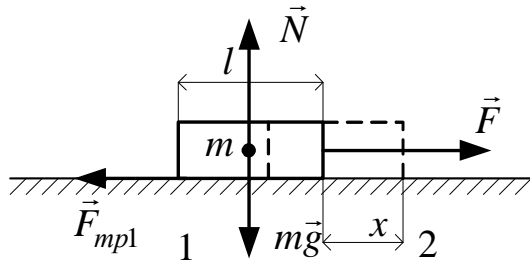
$$x_c = \frac{m_1 \Delta x + M \left( \Delta x + \frac{l}{2} \right) + m_2 (l + \Delta x)}{m_1 + m_2 + M}, \quad (2)$$

где  $\Delta x$  – смещение лодки относительно неподвижной системы отсчета (см. рисунок, б).

Приравнивая правые части соотношений (1) и (2), получаем

$$\Delta x = l \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} \approx 0,33 \text{ м.}$$

*Ответ:*  $\Delta x = l \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} \approx 0,33 \text{ м.}$



**Пример 8.** Брусок массой  $m$  и длиной  $l$  лежит на стыке двух горизонтальных столов (см. рисунок). Какую минимальную работу надо совершить, чтобы перетащить тело волоком с первого стола на второй, если коэффициенты трения между телом и столами соответственно равны  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ? Сила к бруску прикладывается горизонтально. (Уровень 3).

**Решение.** Рассмотрим промежуточное положение бруска, соответствующее длине  $x$  его части, находящейся на втором столе. Чтобы совершить минимальную работу по перетаскиванию бруска, к нему необходимо приложить горизонтальную силу  $\vec{F}$ , которая по величине должна быть равна сумме сил трения  $F_{mp1}$  и  $F_{mp2}$ , действующих на брусок со стороны первого и второго столов:

$$F = F_{mp1} + F_{mp2}.$$

Поскольку силы реакции  $N_1 = m_1 g$ ;  $N_2 = m_2 g$ , то силы трения

$$F_{mp1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g; \quad F_{mp2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g,$$

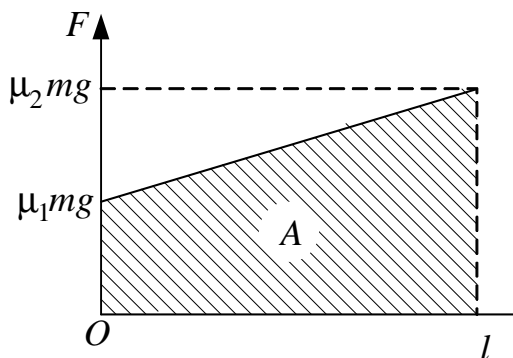
где  $m_1, m_2$  – массы частей бруска, находящихся в данный момент времени на первом и втором столах соответственно:

$$m_1 = \frac{m}{l}(l-x); \quad m_2 = \frac{m}{l}x.$$

Следовательно,

$$F_{mp1} = \mu_1 \frac{m}{l}(l-x)g; \quad F_{mp2} = \mu_2 \frac{m}{l}xg; \quad F = \frac{\mu_1 mg(l-x)}{l} + \frac{\mu_2 mgx}{l}.$$

Как видим, сила  $F$  меняется в зависимости от пройденного бруском пути  $x$  по линейному закону. Работа переменной силы  $F$  может быть рассчитана одним из трех способов.



### Первый способ

График зависимости силы  $F$  от координаты (пройденного пути)  $x$  представлен на рисунке. Работа переменной силы  $F$  численно равна площади заштрихованной фигуры (трапеции):

$$A = \frac{(\mu_1 + \mu_2) mgl}{2}.$$

### Второй способ

Поскольку сила  $F$  зависит от пройденного бруском пути  $x$  по линейному закону, то среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{(\mu_1 + \mu_2)mg}{2},$$

а работа силы на пути  $l$

$$A = \langle F \rangle l = \frac{(\mu_1 + \mu_2)mgl}{2}.$$

### Третий способ

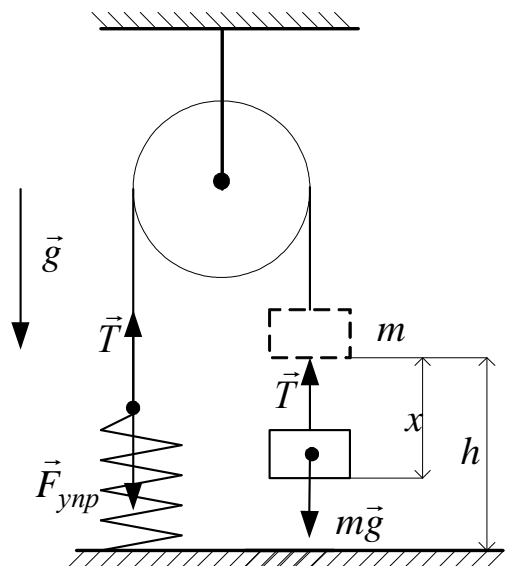
Работа силы  $F$  может быть определена с помощью интегрирования

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l F dx = \int_0^l \left\{ \frac{\mu_1 mg(l-x)}{l} + \frac{\mu_2 mgx}{l} \right\} dx = \int_0^l \frac{\mu_1 mg(l-x)}{l} dx + \int_0^l \frac{\mu_2 mgx}{l} dx = \\ &= \mu_1 mgh \Big|_0^l - \frac{\mu_1 mgx^2}{2l} \Big|_0^l + \frac{\mu_2 mgx^2}{2l} \Big|_0^l = \frac{(\mu_1 + \mu_2)mgl}{2}. \end{aligned}$$

Ответ:  $A = \frac{(\mu_1 + \mu_2)mgl}{2}$ .

**Пример 9.** Груз массой  $m = 100$  г соединен невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через легкий блок, с пружиной жесткостью  $k = 10$  Н/м, прикрепленной к полу (см. рисунок). В начальный момент груз удерживают на высоте  $h = 15$  см от пола так, что нить натянута, а пружина не деформирована. Чему будет равна максимальная скорость груза, если его отпустить? Какое количество тепла выделится при абсолютно неупругом ударе груза о пол? (**Уровень 5**).

**Решение.** При движении на груз действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила натяжения нити  $\vec{T}$ , равная силе упругости пружины  $\vec{F}_{\text{упр}}$ , направленные так, как показано на рисунке. В начале движения сила тяжести по величине больше силы упругости пружины, и ускорение груза направлено вниз. После прохождения положения равновесия сила упругости станет больше силы тяжести,



и скорость груза уменьшается. Скорость груза максимальна в момент прохождения им положения равновесия, в котором

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0 \quad \text{или} \quad mg = kx, \quad (1)$$

где  $x$  – растяжение пружины в этот момент.

Следовательно,

$$x = \frac{mg}{k} \approx 9,8 \text{ см},$$

что меньше чем  $h = 15$  см, и скорость груза в этот момент достигнет максимального значения. Так как при движении груза сила натяжения равна по величине силе упругости пружины, то работа силы  $\vec{T}$  на пути  $x$  равна работе консервативной силы  $\vec{F}_{\text{упр}}$ :

$$|A(T)| = |A(F_{\text{упр}})| = \frac{kx^2}{2}.$$

Если выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии силы тяжести на уровне пола, то в начальном положении энергия системы равна потенциальной энергии груза (системы)

$$W_1 = mgh,$$

а на высоте  $(h - x)$  над полом – сумме потенциальной и кинетической энергий груза и потенциальной энергии пружины

$$W_2 = mg(h - x) + \frac{m\upsilon_{\text{max}}^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где  $\upsilon_{\text{max}}$  – максимальная скорость груза.

Следовательно, закон сохранения механической системы примет вид

$$mgh = mg(h - x) + \frac{m\upsilon_{\text{max}}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (2)$$

Из (2) с учетом (1) получим

$$\upsilon_{\text{max}} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим вторую часть задачи.

К моменту удара груза о пол пружина растянута на величину  $h$ , и энергия системы равна

$$W_3 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kh^2}{2},$$

где  $\upsilon$  – скорость груза непосредственно перед ударом о пол.

Теперь закон сохранения энергии системы примет вид

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{kh^2}{2}.$$

При абсолютно неупругом ударе о пол вся кинетическая энергия груза перейдет во внутреннюю энергию (тепло):

$$Q = \frac{mv^2}{2}.$$

Следовательно,

$$Q = mgh - \frac{kh^2}{2} \approx 34,5 \text{ мДж}.$$

Ответ:  $v_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1 \text{ м/с}; Q = mgh - \frac{kh^2}{2} \approx 34,5 \text{ мДж}.$

**Пример 10.** На гладкой горизонтальной поверхности лежит брусок. Пуля, летящая горизонтально со скоростью  $v = 600 \text{ м/с}$ , пробивает брусок и вылетает из него со скоростью  $0,5v$ . Масса пули  $m = 9 \text{ г}$ , масса бруска  $M = 5 \text{ кг}$ . Сколько тепла выделилось при движении пули в бруске? Траекторию пули считать прямолинейной. (**Уровень 4**).

**Решение.** Запишем закон сохранения импульса системы «пуля – брусок» в направлении движения пули в виде

$$mv = \frac{1}{2}mv + Mu, \quad (1)$$

где  $u$  – скорость бруска после взаимодействия с пулей.

При движении пули в бруске между ними действует *диссипативная сила* – сила трения, что приведет к тому, что часть механической энергии системы перейдет в тепло. Так как поверхность, на которой находится брусок, гладкая, то внешние диссипативные силы отсутствуют.

При столкновении с бруском начальная кинетическая энергия пули  $K_1 = \frac{mv^2}{2}$  частично перейдет в тепло, и механическая энергия системы непосредственно после взаимодействия будет равна

$$K_2 = \frac{mv^2}{8} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Изменение полной механической энергии

$$|\Delta W| = |K_2 - K_1| = K_1 - K_2 = Q,$$

где  $Q$  – количество тепла, выделившегося при движении пули в бруске.

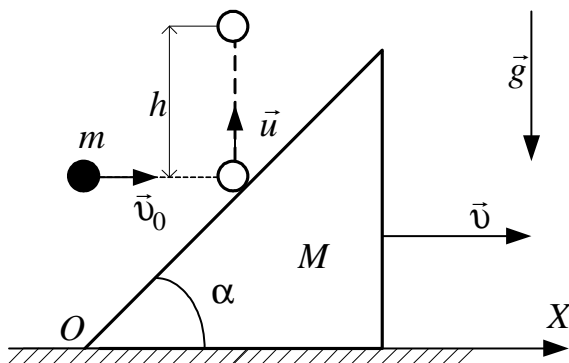
После подстановки имеем

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \left( \frac{m\upsilon^2}{8} - \frac{Mu^2}{2} \right) = Q. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2) относительно  $Q$ , получим

$$Q = \frac{m\upsilon^2(3M - m)}{8M} \approx 1,2 \text{ кДж}.$$

Ответ:  $Q = \frac{m\upsilon^2(3M - m)}{8M} \approx 1,2 \text{ кДж}.$



**Пример 11.** В покоящийся клин массой  $M$  попадает горизонтально летящий шарик массой  $m$  (см. рисунок) и после упругого удара о поверхность клина (угол  $\alpha = 45^\circ$ ) отскакивает вверх. На какую высоту  $h$  он поднимется, если горизонтальная скорость клина после удара равна  $\upsilon$ ? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. (Уровень 3).

**Решение.** Полагая, что за время столкновения изменение потенциальной энергии шарика и клина равно нулю, закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\vec{u}^2}{2} + \frac{M\upsilon^2}{2}, \quad (1)$$

где  $\vec{\upsilon}_0$ ,  $\vec{u}$  – скорости шарика в момент столкновения с клином и непосредственно после столкновения соответственно.

Так как между поверхностями клина и горизонтальной плоскости трение отсутствует, то система «клин – шарик» в горизонтальном направлении замкнута (все внешние силы – силы тяжести и реакции – будут направлены вертикально). Следовательно, закон сохранения импульса

$$m\vec{\upsilon}_0 = m\vec{u} + M\vec{\upsilon}$$

в проекции на ось  $OX$  примет вид

$$m\upsilon_0 = M\upsilon, \quad (2)$$

так как при  $\alpha = 45^\circ$  и упругом соударении шарика и клина шарик отскакивает вертикально.



Выразив  $v_0$  из (2) и подставив в (1),

$$\frac{M^2 v^2}{2m} = \frac{m u^2}{2} + \frac{M v^2}{2},$$

найдем скорость шарика сразу после столкновения с клином:

$$u = v \sqrt{\frac{(M - m)M}{m^2}}.$$

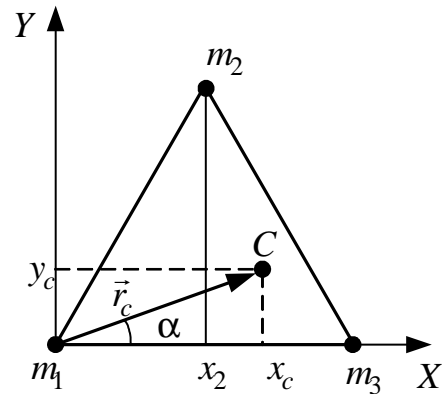
Высоту подъема шарика можно определить также из закона сохранения энергии для него после отскока

$$\frac{m v^2}{2} = mgh:$$

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{M(M - m)v^2}{2m^2 g}.$$

Ответ:  $h = \frac{M(M - m)v^2}{2m^2 g}.$

**Пример 12.** Определить положение центра масс (радиус-вектор центра масс  $\vec{r}_c$  и его модуль  $r_c$ ) системы, состоящей из трех материальных точек массами  $m_1 = 1,4$  кг,  $m_2 = 1,2$  кг,  $m_3 = 1,8$  кг, находящихся в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 0,6$  м. Определить также угол  $\alpha$  (см. рисунок). (**Уровень 3**).



**Решение.** Начало координат поместим в точку расположения массы  $m_1$ , а ось  $X$  направим вдоль прямой, соединяющей материальные точки  $m_1$  и  $m_3$  (см. рисунок). Тогда координаты соответствующих материальных точек массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ :

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0;$$

$$x_2 = a \sin \frac{\pi}{6}; \quad y_2 = a \cos \frac{\pi}{6};$$

$$x_3 = a; \quad y_3 = 0.$$

Учитывая выражение для координат центра масс системы материальных точек,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

где  $x_i, y_i$  – координаты  $i$ -ой точки;  $m_i$  – масса  $i$ -ой точки;  $n$  – число материальных точек системы, можем записать

$$x_c = \frac{m_2 a \sin \frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad y_c = \frac{m_2 a \cos \frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Искомый радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_c = x_c \vec{i} + y_c \vec{j} = \frac{m_2 a \sin \frac{\pi}{6} + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{i} + \frac{m_2 a \cos \frac{\pi}{6}}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{j}.$$

Модуль радиус-вектора центра масс системы материальных точек

$$|\vec{r}_c| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \frac{a \sqrt{\left(m_2 \sin \frac{\pi}{6} + m_3\right)^2 + \left(m_2 \cos \frac{\pi}{6}\right)^2}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Искомый угол (см. рисунок)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{m_2 \cos \frac{\pi}{6}}{m_2 \sin \frac{\pi}{6} + m_3}.$$

Вычисляя, получим

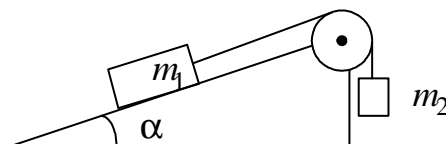
$$\vec{r}_c = (32,7\vec{i} + 14\vec{j}) \text{ см}; \quad |\vec{r}_c| = 35,7 \text{ см}; \quad \alpha = 23^\circ 25'.$$

$$\text{Ответ: } \vec{r}_c = (32,7\vec{i} + 14\vec{j}) \text{ см}; \quad |\vec{r}_c| = 35,7 \text{ см}; \quad \alpha = 23^\circ 25'.$$

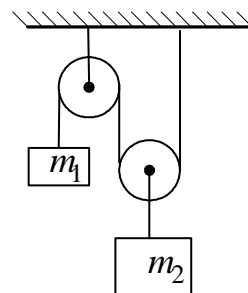
## 2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Тело массой  $m = 2$  кг движется прямолинейно по закону  $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$  ( $C = 2$  м/с<sup>2</sup>,  $D = 0,4$  м/с<sup>3</sup>). Определите силу, действующую на тело в конце первой секунды движения. [3,2 Н; **уровень 2**].
2. Тело массой  $m$  движется в соответствии с зависимостью  $x = A \cos \omega t$ , где  $A$  и  $\omega$  – постоянные. Запишите закон изменения силы от времени. [ $F = -mA\omega^2 \cos \omega t$ ; **уровень 2**].
3. Два груза ( $m_1 = 500$  г и  $m_2 = 700$  г) связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К грузу  $m_1$  приложена горизонтально направленная сила  $F = 6$  Н. Пренебрегая трением, определите: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити. [1) 5 м/с<sup>2</sup>; 2) 3,5 Н; **уровень 1**].
4. Тело массой  $m = 2$  кг падает вертикально с ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>. Определите силу сопротивления движению этого тела. [9,62 Н; **уровень 1**].
5. Подвешенный на нити шарик массой  $m = 200$  г отклоняют на угол  $\alpha = 45^\circ$ . Определите силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия. [3,11 Н; **уровень 2**].

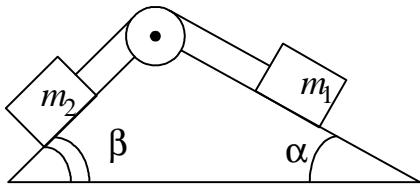
6. В установке, (см. рисунок) угол  $\alpha$  наклонной плоскости с горизонтом равен  $20^\circ$ , массы тел  $m_1 = 200$  г и  $m_2 = 150$  г. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите ускорение, с которым будут двигаться эти тела, если тело  $m_2$  опускается. [2,29 м/с<sup>2</sup>; **уровень 2**].



7. На рисунке изображена система блоков, к которым подвешены грузы массами  $m_1 = 200$  г и  $m_2 = 500$  г. Считая, что груз  $m_1$  поднимается, а подвижный блок с грузом  $m_2$  опускается (нить и блоки невесомы, силы трения отсутствуют) определите: 1) силу натяжения нити  $T$ ; 2) ускорения, с которыми движутся грузы. [1)  $T = 2,26$  Н; 2)  $a_1 = 1,5$  м/с<sup>2</sup>,  $a_2 = 0,75$  м/с<sup>2</sup>; **уровень 3**].

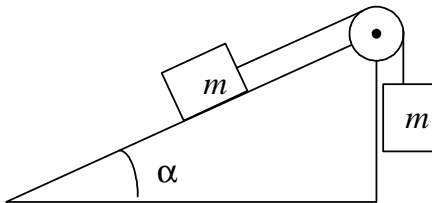


8. В установке (см. рисунок) углы  $\alpha$  и  $\beta$  с горизонтом соответственно равны  $30^\circ$  и  $45^\circ$ , массы тел  $m_1 = 0,45$  кг и  $m_2 = 0,5$  кг. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) силу натяжения нити. [1)  $1,33$  м/с<sup>2</sup>; 2)  $2,8$  Н; **уровень 3**].



9. По наклонной плоскости с углом  $\alpha$  наклона к горизонту, равным  $30^\circ$ , скользит тело. Определите скорость тела в конце второй секунды от начала скольжения, если коэффициент трения  $\mu = 0,15$ . [ $7,26$  м/с; **уровень 4**].

10. В установке (см. рисунок) угол  $\alpha$  наклона плоскости с горизонтом равен  $30^\circ$ , массы тел одинаковы ( $m = 1$  кг). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определите силу давления  $F$  на ось, если коэффициент трения между наклонной плоскостью и скользящим телом  $\mu = 0,1$ . [ $F = mg(l + \mu \cos \alpha + \sin \alpha) \cos(\pi/4 - \alpha/2) = 13,5$  Н; **уровень 4**].



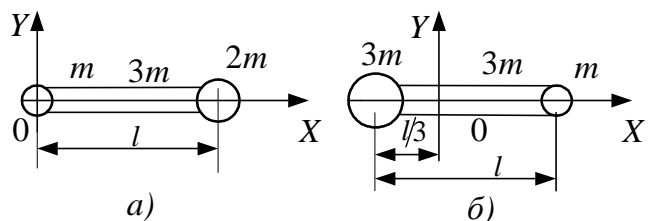
11. Нагруженная песком железнодорожная платформа с начальной массой  $m_0$  начинает движение из состояния покоя под действием постоянной силы тяги  $F$ . Через отверстие в дне платформы высыпается песок с постоянной скоростью  $u$  (кг/с). Определите  $v(t)$ , т.е. зависимость скорости платформы от времени. [ $v = \frac{F}{u} \ln \frac{m_0}{m_0 - ut}$ , **уровень 5**].

12. Электровоз массой  $180$  т, движущийся по инерции с выключенными двигателями со скоростью  $0,5$  м/с, подъезжает к неподвижному вагону и продолжает движение с ним вместе. Какова масса вагона, если скорость локомотива уменьшилась до  $0,4$  м/с? Силами сопротивления движению локомотива и вагона пренебречь. [ $45$  т; **уровень 1**].

13. Шар массой  $m_1 = 10$  кг, движущийся со скоростью  $v_1 = 4$  м/с, сталкивается с шаром массой  $m_2 = 4$  кг, скорость которого  $v_2 = 12$  м/с. Считая удар прямым, неупругим, найти скорость  $v$  шаров после удара в двух случаях: 1) малый шар нагоняет большой шар, движущийся в том же направлении; 2) шары движутся навстречу друг другу. [1)  $6,3$  м/с; 2)  $-0,57$  м/с; **уровень 2**].

14. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью  $v_0 = 3$  км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием  $M = 10$  т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы. Снаряд массой  $m = 10$  кг вылетает из ствола под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Определите скорость  $v$  снаряда (относительно Земли), если после выстрела скорость платформы уменьшилась в  $n = 2$  раза. [835 м/с; **уровень 3**].
15. Снаряд массой  $m = 5$  кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость  $v_0 = 300$  м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой  $m_1 = 3$  кг полетел в обратном направлении со скоростью  $v_1 = 100$  м/с. Определите скорость  $v_2$  второго, меньшего осколка. [900 м/с; **уровень 3**].
16. Лодка массой  $M = 150$  кг и длиной  $l = 2,8$  м неподвижна в стоячей воде. Рыбак массой  $m = 90$  кг в лодке переходит с носа на корму. Пренебрегая сопротивлением воды, определите, на какое расстояние  $s$  при этом сдвинется лодка. [1,05 м; **уровень 3**].
17. Платформа с песком общей массой  $M = 2$  т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой  $m = 8$  кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определите, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда  $v = 450$  м/с, а направление движения платформы – сверху вниз под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. [1,55 м/с; **уровень 3**].
18. Две одинаковые тележки массой  $M$  каждая движутся по инерции (без трения) друг за другом с одинаковой скоростью  $\vec{v}_0$ . В какой-то момент времени человек массой  $m$ , находящийся на задней тележке, прыгнул в переднюю со скоростью  $\vec{u}$  относительно своей тележки. Определите скорость  $\vec{v}_1$  передней тележки. [ $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \frac{mM}{(m+M)^2} \vec{u}$ ; **уровень 4**].

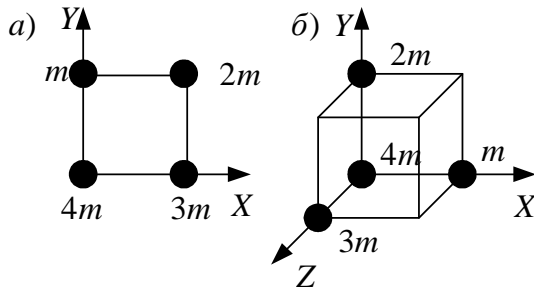
19. На рисунке изображен тонкий однородный стержень, на концах которого прикреплены маленькие шарики. Массы стержня и шариков указаны на рисунке. Определить координату  $x_c$  центра масс такой системы в случаях *a* и *б*. Длину  $l$  стержня принять в обоих случаях равной 1,2 м. Шарик



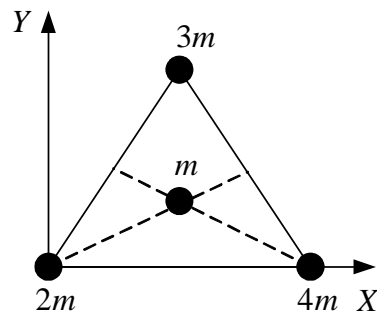
рассматривать как материальные точки. [а)  $x_c = \frac{7}{12}l = 0,7$  м; б)  $x_c = 0$ ; **уровень 1**].

20. Определите положение центра масс половины круглого диска радиусом  $R$ , считая его однородным. [На расстоянии  $4R/3\pi$  от центра; **уровень 5**].

21. Определите положение центра масс системы, состоящей из четырех шаров, массы которых равны соответственно  $m$ ,  $2m$ ,  $3m$  и  $4m$ , в следующих случаях (см. рисунок):



а) шары расположены по вершинам квадрата; б) шары расположены по четырем смежным вершинам куба. Во всех случаях расстояние между соседними шарами равно 15 см. Направления координатных осей показаны на рисунке. [а)  $x_c = 7,5$  см,  $y_c = 4,5$  см; б)  $x_c = 4,5$  см,  $y_c = 1,5$  м,  $z_c = 3$  см; **уровень 2, 3**].



22. Определите координаты центра масс системы, состоящей из четырех шаров массами  $2m$ ,  $3m$ ,  $4m$  и  $m$ , которые расположены в вершинах и в центре равностороннего треугольника со стороной  $a = 20$  см. Направления координатных осей указаны на рисунке. [ $x_c = 12$  см,  $y_c = 5,77$  см; **уровень 3**].

23. Сравните кинетическую энергию пули массой  $m_n = 0,9$  г, летящей со скоростью  $v = 600$  м/с, и человека массой  $m_q = 60$  кг, бегущего со скоростью  $v_q = 18$  км/ч. [ $K_n = 1,6 \cdot 10^3$  Дж;  $K_q = 7,5 \cdot 10^2$  Дж;  $K_n > K_q$ ; **уровень 1**].

24. Тело массой  $m = 5$  кг поднимают с ускорением  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. Определите работу, произведенную в течение первых пяти секунд подъема. [1,48 кДж; **уровень 2**].

25. Автомашина массой  $m = 2000$  кг под действием постоянной силы торможения останавливается за  $t = 6$  с, пройдя расстояние  $s = 30$  м. Определите: 1) начальную скорость автомашины; 2) силу торможения. [1) 10 м/с; 2) 3,33 кН; **уровень 2**].

26. Автомобиль массой  $m = 1,8$  т равномерно движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути. Определите: 1) работу, совершаемую двигателем автомобиля на пути 5 км, если коэффициент трения равен 0,1; 2) развиваемую двигателем мощность, если известно, что этот путь был преодолен за 5 мин. [1) 11,5 МДж; 2) 38,3 кВт; **уровень 3**].
27. Определите работу, совершаемую при подъеме груза массой  $m = 50$  кг по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту на расстояние  $s = 4$  м, если время подъема  $t = 2$  с, а коэффициент трения 0,06. [1,48 кДж, **уровень 3**]
28. Насос мощностью  $P$  используют для откачки нефти с глубины  $h$ . Определите массу жидкости, поднятой за время  $t$ , если КПД насоса равен  $\eta$ .  
 $[m = \frac{\eta Pt}{gh}; \text{уровень 3}]$ .
29. Поезд массой  $m = 600$  т движется под гору с уклоном  $\alpha = 0,3^\circ$  и за время  $t = 1$  мин развивает скорость  $v = 18$  км/ч. Коэффициент трения  $\mu = 0,01$ . Определите среднюю мощность  $P$  локомотива. [195 кВт; **уровень 3**].
30. Автомобиль массой  $m = 1,8$  т спускается при выключенном двигателе с постоянной скоростью  $v = 54$  км/ч по уклону дороги (угол к горизонту  $\alpha = 3^\circ$ ). Определите, какова должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он смог подниматься на такой же подъем с той же скоростью. [27,7 кВт; **уровень 3**].
31. Тело массой  $m$  поднимается без начальной скорости с поверхности Земли под действием силы  $F$ , меняющейся с высотой подъема  $y$  по закону  $\vec{F} = -2m\vec{g}(1 - By)$  (где  $B$  – некоторая положительная постоянная). Определите: 1) высоту подъема; 2) работу силы  $F$  на первой трети пути.  
 [1)  $H = B^{-1}$ , 2)  $A = \frac{5mg}{9B}$ ; **уровень 4**].
32. Тело скользит по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту с высоты  $h$  и движется далее по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным  $\mu$ , определите расстояние  $s$ , пройденное телом на горизонтальном участке до полной остановки. [ $s = \frac{h}{\mu}(1 - \mu \operatorname{tg}\alpha)$ ; **уровень 4**].

33. Тело массой  $m$  начинает двигаться под действием силы  $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$ , где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  – соответственно единичные векторы координатных осей  $x$  и  $y$ . Определите мощность  $P(t)$ , развиваемую силой в момент времени  $t$ .

$$[P(t) = \frac{2t^3 + 3t^5}{m}; \text{уровень 4}].$$

34. Докажите, что при неупругом соударении двух тел, одно из которых покоится, их общая кинетическая энергия  $K_2$  после соударения меньше, чем кинетическая энергия  $K_1$  до соударения. [ $K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ ;

$$K_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \text{т.к. } \frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1, \text{ то } K_1 > K_2, \text{ уровень 1}].$$

35. Рассчитайте, какое количество механической энергии превращается во внутреннюю в случае неупругого соударения двух тел.

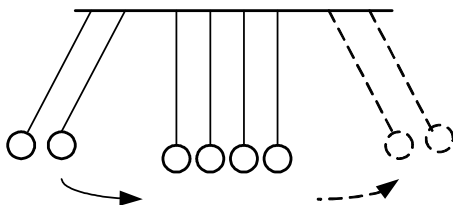
$$[K_1 - K_2 = \frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{2(m_1 + m_2)}; \text{уровень 2}].$$

36. Тело массой  $m_1 = 3$  кг движется со скоростью  $v_1 = 2$  м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определите количество теплоты, выделившееся при ударе. [3 Дж; уровень 3].

37. Два шара массами  $m_1 = 9$  кг и  $m_2 = 12$  кг подвешены на нитях длиной  $l = 1,5$  м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол  $\alpha = 30^\circ$  и отпустили. Считая удар неупругим, определите высоту  $h$ , на которую поднимутся оба шара после удара.

$$[h = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 l(1 - \cos \alpha) = 3,7 \text{ см}; \text{уровень 4}].$$

38. Шар сталкивается с другим покоящимся шаром такой же массы. Докажите, что в случае упругого, но не центрального удара угол между направлениями скоростей после удара составляет  $\pi/2$  [уровень 5].



39. При абсолютно упругом ударе одинаковых шаров одинаковой массы всегда отскакивает столько шаров, сколько налетает (см. рисунок). Докажите это. [Уровень 5].



## УЧЕБНЫЙ БЛОК 3. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

*Колебаниями* или *колебательными движениями* называются движения, обладающие той или иной степенью повторяемости состояния тел во времени. Например, механические колебания тела, подвешенного на пружине, качания маятников, колебания струн, вибрации фундаментов зданий, электромагнитные колебания в колебательном контуре и др. Механическое колебательное движение может рассматриваться как движение материальной точки под действием сил, действующих на точку, равнодействующая которых пропорциональна смещению и направлена к положению равновесия. Методы определения параметров колебаний и уравнений колебаний, представленные в данном разделе, имеют гораздо более широкую область применения и будут использоваться при изучении колебательного движения твердого тела, электромагнитных колебаний, волновых процессов.

При изучении данного блока студенты должны

**иметь представление:**

- об основных характеристиках колебательного движения – периоде, частоте, фазе, амплитуде;
- об основных характеристиках движения и связях между ними;
- о принципе суперпозиции движений;
- о способах решения дифференциальных уравнений второго порядка;

**обладать навыками:**

- определения равнодействующей силы;
- решения задач с помощью второго закона Ньютона;
- применения элементов дифференциального и интегрального исчисления.

### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Гармонические колебания (механические) и их характеристики. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Квазиупругая сила.	лекция + самост.	[5] [6] [7] [8]
2. Период колебаний пружинного и математического маятников. Изменение кинетической и потенциальной энергии в процессе колебаний. Закон сохранения энергии для колебательной системы.	самост.	[9] [10] [7] [8] [10]
3. Дифференциальное уравнение затухающих механических колебаний и его решение. Период, декремент затухания, время релаксации, добротность. Аперiodический процесс.	лекция	[6] [7] [10]

Окончание табл.

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
4. Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Явление резонанса. Соотношение между фазами вынужденных колебаний силы и смещения. Параметрические колебания*.	лекция	[6] [8] [10]
5. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Понятие об интерференции. Условие максимумов и минимумов. Сложение гармонических колебаний одного направления с разными частотами. Биения. Период биений, время когерентности*. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу. Линейная и круговая поляризация*.	лекция	[5] [6] [7] [10]

\* Материал изучается ознакомительно.

### Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– уравнение гармонических колебаний и связь параметров колебания;</li> <li>– дифференциальное уравнение гармонических колебаний;</li> <li>– период колебаний основных колебательных систем;</li> <li>– формулы расчета энергий колебательного движения системы;</li> <li>– дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение; зависимость энергии от времени при затухающих колебаниях; основные характеристики затухающих колебаний;</li> <li>– дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний; зависимость кинематических величин от времени при вынужденных механических колебаниях;</li> <li>– зависимость амплитуды колебаний и сдвига фаз между силой и смещением от частоты в случае вынужденных колебаний;</li> <li>– параметрические колебания;</li> <li>– формулы расчета амплитуды и начальной фазы результирующего колебания при сложении гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты;</li> <li>– условия максимумов и минимумов при сложении двух колебаний;</li> <li>– уравнение биений, период и частоту биений, время когерентности;</li> <li>– сложение взаимно перпендикулярных колебаний; фигуры Лиссажу</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– составлять уравнение гармонических колебаний; находить связь между кинематическими величинами;</li> <li>– составлять и решать дифференциальные уравнения для простейших колебательных систем;</li> <li>– определять период и частоту колебаний;</li> <li>– находить зависимость возвращающей силы и энергий от времени;</li> <li>– составлять дифференциальные уравнения затухающих колебаний, уравнения зависимости кинематических величин, силы и энергии системы от времени; находить основные характеристики колебательной системы;</li> <li>– определять характеристики параметрических колебаний;</li> <li>– составлять уравнения результирующих колебаний;</li> <li>– строить векторные диаграммы;</li> <li>– составлять уравнение траектории при сложении взаимно перпендикулярных колебаний</li> </ul>

### 3.1. Краткое содержание теоретического материала

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

*Периодом колебания*  $T$  называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение. За это время совершается одно полное колебание.

*Частотой периодических колебаний*  $\nu$  называется число полных колебаний, которые совершаются за единицу времени:  $\nu = \frac{1}{T}$ . *Циклической (круговой) частотой периодических колебаний* называется число полных колебаний, которые совершаются за  $2\pi$  секунд:  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ .

Так как колебательное движение является одной из разновидностей механического движения, оно должно подчиняться законам динамики Ньютона, в частности, второму закону:  $m\vec{a} = \vec{F}$ .

Периодичность повторения состояния тела (в частности, его координат) при колебании обеспечивается возвращающей силой, поэтому смещение тела противоположно (по направлению) действующей (возвращающей) силе. Учитывая это и вводя во второй закон Ньютона силу, например, упругости, уравнение движения можно записать в дифференциальном виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad (1)$$

где  $x$  – координата точки (смещение точки относительно положения равновесия), зависящая от времени  $t$  при колебательном движении тела по прямой траектории.

Дифференциальное уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (2)$$

где  $m$  – масса колеблющейся материальной точки;  $k$  – коэффициент жесткости упругого элемента.

Решением уравнения (2) является гармоническая функция

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3)$$

где  $x$  – смещение (координата) колеблющегося тела в момент времени  $t$  относительно положения равновесия;  $A$  – максимально возможное отклонение

от точки равновесия (амплитуда);  $\omega_0$  – собственная циклическая частота колебаний,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний. Убедиться в том, что функция (3) является решением уравнения (2), можно подстановкой этой функции в уравнение (2) при условии, что

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4)$$

Выражение для гармонически изменяющейся величины  $x$  можно представить в форме, эквивалентной (3),

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad (5)$$

где  $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ .

В уравнении колебаний (2) возвращающая сила прямо пропорциональна смещению от точки равновесия. Поэтому собственная частота  $\omega_0$

колебаний любой системы, в которой возвращающая сила пропорциональна смещению, может быть найдена по формуле, аналогичной (4). В качестве примера определим  $\omega_0$  для математического маятника.

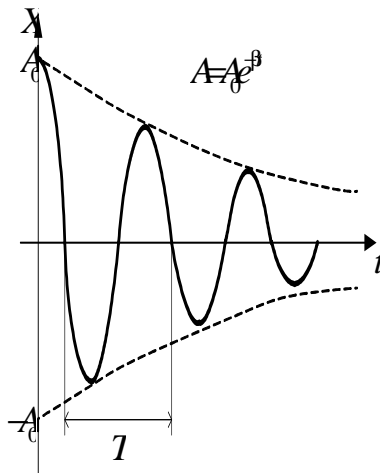


Рис 32

*Математическим маятником* называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести  $m\vec{g}$  (рис. 3.1).

Чтобы описать колебания под действием силы тяжести, нужно воспользоваться законами Ньютона. Касательное (тангенциальное) ускорение телу сообщает сила  $F = mg \sin \alpha$ . При малых

углах  $\sin \alpha \approx \alpha$  (угол  $\alpha$  измерен в радианах,  $\alpha = \frac{x}{l}$ ). Поскольку векторы силы

и смещения противоположны, то  $F = -mg \frac{x}{l}$ , т.е. сила пропорциональна смещению. Уравнение (2) для маятника можем записать в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g \frac{x}{l} = 0,$$

где  $l$  – длина подвеса,  $g$  – ускорение свободного падения.

Из сопоставления с уравнением (2) следует, что циклическая частота колебаний математического маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Таким образом, для малых колебаний, т.е. при малых углах отклонения маятника из положения равновесия, когда *возвращающая сила пропорциональна смещению*, возникают гармонические колебания с периодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

*Превращение энергий* при колебании рассмотрим на примере пружинного маятника. Пусть колебания происходят по закону  $x = A\cos\omega t$ . При гармонических колебаниях пружинного маятника происходит превращение потенциальной энергии упруго деформированного тела (пружины)  $\Pi = \frac{kx^2}{2}$  в кинетическую энергию груза  $K = \frac{mv^2}{2}$  и наоборот. Полная энергия колебательной системы определяется суммой энергий. Учитывая, что проекция скорости на направление движения  $v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t$ , можно записать

$$\begin{aligned} W &= \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m(-\omega_0 A \sin\omega_0 t)^2}{2} + \frac{k(A\cos\omega_0 t)^2}{2} = \\ &= \frac{m\omega_0^2 A^2 \sin^2\omega_0 t}{2} + \frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2\omega_0 t}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

т.е. полная энергия колебаний не зависит от времени:

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

Однако доля каждого вида энергии в полной энергии изменяется со временем. Таким образом, взаимные превращения энергий  $\Pi$  и  $K$  при колебаниях пружинного маятника происходят в соответствии с законом сохранения механической энергии. При движении маятника от положения равновесия его потенциальная энергия увеличивается, а кинетическая уменьшается. Когда маятник проходит положение равновесия ( $x = 0$ ), его потенциальная энергия может быть приравнена к нулю, а кинетическая энергия маятника имеет наибольшее значение, равное его полной энергии.

Максимальные значения энергий равны друг другу:  $\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2}$ .

*Затухание колебаний* вызывается сопротивлением движению колеблющейся материальной точки окружающей среды. В этом случае движение точки подчиняется второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}},$$

где  $\vec{F}_{\text{сопр}} = -b\vec{v}$  – сила сопротивления движению, пропорциональная скорости движения; возвращающая сила является упругой  $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}$ . В проекциях уравнение движения принимает вид

$$ma_x = -kx - bv,$$

преобразуя, получаем

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (7)$$

Поделив на  $m$  и обозначая  $\beta = \frac{b}{2m}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – собственная частота колебаний, получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8)$$

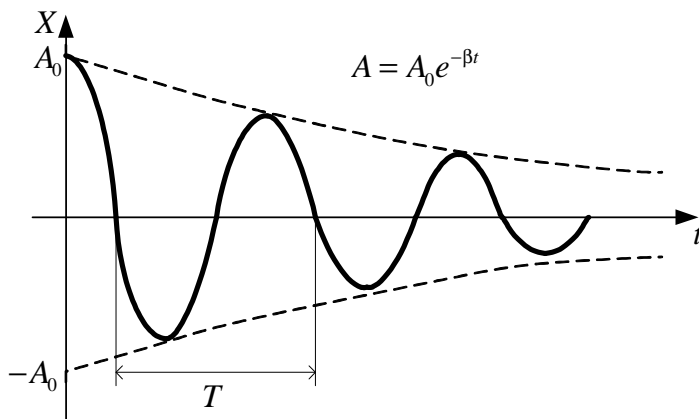


Рис. 3.2

Решением данного уравнения является функция, описывающая зависимость координаты тела от времени  $t$  при затухающих колебаниях (рис. 3.2)

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (9)$$

где  $A_0$  и  $\varphi_0$  – начальные амплитуда и фаза колебаний соответственно.

*Циклическая частота  $\omega$  затухающих колебаний* меньше собственной частоты  $\omega_0$  колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (10)$$

Таким образом, амплитуда колебаний со временем изменяется по закону  $A = A_0 e^{-\beta t}$ , где  $A_0$  – начальное отклонение материальной точки от положения равновесия (см. рис. 3.2).

Период затухающих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ . Скорость затуха-

ния колебаний определяется коэффициентом затухания  $\beta = \frac{b}{2m}$ .

Среднее значение полной энергии колебательной системы уменьшается со временем по закону

$$\langle W \rangle = W_0 e^{-2\beta t}. \quad (11)$$

Промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется *временем релаксации*

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (12)$$

Для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний пользуются *логарифмическим декрементом  $\delta$  затухания*:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \quad (13)$$

где  $N$  – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

*Добротностью колебательной системы* называется безразмерная величина  $Q$ , равная произведению  $2\pi$  на отношение энергии системы в произвольный момент времени к убыли этой энергии за промежуток времени, равный периоду затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} \approx \frac{\pi}{\beta T}. \quad (14)$$

При увеличении коэффициента затухания  $\beta$  период затухающих колебаний возрастает и обращается в бесконечность при  $\beta = \omega_0$ . В этом случае движение системы не имеет колебательного характера и называется *апериодическим движением*.

*Вынужденными колебаниями* называются незатухающие колебания материальной точки, которые вызываются действием на нее внешней силы  $\vec{F}$ , периодически изменяющейся с течением времени. Вынужденными являются колебания силы тока в сети переменного тока, колебания гребных винтов, лопаток и валов турбин под действием периодически изменяющихся внешних сил. Второй закон Ньютона для вынужденных колебаний имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F}_{уп} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F}. \quad (15)$$

Если сила изменяется по закону  $F = F_0 \cos(\omega' t)$ , где  $F_0$  – амплитуда возмущающей силы,  $\omega'$  – ее циклическая частота, то в системе, на которую действует такая сила, могут установиться вынужденные колебания, которые являются также гармоническими и происходят с циклической частотой, равной частоте вынуждающей силы. Записывая уравнение в проекциях, получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$ma = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega' t;$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega' t. \quad (16)$$

Установившиеся колебания происходят по закону  $x = A \cos(\omega' t + \varphi)$ , где  $A$  – амплитуда вынужденных колебаний физической величины (например, смещения),  $\varphi$  – разность фаз между вынужденными колебаниями  $x(t)$  и периодически изменяющейся силой  $F(t)$ .

Амплитуда  $A$  установившихся вынужденных колебаний определяется по формуле

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2 \omega'^2}}, \quad (17)$$

где  $\omega_0$  – циклическая частота собственных (незатухающих) колебаний системы.

Разность фаз между вынужденными колебаниями и силой  $F$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta \omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2}. \quad (18)$$

Графики зависимости амплитуды  $A$  и разности фаз  $\varphi$  от частоты  $\omega'$  при различных коэффициентах затухания приведены на рис. 3.3.

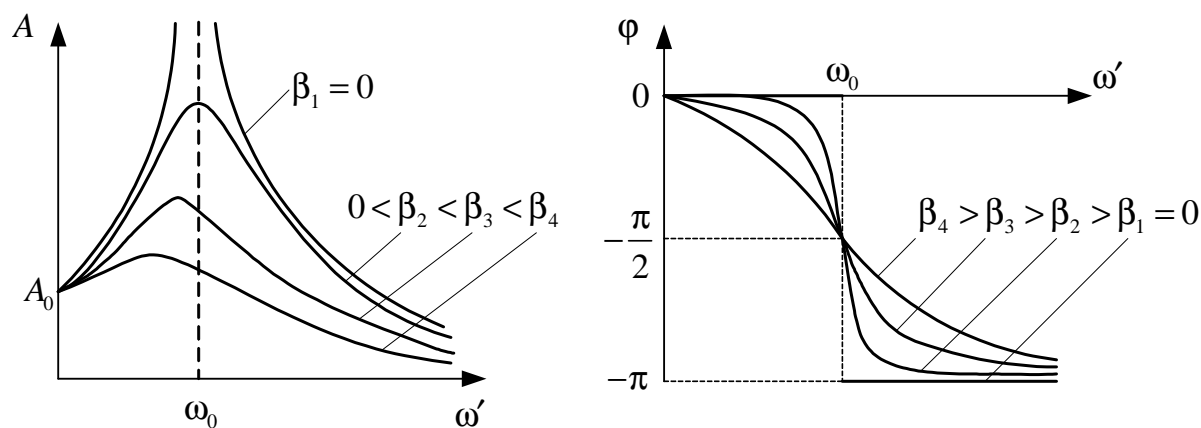


Рис. 3.3



Из уравнения (17) следует, что амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения при частоте вынуждающей силы, близкой к частоте собственных колебаний  $\omega_0$ :

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leq \omega_0. \quad (19)$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению  $\omega_p$  называется *резонансом*. Соответственно величина  $\omega_p$  называется *резонансной циклической частотой*, а кривые зависимости  $A(\omega')$  – *резонансными кривыми*. Явление резонанса используется в акустике для анализа звуков, их усиления и т.д. Под действием периодически изменяющихся нагрузок в машинах и различных сооружениях могут возникать явления резонанса, которые бывают опасны для эксплуатации машин, вплоть до разрушения отдельных узлов и механизмов.

Как и любой вид движения, колебательное движение может быть результатом нескольких колебательных движений, в которых участвует одновременно материальная точка. В этом случае для определения характеристик результирующего колебательного движения в соответствии с принципом суперпозиции в механике осуществляют *сложение колебаний*.

Сложение колебаний может осуществляться аналитическим или графическим методами. Последний в ряде случаев может оказаться более продуктивным.

При использовании графического метода каждое колебание представляется радиус-вектором (рис. 3.4), модуль которого равен амплитуде колебаний. Радиус-вектор вращается в системе координат  $XOY$  с циклической частотой колебаний. Движение материальной точки начинается из положения, определяемого начальной фазой  $\varphi_0$ . При этом отклонение материальной точки, например по оси  $OX$ , от точки равновесия  $O$  в любой момент времени определяется проекцией радиус-вектора на ось  $OX$  системы координат, относительно которой определяется начальная фаза (ось  $X$  на рис. 3.4).

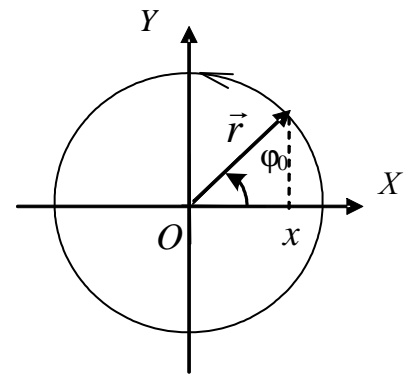


Рис. 3.4

Сложение двух одновременных колебаний материальной точки можно осуществлять, если колебания происходят в одной плоскости. Если колебания осуществляются в разных плоскостях, то сложение производится попарно последовательно с учетом изменения положения координатной плоскости ( $X, Y$ ).

При сложении колебаний *одинакового направления* и одинаковой частоты,  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  и  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ , удобно воспользоваться методом векторных диаграмм (рис. 3.5). В этом случае говорят о *когерентных колебаниях*, т.е. колебаниях одинаковой частоты, разность фаз между которыми постоянна во времени. Результирующая амплитуда при сложении двух колебаний рассчитывается по теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Откуда следует

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Начальная фаза  $\varphi$  результирующего колебания определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Уравнение результирующего гармонического колебания

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

При сложении колебаний различной частоты векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  имеют различные скорости вращения, а результирующий вектор  $\vec{A}$  изменяется по величине с течением времени и его скорость вращения непостоянна. Таким образом, в этом случае наблюдается не гармонический, а более сложный колебательный процесс.

Когда осуществляется сложение двух гармонических колебаний одного направления, мало отличающихся по частоте,  $x_1 = A \cos(\omega_1 t)$  и  $x_2 = A \cos(\omega_2 t)$ , где  $\omega_1 \approx \omega_2$ , результирующее колебание происходит с амплитудой, изменяющейся периодически от некоторого максимального значения до нуля. Колебания такого вида называются *биениями* (рис. 3.6).

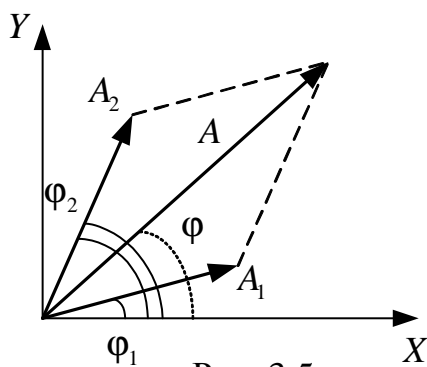


Рис. 3.5

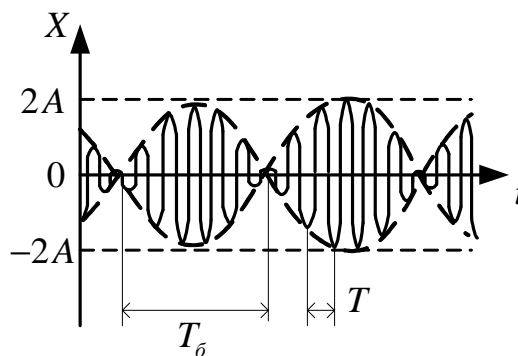


Рис. 3.6

Уравнение биений получается в результате применения тригонометрической формулы суммы косинусов

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right).$$

Период и циклическая частота биений определяются соотношениями

$$T_{\text{б}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}; \quad \omega_{\text{б}} = \Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|.$$

При сложении двух перпендикулярных колебаний точка одновременно колеблется вдоль осей координат  $OX$  и  $OY$  по законам

$$x = A \cos(\omega t) \quad \text{и} \quad y = B \cos(\omega t + \varphi).$$

Уравнение траектории результирующего движения точки в плоскости  $XOY$  можно найти, исключив из выражений для  $x$  и  $y$  параметр  $t$ . После преобразований получаем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi,$$

представляющее собой уравнение эллипса. Поэтому результирующее движение точки называют эллиптически поляризованными колебаниями.

Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз:

1. Если  $\varphi = (2m + 1)\pi/2$ , где  $m$  – целое число, то оси эллипса совпадают с осями  $OX$  и  $OY$ , а размеры полуосей равны  $A$  и  $B$ :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Кроме того, если  $A = B$ , то траектория точки – окружность. Такое результирующее движение точки называют циркулярно поляризованными колебаниями или колебаниями, поляризованными по кругу.

2. В тех случаях, когда  $\varphi = m\pi$ , где  $m$  – целое число, эллипс вырождается в отрезок прямой,

$$y = \pm (B/A)x.$$

Знак «плюс» соответствует четным значениям  $m$ , т.е. сложению синфазных колебаний, знак «минус» – нечетным  $m$ , т.е. сложению колебаний, происходящих в противофазе. В этих случаях точка совершает линейно поляризованные колебания.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу.

### 3.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Колебательное движение материальной точки</b>  Гармонические колебания (механические) и их характеристики. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Квазиупругая сила.  Период колебаний пружинного и математического маятников.  Закон сохранения энергии для колебательной системы.  Диаграммный способ представления колебаний</p>	<p>самост. + лекция   лекция   лекция   лекция</p>	<p>[5], п. 33  [6], пп. 42, 43  [7], п. 17.1  [8], п. 7.1  [10],  пп. 140 – 142  [6], п. 44  [8], п. 7.3  [10], п. 141</p>	<p>1. Какой основной признак колебательного движения? Назовите условия возникновения колебаний.  2. Запишите уравнение гармонических колебаний.  3. Как получить уравнения скорости и ускорения колеблющейся точки в произвольный момент времени?  4. Как изменится период колебания математического маятника, если его точку подвеса двигать: а) вертикально вверх с ускорением <math>a</math>; б) вертикально вниз с ускорением <math>a</math>; в) горизонтально с ускорением <math>a</math>?  5. Как с помощью математического маятника можно измерить ускорение силы тяжести?  6. Что такое векторная диаграмма? Постройте векторную диаграмму колебаний: <math>x_1 = 20 \cos(\omega t + \pi/2)</math>; <math>x_2 = 20 \cos(\omega t + 2\pi/3)</math>; <math>x_3 = 20 \cos(\omega t - \pi/4)</math>; <math>x_4 = 20 \cos(\omega t - \pi/2)</math>.  7. Получите зависимость от времени для кинетической, потенциальной и полной энергий гармонического колебания. Изобразите графически их зависимость от времени</p>
<p><b>Виды колебаний. Сложение колебаний. Резонанс</b>  Затухающие механические колебания;  Время релаксации, добротность. Амплитудный процесс.  Вынужденные механические колебания. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс. Соотношение между фазами вынуждающей силы и смещения.  Параметрические колебания*.  Сложение гармонических колебаний одного направления Биения*. Период биеений, время когерентности*.  Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу</p>	<p>лекция   лекция   лекция   лекция   лекция</p>	<p>[6], п. 46  [10], п. 147   [5], п. 4, 35   [6], п. 45  [7],  пп. 17,2 – 17,3  [10], п. 144</p>	<p>1. Как влияет коэффициент затухания на период затухающих колебаний системы?  2. Каков физический смысл времени релаксации?  3. Каков физический смысл добротности колебательной системы?  4. Что такое механический резонанс? Каково значение имеют в технике резонансные явления? Приведите примеры.  5. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и поясните величины, входящие в него.  6. Как по виду фигуры Лиссажу определить отношение частот складываемых колебаний?  7. Что такое линейно и эллиптически поляризованные колебания? Как их получить?</p>

\* Материал изучается ознакомительно.

### 3.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Две формы уравнения колебаний	<p>Гармонические колебания. Уравнение колебаний</p> <p>Составляющие энергии колебаний, их взаимопревращения в процессе колебаний</p>	<p>Если в задаче задано уравнение гармонических колебаний, то величины, характеризующие колебания (амплитуда, частота, фаза, начальная фаза, период), могут быть найдены путем сопоставления заданного уравнения с общим уравнением гармонических колебаний.</p> <p>При нахождении зависимости кинематических величин от времени используют соотношение <math>a = \dot{v} = x''</math>. Из курса математики повторите: графики синуса и косинуса, производные и первообразные тригонометрических функций, решение тригонометрических уравнений.</p> <p>Определите зависимость энергии от времени. Получите формулу для полной энергии. Установите ее связь с кинематическими и динамическими величинами.</p> <p>Используя законы сохранения и превращения энергии в задачах о маятниках и зная зависимость <math>x(t)</math>, определите <math>v(t)</math>, а также потенциальную и кинетическую энергию</p>	<p>[2], №№ 12.1 – 12.10 [12], №№ 6.1 – 6.12 [2], №№ 12.15 – 12.20 [11], №№ 4.1 – 4.14 [2], №№ 12.15 – 12.20 [11], №№ 4.1 – 4.14</p>
Вынужденные и затухающие колебания. Сложение колебаний	<p>Сложение колебаний одного направления</p> <p>Сложение взаимно перпендикулярных колебаний</p> <p>Затухающие колебания</p> <p>Вынужденные колебания. Явление резонанса. Параметрический резонанс</p>	<p>Определение амплитуды и начальной фазы результирующего колебания.</p> <p>При нахождении результата сложения колебаний одной частоты и одного направления используйте векторную диаграмму колебаний.</p> <p>Определение параметров и уравнения биений.</p> <p>При нахождении периода и частоты биений, а также частот складываемых колебаний используйте сопоставление с уравнением биений в общем виде.</p> <p>Определение фигур Лиссажу.</p> <p>При определении уравнения траектории <math>y(x)</math> нужно исключить из системы уравнений <math>x(t)</math> и <math>y(t)</math> время <math>t</math>.</p> <p>Определение параметров затухающих колебаний и зависимостей кинематических величин от времени. При определении характеристик затухания (коэффициент затухания, время релаксации, декремент затухания) нужно помнить о том, что амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону. Энергия колебательной системы пропорциональна квадрату амплитуды.</p> <p>Определение амплитуды вынужденных колебаний, резонансных частот. Увеличение амплитуды смещения, скорости и ускорения при вынужденных колебаниях происходит при приближении частоты внешней силы к резонансной частоте, которая различна для амплитуд смещения, скорости и ускорения</p>	<p>[2], №№ 12.25 – 12.35 [12], №№ 6.24 – 6.20 [2], №№ 12.37 – 12.40 [12], №№ 6.56 – 6.63 [2], №№ 12.54 – 12.56 [12], №№ 6.56 – 6.75</p>

### 3.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** За какое время маятник отклонится от положения равновесия на половину амплитуды, если период колебаний 1,2 с? Начальная фаза равна нулю. (**Уровень 1**).

**Решение.** Колебания маятника могут быть описаны уравнением гармонического движения

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

где  $A$  – амплитуда колебаний;  $T$  – период;  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний ( $\varphi_0 = 0$ ). По условию задачи  $x = A/2$ . Поэтому  $\frac{A}{2} = A \sin \frac{2\pi}{T}t$ , т.е.  $\sin \frac{2\pi}{T}t = 1/2$  или  $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6}$ . Отсюда  $t = \frac{T}{12} = \frac{1,2}{12} = 0,1$  с.

$$\text{Ответ: } t = \frac{T}{12} = \frac{1,2}{12} = 0,1 \text{ с.}$$

**Пример 2.** Маятниковые часы, идущие точно на уровне моря, подняты на высоту  $h = 1$  км. Сколько потребуется времени для того, чтобы по часам на этой высоте прошли одни сутки? Радиус земли  $R = 6400$  км. (**Уровень 2**).

**Решение.** Маятник часов на уровне моря за время  $t_0$  (1 сутки) совершит  $N = \frac{t_0}{T_0}$  колебаний, где  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$  – период колебания маятника;  $l$  – его длина,  $g_0$  – ускорение силы тяжести на уровне моря.

Чтобы на высоте  $h$  совершить то же число колебаний  $N$ , т.е. показать одни сутки, маятнику потребуется времени

$$t = NT,$$

где  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  – период колебания маятника часов на высоте  $h$ ;  $g$  – ускорение силы тяжести на этой высоте.

Тогда искомое время

$$t = NT = \frac{T}{T_0}t_0 = t_0\sqrt{\frac{g_0}{g}};$$
$$g_0 = \gamma\frac{M}{R^2}; \quad g = \gamma\frac{M}{(R+h)^2},$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $M$  – масса Земли;  $R$  – радиус земного шара.

Следовательно,  $t = \frac{R+h}{R} t_0 = 86413,5 \text{ с} = 24 \text{ ч } 13,5 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $t = 24 \text{ ч } 13,5 \text{ с}$ .

**Пример 3.** Материальная точка массой 10 г колеблется по закону  $x = 0,05 \sin\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$  м. Найти: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) закон изменения со временем кинетической энергии колеблющейся точки. (**Уровень 2**).

**Решение.** Максимальное значение возвращающей силы  $F_0 = kA$ , где коэффициент жесткости  $k = m\omega^2$ ,  $A = 0,05$  м – амплитуда колебаний. Так как  $\omega = \frac{\pi}{5}$ , то

$$F_0 = m\omega^2 A = 0,01 \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 0,05 = 0,2 \text{ мН}.$$

Кинетическая энергия  $K = \frac{mv^2}{2}$ . Скорость точки определяется через производную от координаты по времени:

$$v = x' = 0,05 \frac{\pi}{5} \cos\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,01\pi \cos\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому закон изменения энергии со временем имеет вид

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,01}{2} \left(0,01\pi \cos\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 5\pi^2 10^{-5} \cos^2\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Максимальное значение кинетической энергии  $K_{\max} = 5 \cdot 10^{-6}$  Дж.

*Ответ:*  $K_{\max} = 5 \cdot 10^{-6}$  Дж.

**Пример 4.** Материальная точка массой  $m = 5$  г совершает гармонические колебания с частотой  $\nu = 0,5$  Гц. Амплитуда колебаний  $A = 3$  см. Определить: 1) скорость  $v$  точки в момент времени, когда смещение  $x = 1,5$  см; 2) максимальную силу  $F_{\max}$ , действующую на точку; 3) полную энергию  $W$  колеблющейся точки. (**Уровень 3**).

**Решение.**

1. Уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

а формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (1) и (2) время  $t$ . Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на  $A^2$ , второе на  $A^2\omega^2$  и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно  $v$ , найдем  $v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}$ . Выполнив вычисления по этой формуле, получим:

$$v = \pm 8,2 \text{ см/с}.$$

Знак «плюс» соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси  $X$ , а знак «минус» – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси  $X$ .

Смещение при гармоническом колебании может быть определено также уравнением

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Повторив с этим уравнением такое же решение, получим тот же ответ.

2. Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона

$$F = ma, \quad (3)$$

где  $a$  – ускорение точки, которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad a = -4\pi^2\nu^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставив выражение ускорения в формулу (3), получим

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Отсюда максимальное значение силы  $F_{\max} = 4\pi^2\nu^2 mA$ . Подставив в это уравнение значения величин  $\pi, \nu, m$  и  $A$ , найдем

$$F_{\max} = 1,49 \text{ мН}.$$

3. Полная энергия колебаний точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия  $W$  колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии  $K_{\max}$ :

$$W = K_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (4)$$

Максимальную скорость определим из формулы (2), приняв  $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ ;  $v_{\max} = 2\pi\nu A$ . Подставив выражение скорости в формулу



(4), найдем  $W = 2\pi^2 m \nu^2 A^2$ . Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$W = 22,1 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 22,1 \text{ мкДж}.$$

*Ответ:*  $\nu = \pm 8,2 \text{ см/с}$ ,  $F_{\max} = 1,49 \text{ мН}$ ,  $W = 22,1 \text{ мкДж}$ .

**Пример 5.** Частица одновременно участвует в двух колебаниях одного направления:  $x_1 = 4\cos(4t)$  и  $x_2 = 3\cos(4t + \pi/2)$ . Определите амплитуду, циклическую частоту и начальную фазу результирующего колебания. (**Уровень 2**).

**Решение.** Результирующее колебание будет происходить с частотой складываемых колебаний  $\omega = 4 \text{ рад/с}$ . Амплитуда результирующего колебания определяется соотношением

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где  $A_1 = 4 \text{ см}$ ,  $A_2 = 3 \text{ см}$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ . Подставляя значения, получаем  $A = 5 \text{ см}$ .

Начальную фазу определим по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{4}.$$

Результирующее колебание имеет начальную фазу

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36,9^\circ.$$

*Ответ:*  $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36,9^\circ$ .

**Пример 6.** Результирующее колебание точки, участвующей в двух колебаниях одного направления, описывается уравнением  $x = A\cos(2,1t)\cos(80t)$ . Найти период биений и циклические частоты складываемых колебаний. (**Уровень 2**).

**Решение.** Сравнивая искомое уравнение с общим уравнением биений

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right),$$

можно записать систему уравнений:  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 2,1$  и  $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 80$ . Решая ее относительно частот, получаем  $\omega_1 = 82,1 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2 = 77,9 \text{ рад/с}$ . Период биений

$$T_\sigma = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{2\pi}{82,1 - 77,9} = 1,5 \text{ с}.$$

*Ответ:*  $T_\sigma = 1,5 \text{ с}$ .

**Пример 7.** Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых

$$x = A_1 \cos \omega t ; \quad (1)$$

$$y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t , \quad (2)$$

где  $A_1 = 1$  см,  $A_2 = 2$  см,  $\omega = \pi \text{с}^{-1}$ .

Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки. (**Уровень 3, 4**).

**Решение.** Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время  $t$  из заданных уравнений (1) и (2). Для этого воспользуемся формулой

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ . В данном случае  $\alpha = \omega t$ , поэтому

$$y = A_2 \cos \frac{\omega}{2} t = A_2 \sqrt{\frac{1 + \cos \omega t}{2}} .$$

Так как согласно формуле (1)  $\cos \omega t = \frac{x}{A_1}$ , то уравнение траектории

$$y = A_2 \sqrt{\frac{1 + \frac{x}{A_1}}{2}} = \sqrt{2(1+x)} . \quad (3)$$

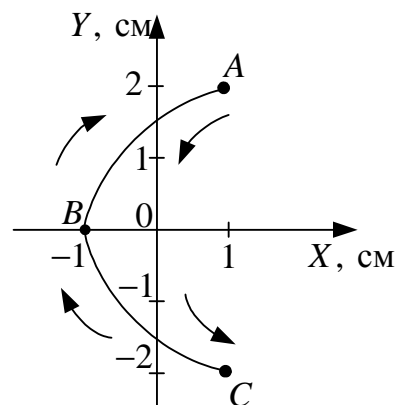
Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью  $OX$ . Из уравнений (1) и (2) следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от  $-1$  до  $+1$  см по оси  $OX$  и от  $-2$  до  $+2$  см по оси  $OY$ . Для построения траектории найдем по уравнению (3) значения  $y$ , соответствующие условию  $|x| \leq 1$  см, и составим таблицу:

$x$ , см	$-1$	$-0,75$	$-0,5$	$0$	$+0,5$	$+1$
$y$ , см	$0$	$\pm 0,707$	$\pm 1$	$\pm 1,41$	$\pm 1,73$	$\pm 2$

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость  $XOY$  найденные точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию точки, совершающей колебания в соответствии с уравнениями движения (1) и (2) (см. рисунок). Для того чтобы указать направление движения точки, проследим за тем, как изменяется ее положение с течением времени. В начальный момент  $t = 0$  координаты точки  $x(0) = 1$  см и  $y(0) = 2$  см. В последующий момент времени, например, при  $t_1 = 1$  с координаты точки изменятся и станут равными  $x(1) = -1$  см,  $y(1) = 0$ .

Зная положение точек в начальный и последний (близкий) момент времени, можно указать направление движения точки по траектории. На рисунке это направление движения указано стрелкой (от точки  $A$  к точке  $B$ ). После того, как в момент  $t_2 = 2$  с колеблющаяся точка достигнет точки  $C$ , она будет двигаться в обратном направлении к точке  $B$ .

*Ответ:*  $y = \sqrt{2(1+x)}$ .



**Пример 8.** Тело массой  $m = 0,1$  кг совершает вынужденные прямолинейные колебания. Амплитудное значение силы  $F_0 = 1,5$  Н. Коэффициент затухания  $\beta = 0,5$  с<sup>-1</sup>. Определить максимальное значение амплитуды скорости  $v_{\max}$ . (**Уровень 2**).

**Решение.** Скорость тела при установившихся колебаниях

$$v = x' = (A \cos(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальное значение скорости

$$v_{\max} = A\omega,$$

где амплитуда смещения

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Выражение для скорости принимает вид

$$v_{\max} = \frac{F_0\omega}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Резонансная частота для скорости равна собственной частоте. Подставляя  $\omega = \omega_0$  в последнее выражение, получаем  $v_{\max} = \frac{F_0}{2\beta m}$ . Вычисляем

максимальную скорость:  $v_{\max} = 15$  м/с.

*Ответ:*  $v_{\max} = 15$  м/с.

**Пример 9.** Измерениями установлено, что логарифмический декремент затухания камертона, колеблющегося с частотой  $100$  с<sup>-1</sup>, равен  $0,002$ . Через какой промежуток времени амплитуда колебаний возбужденного камертона уменьшится в  $100$  раз? Как изменится при этом энергия колебаний? (**Уровень 3**).

**Решение.** Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем  $t$  по закону

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1)$$

где  $\beta = \frac{\delta}{T}$  – коэффициент затухания;  $\delta$  – логарифмический декремент затухания и  $T$  – период колебаний,  $T = \frac{1}{\nu}$ .

Поэтому формулу (1) можно записать еще и так:

$$A = A_0 e^{-\delta \nu T}, \text{ откуда } t = \frac{1}{\delta \nu} \ln \frac{A_0}{A}.$$

Энергия колебаний  $W$  пропорциональна квадрату произведения амплитуды и циклической частоты колебаний

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

В данной задаче  $m = \text{const}$  и  $\omega = 2\pi\nu = \text{const}$ . Поэтому

$$\frac{W}{W_0} = \left( \frac{A}{A_0} \right)^2.$$

Вычисления:  $t = \frac{1}{0,002 \cdot 100} \ln 100 = 23 \text{ с}.$

$$\frac{W}{W_0} = \left( \frac{1}{100} \right)^2 = 10^{-4}.$$

*Ответ:*  $t = 23 \text{ с}, \frac{W}{W_0} = 10^{-4}.$

**Пример 10.** Груз массой  $m = 0,5$  кг, подвешенный к пружине жесткостью  $k = 32$  Н/м, совершает затухающие колебания. Определить логарифмический декремент затухания, коэффициент затухания, период колебаний, если после 100 колебаний амплитуда уменьшилась в  $n = 16$  раз. (Уровень 4).

**Решение.** Амплитуда со временем уменьшается по закону

$$A = A_0 e^{-\beta \tau}. \quad (1)$$

По условию задачи за время  $\tau = NT$  амплитуда уменьшится в  $n = 16$  раз,

$$n = \frac{A_0}{A} = e^{\beta \tau} = e^{\beta NT}. \quad (2)$$

Логарифмируя данное выражение, получаем  $\ln n = \beta NT$ . (3)

Поскольку логарифмический декремент затухания  $\delta = \beta T$ , то с учетом (3) получаем

$$\delta = \frac{\ln n}{N}. \quad (4)$$

Период колебаний 
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (5)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , а

$$\beta = \frac{\delta}{T} = \frac{\ln n}{NT}. \quad (6)$$

$$T = \sqrt{\frac{m}{k} \left( 4\pi^2 + \left( \frac{\ln n}{N} \right)^2 \right)}. \quad (7)$$

Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{\ln n}{NT} = \frac{\ln n}{\sqrt{\frac{m}{k} \left( 4\pi^2 N^2 + (\ln n)^2 \right)}}. \quad (8)$$

Проведя вычисления по формулам (4), (7) и (8), получаем:  $\delta = 0,027$ ;  $\beta = 0,035 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 0,789 \text{ с}$ .

*Ответ:*  $\delta = 0,027$ ;  $\beta = 0,035 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = 0,789 \text{ с}$ .

**Пример 11.** Гиря массой 0,5 кг, подвешенная к пружине жесткостью  $k = 32,0 \text{ Н/м}$ , совершает затухающие колебания. Определить период колебаний в двух случаях: 1) за время, в течение которого произошло  $n_1 = 88$  колебаний, когда амплитуда уменьшилась в  $N_1 = 2$  раза; 2) за время двух колебаний ( $n_2 = 2$ ), когда амплитуда уменьшилась в  $N_2 = 20$  раз. (Уровень 4, 5).

**Решение.** Сопротивление среды уменьшает число свободных колебаний. Циклическая частота затухающих колебаний определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

откуда период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1)$$

Собственную циклическую частоту  $\omega_0$  выразим сразу, зная массу  $m$  гири и жесткость пружины  $k$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8,0 \text{ рад/с}.$$

Коэффициент затухания  $\beta$  нельзя найти непосредственно из условия задачи. Согласно формуле  $\delta = \beta T$  он равен

$$\beta = \frac{\delta}{T}. \quad (2)$$

Чтобы найти декремент затухания  $\delta$ , обратимся к уравнению затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Уменьшающуюся со временем амплитуду с учетом (1) выразим так:

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\delta t}{T}}. \quad (3)$$

Пользуясь введенными в условии обозначениями, можно записать:  $A_0/A = N$ ;  $t/T = n$ . Тогда из (3) следует:  $e^{\delta n} = N$ , откуда, логарифмируя, имеем

$$\delta = \frac{\ln N}{n}.$$

Подставив числовые значения  $N$  и  $n$  для двух случаев, получим

$$\delta_1 = 0,0079; \quad \delta_2 = 1,5.$$

Теперь перепишем формулу (1) с учетом (2):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{T^2}}}.$$

Получилось квадратное уравнение относительно периода  $T$ . Решив его, найдем (отбрасывая отрицательный корень)

$$T = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}{\omega_0}. \quad (4)$$

Вычисляя период, заметим, что в первом случае  $\delta_1^2 \ll 4\pi^2$ . Поэтому, сохраняя достаточно высокую точность вычислений, можно в формуле (4) пренебречь членом  $\delta^2$ , и тогда

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{8,0} = 0,78 \text{ с.}$$

Во втором случае нельзя отбросить величину  $\delta^2$ , тогда, производя вычисления по (4), получим

$$T_2 = 0,81 \text{ с.}$$

**Пример 12.** Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой  $\nu = 900$  Гц. Определите собственную частоту колебательной системы, если резонансная частота  $\nu_{рез} = 898$  Гц. (**Уровень 3**).

**Решение.** Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  – собственная циклическая частота колебательной системы;  $\beta$  – коэффициент затухания. Резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2; \quad (3)$$

$$\omega_0^2 = \omega_{рез}^2 + 2\beta^2. \quad (4)$$

Умножив уравнение (3) на 2 и вычитая из полученного уравнения (4), получаем

$$\omega_0^2 = 2\omega^2 - \omega_{рез}^2. \quad (5)$$

Учитывая, что  $\omega = 2\pi\nu$ , из уравнения (5) найдем собственную частоту колебательной системы

$$\nu_0 = \sqrt{2\nu^2 - \nu_{рез}^2}.$$

Вычисляя, получим  $\nu_0 = 902$  Гц.

*Ответ:*  $\nu_0 = 902$  Гц.

### 3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Запишите уравнение гармонического колебательного движения материальной точки, совершающей колебания с амплитудой  $A = 5$  см, причем за время  $t = 2$  мин совершается 300 колебаний. Начальная фаза колебаний  $\varphi = 30^\circ$ . [ $x = 0,05 \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ , м; **уровень 2**].
2. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой  $A = 2$  см и частотой  $\nu = 2$  Гц. Запишите уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения  $x_0 = 1$  см. [ $x = 0,02 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ , м; **уровень 2**].
3. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону  $x = 0,02 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ , м. Определите скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 2$  с. [ $\nu = -5,44$  см/с,  $a = -9,86$  см/с<sup>2</sup>; **уровень 3**].

4. Материальная точка совершает гармонические колебания с периодом  $T = 1$  с. Запишите уравнение колебаний точки, если в начальный момент времени она проходит положение равновесия с положительной скоростью  $v_0 = 6,28$  см/с. [ $x = 0,01 \cos\left(2\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$ , м; **уровень 3**].
5. Материальная точка массой  $m = 10$  г совершает гармонические колебания с амплитудой  $A = 10$  см. Определите частоту колебаний  $\nu$ , если максимальная сила  $F_{\max}$ , действующая на точку, равна 10 мН. [ $\nu = 0,503$  Гц; **уровень 4**].
6. Материальная точка массой  $m = 10$  г совершает гармонические колебания, описываемые уравнением  $x = 0,1 \cos 3\pi t$ , м. Определите полную энергию  $W$  колеблющейся точки. [44,4 мДж; **уровень 2**].
7. Пружинный маятник совершает гармонические колебания, описываемые уравнением  $x = 0,3 \cos \frac{\pi}{6} t$ , м. В тот момент, когда возвращающая сила  $F$  в первый раз достигла значения  $-10$  мН, потенциальная энергия  $W$  маятника оказалась равной 7,5 мДж. Определите этот момент времени  $t$ . [ $t = 2$  с; **уровень 4**].
8. Груз, неподвижно висающий на спиральной пружине, растянул ее на 6,2 см. Затем груз оттянули вниз и отпустили, в результате чего он начал колебаться вдоль вертикальной линии. Определите период колебаний груза. [ $T = 0,5$  с; **уровень 3**].
9. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с периодом  $T_1 = 1$  с. После того как подвесили еще один груз, период колебаний увеличился в два раза. Пренебрегая массой пружины, определите, насколько удлинилась пружина при добавочном грузе. [ $\Delta x = 7,46$  см; **уровень 4**].
10. Складываются два гармонических колебания, описываемые уравнениями  $x_1 = 0,1 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$  (м) и  $x_2 = 0,1 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$  (м). Сложив эти колебания с помощью метода векторных диаграмм, запишите уравнение результирующего колебания. [ $A = 0,193$  м,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = 0,193 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ ; **уровень 2**].



11. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, мало отличающихся по частоте, описывается уравнением вида  $x = A \cos t \cos 50t$ . Определите циклические частоты складываемых колебаний, циклическую частоту биений, период биений. [ $\omega_1 = 51$  рад/с,  $\omega_2 = 49$  рад/с,  $\omega_b = 2$  рад/с,  $T_b = 2,14$  с; **уровень 2**].
12. Материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями  $x = \cos \pi t$  и  $y = \cos \frac{\pi t}{2}$ . Найдите уравнение траектории точки. [ $2y^2 - x = 1$ ; **уровень 2**].
13. Запишите уравнение затухающих колебаний материальной точки, если смещение точки при  $t = \frac{T}{4}$  составляет 4,5 см, период затухающих колебаний  $T = 4$  с, логарифмический декремент затухания  $\delta = 0,4$ , начальная фаза равна нулю. [ $x = 6,7e^{-0,1t} \cos \frac{\pi}{2}t$ , см; **уровень 3**].
14. Логарифмический декремент затухания тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0,02. Определите время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; число полных колебаний тела за время, в течение которого произошло подобное уменьшение амплитуды. [ $t = 3$  с;  $N = 150$ ; **уровень 3**].
15. Определите добротность  $Q$  колебательной системы, если за время, в течение которого система совершает  $N = 90$  полных колебаний, их амплитуда уменьшилась в 3 раза. [ $Q = 257$ ; **уровень 3**].
16. Тело массой  $m = 50$  г совершает затухающие колебания, начальная амплитуда  $A_0$  которых равна 10 см, начальная фаза  $\varphi_0 = 0$ , коэффициент затухания  $\beta = 1,6$  с<sup>-1</sup>. В результате действия на это тело внешней периодической силы установились вынужденные колебания, описываемые уравнением  $x = 6 \cos(10\pi t - 0,75\pi)$ , см. Найдите: уравнение собственных затухающих колебаний; уравнение внешней периодической силы. [ $x = 0,1e^{-1,6t} \cos 10,5\pi t$ , м;  $F = 0,712 \cos 10\pi t$ , Н; **уровень 4**].
17. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой  $\nu = 900$  Гц. Определите собственную частоту колебательной системы, если ее резонансная частота  $\nu_{рез} = 898$  Гц. [ $\nu_0 = 902$  Гц; **уровень 3**].

## УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 2. МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В этом учебном модуле рассматриваются особенности и закономерности движения материальных тел с использованием простейшей модели тел как совокупности взаимодействующих частиц тела, представляемого системой взаимосвязанных материальных точек. Объединение за счет взаимных связей частиц (материальных точек) тела в единое целое (тело) приводит к появлению новых, не присущих одной материальной точке особенностей движения и новых закономерностей.

При описании движения систем в механике они разделяются на три принципиально различных типа. Системы с *сильными* (жесткими) и *ориентированными связями* частиц образуют твердые тела, которые способны в определенной степени сохранять форму и объем. Системы с *сильными, но свободно ориентирующимися связями* частиц образуют жидкие тела, которые способны сохранять объем, но принимают форму предоставляемого им объема или обусловленную движением. В ряде случаев методика рассмотрения системы материальных точек как единого тела применяется и к системам со *слабыми* и *неориентированными связями* частиц, образующих газообразные структуры (тела), которые занимают весь предоставляемый им объем любой формы. Сильная связь частиц реализуется в случае, когда потенциальная энергия их взаимодействия значительно превышает их кинетическую энергию. Слабая – когда кинетическая энергия частиц значительно превышает потенциальную энергию их взаимодействия в системе.

В этом модуле рассматриваются закономерности движения твердого тела и жидкости.

Вводимые новые физические понятия обусловлены проявлением новых свойств систем микрочастиц. Однако в большинстве случаев описание этих новых свойств и закономерностей основывается на понятиях и закономерностях механики материальной точки, рассмотренных ранее. Поэтому краткое содержание теоретического материала модуля содержит таблицу аналогий закономерностей поступательного и вращательного движений.

Модуль содержит четыре учебных блока:

1. Статика.
2. Динамика вращательного движения твердого тела.
3. Колебания твердого тела.
4. Механика жидкости.

*В первом блоке* рассматриваются движения, когда существенна протяженность тел.

При этом считают тела абсолютно твердыми. Рассматриваются поступательное и вращательное движения тела вокруг закрепленной оси. Вводятся следующие понятия: плечо силы, момент силы, угловое ускорение тела при его вращении вокруг закрепленной оси, момент инерции тела, уравнение движения вращающегося тела, понятия результирующей силы, центра масс (центра инерции), пары сил, условия и виды равновесия состояния тела и системы тел.

*Во втором блоке* рассматривается плоское движение твердого тела – вращение вокруг неподвижной оси и сложное плоское движение, которое представляют как сумму поступательного движения и вращения вокруг воображаемой оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскостям, в которых располагаются траектории всех точек тела. Показано, что для системы твердых тел законы сохранения импульса и момента импульса – это два независимых закона. Рассматривается вращение симметричного волчка в отсутствие действия внешних сил (свободное вращение).

*В третьем блоке* рассматриваются механические одномерные колебания, для описания которых достаточно одной координаты. Это может быть либо линейная, либо угловая координата. Вводится понятие физического и математического маятника. Рассматриваются крутильные колебания и колебания в системе связанных тел.

*В четвертом блоке* рассматриваются жидкости как сплошные среды. Используются понятия давления, а также законы Паскаля, Архимеда, Стокса, уравнения Бернулли и непрерывности потока. Вводятся понятия линии и трубки тока, вязкости, числа Рейнольдса. Описаны способы определения вязкости (методом Пуазейля) и коэффициент вязкости.

### Учебно-методическая структура модуля

Учебный модуль 2			
Механика материальных тел. Модель системы материальных точек			
Учебный блок 1 Статика	Учебный блок 2 Динамика вращательного движения твердого тела	Учебный блок 3 Колебания твердого тела	Учебный блок 4 Механика жидкости
<ul style="list-style-type: none"> <li>– результирующая сил, действующих на твердое тело;</li> <li>– момент силы, результирующий момент сил;</li> <li>– равновесное состояние тела, условия равновесия;</li> <li>– виды равновесия</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– характеристики вращательного движения тел, абсолютность вращательного движения;</li> <li>– законы Ньютона для вращательного движения;</li> <li>– законы сохранения для вращательного движения;</li> <li>– степени свободы вращательного движения;</li> <li>– момент инерции тел;</li> <li>– вращение относительно оси, относительно точки</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– особенности физического маятника;</li> <li>– крутильные колебания;</li> <li>– колебания связанных систем</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– свойства жидкости, модель идеальной жидкости;</li> <li>– течение жидкости, поток, линии тока;</li> <li>условие непрерывности;</li> <li>– законы сохранения в текущей жидкости, трение в жидкости;</li> <li>– основные законы гидродинамики</li> </ul>

### Методическая программа модуля

Тема занятия	Цель занятия	Вид занятия	Часы
1. Условия равновесия тел, виды равновесия	формирование новых знаний	лекция	1
2. Определение видов и условий равновесного состояния тел (статика)	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
3. Кинематические и динамические параметры вращательного движения, момент инерции тел	формирование новых знаний	лекция	2
4. Определение характеристик вращательного движения тела, центра масс тел и моментов инерции тел	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
5. Законы Ньютона и законы сохранения момента импульса и энергии для вращательного движения. Работа	формирование новых знаний	лекция	1
6. Вращение тел относительно свободной оси, заданной точки. Степени свободы твердого тела	формирование новых знаний	лекция	2
7. Законы сохранения импульса и энергии, параметры вращения и качения тел. Применение теоремы Штейнера	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2
8. Уравнения колебаний физического и крутильного маятников	формирование новых знаний	лекция	2
9. Определение параметров колебаний физического и крутильного маятников. Применение теоремы Штейнера	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
10. Течение жидкости. Трение в жидкости. Основные законы гидродинамики	формирование новых знаний	лекция	2
11. Определение параметров течения жидкости, движения тел в жидких средах	формирование и систематизация новых навыков	практич. занятие	2
12. Механика твердого тела и жидких сред (по графику из списка лабораторных работ)	систематизация знаний и формирование навыков экспериментальной работы	лаборатор. занятия	8
13. Механика твердого тела и жидких сред	занятие – проверка результатов обучения	итоговое занятие	2

## УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. СТАТИКА

**Статика** – раздел механики, в котором изучаются виды равновесных (статических) состояний тела или системы тел и условия, обеспечивающие равновесные состояния. Статика является частным случаем *динамики состояния твердого тела*, в котором линейные и угловые ускорения отсутствуют (равны нулю). Тем не менее, этот раздел механики имеет большое и самостоятельное значение для практической деятельности, поскольку позволяет определять условия устойчивости тел, деформации и нагрузки элементов в системах тел, условия достижения необходимой прочности конструкций.

При изучении этого раздела студенты должны **иметь представление:**

- о векторных и скалярных физических величинах;
- о силах, действующих на тела;
- об особенностях поступательного движения;
- о центре масс системы взаимосвязанных материальных точек;

**обладать навыками:**

- сложения векторных физических величин;
- нахождения проекций векторов на координатные оси;
- выбора наиболее удобных систем координат.

### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
– преобразование действующих на тело сил с различными точками приложения в силы, определяющие поступательное и вращательное движения системы материальных точек; – момент силы; – условия и виды равновесного состояния тела и системы тел	лекция, самост.	[7] [9] [13]

### Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
– методику определения положения центра масс тела; – понятия: плечо силы, момент силы; – виды равновесного состояния тела; критерий, определяющий вид равновесного состояния	– находить момент силы; – находить положение центра масс тела (простейшие случаи); – записать необходимое количество уравнений – условий равновесия тел; – рассчитать силы реакции связей между элементами системы в равновесном состоянии; – находить результирующую сил, действующих на тело, и разлагать ее на силы, обеспечивающие прямолинейное движение и по окружности

## 1.1. Краткое содержание теоретического материала

Из закона сохранения импульса системы материальных точек следует, что внутренние силы связей материальных точек (внутренние силы) в системе не могут привести к изменению состояния центра масс системы (координат, параметров движения). Вывести систему (в том числе центр масс) из состояния покоя могут только внешние силы, векторная сумма которых (резльтирующая сила) может быть определена переносом сил вдоль линии их действия в одну точку – точку приложения этой результирующей силы. Как и любую силу, результирующую силу, приложенную к системе материальных точек (твердому телу), можно разложить, по крайней мере, на две силы, линия действия одной из которых проходит через центр масс твердого тела, а другая перпендикулярна к силе, проходящей через центр масс.

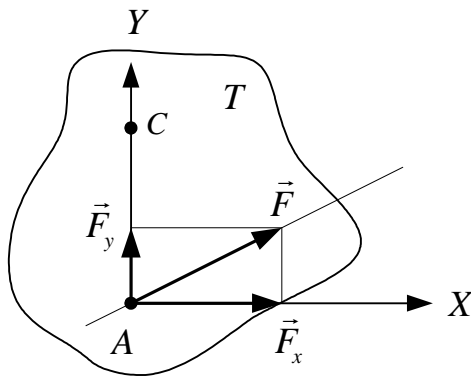


Рис. 1.1

Для анализа характера движения обратимся к рис. 1.1, где точка  $C$  – центр масс твердого тела  $T$  произвольной формы, а точка  $A$  – точка приложения вектора результирующей силы  $\vec{F}$ . Соединим точки  $A$  и  $C$  прямой линией и будем считать ее координатной осью  $Y$ . Перпендикулярно к оси  $Y$  проведем координатную ось  $X$  так, чтобы сила  $\vec{F}$  лежала в плоскости  $XAY$ . Разложив  $\vec{F}$  на компоненты по осям координат, получим  $\vec{F}_y$  и  $\vec{F}_x$ . Силу  $\vec{F}_y$ , действующую по линии  $AC$ , согласно правилу о переносе сил вдоль линии их действия можно считать приложенной к центру масс. Она приводит в момент времени действия силы  $\vec{F}$  к ускорению  $a_y$  центра масс вдоль оси  $Y$ , т.е. к поступательному движению тела по оси  $Y$ . Если  $\vec{F} = 0$  или ее проекция  $\vec{F}_y = 0$ , то центр масс будет оставаться в покое (или двигаться прямолинейно и равномерно). Сила  $\vec{F}_x$  обеспечивает в это же мгновение действия силы  $\vec{F}$  поворот тела относительно точки  $C$  (и всех точек тела вследствие их жесткой связи). В результате все точки тела, кроме точки центра масс, в момент действия силы  $\vec{F}_x$  движутся по окружностям, центры которых лежат в точке  $C$ . При этом каждая из точек тела испытывает различные тангенциальное и центростремительное ускорения. Такое движение тела называется *вращением*. Суперпозиция по-

ступательного (по оси  $Y$ ) и вращательного (по окружности) движений для каждой точки тела полностью характеризует движение этой точки тела в пространстве в этот момент времени. В последующий момент времени движение всех точек тела может быть другим по своим характеристикам (параметрам) в соответствии с изменением точки приложения результирующей силы и ее направления относительно выбранной системы координат  $XAY$ .

В появлении этого дополнительного вращательного движения и проявляется новое (отсутствующее у одной материальной точки) свойство системы жестко связанных материальных точек (тела).

Если все действующие на тело силы можно свести к одной результирующей силе, линия действия которой проходит через центр масс тела, то условием, достаточным для равновесного состояния тела, является:

$$\vec{F}_p = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0. \quad (1)$$

Часто силы, действующие на тело в его различных точках, оказываются параллельными. Например, силы  $m_1\vec{g}$  и  $m_2\vec{g}$ , действующие на массы  $m_1$  и  $m_2$ , скрепленные жестко невесомыми стержнями  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 1.2), можно считать параллельными. Однако эти силы центральные, т.е. имеющие точку пересечения линий их действия, расположенную (будем считать) в бесконечности относительно тела  $(m_1, m_2)$ . Поэтому их

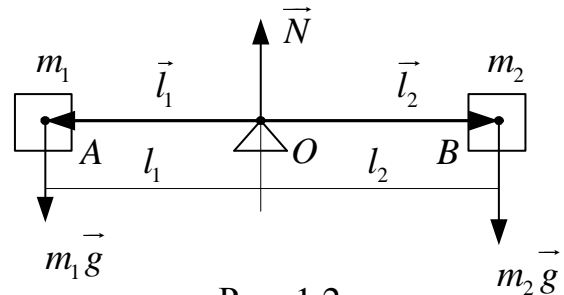


Рис. 1.2

можно векторно сложить и получить результирующую силу с модулем  $(m_1 + m_2)g$ . Так как расстояние  $(l_1 + l_2) \ll R_3$ , при поступательном движении тело  $(m_1 + m_2)$  можно рассматривать как материальную точку с массой  $M = m_1 + m_2$ , а линию действия результирующей силы – считать параллельной линиям действия сил  $m_1\vec{g}$  и  $m_2\vec{g}$  и приложенной к центру масс  $M$  тела (точка  $O$ , см. рис. 1.2). Действительно, опыт показывает, что любое свободно падающее тело в поле сил тяжести движется только поступательно (прямолинейно), если в момент начала падения оно не вращалось. Падение тела можно исключить, если под центр масс тела  $(m_1, m_2)$  подставить опору, реакция которой уравнивает результирующую силу:  $\vec{F}_p = (m_1 + m_2)\vec{g}$ . Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 1.2, на воз-

возможность вращательного движения. Пусть тело лежит на неподвижной опоре  $O$ . Силы, действующие на систему «грузы – стержень», параллельны:  $m_1\vec{g}$ ,  $m_2\vec{g}$  – силы тяжести,  $\vec{N}$  – реакция опоры. Опыт работы с подобными системами (например, рычажные весы) показывает, что система остается в равновесии, если выполняются два условия:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{N} - m_1\vec{g} - m_2\vec{g} = 0; \quad (2)$$

$$m_1gl_1 = m_2gl_2. \quad (3)$$

Первое условие исключает поступательное движение системы, второе условие (**правило рычага**) исключает возможное вращательное движение тела относительно точки опоры  $O$ . Величины  $m_1gl_1$  и  $m_2gl_2$  получили название *модулей моментов сил*. Видно, что каждая из сил стремится вызвать поворот системы в различных направлениях ( $m_1gl_1$  – против хода часовой стрелки,  $m_2gl_2$  – по ходу часовой стрелки). Поэтому величина  $[\vec{l} \times \vec{F}]$  – *момент силы*  $\vec{F}$  – в общем случае является векторной величиной. В соответствии с векторной алгеброй векторы моментов сил  $\vec{M}_1 = [\vec{l}_1 \times \vec{F}_1]$  и  $\vec{M}_2 = [\vec{l}_2 \times \vec{F}_2]$  направлены перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  и их плечи  $\vec{l}_1$  и  $\vec{l}_2$ . Направление  $\vec{M}$  принято определять по **правилу правого винта** (или буравчика): *если буравчик поставить в точку вращения  $O$ , а рукоятку вращать в направлении силы, то направление поступательного перемещения буравчика (звинчивание или вывинчивание) показывает направление вектора  $\vec{M}$* . При этом любое из направлений  $\vec{M}$  может быть взято положительным, тогда другое направление следует считать отрицательным. В соответствии с этим второе условие (3) в общем виде можно записать следующим образом:

$$m_1gl_1 - m_2gl_2 = 0$$

или

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0. \quad (4)$$

Это означает, что для исключения вращения твердого тела *векторная сумма моментов сил*, действующих на тело относительно любой точки тела (центра вращения), *должна быть равна нулю*.



В реальных телах масса распределена по всему объему тела. Поэтому при решении задач целесообразно мысленно расчленять тело на элементы, для которых можно легко определить центры масс, которые потом соединяются воображаемыми невесомыми жесткими элементами, и решать задачу, как это сделано для системы, показанной на рис. 1.2.

При вращении тела некоторые его точки остаются неподвижными. Прямая, образуемая этими точками, называется *осью вращения*.

Если тело находится в равновесии, то для решения задачи об условиях равновесия «воображаемая» точка (ось) вращения может быть выбрана произвольно, и для нее может быть составлено уравнение (4). Уравнений типа (4) путем выбора различных точек (осей вращения) может быть составлено несколько, как правило столько, сколько необходимо для нахождения неизвестных в задаче. При этом отсутствие вращения тела относительно воображаемой оси вращения обеспечивается при условии равенства нулю суммы проекций моментов сил на эту ось.

Особое значение имеет частный случай, когда на тело действуют две равные параллельные силы, имеющие противоположное направление, их называют *парой сил*. Пара сил приводит тело только во вращательное движение.

Кратчайшее расстояние между параллельными прямыми, вдоль которых действуют составляющие пары силы, называется *плечом пары сил* (рис. 1.3).

Момент пары сил равен произведению одной из сил на плечо  $l_n$ , независимо от положения оси вращения:

$$\vec{M}_n = [\vec{l} \times \vec{F}] \quad \text{или} \quad |\vec{M}_n| = Fl_n.$$

При повороте тела под действием не изменяющихся по величине и направлению сил модуль момента пары сил изменяется так, как изменяется ее плечо. Когда тело займет положение, при котором обе силы окажутся направленными по одной прямой, их результирующая сила будет равна нулю.

Равновесие тела в некотором положении называется *устойчивым*, если при любых малых отклонениях тела от этого положения внешними силами возникают силы или моменты сил, стремящиеся вернуть тело в исходное состояние.

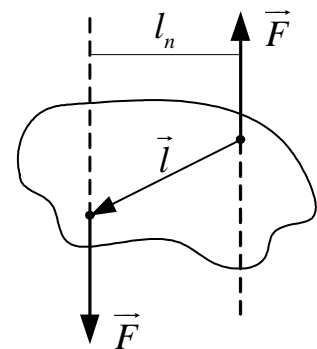


Рис. 1.3

На рис. 1.4 показаны примеры устойчивых положений равновесия некоторых тел и малые отклонения от этих положений в поле сил тяготения.

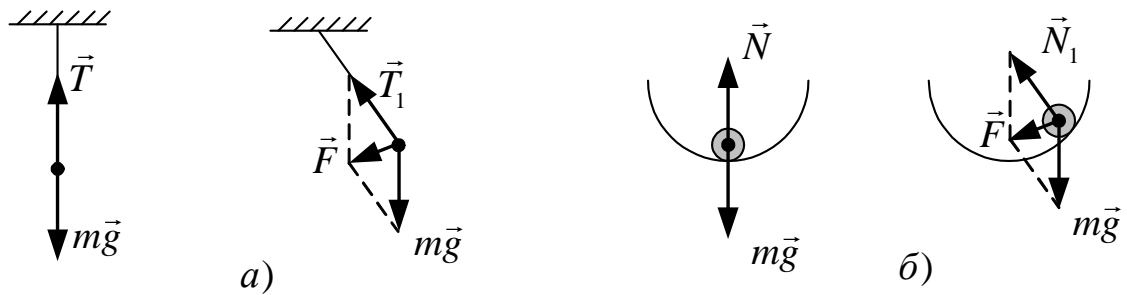


Рис. 1.4

Равновесие тела в некотором положении называется *неустойчивым*, если хотя бы при некоторых малых отклонениях тела от этого положения внешними силами возникают силы или моменты сил, препятствующие возвращению тела в исходное состояние (рис. 1.5).

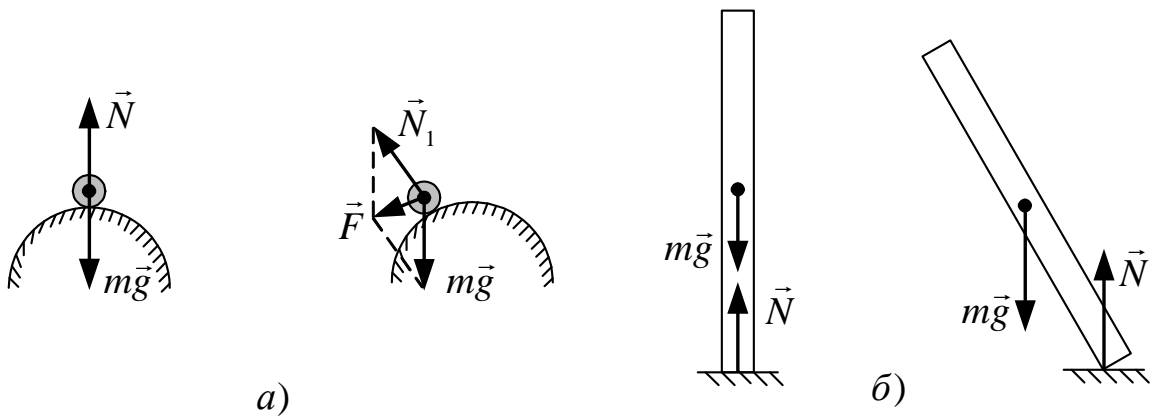


Рис. 1.5

Равновесие в некотором положении называют *безразличным*, если при любых малых отклонениях тела от этого положения внешними силами не возникает сил или моментов сил, стремящихся вывести тело из нового положения (рис. 1.6).

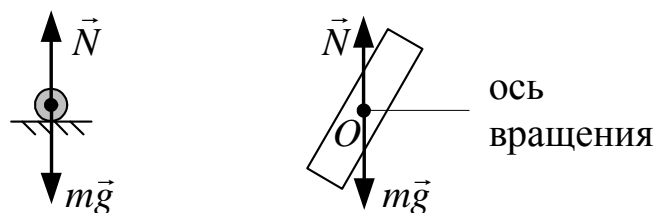


Рис. 1.6

## 1.2. Методические указания к лекционным занятиям

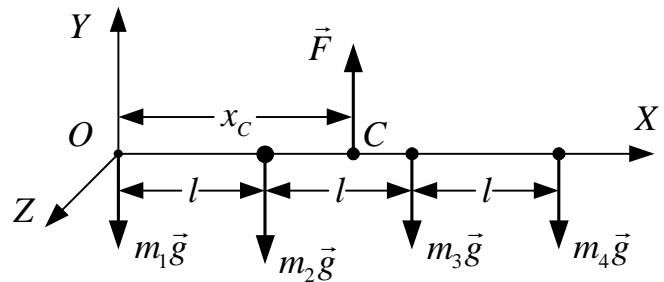
Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Статика</b></p> <p>Условие равновесия материальной точки.</p> <p>Понятие твердого тела.</p> <p>Центр масс тела.</p> <p>Силы природы, рассматриваемые в механике.</p> <p>Сложение сил, действующих на твердое тело в разных точках приложения.</p> <p>Момент силы. Правило моментов.</p> <p>Виды равновесия твердого тела</p>	<p>самост.</p> <p>лекция</p> <p>самост.</p> <p>самост.</p> <p>лекция</p> <p>лекция</p> <p>лекция</p>	<p>[13], шл. 4.1 – 4.6</p> <p>[7], п. 4.1</p> <p>[10], п. 16</p> <p>[5], п. 1.31</p>	<p>1. Какие физические величины называют векторами?</p> <p>2. Как находят векторную сумму (равнодействующую) нескольких сил?</p> <p>3. Запишите формулы для сил трения, упругости, гравитации, реакции опоры.</p> <p>4. Как направлен вектор момента силы?</p> <p>5. Сформулируйте условия равновесия твердого тела.</p> <p>6. Какое равновесие называют устойчивым, неустойчивым, безразличным?</p>

### 1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Статика	<p>Определение положения центра масс системы материальных точек</p> <p>Нахождение центра масс твердых тел</p> <p>Условия равновесия тел с закрепленной осью вращения</p> <p>Условия равновесия тел, которые могут участвовать во вращательном и поступательном движениях</p>	<p>1. Всю совокупность сил тяжести, действующих на материальные точки системы, можно заменить одной силой, приложенной к центру масс системы, положение которого определяется формулами</p> $x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m},$ <p>где <math>x_c, y_c, z_c</math> – координаты центра масс в произвольно выбранной системе координат.</p> <p>2. Сделать схематический чертеж, на котором указать все силы, действующие на тело. Особое внимание обратить на правильное указание точек их приложения.</p> <p>3. Записать правило моментов относительно произвольно выбранной оси вращения. Как правило, ось вращения выбирают таким образом, чтобы через нее прошло дило как можно больше линий действия сил, приложенных к телу. Моменты таких сил равны нулю.</p> <p>4. Найти плечи сил относительно этой оси.</p> <p>5. Если в полученное уравнение моментов входит две или более неизвестные величины, то надо использовать уравнения равновесия сил в проекциях на выделенные оси координат.</p> <p>6. Решение системы, состоящей из уравнения моментов и уравнений равновесия в проекциях на оси координат, приводит к определению искомого величин</p>	<p>[12], №№ 3.59 – 3.63, №№ 4.37 – 4.42</p> <p>[11], №№ 1.71 – 1.73</p> <p>[12], №№ 3.53 – 3.59</p>

## 1.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** Четыре материальные точки массами  $m_1, m_2, m_3, m_4$  расположены на невесомом жестком стержне на расстояниях  $l$  друг за другом (см. рисунок). Найти положение центра масс системы. (Уровень 1).



**Решение**

**Первый способ.** Так как материальные точки лежат на одной прямой, то координатную ось ( $OX$ ) удобно направить вдоль прямой, соединяющей эти точки, а начало отсчета поместить на конце стержня.

Положение центра масс системы, т.е. координату  $x_C$ , определим по формуле

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m_C} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l + m_3 2l + m_4 3l}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Отсюда находим

$$x_C = l \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

**Второй способ.** Если к центру масс (некоторой точке  $C$  стержня) (см. рисунок) приложить силу  $\vec{F}$ , момент которой относительно точки  $O$  уравнивает момент действующих сил тяжести материальных точек, то система будет находиться в равновесии.

Запишем условия равновесия относительно системы координат, указанной на рисунке, с учетом силы  $\vec{F}$ :

$$m_2 gl + m_3 g 2l + m_4 g 3l - F x_C = 0; \quad (1)$$

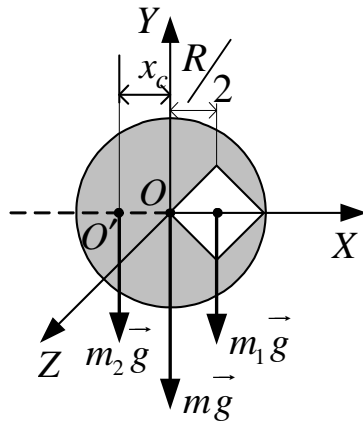
$$-(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g + F = 0. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) – (2), получим  $x_C = l \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$ .

Ответ:  $x_C = l \frac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$ .

**Пример 2.** Внутри диска радиусом  $R = 105,6$  см, изготовленного из плоскопараллельной однородной пластинки, вырезано отверстие в виде квадрата таким образом, как показано на рисунке. Найти положение центра масс диска с вырезом. (Уровень 2).

**Решение.** Положение центра масс однородных тел, имеющих вырез, легко определить при условии, что известны положения центров масс целого



тела и вырезанной части. При этом на чертеже тело с вырезом расположим так, чтобы центры масс целого тела и вырезанной части находились в плоскости рисунка на горизонтальной прямой. Тогда по сравнению с целым диском (центр масс в точке  $O$ ) центр масс диска с вырезом сместится в точку  $O'$ .

Если бы диск массой  $m$  был без выреза (мысленно вставим вырезанную часть в вырез), то на него действовала бы сила тяжести  $m\vec{g} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g}$ , где  $m_1, m_2$  – масса вырезанного квадрата и масса диска с вырезом соответственно. При этом сила тяжести  $m\vec{g}$  была бы приложена к центру масс диска без выреза (к геометрическому центру диска),  $m_1\vec{g}$  – к центру масс квадрата (к геометрическому центру квадрата),  $m_2\vec{g}$  – в некоторой точке  $O'$ , соответствующей центру масс диска с вырезом. Сила  $m\vec{g}$  в случае целого диска не создает момента относительно точки  $O$  (оси, проходящей через эту точку и перпендикулярную к плоскости рисунка). Поэтому уравнение для момента сил во втором случае (целый диск составлен из двух тел: диска с вырезом и квадрата) относительно точки  $O$  (оси  $O$ ) можно записать в виде

$$m_2 g |x_c| - m_1 g \frac{R}{2} = 0, \quad (1)$$

где  $|x_c|$  – расстояние  $OO'$ .

Выразив массы вырезанной части и диска через плотность и их объемы

$$m_1 = \frac{1}{2} \rho h R^2; \quad m = \rho h \pi R^2 \quad (2)$$

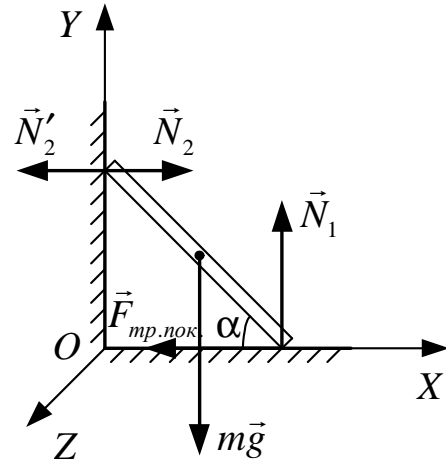
(где  $h$  – толщина пластинки;  $\rho$  – плотность материала, из которого она изготовлена), из (1) с учетом (2) находим

$$|x_c| = \frac{\frac{1}{2} m_1 R}{m_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 R}{m - m_1} = \frac{R}{2(2\pi - 1)} \approx 0,1 \text{ м.}$$

$$\text{Ответ: } |x_c| = \frac{R}{2(2\pi - 1)} \approx 0,1 \text{ м.}$$

**Пример 3.** Лестница массой  $m = 30$  кг прислонена к гладкой вертикальной стене под некоторым углом к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом  $\mu = 0,3$ . Определить наименьший угол наклона лестницы к полу, при котором она может оставаться в равновесии (не начнет скользить по полу), и силу, с которой лестница давит на стену в момент времени начала скольжения. (**Уровень 3**).

**Решение.** На лестницу кроме силы тяжести  $m\vec{g}$ , приложенной к ее центру масс (середине), действуют силы: со стороны пола – сила реакции  $\vec{N}_1$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{тр.пок.}$ ; со стороны стены – сила реакции  $\vec{N}_2$  (см. рисунок). При этом сила трения направлена таким образом, чтобы препятствовать скольжению лестницы по полу.



Введем систему координат  $XYZ$ . Относительно оси  $OZ$ , проходящей через точку  $O$  перпендикулярно к плоскости чертежа, момент силы трения покоя  $\vec{F}_{тр.пок.}$  равен нулю, сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции стены  $\vec{N}_2$  стремятся «вращать» лестницу по часовой стрелке, а сила реакции пола  $\vec{N}_1$  – против.

С учетом этого запишем уравнения равновесия лестницы в виде

$$\sum M_i = mg \frac{l}{2} \cos \alpha + N_2 l \sin \alpha - N_1 l \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_x = N_2 - F_{мп} = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_y = N_1 - mg = 0. \quad (3)$$

Поскольку сила трения в момент начала скольжения

$$F_{мп} = \mu N_1, \text{ а } N_1 = mg,$$

$$N_2 = \mu mg. \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (1) с учетом выражений (4):

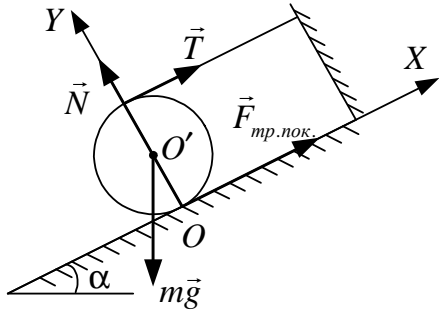
$$\frac{mg}{2} + \mu mg \operatorname{tg} \alpha \geq mg.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2\mu}; \quad \alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\mu} \approx 59^\circ;$$

$$N_2 = \mu mg = 88,2 \text{ Н.}$$

*Ответ:*  $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\mu} \approx 59^\circ; N_2 = \mu mg = 88,2 \text{ Н.}$



**Пример 4.** На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости так, как показано на рисунке. Коэффициент трения цилиндра о плоскость –  $\mu$ . При каком максимальном значении угла  $\alpha$  цилиндр не будет скользить по наклонной плоскости? (**Уровень 4**).

**Решение.** На цилиндр действуют четыре силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}$ , сила реакции  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр.пок.}$ , препятствующая скольжению цилиндра по плоскости.

Так как цилиндр покоится, алгебраическая сумма моментов сил, действующих на него, относительно произвольно выбранной оси равна нулю. Запишем уравнение моментов, например, относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа и совпадающей с осью цилиндра, а также уравнения равновесия для сил в проекциях на оси  $OX$  и  $OY$  для момента времени начала скольжения цилиндра по наклонной плоскости:

$$\sum \vec{M}_i = TR - F_{mp}R = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ix} = T + F_{mp} - mg \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{iy} = N - mg \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Выразив из уравнения (1) силу натяжения нити  $T$  и подставив в (2), получим для момента времени начала скольжения

$$2F_{mp} - mg \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

Поскольку сила трения покоя  $F_{mp} = \mu N$ , то уравнение (4) с учетом (3) можно записать в виде

$$F_{mp} = \frac{mg \sin \alpha}{2} = \mu mg \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 2\mu; \quad \alpha \leq \operatorname{arctg} 2\mu; \quad \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} 2\mu.$$

*Ответ:*  $\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} 2\mu$ .

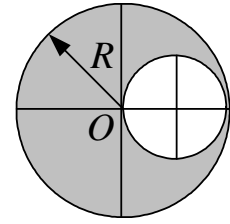
### 1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. К концам однородного стержня длиной  $l = 50$  см и весом  $P = 10$  Н подвешены две гири весом  $P_1 = 10$  Н и  $P_2 = 20$  Н. В какой точке следует поставить опору, чтобы стержень находился в равновесии? [На расстоянии

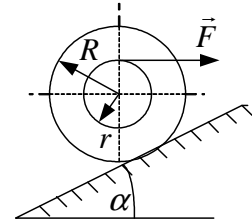
$$x = \frac{\left(\frac{1}{2}P + P_2\right)l}{P + P_1 + P_2} = 31,25 \text{ см от гири весом } P_1 = 10 \text{ Н; уровень 1].$$



2. Однородная плоская пластинка имеет форму круга радиусом  $R$ , из которого вырезан круг вдвое меньшего радиуса так, как показано на рисунке. Найти положение центра тяжести пластинки с вырезом. [На оси симметрии пластинки на расстоянии  $x = \frac{1}{6}R$  слева от ее геометрического центра; **уровень 2**].



3. катушка удерживается в покое на наклонной плоскости горизонтальной силой  $\vec{F}$ , приложенной к нити, намотанной на катушку (см. рисунок). Масса катушки  $m = 40$  г, радиусы  $r = 2$  см,  $R = 4$  см, угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha = 60^\circ$ . Найти величину силы  $F$ .



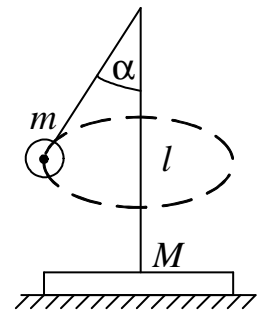
$$[F = \frac{mgR \sin \alpha}{r + R \cos \alpha} \approx 0,34 \text{ Н}; \text{уровень 3}].$$

4. Под каким углом наклона к горизонту должен ехать велосипедист по окружности радиусом  $R = 10$  м на скорости  $v = 36$  км/ч?

$$[\alpha = \text{arctg} \frac{gR}{v^2} = 44^\circ 25'; \text{уровень 3}].$$

5. На горизонтальной поверхности лежит доска массой  $M = 2$  кг. На доске находится кубик массой  $m = 0,5$  кг. Коэффициент трения между доской и горизонтальной поверхностью  $\mu = 0,3$ . Трение между кубиком и доской столь велико, что кубик относительно доски скользить не может. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к доске, чтобы кубик опрокинулся? [ $F_{\min} = (1 + \mu)(M + m)g = 32$  Н; **уровень 4**].

6. На горизонтальном столе лежит тонкий диск массой  $M = 500$  г и радиусом  $R = 15$  см (см. рисунок). В центре диска укреплен тонкий невесомый вертикальный стержень длиной  $l = 40$  см, к верхнему концу которого на невесомой и нерастяжимой нити подвешен шарик массой  $m = 300$  г. Шарик приводят в движение так, что он описывает окружность в горизонтальной плоскости вокруг стержня. Какой максимальный угол при этом может составлять нить со стержнем, чтобы диск не опрокинулся? Считать, что трение столь велико, что диск не может скользить по столу.



$$[\alpha_{\max} = \text{arctg} \frac{R(M + m)}{lm} = 45^\circ; \text{уровень 4, 5}].$$

## УЧЕБНЫЙ БЛОК 2

### ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика вращательного движения является одним из основных разделов механики, изучаемых в вузе. Это обусловлено, во-первых, достаточно новым материалом, который в школьном курсе физики не изучается. Во-вторых, этот раздел имеет большое значение при изучении других дисциплин: теоретической механики, сопротивления материалов, строительной механики, теории машин и т.д. Поэтому материал этого блока, по сравнению с другими блоками, предлагается на лекции и не выносится на самостоятельное изучение. Вместе с тем для изучения этого блока необходимо наличие у студентов определенных знаний и умений.

При изучении данного блока студенты должны **иметь представление:**

- о законах динамики материальной точки;
- о понятиях момента сил и центра масс;
- о законах сохранения;

**обладать навыками:**

- векторного и скалярного действия с величинами;
- интегрирования простейших функций;
- определения координат центра масс;
- работы с кинематическими характеристиками движения по окружности;
- вычисления моментов сил.

#### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Основные понятия: момент импульса, момент инерции, момент импульса силы	лекция	[5] [6] [7] [8] [10]
Аналог второго закона Ньютона для вращательного движения	лекция	
Закон сохранения момента импульса	лекция	
Кинетическая энергия вращательного движения. Работа	лекция	
Понятие о степенях свободы твердых тел	лекция	
Момент инерции сложных тел	лекция	
Вращение тела относительно свободной оси	лекция	
Вращение тела относительно заданной точки	лекция	
Гироскопический эффект	самост.	

## Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– законы динамики вращательного движения (законы сохранения и основной закон динамики вращательного движения);</li> <li>– методику определения моментов инерции твердых тел;</li> <li>– способы определения направления векторов момента силы, момента импульса;</li> <li>– понятие степени свободы твердого тела;</li> <li>– понятие свободной оси и особенности движения твердого тела со свободной осью</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– определять плечи сил и их моменты;</li> <li>– определять момент инерции твердых тел;</li> <li>– определять динамические характеристики вращательного движения на основе законов динамики вращательного движения;</li> <li>– решать комплексные задачи механики с учетом качения и вращения твердых тел</li> </ul>

### 2.1. Краткое содержание теоретического материала

Вращательное движение твердого тела можно рассматривать как поступательное движение по окружности вокруг одной оси жестко связанных материальных точек, составляющих тело. Пусть твердое тело состоит из двух жестко связанных материальных точек  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся под действием внешних сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 2.1.). Кроме внешних сил на точки действуют силы жесткой связи (внутренние)  $\vec{f}_{12}$  и  $\vec{f}_{21}$ . Центр масс тела находится в точке  $C$ , лежащей на прямой, соединяющей точки. Все силы и точки массой  $m_1, m_2$  лежат в плоскости чертежа.

Найдем результирующую силу  $F_p$  внешних сил. Для этого перенесем силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  по линиям их действия в точку  $K$  пересечения линий действия сил и, сложив векторы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , определим  $\vec{F}_p$ . Соединим точку  $K$  и точку  $C$  отрезком прямой. Далее разложим  $\vec{F}_p$  на взаимно перпендикулярные компоненты  $\vec{F}_{p1}$  и  $\vec{F}_{p2}$ , как показано на рисунке. Так как линия действия силы  $\vec{F}_{p2}$  проходит через центр масс, она вызывает прямолинейное (поступательное) движение центра масс системы (тела). Сила  $\vec{F}_{p1}$  вызывает вращательное движение тела под действи-

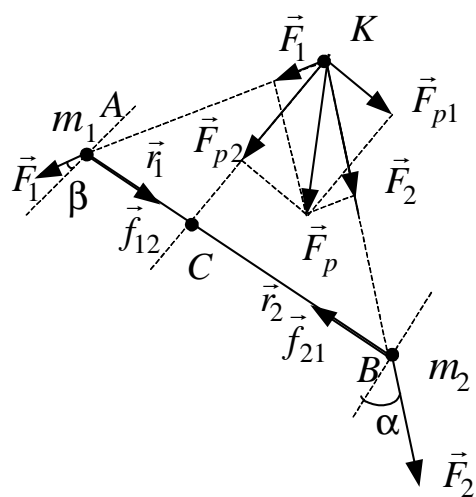


Рис. 2.1

ем момента силы  $\vec{F}_{p1}$  с плечом  $КС$  относительно точки  $С$ , которое, согласно принципу суперпозиции движений в механике, можем рассматривать независимо от других видов движения.

Внутренние силы  $\vec{f}_{12}$  и  $\vec{f}_{21}$  не вызывают вращения тела ( $m_1, m_2$ ), так как их плечи относительно точки  $С$  равны нулю. Поэтому условие эквивалентности вращающих моментов относительно оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через точку  $С$ , можно записать в виде

$$[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2] = [\vec{l} \times \vec{F}_{p1}], \quad (1)$$

где  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  – силы, вращающие тело (систему точек  $m_1, m_2$ );  $\vec{r}_1 = \overline{CA}$ ,  $\vec{r}_2 = \overline{CB}$ ,  $\vec{l} = \overline{CK}$ . В связи с этим условие равновесия для вращающих моментов можно записать в виде

$$m_1 [\vec{r}_1 \times \vec{a}_{\tau 1}] + m_2 [\vec{r}_2 \times \vec{a}_{\tau 2}] = [\vec{l} \times \vec{F}_{p1}], \quad (2)$$

где  $\vec{a}_{\tau 1}$  и  $\vec{a}_{\tau 2}$  – тангенциальные ускорения материальных точек  $m_1$  и  $m_2$ . Так как  $a_{\tau} = d\upsilon/dt$ , выражение (2) можно переписать в виде

$$[\vec{r}_1 \times m_1 d\vec{\upsilon}] + [\vec{r}_2 \times m_2 d\vec{\upsilon}_2] = [\vec{l} \times \vec{F}_{p1}] dt. \quad (3)$$

Поскольку верно равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{r} \times m\vec{\upsilon}] &= \left[ \vec{r} \times m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \right] + \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{\upsilon} \right] = \\ &= \left[ \vec{r} \times m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \right] + [\vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon}] = \left[ \vec{r} \times m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \right] \end{aligned}$$

( $[\vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon}] = 0$  как векторное произведение двух коллинеарных векторов), то вместо (2) получаем

$$d([\vec{r}_1 \times m_1 \vec{\upsilon}_1] + [\vec{r}_2 \times m_2 \vec{\upsilon}_2]) = [\vec{l} \times \vec{F}_{p1}] dt. \quad (4)$$

Слагаемые левой части равенства (4) определяют изменение момента импульсов точек  $m_1$  и  $m_2$ , а правая часть равенства – момент импульса силы. Векторы момента импульса  $[\vec{r} \times m\vec{\upsilon}]$  и момента силы  $[\vec{l} \times \vec{F}_{p1}]$  перпендикулярны к плоскости чертежа (см. рис. 2.1), а направления их подчиняются «правилу буравчика».

Введя обозначения  $m\vec{\upsilon} = \vec{p}$ ,  $[\vec{r} \times \vec{p}] = \vec{L}$  и  $[\vec{l} \times \vec{F}] = \vec{M}$ , равенство (4) запишем в окончательном виде

$$\frac{d}{dt} [\vec{L}_1 + \vec{L}_2] = \vec{M}. \quad (5)$$

Это закон изменения момента импульса.

Из уравнения (5) следует закон сохранения момента импульса.

В замкнутой системе ( $\vec{M} = 0$ ) момент импульса остается постоянным

$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} = 0\right)$ . Для решения задач целесообразно иметь представление о неко-

торых частных формулировках этого закона:

- 1) если векторная сумма моментов сил, действующих на тело, равна нулю или линия действия результирующей силы проходит через ось вращения тела, то внешние силы не изменяют угловую скорость вращения тела;
- 2) внутренние силы в системе взаимодействующих тел не могут изменить момент импульса системы;
- 3) перемещение тел в системе относительно друг друга под действием внутренних сил не изменяет момента импульса системы.

Пример определения модуля момента импульса иллюстрируется на рис 2.2, где точка массой  $m$  движется в плоскости листа и имеет импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$  (см. рис. 2.2, а).

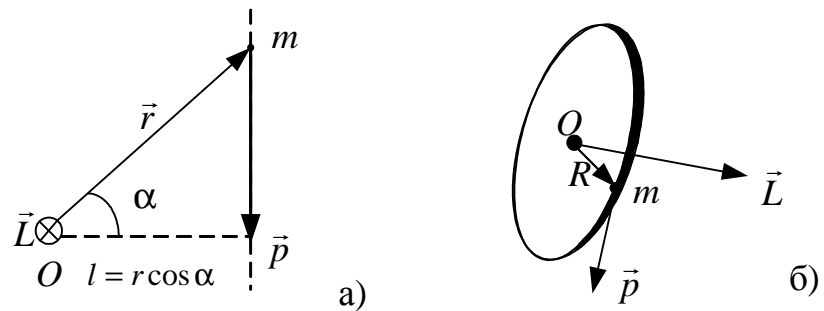


Рис.2.2

Относительно точки  $O$  момент импульса  $L$  определяется как произведение кратчайшего расстояния между линией импульса  $p$  и точкой  $O$  на импульс  $p$ :  $L = pl = mvr \cos \alpha$ . Направление вектора  $\vec{L}$  определяется по правилу векторного произведения ( $\vec{L} = m[\vec{r} \times \vec{v}]$ ). При этом можно воспользоваться правилом «левой руки»: если четыре пальца ладони направить вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$ , а ладонь расположить так, чтобы импульс  $\vec{p}$  (или  $\vec{v}$ ) входил в ладонь, то момент импульса  $\vec{L}$  будет направлен вдоль большого пальца ладони, отогнутого на  $90^\circ$  относительно других пальцев. На рис. 2.2, а вектор  $\vec{L}$  направлен за лист из точки  $O$ , что обозначено знаком  $\otimes$  (хвостик стрелки).

На рис. 2.2, б показан момент импульса  $\vec{L}$  материальной точки  $m$ , движущейся по окружности и имеющей импульс  $\vec{p}$ .

Подобным же образом определяется момент силы  $M$ . Если на рис. 2.2 вместо вектора импульса тела нарисовать вектор силы  $\vec{F}$ , модуль момента силы определяется выражением  $M = Fr \cos \alpha$ , а направление вектора  $\vec{M}$  совпадает с направлением, определенным для вектора  $\vec{L}$ .

Обобщая вышесказанное, связь момента импульса системы материальных точек с моментами внешних сил, действующих на точки, получаем в виде

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^m [\vec{r}_i \times \vec{F}_i], \quad (6)$$

где  $\vec{M} = \sum_{i=1}^m [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$  – суммарный момент внешних сил.

Если проекция суммарного момента сил на некоторую ось равна нулю, например,  $\sum M_z = 0$ , то в соответствии с (6)

$$\frac{d}{dt} L_z = \sum M_z; \quad \frac{d}{dt} L_z = 0; \quad L_z = \text{const},$$

проекция момента импульса системы на эту ось ( $z$ ) сохраняется (не изменяется).

На основе уравнений (5) и (6) для материальной точки, движущейся по окружности под действием касательной силы, можно записать

$$d(mvR) = FRdt, \quad (7)$$

где левая часть – изменение момента импульса материальной точки под действием *импульса момента силы*, представленного правой частью уравнения. Так как  $v = \omega R$ , то уравнение (7) можно переписать в виде

$$mR^2 \frac{d\omega}{dt} = FR = M,$$

или, вводя угловое ускорение  $\varepsilon$ , в виде

$$mR^2 \varepsilon = M, \quad (8)$$

где величина  $J = mR^2$  является мерой инертности материальной точки при движении по окружности и называется *моментом инерции*.

Так как при вращении твердого тела все материальные точки, составляющие тело, движутся по окружностям, лежащим в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, и имеют собственные моменты инерции, совпадающие по направлению, уравнение (8) можно применить и для твердого тела в виде

$$J\varepsilon = M, \quad (9)$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\varepsilon$  – мгновенное угловое ускорение тела под действием результирующего момента сил, действующих на тело.

Поэтому уравнение (9) является **основным уравнением динамики вращательного движения тел** (аналогом второго закона Ньютона для вращательного движения).

Величина момента инерции тела в общем случае зависит от распределения массы в теле и выбора оси вращения, поэтому часто используется термин *осевой момент инерции* (или просто момент инерции). Распределение массы твердого тела по объему характеризуется плотностью  $\rho$ , поэтому для определения момента инерции тела поступают следующим образом:

- разбивают тело на микрообъемы  $dV_i$ ;
- определяют кратчайшее расстояние  $r_i$  от  $dV_i$  до оси вращения тела;
- определяют массу микрообъема  $m_i = \rho_i dV_i$ , где  $\rho$  – плотность вещества тела;
- определяют момент инерции такой массы  $J_i = m_i r_i^2$ ;
- осуществляют операцию суммирования  $J_i$

$$J = \sum_{i=1}^N J_i = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N \rho_i dV_i r_i^2 .$$

Операцией, эквивалентной суммированию, является интегрирование функции  $J_i$  по объему тела. Поэтому в общем случае

$$J = \int_V \rho(r) r^2 dV . \quad (10)$$

Формула (10) позволяет определить  $J$  для любого тела (формы и распределения массы) относительно любой оси вращения этого тела. Однако определение  $J$  может быть упрощено в ряде случаев, например, если известен момент инерции тела относительно оси ( $AA$ ), то можно найти момент инерции относительно любой оси ( $BB$ ), которая параллельна первой (рис. 2.3.).

Вращение тела относительно оси  $BB$  (ось вращения, относительно которой определяется  $J$ ) с угловой скоростью  $\omega$  можно представить в виде двух движений:

- движения центра масс (точка  $C$ ) по окружности с радиусом  $d$  вокруг оси  $BB$ ;
- вращения тела относительно оси  $AA$  (ось вращения, проходящая через центр масс, для которой известен момент инерции  $J_0$ ).

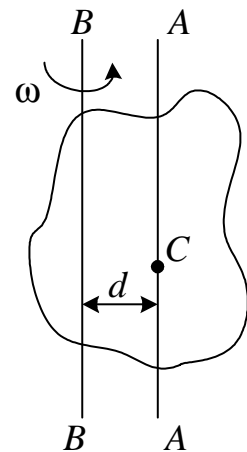


Рис. 2.3

При этом момент инерции относительно оси  $BB$  можно определить как

$$J = J_0 + md^2. \quad (11)$$

Выражение (11) называется **теоремой Штейнера**.

Определим работу внешних сил, совершаемых при повороте *абсолютно твердого тела* (внутренние связи жесткие) относительно некоторой оси вращения, совпадающей с осью  $Z$ . Пусть на элементы тела массой  $m_i$  действуют внутренние  $\vec{f}_i$  и внешние  $\vec{F}_i$  силы. Эти силы совершают элементарную работу, которая для  $i$ -го элемента может быть записана в виде

$$\delta A_i = (\vec{f}_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = \vec{f}_i \vec{v}_i dt + \vec{F}_i \vec{v}_i dt = \vec{f}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt + \vec{F}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt$$

и которая приводит к движению  $i$ -го элемента по окружности относительно некоторой оси с угловой скоростью  $\omega$  (вектор  $\vec{\omega}$  сонаправлен с осью вращения  $Z$  и связан с линейной скоростью  $\vec{v}_i$  векторным произведением  $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$ ).

Тогда в соответствии с правилами векторной алгебры можно осуществить переход

$$\vec{f}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] \rightarrow \vec{\omega} [\vec{r}_i \times \vec{f}_i] \quad \text{и} \quad \vec{F}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] \rightarrow \vec{\omega} [\vec{r}_i \times \vec{F}_i],$$

и соотношение для элементарной работы примет вид

$$\delta A = \sum \delta A_i = \vec{\omega} \left( \sum \vec{M}_i^{\text{внутр}} \right) dt + \vec{\omega} \left( \sum \vec{M}_i^{\text{внеш}} \right) dt.$$

Сумма моментов внутренних сил равна 0, поэтому

$$\delta A = \vec{\omega} \vec{M}_\omega dt = M_z \omega dt,$$

где  $M_\omega = M_z$  – проекция вектора момента силы на направление вектора угловой скорости, которое совпадает с осью  $Z$ .

Учитывая, что  $\omega dt = d\varphi$ , получаем выражение для работы при повороте твердого тела вокруг оси  $z$  на бесконечно малый угол  $d\varphi$ :

$$\delta A = M_z d\varphi \quad (12)$$

При повороте тела на конечный угол  $\varphi$  работа определяется выражением

$$A = \int M_z(\varphi) d\varphi \quad (13)$$

или

$$A = M_z \varphi, \text{ если } M_z = \text{const}.$$



Определить кинетическую энергию тела, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , можно суммированием энергий движения по окружностям всех бесконечно малых элементов (точек) твердого тела.

Для  $i$ -ой точки твердого тела

$$W_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{J}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 J_{zi}.$$

Выражение для кинетической энергии всего тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Z$ , имеет вид

$$K = \sum_{i=1}^N K_i = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (14)$$

В общем случае движение тела можно представить как совокупность двух движений – поступательного и вращательного. Соответственно и кинетическая энергия произвольно движущегося тела может быть записана в виде суммы кинетических энергий поступательного движения центра масс  $\frac{m v_c^2}{2}$  и вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции,

$$K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_{zc} \omega^2}{2}.$$

Это соотношение удобно использовать при рассмотрении качения тел.

Рассматривая вращение тел, мы подразумевали, что ось вращения неподвижна (закреплена). Однако неподвижность оси вращения для свободного тела наблюдается только в случае, если тело симметрично относительно оси вращения (рис. 2.4, а), когда для каждого элемента тела  $m_1$  находится симметричный элемент  $m_2$  ( $m_1 = m_2$ ). За счет жесткой связи элементов тела с осью вращения возникают внутренние центростремительные силы  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$ . Для точек  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся по окружности, вследствие симметрии расположения  $m_1$  и  $m_2$  и равен-

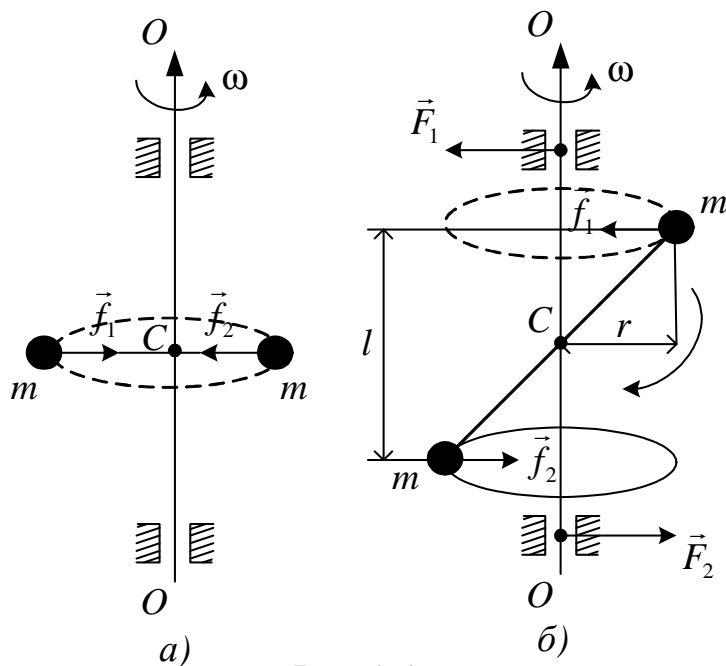


Рис. 2.4

ства их масс, центростремительные силы, приложенные к оси от  $m_1$  и  $m_2$ , действуют по одной линии и взаимно уравниваются. То есть результирующая сила, действующая на ось, равна нулю. Такая ось вращения тела называется *свободной осью*, т.е. осью, сохраняющей свое положение без воздействия внешних сил.

Если тело несимметрично относительно оси вращения (см. рис. 2.4, б), то центростремительные силы масс  $m$  не уравниваются, так как действуют не по одной линии. Возникающая пара сил  $f_1$  и  $f_2$  создает вращающий момент для оси  $OO$  относительно точки  $C$  (центра масс тела). Поэтому, чтобы удерживать ось вращения неподвижной, необходимо приложить к ней силы  $F_1$  и  $F_2$ , обеспечивающие вращательный момент

$$M = ma_{ц.с.}l = m\omega^2 rl,$$

который скомпенсировал бы возникающий момент сил  $f_1$  и  $f_2$ . Если не создать этого компенсирующего момента сил закреплением оси в подшипнике, ось вращения будет стремиться поворачиваться по часовой стрелке (см. рис. 2.4, б). Таким образом, для предотвращения поворота оси в пространстве необходимы опоры оси – подшипники, которые должны действовать на ось с силами  $F_1$  и  $F_2$  (реакциями опор).

Для тела любой формы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции тела оси, которые являются свободными осями. Такие оси называются *главными осями инерции* тела (рис. 2.5.).

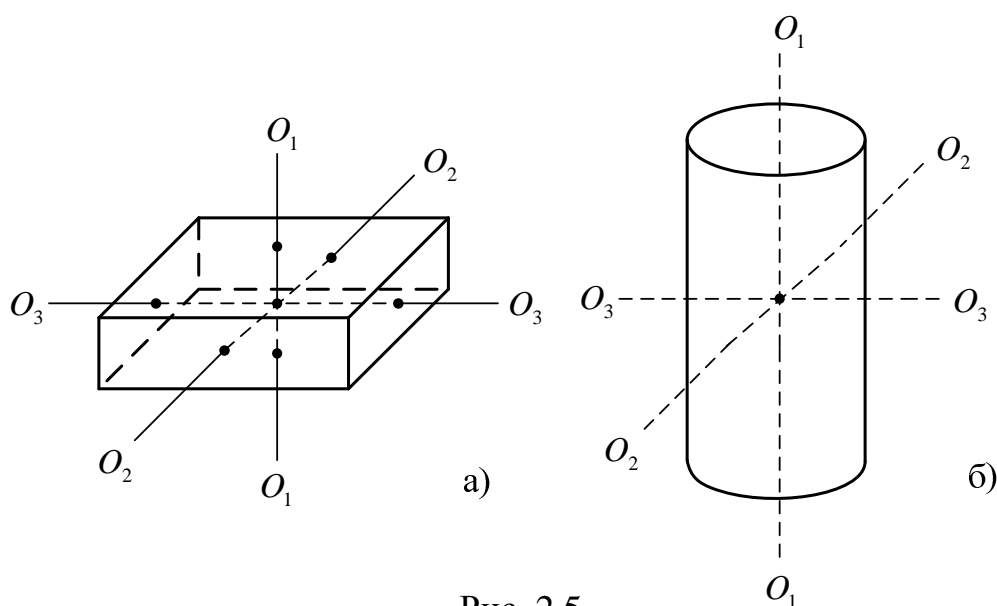


Рис. 2.5

У однородного параллелепипеда главными осями инерции для вращательного движения являются оси симметрии ( $O_1O_1$ ,  $O_2O_2$ ,  $O_3O_3$ ), проходящие через центры граней (см. рис. 2.5, а). У цилиндра одной из осей инерции является ось  $O_1O_1$ . В качестве двух других могут служить любые взаимно перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси  $O_1O_1$  и проходящей через центр масс (инерции) (см. рис. 2.5, б).

Для тел с центральной симметрией (симметрия относительно точки – центра масс) главными осями являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс (инерции).

Основное уравнение динамики вращательного движения (9) можно использовать для описания вращения относительно любой возможной оси. Однако характер движения, его устойчивость существенно зависят от того, как ось вращения расположена относительно главных осей инерции.

Если тело вращается в условиях, когда какое-либо воздействие извне отсутствует, то устойчивым оказывается только вращение вокруг главных осей, соответствующих максимальному и минимальному значениям момента инерции. Вращение же вокруг оси с промежуточным моментом инерции будет неустойчивым.

При наличии внешнего воздействия, например, со стороны подвеса (нити), устойчивым оказывается только вращение вокруг главной оси, которой соответствует наибольшее значение момента инерции. По этой причине тонкий стержень, подвешенный на нити, прикрепленной к его концу, при быстром вращении будет, в конечном итоге, вращаться вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через его центр (рис. 2.6, а). Аналогичным образом ведет себя диск с прикрепленной к его краю нитью (см. рис. 2.6, б).

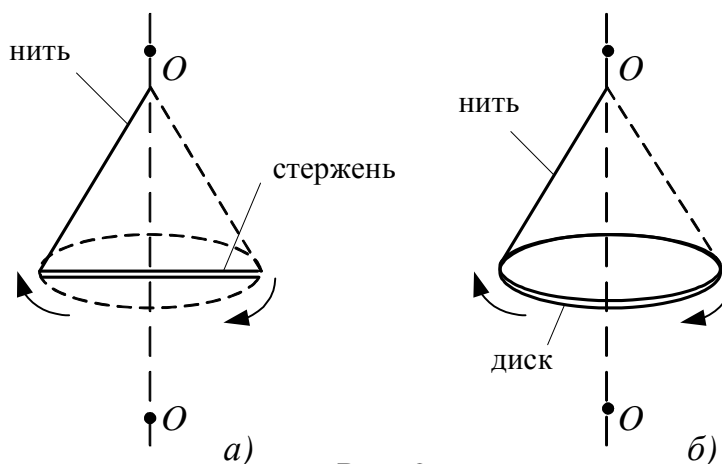


Рис. 2.6

В каждый момент времени вращение тела, закрепленного в одной точке, можно рассматривать как вращение тела вокруг мгновенной оси, которая изменяет свое положение и в теле, и в пространстве, но всегда проходит через закрепленную точку и совпадает по направлению с вектором угловой скорости.

Самым простым примером может служить вращение тела, закрепленного в центре масс. Совместим с этой точкой начало координат. Момент импульса  $\vec{L}_i$  какой-либо частицы  $m_i$  относительно центра масс определяется по формуле

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i],$$

где скорость  $\vec{v}_i$  можно определить через векторное произведение угловой скорости  $\vec{\omega}$  и радиус-вектора  $\vec{r}_i$   $i$ -ой точки относительно центра масс:  $\vec{v}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$ . Тогда момент импульса  $i$ -ой точки равен двойному векторному произведению, т.е.  $\vec{L}_i = m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]]$ , а полный момент импульса тела

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]]. \quad (15)$$

Учитывая формулу двойного векторного произведения  $[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \vec{r}) \vec{r}$ , получаем

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \vec{r}_i) \vec{r}_i), \quad (16)$$

откуда видно, что в общем случае вектор момента импульса  $\vec{L}$  не совпадает с направлением угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Проецируя полученное выражение на избранную систему координат, получаем соотношения между проекциями векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  следующего вида:

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z; & L_y &= J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z; \\ L_z &= J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (17)$$

Величины  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  – *осевые моменты инерции*;  $J_{yx} = J_{xy}, J_{zx} = J_{xz}, J_{zy} = J_{yz}$  – *центробежные моменты инерции*, являются компонентами тензора момента инерции.

Если оси выбранной системы координат совпадают по направлению с главными осями инерции, то

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yz} = J_{zx}; \\ L_x &= J_{xx} \omega_x; & L_y &= J_{yy} \omega_y; & L_z &= J_{zz} \omega_z \end{aligned}$$

и

$$\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные орты выбранной системы координат.

Решение задач о вращении твердого тела в общем случае представляет большие трудности. Точное решение удастся получить лишь для нескольких частных случаев. Поэтому основные закономерности можно выяснить на примере тел, обладающих осью симметрии. Обычно используют модель симметричного волчка, для которого выполняется следующее соотношение для главных осевых моментов:  $J_{xx} = J_{yy} = J \neq J_{zz}$ . При этом необходимо строго различать ось симметрии тела (которая может быть определена визуально) и мгновенную ось вращения, совпадающую с направлением вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  (рис. 2.7).

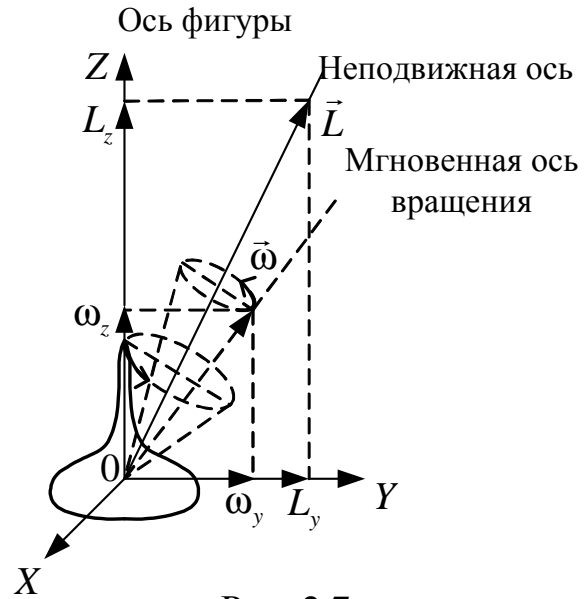


Рис. 2.7

Рассмотрим вращение симметричного волчка в отсутствии внешних сил. Такое вращательное движение тела называется *свободным вращением*. В этом случае сохраняется кинетическая энергия, сохраняются направление и модуль момента импульса. Векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  в этом случае не совпадают, и для проекции момента импульса на ось симметрии тела (считаем, что ось  $Z$  совпадает с осью симметрии) можно записать

$$L_z = J_{zz} \omega_z = \text{const}.$$

Это легко можно доказать, исходя из следующих соображений. Кинетическую энергию вращающегося тела можно записать в виде суммы

$$K = \frac{1}{2} (J_{xx} \omega_x^2 + J_{yy} \omega_y^2 + J_{zz} \omega_z^2) = \frac{1}{2} (\vec{L} \vec{\omega}),$$

но  $L_x = J_{xx} \omega_x$ ,  $L_y = J_{yy} \omega_y$  и  $L_z = J_{zz} \omega_z$ , поэтому

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{L_x^2}{J_{xx}} + \frac{L_y^2}{J_{yy}} + \frac{L_z^2}{J_{zz}} \right).$$

В силу симметрии волчка  $J_{xx} = J_{yy} = J$ , получаем

$$K = \frac{1}{2J} (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) - \frac{1}{2J} L_z^2 + \frac{1}{2J_{zz}} L_z^2 = \frac{1}{2J} (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{J_{zz}} - \frac{1}{J} \right) L_z^2.$$

Поскольку для момента импульса верно равенство  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , то

$$K = \frac{1}{2J}L^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_{zz}} - \frac{1}{J}\right)L_z^2,$$

откуда следует:  $L_z = \text{const}$ , если  $K = \text{const}$  и  $L = \text{const}$ .

Характер движения мгновенной оси также можно установить аналогичным способом:

$$K = \frac{1}{2}J(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) + \frac{1}{2}(J_{zz} - J)\omega_z^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}(J_{zz} - J)\omega_z^2.$$

Поскольку  $K$  и  $\omega_z$  постоянны, то квадрат угловой скорости  $\omega^2$  также должен быть постоянной величиной. При этом в силу того, что  $K = \frac{1}{2}\vec{L}\vec{\omega} = \text{const}$ , угол между векторами  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  также будет сохраняться при вращении. Поэтому мгновенная ось вращения в своем движении будет описывать конус вокруг направления вектора  $\vec{L}$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Однако, поскольку волчок вращается относительно оси симметрии со скоростью  $\omega_z$ , то ось симметрии также будет описывать конус относительно направления вектора  $\vec{L}$ , поскольку вектора  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{L}$  и ось симметрии лежат в одной плоскости.

Таким образом, симметричный волчок вращается со скоростью  $\omega$  вокруг мгновенной оси и со скоростью  $\omega_z$  вокруг своей оси симметрии. При этом направление вектора  $\vec{L}$  представляет собой некоторую неподвижную ось, вокруг которой ось симметрии совершает вращение. Такое вращение оси симметрии относительно неподвижной оси называется *регулярной прецессией*. Важным частным случаем свободного вращения твердого тела является вращение шарового волчка, то есть тела, у которого все главные моменты инерции одинаковы. В этом случае направления векторов  $\vec{\omega}$  и  $\vec{L}$  совпадают. Поэтому при постоянном модуле момента импульса  $L$  будет постоянна по модулю и угловая скорость  $\omega$ . Движение при этом будет представлять свободное вращение волчка с постоянной по модулю угловой скоростью вокруг направления вектора момента импульса  $\vec{L}$ .

## 2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Динамика твердого тела</b></p> <p>Основные понятия: момент импульса, момент инерции, момент импульса силы.</p> <p>Второй закон Ньютона.</p> <p>Закон сохранения момента импульса.</p> <p>Кинетическая энергия вращательного движения. Работа</p>	лекция	<p>[6], пп. 35, 36</p> <p>[7], пп. 4.1 – 4.3</p> <p>[8], пп. 6.1, 6.4</p> <p>[10], пп. 16 – 19</p>	<p>1. Как определить момент инерции тела?</p> <p>2. В какой ситуации применим закон сохранения момента импульса?</p> <p>3. Какую работу нужно затратить, чтобы повернуть квадратную рамку массой <math>m</math> со стороной <math>a</math> на угол <math>90^\circ</math> относительно оси, проходящей через одну из ее сторон?</p> <p>4. Определить направления векторов <math>\vec{\omega}</math>, <math>\vec{L}</math>, <math>\vec{M}</math> для вращения шарика на веревке в горизонтальной плоскости.</p> <p>5. Указать аналогии в законах динамики и сохранения динамических характеристик поступательного и вращательного движений.</p> <p>6. Какое тело скатится с наклонной плоскости быстрее: полый цилиндр с внутренней полостью радиусом <math>R</math> или полый цилиндр с внутренней полостью <math>R/2</math>, если их массы и внешние радиусы равны?</p>
<p><b>Свободное вращение твердого тела</b></p> <p>Момент инерции сложных тел.</p> <p>Понятие о степени свободы твердых тел.</p> <p>Вращение тела относительно свободной оси.</p> <p>Вращение тела относительно заданной точки.</p> <p>Гироскопический эффект</p>	лекция + самост.	<p>[6], пп. 38 – 40</p> <p>[7], пп. 4.4 – 4.5</p> <p>[8], пп. 6.2 – 6.3</p> <p>[10], пп. 20 – 21</p>	<p>1. Чем определяется число степеней свободы тела?</p> <p>2. Какие условия необходимо выполнить при создании сложных вращающихся деталей?</p> <p>3. В чем состоит суть гироскопического эффекта? Где он применяется? В чем проявляется?</p>

### 2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Определение динамических характеристик движения твердого тела	Задачи	Определение момента инерции твердых тел	Задачи из сборников [2], №№ 2.2, 2.4 – 2.8, 2.12 – 2.15 [1], №№ 1.131 – 1.135 [12], №№ 3.1 – 3.18 [1], № 44
Законы сохранения при вращательном движении	Задачи Закон сохранения момента импульса  Закон сохранения энергии. Работа. Мощность	<p>Необходимо помнить, что момент инерции системы тел есть сумма моментов инерции каждого тела в отдельности.</p> <p>Момент инерции тела относительно произвольной заданной оси можно определить по теореме Штейнера, если известен момент инерции этого тела относительно оси, параллельной заданной и проходящей через центр масс тела.</p> <p>При определении момента инерции сплошных тел нужно использовать методику, аналогичную той, что используется для определения положения центра масс, т.е. выделить элементарную массу, записать выражение для ее момента инерции с использованием однотипных параметров для каждой элементарной массы и проинтегрировать по всему объему <math>J = \int r^2 dm</math>. Упрощения решения задач можно достичь, мысленно расчленив заданное тело на тела более простой формы.</p> <p>1. Сделать чертеж, на котором указать начальные и конечные моменты импульса системы и векторы внешних сил.</p> <p>2. Выбрать систему координат так, чтобы удобнее было проецировать на них векторы (часть из векторов могут проходить через центр масс и не вызывать вращения).</p> <p>3. Записать уравнения закона сохранения момента импульса в проекциях на соответствующие оси.</p> <p>4. Дополнить систему уравнений кинематическими соотношениями и другими уравнениями динамики поступательного движения, чтобы полная система уравнений стала замкнутой.</p> <p>5. Для вращательной динамики также выполняется теорема о кинетической энергии – работа есть изменение кинетической энергии тела.</p> <p>6. При этом полная кинетическая энергия будет состоять из энергии поступательного движения и энергии качения (вращения).</p> <p>7. При определении работы необходимо выяснить, какие виды энергии при этом изменяются, это позволит установить, работу какой силы нужно найти. В качестве ее может выступать равнодействующая сила и момент сил. Если сила неизвестна из условия, то ее следует найти из уравнений динамики.</p> <p>8. Для определения работы при повороте тела удобно использовать выражения для определения работы как произведения момента сил на элементарный угол поворота.</p> <p>9. Определить мощность силы (момента силы) по одному из подходящих соотношений: <math>P = \delta A / dt</math>; <math>P = \vec{F} \vec{v}</math>.</p>	<p>[2], №№ 2.29 – 2.32 [1], №№ 1.136 – 1.156 [12], №№ 3.19 – 3.28 [1], № 45 [2], №№ 2.62 – 2.70 [1], №№ 1.157 – 1.162 [12], №№ 3.29 – 3.37 [1], №4.10</p>

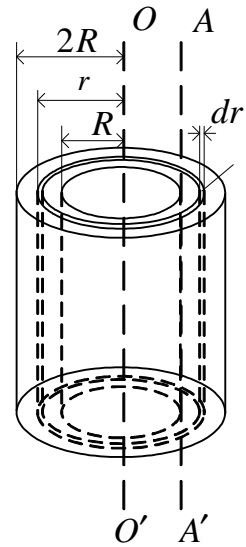


## 2.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** Определить момент инерции полого цилиндра с радиусами  $R$  и  $2R$ , массой  $m$  и высотой  $h$  (см. рисунок) относительно оси, проходящей через образующую полости (ось  $AA'$ ). (**Уровень 3**).

**Решение.**

1. Рассчитаем момент инерции цилиндра относительно оси симметрии  $OO'$ . Для этого выберем тонкий цилиндрический слой с радиусом  $r$ , площадью  $dS = 2\pi rh$ , объемом  $dV = dSdr = 2\pi rhdr$  и массой  $dm = \rho dV = 2\pi h\rho r dr$ . Так как слой тонкий, то будем считать, что любая элементарная масса слоя движется по окружности  $r$ . Поэтому для выбранного слоя  $J = dmr^2$ , а  $J_0 = \int dmr^2$ .



Подставив  $dm$  и установив пределы интегрирования от  $R$  до  $2R$ , получим

$$J_0 = 2\pi h\rho \int_R^{2R} r^3 dr = 2\pi h\rho \frac{1}{4} r^4 \Big|_R^{2R} = \frac{1}{2} \pi h\rho (16R^4 - R^4) = \frac{15}{2} \pi h\rho R^4.$$

Общую массу цилиндра можно определить как

$$m = \rho h (4\pi R^2 - \pi R^2) = 3\pi R^2 \rho h.$$

Поэтому момент инерции тела относительно оси симметрии  $OO'$

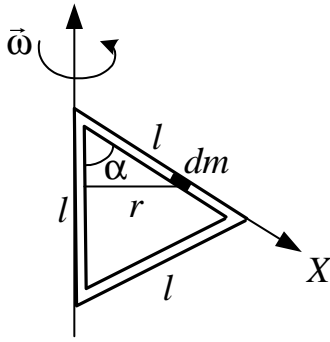
$$J_0 = \frac{15}{2} \pi h\rho R^4 = \frac{5}{2} (3\pi R^2 \rho h) R^2 = \frac{5}{2} mR^2.$$

2. По теореме Штейнера находим момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через образующую полости,  $A - A'$ ,  $d = R$  – расстояние между осями  $O - O'$  и  $A - A'$ .

$$J = J_0 + md^2; J = \frac{5}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{2} mR^2.$$

Ответ:  $J = \frac{7}{2} mR^2$ .

**Пример 2.** Определить момент инерции рамки, образованной из тонкой проволоки массой  $m$ , которая изогнута в виде равностороннего треугольника со стороной  $l$ . Ось вращения проходит по одной из сторон треугольника (см. рисунок). (**Уровень 2**).



### Решение

1. Определим момент инерции одной из сторон. Выбираем элементарный участок длиной  $dx$  и массой  $dm = \rho S dx$  ( $S$  – сечение проволоки,  $\rho$  – плотность материала). Расстояние от  $dm$  до оси вращения  $r = x \sin \alpha$ .

Момент инерции этой стороны определим интегрированием:

$$J_1 = \int r^2 dm = \int_0^l x^2 \sin^2 \alpha \rho S dx = \rho S \sin^2 \alpha \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} l \rho S \sin^2 \alpha.$$

Масса стороны треугольника

$$m_0 = \frac{1}{3} m; \quad m_0 = \frac{1}{3} \rho 3lS = \rho lS.$$

Момент инерции этой стороны  $J_1 = \frac{1}{3} m_0 l^2 \sin^2 \alpha$ .

Мы определили момент инерции стержня, который закреплен под углом  $\alpha$  к оси. При этом определенный момент инерции отличается от момента инерции стержня, перпендикулярного к оси, на  $\sin^2 \alpha$ .

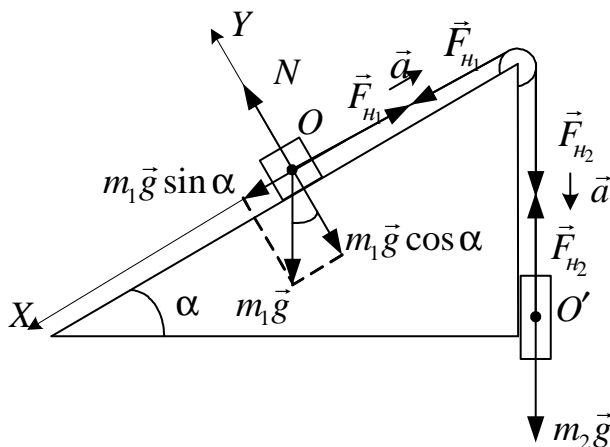
Легко определить момент инерции второй стороны по тому же алгоритму:  $J_2 = \frac{1}{3} m_0 l^2 \sin^2 \alpha$ .

2. Момент инерции стороны, находящейся на оси вращения, равен 0.

3. Момент инерции рамки относительно данной оси равен сумме моментов инерции относительно той же оси:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{2}{3} m_0 l^2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{9} m l^2 \sin^2 \alpha.$$

Ответ:  $J = \frac{2}{9} m l^2 \sin^2 \alpha$ .



**Пример 3.** Блок с моментом инерции  $J = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  укреплен на вершине наклонной плоскости (см. рисунок). Гири массами  $m_1 = 3 \text{ кг}$  и  $m_2 = 4 \text{ кг}$  соединены нитью, перекинутой через блок. Угол при основании наклонной плоскости  $\alpha = 30^\circ$ . Определить натяжение нитей  $F_{n1}$  и  $F_{n2}$ , если гиря массой  $m_2$  опускается.

ся равноускоренно. Блок представляет собой однородный цилиндр радиусом  $R = 0,1$  м. Трением пренебречь, нить по блоку скользит без трения. (**Уровень 2**).

**Решение.** Проанализировав условие задачи, делаем вывод: оба тела ( $m_1$  и  $m_2$ ) движутся поступательно с одинаковым ускорением  $a$ , которое в то же время является тангенциальным ускорением для точек обода блока. Поэтому можем записать для движения каждого элемента системы следующее уравнение в скалярном виде:

для  $m_1$ :

$$m_1 a = F_{n1} - m_1 g \sin \alpha, \quad (1)$$

для  $m_2$ :

$$m_2 a = m_2 g - F_{n2}, \quad (2)$$

для блока:

$$J \varepsilon = J \frac{a}{R} = (F_{n2} - F_{n1}) R \quad (3)$$

или

$$J \frac{a}{R^2} = F_{n2} - F_{n1}. \quad (4)$$

Итак, имеем три уравнения (1), (2) и (4) с тремя неизвестными: искомыми силами  $F_{n1}$  и  $F_{n2}$  и ускорением  $a$ . Сложим левые и правые части уравнений (1), (2) и (4) и найдем ускорение  $a$ . Найдя его, мы сможем определить и искомые силы натяжения из уравнений (1) и (2).

$$m_1 a + m_2 a + J \frac{a}{R^2} = F_{n1} - m_1 g \sin \alpha + m_2 g - F_{n2} + F_{n2} - F_{n1},$$

$$a \left( m_1 + m_2 + J \frac{a}{R^2} \right) = g (m_2 - m_1 \sin \alpha),$$

откуда

$$a = \frac{g (m_2 - m_1 \sin \alpha)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}. \quad (5)$$

Определим из (1) и (2) модули сил  $F_{n1}$  и  $F_{n2}$ , используя (5):

$$F_{n1} = m_1 (a + g \sin \alpha) = m_1 \left( \frac{g (m_2 - m_1 \sin \alpha)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}} + g \sin \alpha \right);$$

$$F_{H1} = m_1 g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha + ma + \left(m_2 + \frac{J}{R^2}\right) \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}};$$

$$F_{H1} = m_1 g \frac{m_2 R^2 + (m_2 R^2 + J) \sin \alpha}{(m_1 + m_2) R^2 + J};$$

$$F_{H2} = m_2 g - m_2 a = m_2 \left( g - \frac{g(m_2 - m_1 \sin \alpha)}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}} \right) = m_2 g \frac{m_2 + \frac{J}{R^2} - m_2 + m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}};$$

$$F_{H2} = m_2 g \frac{m_1 R^2 (1 + \sin \alpha) + J}{(m_1 + m_2) R^2 + J}.$$

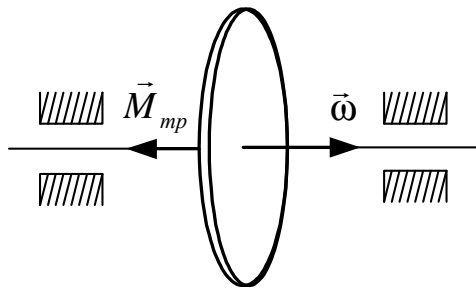
Произведем вычисления:

$$F_{H1} = 3 \cdot 9,8 \frac{4 \cdot 0,01 + (4 \cdot 0,01 + 0,01) \sin 30^\circ}{(3 + 3)0,01 + 0,01} \text{ Н} = 24 \text{ Н};$$

$$F_{H2} = 4 \cdot 9,8 \frac{3 \cdot 0,01(1 + \sin 30^\circ) + 0,01}{(3 + 4)0,01 + 0,01} \text{ Н} = 27 \text{ Н}.$$

Ответ:  $F_{H1} = 24 \text{ Н}$ ;  $F_{H2} = 27 \text{ Н}$ .

**Пример 4.** Маховое колесо, имеющее момент инерции  $J = 245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , вращается с частотой  $\nu_0 = 20 \text{ с}^{-1}$  (см. рисунок). В некоторый момент времени



на него стала действовать тормозящая сила, в результате чего колесо через  $t = 1$  мин остановилось ( $\nu = 0$ ). Радиус колеса  $R = 0,2 \text{ м}$ . Найти величину тормозящего момента силы  $M_{mp}$  и число полных оборотов  $N$ , сделанных колесом до полной остановки. (**Уровень 2**).

**Решение.** Поскольку, кроме тормозящей силы, на колесо не действуют другие силы, создающие момент сил, то согласно основному закону динамики вращательного движения произведение момента инерции махового колеса  $J$  и его углового ускорения  $\varepsilon$  равно тормозящему моменту сил  $M_{mp}$ :

$$J\varepsilon = M_{mp}. \quad (1)$$

Поскольку колесо вращается под действием постоянного момента сил  $\vec{M}_{mp}$ , его движение равнозамедленное. Поэтому угловое ускорение (точнее – замедление) колеса  $\varepsilon$  найдем по формуле равнопеременного вращательного движения твердого тела:  $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ . Здесь  $\omega_0$  – начальная угловая скорость колеса, а  $\omega$  – его конечная угловая скорость. Эти величины связаны с известными нам частотами вращения  $\nu_0$  и  $\nu$  соотношениями

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 \quad \text{и} \quad \omega = 2\pi\nu .$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{2\pi\nu_0 - 2\pi\nu}{t} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{2\pi}{t}(\nu_0 - \nu) = \frac{2\pi}{t}\nu_0, \quad (2)$$

так как  $\nu = 0$ .

Подставив (2) в (1), найдем искомый тормозящий момент сил  $M_{mp}$ :

$$M_{mp} = 2\pi \frac{\nu_0 J}{t} .$$

Полное число оборотов колеса  $N$  можно определить, умножив его среднюю частоту вращения  $\nu_{cp}$ , то есть среднее число оборотов за единицу времени, на все время вращения  $t$ :  $N = \nu_{cp} t$ .

Средняя частота вращения колеса  $\nu_{cp}$  есть среднее арифметическое начальной  $\nu_0$  и конечной  $\nu$  частот вращения (подчеркнем, что это справедливо только при равнопеременном вращении твердого тела):

$$\nu_{cp} = \frac{\nu_0 + \nu}{2} = \frac{\nu_0}{2} \quad \text{при} \quad \nu = 0 .$$

С учетом этого  $N = \frac{\nu_0}{2} t$ .

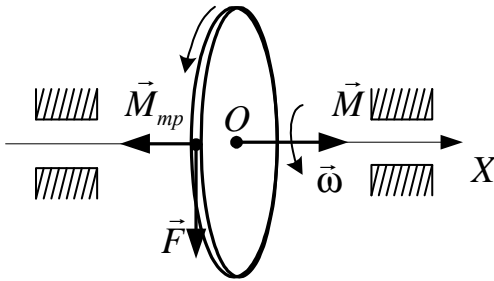
Подставим значения известных величин и произведем вычисления:

$$M_{mp} = \frac{2 \cdot 3,14}{60} \cdot 20 \cdot 245 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad N = \frac{20}{2} \cdot 60 = 600 \text{ оборотов} .$$

*Ответ:*  $M_{mp} = 513 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $N = 600$  оборотов.

**Пример 5.** Однородный диск радиусом  $R = 0,2$  м и массой  $m = 5$  кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости диска. Зависимость угла поворота диска от времени описывается уравнением  $\varphi = A + Bt + Ct^2$ , где  $C = 2 \text{ рад/с}^2$ . Вращению диска противодей-

ствуется тормозящий момент сил трения  $M_{mp} = 1$  Н·м. Определить величину касательной силы  $F$ , приложенной к ободу диска и обеспечивающей заданную функцию угла поворота диска. **(Уровень 3).**



**Решение.** Касательная сила  $\vec{F}$ , приложенная к ободу диска (см. рисунок), создает вращающий момент сил  $\vec{M}$ , который по определению момента силы равен произведению величины этой силы  $F$  на ее плечо. Плечом силы  $F$  в данном случае является радиус диска, поэтому

$$M = FR. \quad (1)$$

Вращающему моменту силы  $\vec{M}$  противодействует момент сил трения  $\vec{M}_{mp}$ . Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M} + \vec{M}_{mp}.$$

Поскольку векторы моментов сил  $\vec{M}$  и  $\vec{M}_{mp}$  антинаправлены (в чем несложно убедиться, используя правило правого винта), то в проекциях на ось  $OX$  этот закон примет вид

$$J\varepsilon = M - M_{mp}. \quad (2)$$

Момент инерции диска относительно оси вращения определяется по формуле

$$J = \frac{mR^2}{2}. \quad (3)$$

Угловое ускорение диска найдем как вторую производную функции угла поворота диска по времени:

$$\omega = \varphi' = B + 2Ct; \quad \varepsilon = \omega' = 2C. \quad (4)$$

Подставив правые части (1), (3) и (4) в (2), получим уравнение, в котором будет только одна неизвестная – искомая сила  $F$ :

$$\frac{mR^2}{2} 2C = FR - M_{mp}.$$

Откуда

$$FR = mR^2C + M_{mp}; \quad F = \frac{mR^2}{R}C + \frac{M_{mp}}{R}; \quad F = mRC + \frac{M_{mp}}{R}.$$

Подставим значения известных величин и произведем вычисления:

$$F = \left( 5 \cdot 0,2 \cdot 2 + \frac{1}{0,2} \right) \text{Н} = 7 \text{ Н.}$$

Ответ:  $F = 7 \text{ Н.}$

**Пример 6.** Какую работу  $A$  надо совершить в течение  $t = 1$  мин, чтобы равномерно увеличить частоту вращения маховика массой  $m = 50$  кг, имеющего форму диска диаметром  $D = 1,5$  м, от  $v_0 = 0$  до  $v = 50 \text{ с}^{-1}$ , если к ободу маховика приложена по касательной постоянная сила трения  $F_{тр} = 1$  Н? (Уровень 3).

**Решение**

**1 способ.** Работа при вращении твердого тела определяется произведением вращающего момента силы  $M_{вр}$  и угла поворота  $\varphi$  этого тела за некоторое время  $t$ . По условию  $M_{тр} = \text{const}$ , так как  $F_{тр} = \text{const}$ , а частота увеличивается равномерно. Поэтому для работы по раскручиванию диска можно записать:

$$A = M_{вр} \varphi, \quad (1)$$

где  $M_{вр}$  – результирующий вращающий момент.

Для определения вращающего момента силы  $M_{вр}$  воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела, которое применительно к данной задаче в векторной записи имеет вид

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{вр} + \vec{M}_{тр},$$

а в скалярном виде

$$J\varepsilon = M_{вр} - M_{тр}, \quad (2)$$

где  $J$  – момент инерции маховика,  $\varepsilon$  – его угловое ускорение, а  $M_{тр}$  – момент силы трения.

Момент инерции однородного диска относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно к плоскости диска, определяется формулой

$$J = \frac{mR^2}{2},$$

где  $R = \frac{D}{2}$ , поэтому

$$J = \frac{mD^2}{8}. \quad (3)$$

Момент силы трения равен произведению силы трения  $F_{mp}$  на ее плечо

$$M_{mp} = F_{mp}R \quad \text{или} \quad M_{mp} = F_{mp} \frac{D}{2}. \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим

$$M_{ep} = \frac{mD^2}{8}\varepsilon + F_{mp} \frac{D}{2} = 0,5D(0,25mD\varepsilon + F_{mp}).$$

Поскольку по условию задачи величины сил, действующих на маховик, и их плечи не менялись, то его вращение равноускоренное, поэтому угловое ускорение маховика  $\varepsilon$  найдем по его определению

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

где  $\omega_0 = 0$ , так как  $v_0 = 0$ . Поэтому

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi\nu}{t}.$$

С учетом этого

$$M_{ep} = 0,5D \left( 0,25mD \frac{2\pi\nu}{t} + F_{mp} \right) = 0,5D \left( 0,5\pi \frac{mD\nu}{t} + F_{mp} \right). \quad (5)$$

Угол поворота маховика  $\varphi$  за время  $t$  определим, используя формулу средней угловой скорости равнопеременного вращения твердого тела

$$\omega_{cp} = \frac{\varphi}{t},$$

откуда

$$\varphi = \omega_{cp}t.$$

В свою очередь среднюю угловую скорость  $\omega_{cp}$  равноускоренного вращательного движения можно определить как среднее арифметическое начальной угловой скорости  $\omega_0 = 0$  и конечной угловой скорости  $\omega$ :

$$\omega_{cp} = \frac{\omega + \omega_0}{2} = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi\nu}{2} = \pi\nu.$$

Тогда

$$\varphi = \pi\nu t. \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (1), получим

$$A = 0,5D \left( 0,5\pi \frac{mD\nu}{t} + F_{mp} \right) \pi\nu t;$$

$$A = 0,5\pi\nu D (0,5\pi\nu mD + F_{mp}t).$$



**2 способ.** Задачу можно решить, используя теорему о кинетической энергии

$$A = K_2 - K_1 + A_{mp},$$

где  $K_1 = \frac{J\omega_0^2}{2}$ ,  $K_2 = \frac{J\omega^2}{2}$  и  $A_{mp} = F_{mp}l$ ,

где  $l$  – длина дуги, по которой движется точка обода маховика в течение времени  $t$ .

Так как  $v_0 = 0$ , то  $\omega_0 = 0$  и  $E_{k1} = 0$ .

Поэтому

$$A = \frac{J\omega^2}{2} + F_{mp}l, \quad (7)$$

где

$$J = \frac{mD^2}{8}; \quad (8)$$

$$\omega = 2\pi v. \quad (9)$$

Длину дуги  $l$  можно определить, используя кинематические соотношения. Для равнопеременного вращательного движения

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad \text{и} \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Поскольку  $l = \varphi R$  (длина дуги) и  $\omega_0 = 0$ , получаем  $l = \frac{\varepsilon R t^2}{2}$  и  $\omega = \varepsilon t$

или, учитывая, что  $\omega = 2\pi v$  и  $D = 2R$ ,

$$l = \frac{\omega R t}{2} = \frac{\pi v D t}{2} = 0,5\pi D t v. \quad (10)$$

Подставим (8), (9) и (10) в (7):

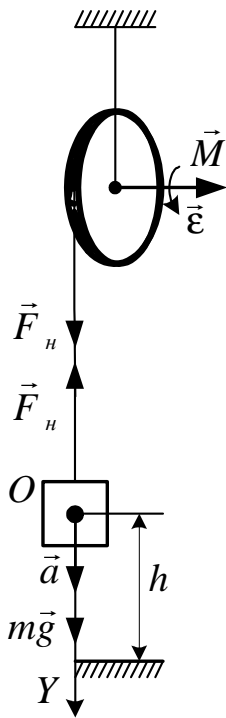
$$A = \frac{mD^2 4\pi^2 v^2}{8 \cdot 2} + F_{mp} \cdot \frac{\pi D t v}{2} \quad \text{или} \quad A = 0,5\pi v D (0,5\pi v m D + F_{mp} t).$$

Подставим значения известных величин и произведем вычисления:

$$A = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 1,5 (0,5 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 1,5 + 1 \cdot 60) \text{ Дж} = 7 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

*Ответ:*  $A = 7 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$

**Пример 7.** На барабан радиусом  $R = 0,2$  м, момент инерции которого  $J = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>, намотан шнур, к которому привязан груз массой  $m = 0,5$  кг. До начала движения высота груза над полом  $h = 1$  м (см. рисунок). Найти кинетическую энергию груза  $K$  в момент удара о пол. Движение груза считать равноускоренным. (Уровень 2, 3).



**Решение.** Кинетическая энергия груза в момент его удара о пол определяется формулой

$$K = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

где  $v$  – конечная скорость груза в момент его удара о пол.

По условию задачи начальная скорость груза на высоте  $h$  равна нулю ( $v_0 = 0$ ).

Поскольку высота  $h$  нам известна, то для определения квадрата конечной скорости груза  $v^2$  воспользуемся формулой кинематики равноускоренного движения

$$v^2 = 2ah. \quad (2)$$

Ускорение  $a$  опускающегося груза равно по модулю тангенциальному ускорению точек обода барабана, поэтому  $a_\tau = a = \epsilon R$ , откуда  $\epsilon = \frac{a}{R}$ .

Угловое ускорение барабана можно определить из основного уравнения динамики вращательного движения барабана

$$J\epsilon = M, \quad (3)$$

где  $M$  – момент силы, вращающий барабан.

Поскольку к барабану приложена сила натяжения шнура  $\vec{F}_n$ , численно равная силе, с которой шнур действует на груз, а плечом этой силы является радиус барабана  $R$ , запишем:  $M = F_n R$ .

Подставив выражения для  $\epsilon$  и  $M$  в уравнение (3), получим

$$J \frac{a}{R} = F_n R \quad \text{или} \quad J \frac{a}{R^2} = F_n. \quad (4)$$

В этом уравнении две неизвестные величины: ускорение  $a$  (которое нужно знать, чтобы определить  $v^2$ ) и сила натяжения  $F_n$  (которую определять не надо). Поэтому необходимо добавить еще одно уравнение, в котором присутствуют эти неизвестные  $a$  и  $F_n$ . Такое уравнение можно записать, применив второй закон Ньютона. Груз движется вниз равноускоренно с ускорением  $\vec{a}$  под действием двух сил: силы тяжести  $m\vec{g}$  и силы натяжения нити  $\vec{F}_n$ . В векторном виде этот закон имеет вид  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_n$ . В проекции на ось  $OY$

$$ma = mg - F_n. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными величинами  $a$  и  $F_n$ . Для ее решения выразим из уравнения (5) силу натяжения и подставим ее в уравнение (4):

$$F_n = mg - ma; \quad J \frac{a}{R^2} = mg - ma.$$

Отсюда найдем ускорение  $a$ :

$$J \frac{a}{R^2} + ma = mg; \quad a \left( \frac{J}{R^2} + m \right) = mg;$$

$$a = \frac{mg}{\frac{J}{R^2} + m} = \frac{g}{\frac{J}{mR^2} + 1}. \quad (6)$$

Подставим (6) в (2), а затем то, что получится после этой подстановки, в (1).

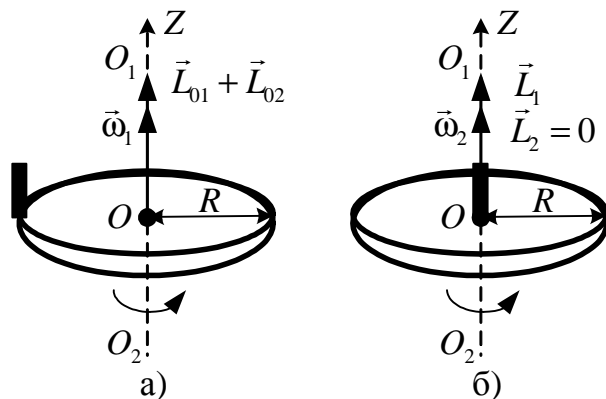
$$v^2 = \frac{2gh}{\frac{J}{mR^2} + 1}; \quad E_k = \frac{m}{2} \frac{2gh}{\frac{J}{mR^2} + 1}; \quad E_k = \frac{mgh}{\frac{J}{mR^2} + 1}.$$

Подставим значения известных величин и произведем вычисления:

$$K = \frac{0,5 \cdot 9,8 \cdot 1}{\frac{0,1}{0,5 \cdot 0,2^2} + 1} \text{ Дж} = 0,82 \text{ Дж}.$$

*Ответ:*  $K = 0,82$  Дж.

**Пример 8.** Горизонтальная платформа массой  $m_1 = 100$  кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая  $\nu_1 = 10$  об/мин (см. рисунок). Человек массой  $m_2 = 60$  кг стоит на ее краю. С какой частотой  $\nu_2$  станет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – материальной точкой. (Уровень 1).



**Решение.** На систему тел человек – платформа моменты внешних сил относительно оси вращения не действуют (на них действуют силы тяжести и сила реакции опоры, но их моменты равны нулю), поэтому для решения этой задачи лучше всего воспользоваться законом сохранения

момента импульса.

По закону сохранения момента импульса суммарный момент импульса платформы  $\vec{L}_{01}$  и человека  $\vec{L}_{02}$ , когда он стоял на краю (см. рисунок, *a*), должен сохраниться, т.е. должен быть равным суммарному моменту импульса платформы  $\vec{L}_1$  и человека  $\vec{L}_2$  после того, как человек перешел в центр платформы (см. рисунок, *б*). В проекции на ось  $OZ$  запишем

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2. \quad (1)$$

Момент импульса вращающегося тела равен произведению момента инерции тела и его угловой скорости, поэтому

$$L_{01} + L_{02} = J_{nl}\omega_1 + J_{чел1}\omega_1 = (J_{nl} + J_{чел1})\omega_1 \quad (2)$$

и

$$L_1 + L_2 = J_{nl}\omega_2 + J_{чел2}\omega_2 = (J_{nl} + J_{чел2})\omega_2, \quad (3)$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость платформы и человека, когда он стоял на ее краю, а  $\omega_2$  – угловая скорость платформы и человека, когда он перешел в центр.

Момент инерции платформы как однородного цилиндра

$$J_{nl} = \frac{m_1 R^2}{2}.$$

Очевидно, что момент инерции платформы после того, как человек перейдет в ее центр, не изменится, поскольку при этом не изменится ни ее масса, ни радиус.

Момент инерции человека, стоящего на краю платформы, относительно оси  $O_1O_2$  определим по формуле момента инерции материальной точки:  $J_{чел1} = mR^2$ .

Когда человек перейдет в центр, то расстояние от него до центра платформы, т.е. радиус окружности, по которой он движется при вращении платформы, станет равен нулю, поэтому и момент инерции человека в центре платформы станет равен нулю:  $J_{чел2} = m \cdot 0 = 0$ , поэтому и момент импульса человека в центре платформы  $L_2$  можно считать равным нулю (подчеркиваем, что так будет только потому, что мы человека считаем материальной точкой, которая вращается вокруг оси, проходящей через нее).

Тогда закон сохранения момента импульса принимает вид

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2 = L_1.$$

Подставим выражение для моментов инерции  $J_{пл}$  и  $J_{чел}$  в (2) и (3) и приравняем их правые части:

$$\left( \frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2 \right) \omega_1 = \frac{m_1 R^2}{2} \omega_2; \quad (0,5m_1 + m_2) \omega_1 = 0,5m_1 \omega_2.$$

Поскольку в условии задачи даны частоты  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , то, воспользовавшись соотношениями  $\omega_1 = 2\pi\nu_1$  и  $\omega_2 = 2\pi\nu_2$ , запишем:

$$(0,5m_1 + m_2)2\pi\nu_1 = 0,5m_1 2\pi\nu_2.$$

Отсюда найдем искомую частоту вращения  $\nu_2$ :

$$\nu_2 = \frac{\nu_1(0,5m_1 + m_2)}{0,5m_1}; \quad \nu_2 = \nu_1 \left( 1 + \frac{2m_2}{m_1} \right).$$

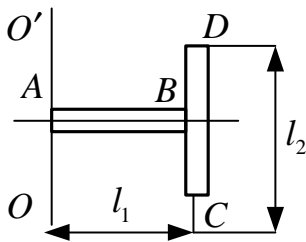
Подставим значения известных величин и произведем вычисления:

$$\nu_2 = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{2 \cdot 60}{100} \right) \text{ с}^{-1} = 0,37 \text{ с}^{-1}.$$

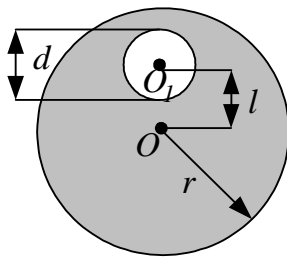
*Ответ:*  $\nu_2 = 0,37 \text{ с}^{-1}$ .

## 2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить момент инерции  $I$  материальной точки массой  $m = 0,3$  кг относительно оси, отстоящей от точки на  $r = 20$  см. [ $I = 0,012$  кг·м<sup>2</sup>; **уровень 1**].



2. Два однородных тонких стержня –  $AB$  длиной  $l_1 = 40$  см и массой  $m_1 = 900$  г и  $CD$  длиной  $l_2 = 40$  см и массой  $m_2 = 400$  г скреплены под прямым углом (см. рисунок). Определить момент инерции  $J$  системы стержней относительно оси  $OO'$ , проходящей через конец стержня  $AB$  параллельно стержню  $CD$ . [ $J = \left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)l_1^2 = 0,112$  кг·м<sup>2</sup>; **уровень 2, 3**].



3. В однородном диске массой  $m = 1$  кг и радиусом  $r = 30$  см вырезано круглое отверстие диаметром  $d = 20$  см, центр которого находится на расстоянии  $l = 15$  см от оси диска (см. рисунок). Найти момент инерции  $J$  полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно к плоскости диска через его центр.

$$[J = \frac{1}{2}mR^2 - \frac{md^2}{32R^2}(d^2 + 8l^2) = 4,19 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \text{уровень 3, 4}].$$

4. Определить момент инерции  $J$  тонкой плоской пластины со сторонами  $a = 10$  см и  $b = 20$  см относительно оси, проходящей через центр масс пластины параллельно большей стороне. Масса пластины равномерно распределена по ее площади с поверхностной плотностью  $\sigma = 1,2$  кг/м<sup>2</sup>.

$$[J = \frac{1}{12}\sigma a^3 b = 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \text{уровень 4}].$$

5. Тонкий однородный стержень длиной  $l = 50$  см и массой  $m = 400$  г вращается с угловым ускорением  $\varepsilon = 3$  рад/с<sup>2</sup> вокруг оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его середину. Определить вращающий момент  $M$ .

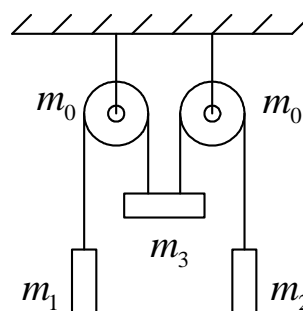
$$[M = \frac{1}{12}ml^2\varepsilon = 0,025 \text{ Н} \cdot \text{м}; \text{уровень 1}].$$

6. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой  $m_1 = 100$  г и  $m_2 = 110$  г. С каким ускорением  $a$  будут двигаться грузики, если масса  $m$  блока равна 400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.  $[a = \frac{2(m_2 - m_1)}{m + 2m_1 + 2m_2} g = 0,24 \text{ м/с}^2$ ;

**уровень 2].**

7. Вал массой  $m = 100$  кг и радиусом  $R = 5$  см вращался с частотой  $\nu = 8 \text{ с}^{-1}$ . К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой  $F = 40$  Н, в результате чего вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения  $\mu$ .  $[\mu = \frac{\pi m R \nu}{F t} = 0,31$ ; **уровень 3].**

8. Тела с массами  $m_1 = 0,4$  кг,  $m_2 = 0,4$  кг,  $m_3 = 2$  кг соединены невесомыми нерастяжимыми нитями, перекинутыми через блоки массами  $m_0 = 0,5$  кг (см. рисунок). Найти ускорения, с которыми движутся тела, и силы натяжения нитей. Блоки считать однородными дисками. Трением на осях блоков пренебречь.  $[3,56 \text{ м/с}^2$ ; 5,35 Н; 5,35 Н; 6,24 Н; 6,24 Н; **уровень 4].**



9. Шар массой  $m = 10$  кг и радиусом  $R = 20$  см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид  $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ , где  $B = 4 \text{ рад/с}^2$ ,  $C = -1 \text{ рад/с}^3$ . Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил  $M$  в момент времени  $t = 2$  с.  $[M = \frac{4}{5} m R^2 (B + 3Ct) = -0,64 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ; **уровень 3].**

10. Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции вокруг вертикальной оси с частотой  $\nu = 10 \text{ мин}^{-1}$ . В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?  $[\nu = 2\pi\nu R \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} = 0,942 \text{ м/с}$ ; **уровень 2].**

11. Маховик вращается по закону, выраженному уравнением  $\varphi = A + Bt + Ct^2$ , где  $A = 2$  рад,  $B = 16$  рад/с,  $C = -2$  рад/с<sup>2</sup>. Момент инерции  $J$  маховика равен  $50$  кг·м<sup>2</sup>. Найти законы, по которым изменяются вращающий момент  $M$  и мощность  $P$ . Чему равна мощность в момент времени  $t = 3$  с? [ $M = \text{const} = 200$  Н·м;  $P = D + Et$ , где  $D = 3,2$  кВт;  $E = -0,8$  кВт/с;  $P = 0,8$  кВт; **уровень 5**].
12. Сплошной цилиндр скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $22^\circ$ . Найти длину наклонной плоскости  $l$ , если его скорость в конце этой плоскости равна  $7$  м/с, а коэффициент трения равен  $0,2$ . [ $l = \frac{0,75v^2}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = 19,8$  м; **уровень 3**].
13. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит мяч массой  $m = 0,4$  кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью  $v = 20$  м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии  $r = 0,8$  м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью  $\omega$  начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции  $J$  человека и скамьи равен  $6$  кг·м<sup>2</sup>? [ $\omega = \frac{mvr}{J + mr^2} = 1,02$  рад/с; **уровень 4**].
14. Однородный шар скатывается без скольжения с плоскости, наклоненной под углом  $15^\circ$  к горизонту. За какое время он пройдет путь  $2$  м и какой будет его скорость в конце пути? [ $v = \sqrt{\frac{gl \sin \alpha}{0,7}} = 2,7$  м/с;  $t = \frac{2l}{v} = 1,5$  с; **уровень 4**].
15. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой  $m_1 = 60$  кг. На какой угол  $\varphi$  повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку? Масса  $m_2$  платформы равна  $240$  кг. Момент инерции  $J$  человека рассчитывать как для материальной точки. [ $\varphi = -4\pi m_1 (2m_1 + m_2)^{-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)\pi$ ; **уровень 5**].



## УЧЕБНЫЙ БЛОК 3 КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Этот учебный блок посвящен вопросам, связанным с колебаниями. Учение о колебаниях в физике выделяют особо, что связано с общностью закономерностей колебательных процессов различной природы и методов их исследования.

Колебания свойственны всем явлениям природы. Пульсируют звезды, вращаются планеты Солнечной системы, в земной атмосфере и ионосфере циркулируют потоки заряженных и нейтральных частиц, ветры возбуждают колебания на поверхности водоемов. Внутри любого живого организма непрерывно происходят ритмично повторяющиеся процессы, например, биение сердца.

При изучении данного блока студенты должны

**иметь представление:**

- о способах описания колебательного движения;
- о параметрах колебательного движения;

**обладать навыками:**

- дифференциальных и интегральных вычислений;
- расчета периодов колебаний различных маятников.

### Учебная программа блока

Содержание программы	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
Физический маятник. Крутильный маятник	лекция	[5], [6], [7],
Колебания связанных систем	лекция	[8], [9], [10]

### Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– дифференциальное уравнение колебаний физического и крутильного маятников;</li> <li>– периоды колебаний физического и крутильного маятников;</li> <li>– особенности колебаний связанных систем</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– определять период и приведенную длину физического маятника (простые формы)</li> </ul>

### 3.1. Краткое содержание теоретического материала

*Колебательное движение* (процессы) – движение, точно или приблизительно повторяющееся через одинаковые промежутки времени.

Среди повторяющихся процессов важную роль играет периодическое движение.

Движение называют *периодическим*, если значения физических величин (например, смещения или скорости), изменяющихся в процессе движения, повторяются через равные промежутки времени. Колебательную систему вне зависимости от ее физической природы называют *осциллятором*.

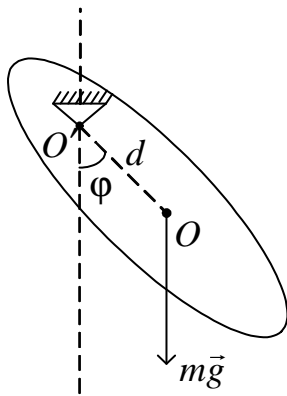


Рис. 3.1

*Физическим маятником* называется тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс, и совершающее колебания под действием силы тяжести. При отклонении маятника из положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия (рис. 3.1).

Этот момент равен

$$M = -mgd \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $m$  – масса маятника,  $d$  – расстояние от точки подвеса ( $O'$ ) до центра масс маятника ( $O$ ).

Согласно основному закону вращательного движения

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2)$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения.

Приравнявая (1) и (2), получаем

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd \sin \varphi.$$

В случае малых отклонений от положения равновесия можно считать  $\sin \varphi \approx \varphi$ , тогда получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{J} \varphi \approx 0.$$

Следовательно, движение физического маятника носит гармонический характер с собственной частотой  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$ .

Период колебаний можно определить по формуле

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Из сопоставлений периода колебаний математического маятника и физического маятника получается, что математический маятник длиной  $L^* = \frac{J}{md}$  будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический. Величину  $L^*$  называют *приведенной длиной физического маятника*.

Тело, подвешенное на упругой нити или другом упругом элементе, совершающее колебания в горизонтальной плоскости, представляет собой крутильный маятник (рис. 3.2). При колебаниях упругий элемент испытывает деформацию сдвига (кручения). Момент упругой силы относительно оси вращения пропорционален углу  $\varphi$  закручивания нити:  $M_{кр} = -K\varphi$ , где  $K$  – коэффициент пропорциональности (коэффициент кручения подвеса), зависящий от размеров и упругих свойств материала подвеса.

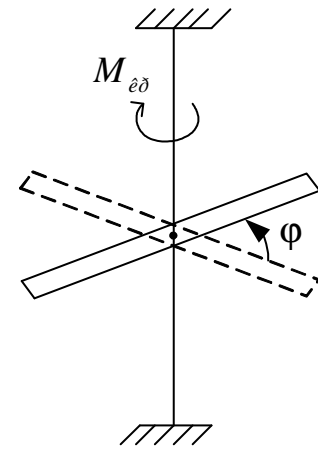


Рис. 3.2

Уравнение вращательного движения имеет вид

$$M = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \text{ где } J \text{ – момент инерции тела относительно оси вращения.}$$

Таким образом,  $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\varphi$ . Это уравнение также является дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Следовательно, если тело на нити повернуть на некоторый угол, то оно будет совершать вокруг вертикальной оси колебания с собственной частотой  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$  или с пе-

риодом  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}}$ . Если значение коэффициента кручения  $K$  известно (например, для стальной проволоки), то, измерив период собственных колебаний  $T_0$ , можно определить момент инерции тела. В этом состоит суть

**метода крутильных колебаний**, который часто используется для нахождения моментов инерции тел. Приборы с использованием крутильного маятника применяют для определения модуля упругости при сдвиге, коэффициента внутреннего трения твердых материалов при сдвиге, коэффициента вязкости жидкости.

До сих пор мы рассматривали простейшие колебательные системы, в которых колебания совершает одно тело (материальная точка). В системах с несколькими упруго связанными телами колебательный процесс качественно изменяется.

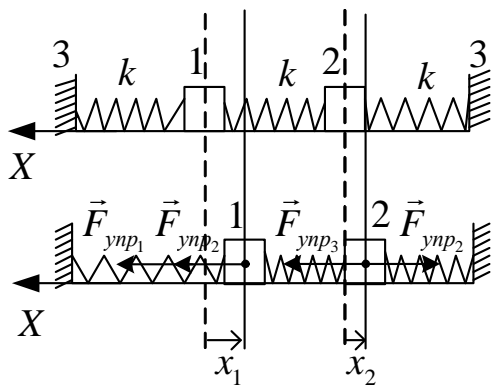


Рис. 3.3

*В системе с несколькими упруго связанными телами возможны колебания с разными частотами. Их совокупность образует частотный спектр системы (нормальные колебания).*

Поясним сказанное примером одномерной цепочки двух частиц, изображенных на рис. 3.3. Пружины одинаковые с коэффициентом упругости  $k$ . Силами трения будем пренебрегать. При малых отклонениях от положения равновесия силы, действующие на частицы, будут пропорциональны изменению длин пружин. При этом считаем, что опоры 3 являются третьим телом с бесконечно большой массой, т.е. неподвижным телом.

На тело 1 действует сила

$$F_{1x} = F_{ynp1} + F_{ynp2} = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -k(x_2 - 2x_1),$$

на тело 2 действует сила

$$F_{2x} = F_{ynp3} - F_{ynp2} = -kx_2 + k(x_1 - x_2) = k(x_1 - 2x_2),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – смещения тел из положения равновесия.

Переменные  $x_1$  и  $x_2$  описывают смещение тел 1 и 2 системы, а движение механической системы описывается системой уравнений

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2) \end{cases} \quad (1)$$

У этой системы есть решение в виде двух гармонических функций

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_0); \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды колебаний.

Подставляя в систему (1) решение (2), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 = kA_2 - 2kA_1 \\ -m\omega^2 A_2 = kA_1 - 2kA_2 \end{cases}$$

Преобразуя последнюю систему, получаем

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (2k - m\omega^2)A_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет нетривиальное решение, если равен нулю определитель коэффициентов системы, т.е. при условии

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0; \quad (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0. \quad (4)$$

Отсюда находим, что в системе из трех связанных тел, одно из которых считаем неподвижным (двух связанных осцилляторов), колебания могут происходить с двумя частотами:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Таким образом, с увеличением числа частиц увеличивается число связей между ними и число возможных частот колебаний системы. Частотный спектр становится богаче. В теории колебаний доказывается, что в системе с  $N$  связанными телами, совершающими колебательные движения, имеются  $N$  частот нормальных колебаний. Все другие колебания в системе могут быть представлены как сумма (наложение) нормальных колебаний. Примером могут быть колебания атомов в молекулах и твердых телах. Представление сложного состояния системы как результат суперпозиции составляющих состояний широко применяется и в квантовой физике.

### 3.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<b>Физический маятник</b> <b>Крутильный маятник</b> Колебательное движение. Гармонические колебания. Свободные колебания. Математический и физический маятники. Крутильный маятник. Маятник Максвелла	лекция + самост.	[8], п. 7.1 [7], пп. 17.1, 17.3 [7], пп. 140 – 143] [5], пп. 4.2 – 4.4 [6], пп. 3.1 – 3.3	Вопросы для самоконтроля  1. Что называется физическим маятником? 2. Что такое приведенная длина физического маятника? 3. По какой формуле можно рассчитать период колебаний физического маятника? 4. Что называется крутильным маятником и как определить его период? 5. От чего зависит коэффициент кручения нити? Приведите примеры крутильных колебаний 6. От чего зависит количество частот возможных колебаний в системе связанных тел? 7. При каких условиях количество нормальных частот колебаний системы связанных тел может быть меньше количества тел? 8. К чему приводит суперпозиция колебаний тел, составляющих систему связанных тел? 9. Что такое биения? Чему равна частота биений? Период? Какой может быть траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Когда получается окружность? Прямая?
<b>Колебания систем связанных тел</b> Примеры связанных систем, в которых возможны колебательные процессы; нормальные частоты колебаний таких систем	лекция + самост.	[8], пп. 7.2 – 7.3 [10], пп. 144 – 148 [7], п. 17.2 [5], пп. 4.4 – 4.6 [6], пп. 3.4 – 3.5	

### 3.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Крутильный маятник. Физический маятник.	Определение параметров колебаний и зависимостей кинематических величин от времени  Определение момента инерции тел методом крутильных колебаний	При нахождении периода колебаний необходимо определить момент инерции тела относительно оси качения маятника с помощью теоремы Штейнера. Когда сложные тела совершают колебания вдоль одной оси координат, их можно представлять материальной точкой  Для нахождения кинематических величин используйте общую теорию гармонических колебаний, выражения для потенциальной энергии упругой деформации и кинетической энергии вращающегося тела. В некоторых случаях параметры вращательных колебаний подвешенных на нитях тел можно определить с использованием теории крутильных колебаний	[1], № 4.4 [11], №№ 4.27 – 4.33 [2], №№ 3.45 – 3.47 [12], №№ 6.41 – 6.51  [11], №№ 4.7 – 4.21 [2], №№ 12.15 – 12.21

### 3.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** Однородный стержень совершает малые колебания в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей в плоскости его верхнего торца. Длина стержня  $L = 0,5$  м. Найти период колебаний. (Уровень 2).

**Решение.** Для определения периода колебаний воспользуемся формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$

Маятник представляет собой стержень. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс,  $J_0 = \frac{1}{12}mL^2$ . Относительно оси вращения момент инерции можно определить по теореме Штейнера ( $d = L/2$ )

$$J = J_0 + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2.$$

Определяем период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}; \quad T = 1,15 \text{ с.}$$

*Ответ:*  $T = 1,15$  с.

**Пример 2.** Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса находится от центра масс на расстоянии  $x = 20,2$  см. (Уровень 3).

**Решение.** Циклическая частота собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgx}{J}}, \quad (1)$$

где  $m$  – масса маятника;  $J$  – момент инерции.

Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии  $x$ ,

$$J = \frac{1}{12}mL^2 + mx^2. \quad (2)$$

Поставив (2) в (1), получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12gx}{L^2 + 12x^2}}. \quad (3)$$

Найдем экстремум функции (3)

$$\frac{d\omega_0}{dx} = \frac{6g(L^2 - 12x^2)}{x^{1/2}(L^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$$L^2 - 12x^2 = 0,$$

т.е. искомая длина маятника

$$L = 2\sqrt{3}x.$$

Вычисляя, получим  $L = 70$  см.

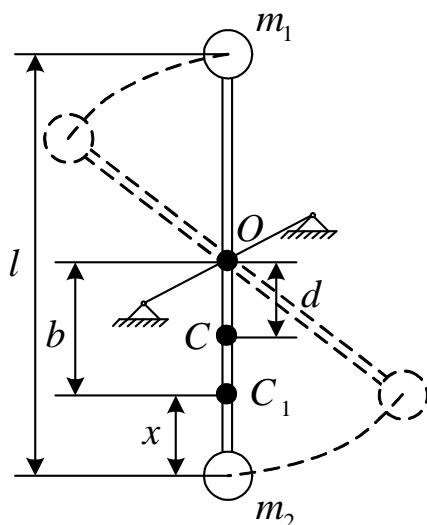
Ответ:  $L = 70$  см.

**Пример 3.** На концах тонкого стержня длиной  $l = 30$  см и массой  $m = 400$  г укреплены грузики массой  $m_1 = 200$  г и  $m_2 = 300$  г. Стержень колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину (см. рисунок). Определить период колебаний, совершаемых стержнем. (**Уровень 4**).

**Решение.** Период колебаний физического маятника, каким является стержень, определяется по формуле

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (1)$$

где  $J$  – момент инерции маятника;  $m = m_1 + m_2 + m$  – масса маятника;  $d$  – расстояние от центра тяжести (центра масс) маятника до оси.



Определим положение центра масс маятника. Центр масс стержня находится в его середине, в точке  $O$  (см. рисунок). Положение центра масс грузиков (точка  $C_1$ ) найдем из соотношения

$$m_1(l - x) = m_2x, \quad (2)$$

откуда

$$x = \frac{m_1}{m_1 + m_2}l$$

и расстояние  $b$  между центром масс грузиков



(точка  $C_1$ ) и центром масс стержня (точка  $O$ )

$$b = \frac{l}{2} - x = l \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{l}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.$$

Положение общего центра масс (точка  $C$ ) определим по аналогии с (2)

$$md = (m_1 + m_2)(b - d),$$

откуда

$$d = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} b = \frac{l}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m}. \quad (3)$$

Момент инерции маятника согласно свойству аддитивности момента инерции определим суммой

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – моменты инерции грузиков;  $J_3$  – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс.

$$J_1 = m_1 \left( \frac{l}{2} \right)^2; \quad J_2 = m_2 \left( \frac{l}{2} \right)^2; \quad J_3 = \frac{1}{12} ml^2.$$

Общий момент инерции

$$J = m_1 \left( \frac{l}{2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} ml^2 = \frac{l^2}{4} \left( m_1 + m_2 + \frac{m}{3} \right). \quad (4)$$

Решая совместно (2), (3) и (1), получаем

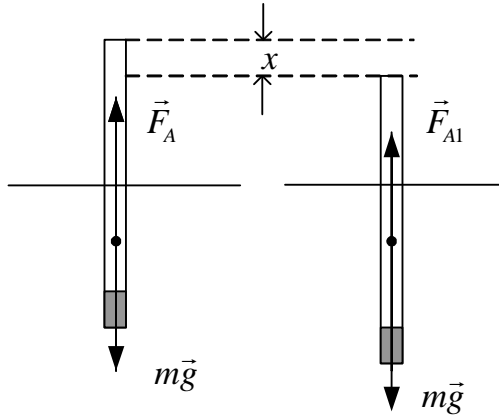
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} = \sqrt{\frac{\frac{l^2}{4} \left( m_1 + m_2 + \frac{m}{3} \right)}{(m_1 + m_2 + m) g \frac{l}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m}}} = \sqrt{\frac{l}{2g} \frac{m_1 + m_2 + \frac{m}{3}}{m_2 - m_1}}.$$

Заметим, что при  $m_2 = m$   $T \rightarrow \infty$ , что соответствует состоянию безразличного равновесия (ось вращения проходит через центр масс). После подстановки известных величин получаем

$$T = 2 \text{ с.}$$

Ответ:  $T = 2 \text{ с.}$

**Пример 4.** Ареометр массой 0,2 кг плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начинает совершать колебания с периодом  $T = 3,4$  с. Считая колебания незатухающими, найти по данным этого опыта плотность жидкости  $\rho$ , в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра  $d = 1$  см. (**Уровень 4**).



**Решение.** На ареометр в состоянии равновесия действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и выталкивающая (Архимедова) (см. рисунок). Силы направлены противоположно и равны по величине:

$$mg = F_A.$$

При погружении ареометра в жидкость на глубину  $x$  величина выталкивающей силы увеличивается, результирующая сила будет равна изменению выталкивающей силы и направлена к положению равновесия, т.е. вверх.

$$\Delta F_A = \rho Vg = \rho Sxg = \frac{\rho \pi d^2 g}{4} x. \quad (1)$$

Если ареометр приподнять относительно положения равновесия на величину  $x$ , то выталкивающая сила уменьшится и результирующая сила, равная  $\Delta \vec{F}_A$ , будет направлена вниз.

Таким образом, величина изменения выталкивающей силы является квазиупругой силой, т.е. пропорциональной изменению положения тела  $x$ . Хотя ареометр является сложным телом, совершая колебательное движение, он движется только поступательно. Поэтому дальнейшее решение осуществляем в модели материальной точки. На основании второго закона Ньютона можно записать:

$$ma = \Delta F_A \quad \text{или} \quad ma = -\frac{\rho \pi d^2 xg}{4}. \quad (2)$$

Знак  $(-)$  указывает, что направление смещения  $x$  противоположно направлению силы  $\Delta F_A$ .

Из уравнения (2) следует:

$$a = -\frac{\rho \pi d^2 xg}{4m}. \quad (3)$$

Сравнив уравнение (3) с дифференциальным уравнением гармонических колебаний

$$a = -\omega^2 x, \quad (4)$$

делаем вывод, что

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho \pi d^2 g}{4m}}. \quad (5)$$

С другой стороны, циклическая частота колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6)$$

Приравняв правые части равенств (5) и (6)

$$\sqrt{\frac{\rho \pi d^2 g}{4m}} = \frac{2\pi}{T},$$

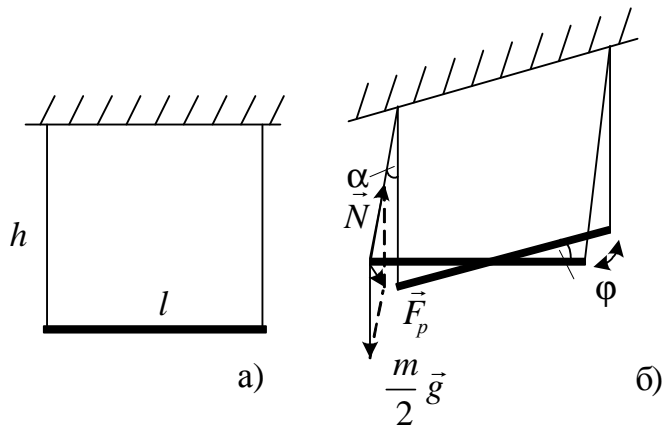
находим

$$\rho = \frac{4m \cdot 4\pi^2}{\pi d^2 T^2} = \frac{16m\pi}{d^2 T^2 g};$$

$$\rho = \frac{16 \cdot 0,2 \cdot 3,14}{10^{-4} \cdot (3,14)^2 \cdot 9,8} = 890 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ:  $\rho = 890 \text{ кг/м}^3$ .

**Пример 5.** Тонкий стержень массой  $m$  и длиной  $l$  подвешен за концы на нитях длиной  $h$  (см. рисунок, а). Стержень поворачивают на угол (малый)  $\varphi_0$  в горизонтальной плоскости и отпускают. Определите период колебаний стержня. (Уровень 4).



**Решение.** При повороте стержня на угол  $\varphi$  от положения равновесия нити подвеса отклоняются от положения равновесия на угол  $\alpha$  (см. рисунок, б). Из рисунка следует, что при малых значениях  $\varphi$  и  $\alpha$  выполняется равенство

$$\frac{l}{2}\varphi = h\alpha,$$

из которого получаем

$$\alpha = \frac{l\varphi}{2h}. \quad (1)$$

На точку соединения концов нити и стержня действуют две силы:  $\frac{mg}{2}$  и  $N$  – натяжения нити. Векторная сумма этих сил является вектором возвращающей силы  $\vec{F}_e$ , модуль которой с учетом малости углов

$$F_e = \frac{m}{2} g \sin \alpha \approx \frac{m}{2} \alpha.$$

Силы  $\vec{F}_e$ , действующие на концах стержня, образуют пару сил, вращающих стержень относительно его центра масс. При этом

$$M_{ep} = F_e l = \frac{mg}{2} l \alpha. \quad (2)$$

Период колебаний стержня можно определить, используя теорию крутильных колебаний, так как вращающий момент в рассматриваемой системе, как и в случае крутильных колебаний, пропорционален углу поворота стержня:

$$M_{ep} = k\varphi \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}, \quad (3)$$

где  $J = \frac{1}{12} ml^2$  – момент инерции стержня относительно его центра;  $k$  – коэффициент кручения подвеса.

Приравнявая теоретическое выражение крутящего момента крутильных колебаний к полученному по условию задачи, запишем

$$k\varphi = \frac{mg}{2} l \alpha, \quad (4)$$

найдем выражение для  $k$ , подставляя (1) в (4):

$$k = \frac{mg}{2} l \frac{\alpha}{\varphi} = \frac{mg}{2} l \frac{l}{2h} = \frac{mgl^2}{4h}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2 4h}{12mhl^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{3g}}.$$

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{3g}}.$$

### 3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Однородный диск радиусом  $R = 40$  см колеблется относительно горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска, проходящей через точку подвеса  $O$ , лежащую на краю диска. Определите период колебаний диска. [ $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 1,55$  с; **уровень 1**].
2. Физический маятник в виде тонкого однородного стержня совершает гармонические колебания вокруг неподвижной оси, проходящей через точку подвеса  $O$ , находящуюся от центра масс  $C$  на расстоянии  $x = 28,9$  см перпендикулярно стержню. Определите длину стержня, если циклическая частота колебаний максимальна. [ $l = 2\sqrt{3}x = 1$  м; **уровень 3**].
3. Тело массой  $m = 4$  кг, закрепленное на горизонтальной оси, совершало колебания с периодом  $T_1 = 0,8$  с. Когда на эту ось дополнительно был насажен диск так, что ось колебаний тела стала перпендикулярной к плоскости диска, период  $T_2$  колебаний стал равным 1,2 с. Радиус  $R$  диска равен 20 см, масса его равна массе тела. Найти момент инерции тела  $J$  относительно оси колебаний. [ $6,4 \cdot 10^{-2}$  кг·м<sup>2</sup>; **уровень 3**].
4. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения  $S = 0,4$  см<sup>2</sup> быстро вливают ртуть массой  $m = 200$  г. Определить период  $T$  колебаний ртути в трубке. [ $T = 0,86$  с; **уровень 3**].
5. Под действием силы тяжести электродвигателя, закрепленного на одном конце балки, другой конец которой жестко закреплен, балка прогнулась на  $h = 1$  мм. При какой частоте вращения якоря электродвигателя может возникнуть опасность резонанса? [ $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} = 16$  с<sup>-1</sup>; **уровень 2**].
6. Определить период крутильных колебаний тонкого диска, подвешенного в горизонтальном положении на трех параллельных нитях длиной 120 см, равномерно расположенных по краю диска. [ $T = 1,55$  с; **уровень 4**].

## УЧЕБНЫЙ БЛОК 4. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

Раздел механики, в котором изучаются законы движения жидкости и ее взаимодействия с телами, обтекаемыми средой, называется *гидродинамикой*; он является частью более общего раздела – *гидроаэромеханики*. При изучении движения жидкости рассматривают ее как *сплошную среду*, отвлекаясь от молекулярного строения жидкости. В ряде случаев пренебрегают внутренним трением и рассматривают **модель идеальной жидкости**.

При изучении данного раздела студенты должны

**иметь представление:**

- об основных физических величинах: давлении, работе, кинетической и потенциальной энергии;
- об основных законах гидростатики: законе Архимеда, законе Паскаля; о гидростатическом давлении;

**обладать навыками:**

- применения элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решения задач на движение тел с учетом сил трения.

### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
Давление в жидкости. Сила Архимеда. Закон Паскаля.	самост.	[13] [10]
Стационарное течение жидкости и уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.	лекция	[8]
Силы внутреннего трения. Сила сопротивления.	лекция	[7]
Движение жидкости в круглой трубе. Формула Пуазейля. Методы определения вязкости	лекция	[5]

### Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– формулы гидростатического давления и силы Архимеда;</li> <li>– уравнение Бернулли и неразрывности струи;</li> <li>– формулу Стокса для силы сопротивления;</li> <li>– выражение для силы вязкого трения</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– решать задачи на применение формул гидростатического давления и силы Архимеда;</li> <li>– применять уравнение неразрывности струи;</li> <li>– применять уравнение Бернулли для расчета скорости и давления в жидкости;</li> <li>– решать задачи о движении тел в вязкой среде</li> </ul>

### 4.1. Краткое содержание теоретического материала

Отличительной особенностью жидкого состояния вещества в сравнении с твердым телом является отсутствие возникновения значительных сил при сдвиге физически малых частиц вещества относительно друг дру-

га. Этим обусловлена текучесть жидкости. Однако расстояние между молекулами жидкости обусловлено значительными силами, достаточными для того, чтобы жидкость оказывала существенное сопротивление изменению ее объема (сжатию).

В механике жидкость рассматривают как *сплошную текучую и несжимаемую среду*, полагая при этом, что плотность жидкости слабо зависит от давления.

Несжимаемая жидкость обладает упругостью объема, что отражено **законом Паскаля**: *внешнее давление, производимое на жидкость, передается во все стороны одинаково*.

Давление, обусловленное весом столба жидкости высотой  $h$ , называют *гидростатическим давлением*:  $p = \rho gh$ , где  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения. Гидростатическое давление в жидкости зависит от глубины погружения в нее, поэтому давление, которое оказывает жидкость на погруженное в нее тело, в нижних слоях больше, чем в верхних. Поэтому на погруженное тело объемом  $V$  действует выталкивающая сила (сила Архимеда), равная весу вытесненной телом жидкости (или газа),  $F_A = \rho gV$ . Сила Архимеда направлена вверх и прикладывается к центру масс погруженной части тела.

В *гидродинамике* изучаются законы движения жидкости, ее взаимодействие с телами. Движение жидкости называют *течением*. Направление скорости течения жидкости определяют так называемые *линии тока* – линии, в каждой точке которых вектор скорости направлен по касательной. Густота линий тока характеризует значение скорости. В стационарном режиме значение скорости течения в каждой точке линии тока не изменяется со временем. Выделяя часть текущей жидкости, ограниченную линиями тока, получим *трубку тока* (рис. 4.1). При стационарном режиме линии тока параллельны и не пересекаются.

Поскольку жидкость несжимаемая, то за одно и то же время через различные сечения трубки тока проходят одинаковые объемы жидкости:  $V_1 = V_2$ , где  $V_1 = v_1 S_1 \Delta t$ ,  $V_2 = v_2 S_2 \Delta t$ . Поэтому для несжимаемой жидкости, текущей по трубопроводу с различным поперечным сечением, выполняется условие

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (1)$$

Это равенство называют **уравнением неразрывности**. В общем случае для идеальной жидкости в стационарных условиях произведение скорости на поперечное сечение трубки тока остается постоянным в любом сечении трубки:  $vS = \text{const}$ .

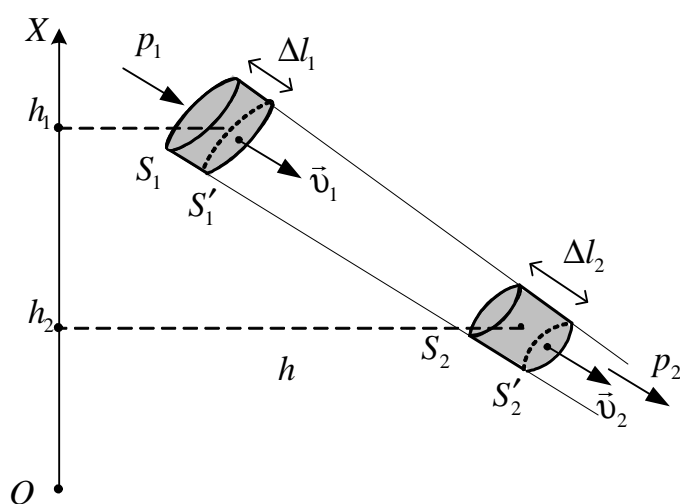


Рис. 4.1

Для изучения движения выделенной части жидкости (см. рис. 4.1) применим закон изменения ее полной механической энергии. За время  $\Delta t$  выделенная часть жидкости переместится в новое положение, в котором она будет уже ограничена сечениями  $S_2$  и  $S_2'$ . Объемы жидкости между сечениями  $S_1$  и  $S_1'$ , а также

$S_2$  и  $S_2'$  движутся поступательно и имеют кинетическую и потенциальную энергии. Так как силы давления на боковую поверхность трубки тока не выполняют работы по перемещению жидкости (они перпендикулярны к  $\vec{v}$ ), то сумма работ внешних сил будет равна работе сил давления в сечениях  $S_1$  и  $S_2$  при их перемещении на расстояния  $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$  и  $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$ . Эта работа равна изменению полной механической энергии массы выделенной части жидкости  $m = \rho S \Delta l$ , ограниченной объемом  $S \Delta l$ :

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \left( \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right) = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2. \quad (2)$$

Разделив обе части на  $S_2 \Delta l_2 = S_1 \Delta l_1$  и учитывая, что жидкость несжимаемая ( $p = \text{const}$ ), получим

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1, \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

Это уравнение справедливо для любого движущегося объема жидкости внутри любой трубки тока и является **уравнением Бернулли**. В общем случае (2) можно записать в виде

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}, \quad (4)$$

где  $\frac{\rho v^2}{2}$  – динамический напор;  $\rho gh$  – гидравлический напор;  $p$  – статическое давление.

С физической точки зрения *динамический напор* соответствует удельной кинетической энергии, т.е. энергии одной единицы объема движущейся жидкости, а *гидравлический напор* – удельной потенциальной энергии одной единицы объема в поле силы тяжести.



Определим, с какой скоростью вытекает жидкость через отверстие в сосуде, наполненном жидкостью. Допустим, что в сосуде уровень жидкости поддерживается постоянным. За нулевой уровень отсчета высоты выберем уровень, на котором находится отверстие (рис. 4.2). Выделим линию тока, которая начинается наверху и заканчивается в отверстии. Будем считать отверстие очень маленьким и давления в верхней и нижней частях его одинаковыми. Запишем уравнение Бернулли для двух сечений,  $S_0$  и  $S$ :

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 + \rho gh = \frac{\rho v^2}{2} + p_0,$$

где  $v_0$  – скорость движения уровня воды на высоте  $h$ ;  $v$  – скорость вытекания жидкости из сосуда;  $p_0$  – атмосферное давление. По условию  $h = \text{const}$ ;  $v_0 = 0$ , тогда  $\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$ , откуда

следует, что скорость вытекания жидкости  $v = \sqrt{2gh}$ . Таким образом, скорость, с которой жидкость вытекает из сосуда, равна скорости, которой обладает тело, упавшее с высоты, равной разности уровней отверстия и поверхности жидкости.

**Вязкостью** называется свойство жидкостей оказывать сопротивление сдвигу слоев жидкости (условно выделяемых при решении задач) относительно друг друга. Между этими слоями, движущимися друг относительно друга с некоторыми скоростями, действуют силы внутреннего трения (сопротивления). В случае одномерного течения жидкости (вдоль оси  $x$ ) величина силы трения описывается **законом Ньютона**

$$F_c = -\eta S \frac{dv_x}{dy} \vec{n}, \quad (5)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, совпадающий с направлением вектора скорости  $\vec{v}$ ,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости (в некоторых случаях используют также коэффициент кинематической вязкости  $\gamma = \frac{\eta}{\rho}$ ),  $S$  – площадь соприкосновения движущихся слоев;  $dv_x/dy$  – градиент скорости, т.е. быстрота изменения скорости слоев в направлении оси  $Y$ , перпендикулярной к  $\vec{v}_x$  (скорости течения).

Для медленно движущегося небольшого шара радиусом  $r$  сила **лобового сопротивления** описывается **законом Стокса**

$$\vec{F}_c = -6\pi r \eta \vec{v}.$$

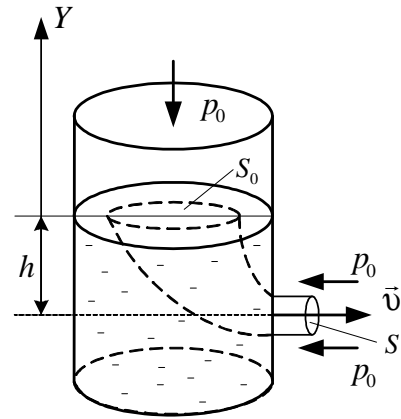


Рис. 4.2

Закон Стокса лежит в основе лабораторного метода определения вязкости, основанного на изучении падения шариков в вязкой среде.

Характер течения жидкости при обтекании ею какого-нибудь тела зависит от значения безразмерной величины  $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ , где  $\rho$  – плотность жидкости (газа),  $v$  – средняя (по сечению трубы) скорость потока,  $L$  – характерный размер для поперечного сечения тела.

Величина  $Re$  называется *числом Рейнольдса*. Если число Рейнольдса меньше некоторого критического значения, течение жидкости носит *ламинарный* характер (слои не перемешиваются), начиная с некоторого значения  $Re$  течение жидкости приобретает *турбулентный* характер.

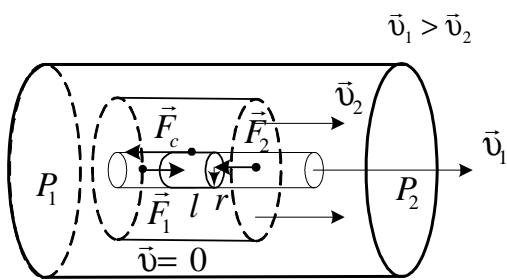


Рис. 4.3

Рассмотрим течение жидкости в круглой трубе (рис. 4.3). При ламинарном течении скорость жидкости меняется от нуля около стенок трубы до максимального значения на оси трубы.

Найдем закон изменения скорости. Выделим воображаемый цилиндрический объем жидкости радиусом  $r$  и длиной  $l$ .

При стационарном течении этот объем движется без ускорения. В направлении движения на жидкость действует сила давления  $F_1 = p_1 \pi r^2$ , во встречном направлении – сила давления  $F_2 = p_2 \pi r^2$ . Результирующая сил давления имеет модуль

$$F = (p_1 - p_2) \pi r^2, \quad (6)$$

где  $(\pi r^2)$  – площадь основания цилиндра.

На боковую поверхность действует тормозящая сила внутреннего трения

$$F_c = -\eta 2\pi r l \left| \frac{dv}{dr} \right|, \quad (7)$$

где  $2\pi r l$  – площадь боковой поверхности цилиндра;  $\frac{dv}{dr}$  – изменение скорости течения жидкости с расстоянием от оси трубки;  $\frac{dv}{dr} < 0$ , поскольку скорость на оси максимальна.

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi l.$$

Разделив переменные, получим уравнение

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} r dr,$$

интегрирование которого дает

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} r^2 + C. \quad (8)$$

Постоянную  $C$  нужно выбрать из условия, что на стенке трубы (т.е. при  $r = R$ ) скорость обращается в нуль. Это условие выполняется в случае, если

$$C = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} R^2.$$

Подстановка этого выражения в (7) приводит к формуле

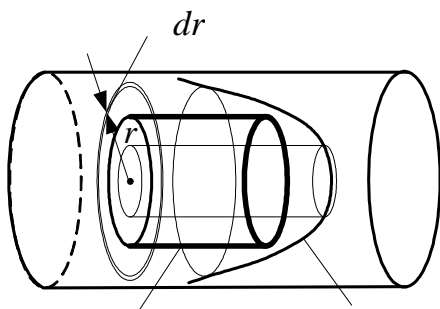
$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) R^2. \quad (9)$$

Скорость жидкости на оси трубы

$$v_0 = v(0) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} R^2. \quad (10)$$

С учетом формулы (10) можно записать:

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (11)$$



$l = v(r)dt$  Вид функции скорости  $v(r)$

Рис. 4.4

Вычислим расход жидкости  $Q$ , равный объему жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени. Разобьем сечение трубы на кольца шириной  $dr$  (рис. 4.4). Через кольцо радиусом  $r$  толщиной  $dr$

пройдет в единицу времени объем жидкости  $dV = v(r)dt \cdot dS$ , где  $dS = 2\pi r dr$ ,

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \frac{v(r)2\pi r dr dt}{dt} = 2\pi r v(r) dr = v_0 2\pi r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr.$$

Проинтегрировав это выражение по  $r$  в пределах от нуля до  $R$ , получим поток  $Q$ :

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0. \quad (12)$$

Подставив в (12) выражение (10), получим **формулу Пуазейля**

$$Q = \frac{(p_1 - p_2) \pi R^4}{8\eta l}. \quad (13)$$

Из формулы Пуазейля следует, что расход  $Q$  сильно зависит от радиуса трубы, пропорционален отношению  $\frac{(p_1 - p_2)}{l}$ , т.е. перепаду давления на единице длины трубы, а также обратно пропорционален коэффициенту динамической вязкости  $\eta$ . Объем жидкости, прошедшей через сечение  $S$  за время  $t$ , выражается формулой

$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4 t}{8\eta l}, \quad (14)$$

из которой найдем коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4 t}{8Vt}. \quad (15)$$

Если жидкость с плотностью  $\rho$  вытекает из вертикальной трубки только под действием собственного веса, то разность давлений на концах трубки равна гидростатическому давлению  $\rho gh$ , т.е.

$$p_1 - p_2 = \rho gh, \quad (16)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $h$  – высота столба жидкости.

Тогда с учетом (16) уравнение (15) примет вид

$$\eta = \frac{\pi\rho ghR^4 t}{8Vl} = \frac{A}{V}t. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует, что время вытекания некоторого объема  $V$  жидкости определяется ее вязкостью и зависит от геометрических размеров трубки ( $R$ ,  $l$ ) и плотности жидкости ( $\rho$ ). Поэтому если нам известна величина  $A = \frac{\pi\rho ghR^4}{8l}$ , то, измерив объем жидкости  $V$ , вытекающий за время  $t$ , можно рассчитать величину динамической вязкости  $\eta$  согласно (17). В этом состоит суть **метода Пуазейля** для определения коэффициента динамической вязкости.

Рассмотренные закономерности движения жидкости и тел в жидкости во многих случаях применимы к движению газа и тел в газе, так как при определенных условиях свойства газа оказываются близкими к свойствам жидкости, в частности, при больших скоростях движения газа и тел в газе или при достаточно высокой плотности газа.

#### 4.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p>Давление в жидкости.</p> <p>Сила Архимеда.</p> <p>Закон Паскаля.</p> <p>Стационарное течение жидкости и уравнение неразрывности.</p> <p>Уравнение Бернулли.</p> <p>Сила внутреннего трения.</p> <p>Сила сопротивления.</p> <p>Движение жидкости в круглой трубе.</p> <p>Формула Пуазейля.</p> <p>Методы определения вязкости.</p> <p>Применяемость законов движения жидкости и тел в жидкости к движению газов и тел в газах.</p>	лекция + самост.	<p>[5], пп. 1.140 – 1.142</p> <p>[7], пп. 6.1 – 6.8</p> <p>[8], пп. 8.1 – 8.4</p> <p>[10], пп. 28 – 33</p> <p>[13], пп. 5.1 – 5.14</p>	<p>1. Что называется давлением?</p> <p>2. Сформулируйте закон Паскаля.</p> <p>3. Что такое гидростатическое давление, чему оно равно?</p> <p>4. Чему равна сила Архимеда?</p> <p>5. Что такое линия и трубка тока?</p> <p>6. Запишите и объясните уравнение неразрывности.</p> <p>7. Сформулируйте физический смысл уравнения Бернулли.</p> <p>8. Что такое динамический напор?</p> <p>9. В чем различие ламинарного и турбулентного движения? Что такое число Рейнольдса?</p> <p>10. Запишите выражение для силы внутреннего трения, от чего она зависит?</p> <p>11. От чего зависит скорость течения жидкости вдоль оси трубы?</p> <p>12. Запишите формулу Пуазейля.</p> <p>13. Что характеризует число Рейнольдса?</p>

#### 4.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Давление в жидкости и газах	<p>Равновесие тел в жидкости и газе.</p> <p>Вытекание жидкостей из сосудов.</p> <p>Движение жидкостей в трубах.</p> <p>Движение тел в жидкостях и газах</p>	<p>При решении задач на равновесие тел в жидкости необходимо вспомнить условия равновесия тел.</p> <p>При решении задач на вытекание жидкости из сосудов необходимо помнить о том, что скорость вытекания зависит от высоты уровня жидкости.</p> <p>Задачи данного типа, как правило, решаются с использованием дифференциального исчисления</p>	<p>[11], №№ 1.211 – 1.246</p> <p>[2], №№ 4.1 – 4.20</p> <p>[12], №№ 12.45 – 12.60</p>

### 4.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** В жидкости с плотностью  $\rho_1$  плавает полый шар объемом  $V$ , изготовленный из материала с плотностью  $\rho_2$ . Каков объем полости  $V_{II}$ , если известно, что объем погруженной в жидкость части шара составляет  $n = 0,75$  всего объема шара?

**Решение.** При равновесии сила тяжести равна архимедовой силе

$$F_A = mg, \quad (1)$$

где  $m$  – масса шара;  $m = \rho_2(V - V_{II})$ .

Модуль силы Архимеда  $F_A = \rho_1 g V_1$ , где  $V_1$  – погруженный в жидкость объем шара.

После подстановки получаем

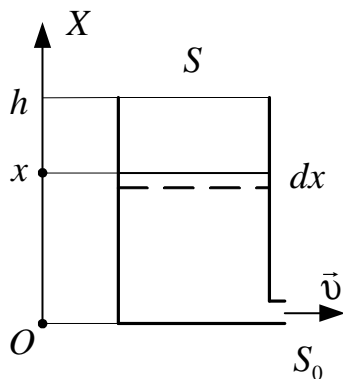
$$\rho_2 g (V - V_{II}) = \rho_1 g V_1$$

или с учетом того, что  $V_1 = nV$ ,

$$\rho_2 (V - V_{II}) = \rho_1 nV. \quad (2)$$

Из (2) получаем выражение для объема полости  $V_{II} = V(1 - n\rho_1/\rho_2)$ .

*Ответ:*  $V_{II} = V(1 - n\rho_1/\rho_2)$ .



**Пример 2.** Определить время  $\tau$  вытекания жидкости из сосуда высотой  $h$  и площадью основания  $S$ , если внизу находится отверстие площадью  $S_0$  (см. рисунок).

**Решение.** Известно, что скорость истечения жидкости из отверстия определяется формулой  $v = \sqrt{2gx}$ , где  $x$  – высота уровня поверхности жидкости.

Изменение объема вследствие вытекания связано с изменением уровня жидкости:

$$dV = -Sdx. \quad (1)$$

С другой стороны, это изменение равно объему жидкости, проходящему через отверстие,

$$dV = vS_0 dt = \sqrt{2gx}S_0 dt. \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение

$$-Sdx = \sqrt{2gx}S_0dt \quad \text{или} \quad -\frac{S}{S_0\sqrt{2g}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt.$$

Интегрируя

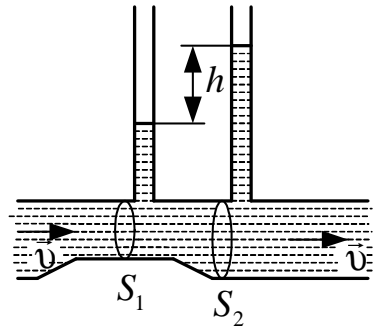
$$-\int_h^0 \frac{S}{S_0\sqrt{2g}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\tau dt,$$

определяем зависимость времени вытекания от начального уровня:

$$\tau = \frac{S}{S_0} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Ответ:  $\tau = \frac{S}{S_0} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$

**Пример 3.** Две манометрические трубки установлены на горизонтальной трубе переменного сечения в местах, где сечения трубы равны  $S_1$  и  $S_2$  (см. рисунок). По трубе течет вода. Найти объем воды, протекающей в единицу времени через сечение трубы, если разность уровней воды в манометрических трубках равна  $h$ .



**Решение.** Объем жидкости, протекающий в единицу времени,

$$V = v_2 S_2, \tag{1}$$

где  $v_2$  – скорость течения воды в месте сечения  $S_2$ .

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1, \tag{2}$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – статические давления у оснований манометрических трубок, причем  $p_2 - p_1 = \rho gh$ .

С другой стороны, из (2) следует, что  $p_2 - p_1 = \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2}$ .

Приравняв правые части, получаем

$$\rho gh = \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2}. \tag{3}$$

Воспользуемся уравнением неразрывности

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (4)$$

Решая совместно систему уравнений (3) – (4), находим скорость

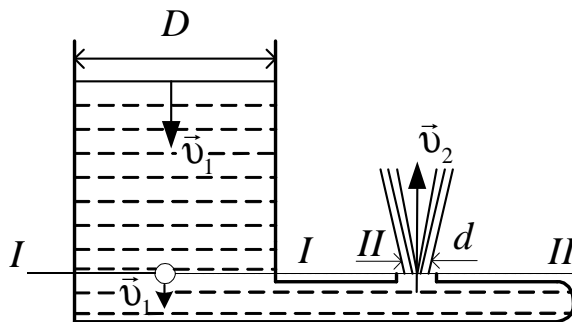
$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2gh}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Подставив  $v_2$  в (1), получаем искомый объем жидкости

$$V = S_2 S_1 \sqrt{\frac{2gh}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Ответ:  $V = S_2 S_1 \sqrt{\frac{2gh}{S_2^2 - S_1^2}}.$

**Пример 4.** Вода подается в фонтан из большого цилиндрического бака и бьет из отверстия фонтана со скоростью 12 м/с. Найти: 1. Скорость понижения уровня воды в баке, если диаметр бака равен 2 м, а диаметр отверстия фонтана 2 см. 2. Давление, под которым вода подается в фонтан. 3. Высоту уровня воды в баке и струи, выходящей из фонтана. Вязкостью воды пренебречь. (**Уровень 3**).



### Решение

1. В движущейся жидкости выделим два горизонтальных сечения на уровне отверстия – одно в баке с диаметром  $D$  и второе – в отверстии с диаметром  $d$ .

Из условия неразрывности  $v_1 S_1 = v_2 S_2$  следует, что объем воды

$V_1$ , протекающий за 1 с через сечение  $I - I$ , должен быть равен объему воды  $V_2$ , протекающей через сечение  $II - II$ :

$$V_1 = V_2$$

или

$$\frac{\pi D^2}{4} l_1 = \frac{\pi d^2}{4} l_2, \quad (1)$$

где  $D$  и  $d$  – диаметры бака и отверстия;  $l_1$  и  $l_2$  – длины цилиндрических столбов жидкости, протекающей за 1 с через сечения  $I - I$  и  $II - II$ .



Так как длины  $l_1$  и  $l_2$  определяются скоростями течения  $v_1$  и  $v_2$  в сечениях  $I-I$  и  $II-II$  ( $l_1 = v_1 \Delta t$ ;  $l_2 = v_2 \Delta t$ ), равенство (1) можно записать в виде

$$D^2 v_1 = d^2 v_2,$$

откуда

$$v_1 = v_2 \left( \frac{d}{D} \right)^2. \quad (2)$$

Подставив в это равенство числовые значения заданных величин в единицах системы СИ, найдем

$$v_1 = 12(0,02/2)^2 = 0,0012 \text{ м/с}.$$

С такой же скоростью будет понижаться уровень воды в баке. Как видно, эта скорость очень мала по сравнению со скоростью струи.

2. Давление  $p_1$ , под которым вода подается в фонтан, найдем с помощью уравнения Бернулли. Это уравнение для идеальной несжимаемой жидкости в условиях данной задачи имеет вид

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (3)$$

Учитывая, что  $p_2$  равно нулю (здесь под давлением мы подразумеваем избыточное давление над атмосферным), из уравнения (3) получим

$$p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}. \quad (4)$$

Выразим числовые значения величин в единицах системы СИ:

$$\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad v_1 = 0,0012 \text{ м/с}; \quad v_2 = 12 \text{ м/с}.$$

Подставив их в равенство (4), получим

$$p_1 = \left( \frac{10^3 \cdot 12^2}{2} - \frac{10^3 \cdot (0,0012)^2}{2} \right) \text{ Н/м}^2.$$

Второй член правой части имеет значение, весьма малое по сравнению со значением первого члена. Пренебрегая им, получаем

$$p_1 = \left( \frac{10^3 \cdot 12^2}{2} \right) = 7,2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2.$$

3. Зная давление  $p_1$ , можно найти высоту уровня воды в баке по формуле

$$p_1 = \rho g h_1,$$

откуда  $h_1 = \frac{p_1}{\rho g}.$

Подставив числовые значения, будем иметь

$$h_1 = \frac{7,2 \cdot 10^4}{10^3 \cdot 9,81} = 7,35 \text{ м.}$$

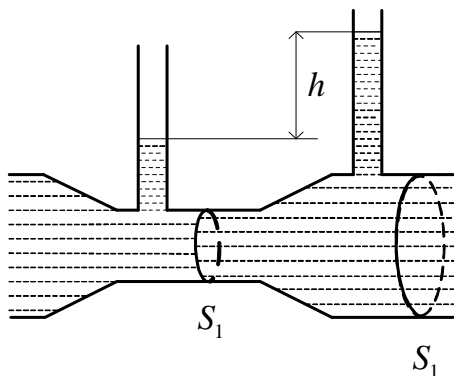
Зная скорость  $v_2$ , с которой вода выбрасывается фонтаном, можно найти высоту  $h_2$ , на которую она будет выброшена:

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{12^2}{2 \cdot 9,81} = 7,35 \text{ м.}$$

Подчеркнем, что высота уровня воды в баке равна высоте, на которую поднимется фонтан воды (по правилу сообщающихся сосудов). Конечно, это замечание справедливо, если пренебречь сопротивлением воздуха, а воду считать идеальной ( $\eta = 0$ ).

#### 4.5. Задачи для самостоятельного решения

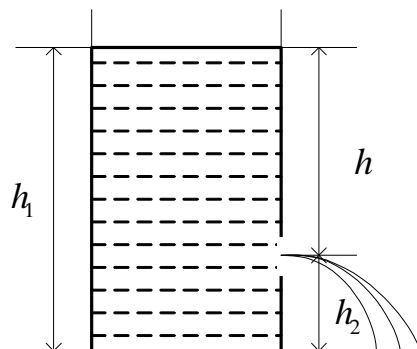
1. Водяной бак в паровозе имеет длину  $l = 4$  м. Какова разность  $\Delta l$  уровней воды у переднего и заднего концов бака при движении поезда с ускорением  $a = 0,5$  м/с<sup>2</sup>? [20,4 см; **уровень 5**].
2. Струя воды ударяется о неподвижную плоскость, поставленную под углом  $\varphi = 60^\circ$  к направлению движения струи. Скорость  $v$  струи равна 20 м/с, площадь  $S$  ее поперечного сечения равна 5 см<sup>2</sup>. Определить силу  $F$  давления струи на плоскость [ $F = 2\rho S v^2 \sin \varphi = 346$  Н; **уровень 5**].
3. Насос выбрасывает струю воды диаметром  $d = 2$  см со скоростью  $v = 20$  м/с. Найти мощность  $P$ , необходимую для выбрасывания воды. [ $P = \frac{\pi \rho d^2 v^3}{8} = 1,26$  кВт; **уровень 4**].
4. Полый медный шар ( $\rho = 8,93$  г/см<sup>3</sup>) весит в воздухе 3 Н, а в воде ( $\rho' = 1$  г/см<sup>3</sup>) – 2 Н. Пренебрегая весом воздуха в полости, определите объем внутренней полости шара. [68 см<sup>3</sup>; **уровень 2**].



5. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (см. рисунок). По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить ее массовый расход,

если разность уровней в манометрических трубках  $\Delta h = 8$  см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны  $S_1 = 6$  см<sup>2</sup> и  $S_2 = 12$  см<sup>2</sup>. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. [2100 кг/с; **уровень 5**].

6. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, если высота  $h$  уровня жидкости над отверстием составляет 1,5 м (см. рисунок). [5,42 м/с; **уровень 1**].



7. В сосуд заливается вода со скоростью 0,5 л/с. Пренебрегая вязкостью воды, определите диаметр отверстия в сосуде, при котором вода поддерживалась бы в нем на постоянном уровне  $h = 20$  см. [1,8 см; **уровень 3**].

8. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр с внутренним диаметром  $d = 2$  мм длиной  $l = 1,2$  см. Через капилляр вытекает касторовое масло (плотность  $\rho = 0,96$  г/см<sup>3</sup>, динамическая вязкость  $\eta = 0,99$  Па·с), уровень которого в сосуде поддерживается постоянным на высоте  $h = 30$  см выше капилляра. Определите время, которое требуется для протекания через капилляр 10 см<sup>3</sup> масла. [107 с; **уровень 5**].

9. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 3 раза больше плотности материала шарика. Определите отношение силы трения, действующей на всплывающий шарик, к его весу. [ $F_{тр}/p = 2$ ; **уровень 4**].

10. Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости  $S = 10$  см<sup>2</sup>, коэффициент вязкости  $\eta = 10^{-3}$  Па·с, а возникающая сила трения между слоями  $F = -0,1$  мН. Определите градиент скорости. [ $100$  с<sup>-1</sup>; **уровень 4**].

11. Стальной шарик (плотность  $\rho_1 = 9$  г/см<sup>3</sup>) падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином ( $\rho_2 = 1,26$  г/см<sup>3</sup>, динамическая вязкость  $\eta = 1,48$  Па·с). Считая, что при числе Рейнольдса  $Re \leq 0,5$  выполняется закон Стокса, определить предельный размер шарика. [6 мм; **уровень 5**].

## УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 3. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Модуль посвящен изучению равновесных состояний вещества и процессов изменения состояний вещества в газообразной форме. При повышенных плотностях газы проявляют некоторые свойства, подобные свойствам жидкости, поэтому механика таких газов рассматривается с привлечением понятий гидродинамики (см. модуль 2, блок 4). Основное внимание уделяется газам с относительно низкой плотностью, когда закономерности, описывающие свойства вещества в твердом и жидком состояниях, оказываются неприменимыми для описания процессов в газе. Существует две взаимодополняющих теории, рассматривающие состояния и процессы изменения состояний таких газов. **Молекулярно-кинетическая теория газов** оперирует усредненными характеристиками движения частиц (микропараметрами), которое описывается законами классической механики.

Термодинамика – наука, рассматривающая вещество в газообразном состоянии (также как жидкости и твердые тела) как единое целое, без обращения к внутренней структуре вещества и оперирующая только параметрами системы – *макропараметрами*, к которым относятся, в частности, *температура, давление, объем, масса вещества, концентрация частиц, плотность вещества, внутренняя энергия*.

Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика, взаимно дополняя друг друга, позволяют установить связи между макропараметрами и микропараметрами состояния газа. Эти связи также рассматриваются в этом учебном модуле.

Однако в связи с большим количеством взаимодействующих между собой частиц, образующих систему (газ), у нее возникают новые характеристики (параметры), не присущие одной частице газа, например, *температура*. Поэтому основной задачей молекулярно-кинетической теории является определение связи таких «коллективных» параметров среды (газа) с усредненными параметрами механического движения частиц газа на основе **статистических методов**.

Отдельный учебный блок модуля посвящен рассмотрению процессов переноса в газе, на основе которых устанавливаются закономерности таких явлений, как теплопроводность, диффузия, внутреннее трение.

Модуль содержит три учебных блока:

1. Законы состояния идеального газа.
2. Явления переноса.
3. Термодинамика. Агрегатное состояние вещества.

*В первом блоке* рассматриваются основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ) и статистический метод определения характеристик системы на основе распределения молекул по скоростям.

Во втором блоке рассматриваются явления переноса на основе модели идеального газа. В качестве примера МКТ и распределения Максвелла для решения практических задач представлены выводы коэффициентов переноса и эмпирических законов, описывающих явления переноса.

В третьем блоке рассматриваются начала термодинамики. Вводится понятие энтропии, необратимости процессов, КПД цикла тепловой машины и т.д.

### Учебно-методическая структура модуля

Учебный модуль 3. Молекулярно-кинетическая теория. Основы термодинамики		
Учебный блок 1. Законы состояния идеального газа	Учебный блок 2. Явления переноса	Учебный блок 3. Термодинамика. Агрегатное состояние вещества
<ul style="list-style-type: none"> <li>– давление идеального газа;</li> <li>– уравнение Менделеева – Клапейрона;</li> <li>– газовые законы;</li> <li>– понятие о степенях свободы;</li> <li>– внутренняя энергия идеального газа;</li> <li>– распределение Максвелла по скоростям и энергии;</li> <li>– идеальный газ в потенциальном поле;</li> <li>– распределение Больцмана;</li> <li>– поток газа на стенку</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– критерии вакуума;</li> <li>– столкновения;</li> <li>– теплопроводность;</li> <li>– внутреннее трение;</li> <li>– диффузия</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– процессы изменения состояния газа;</li> <li>– работа; I начало термодинамики;</li> <li>– теплоемкость;</li> <li>– политропические процессы;</li> <li>– циклические процессы, их КПД;</li> <li>– II начало термодинамики; энтропия;</li> <li>– реальные газы; уравнение Ван-дер-Ваальса;</li> <li>– критические параметры;</li> <li>– фазовые переходы</li> </ul>

### Методическая программа модуля

Тема занятия	Цель занятия	Вид занятия	Часы
1. Законы состояния идеального газа	формирование новых знаний	вводная лекция	1
2. Определение макро- и микропараметров идеального газа	формирование новых знаний	лекция	2
3. Распределение Максвелла – Больцмана	формирование новых знаний	лекция	2
4. Распределение Максвелла – Больцмана	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2
5. Лабораторная работа по определению параметров реальных газов	углубление и систематизация навыков	лаборат. работа	4
6. Явления переноса	формирование новых знаний	лекция	2
7. Определение основных параметров явлений переноса	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2
8. Процессы изменения состояния газа. Работа и энергия	формирование новых знаний	лекция	2
9. I начало термодинамики. Работа в термодинамических системах	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2
10. Циклические процессы. Коэффициент полезного действия. Энтропия	формирование новых знаний	лекция	2
11. Определение КПД процессов. Энтропия	углубление и систематизация навыков	практич. занятие	2

## УЧЕБНЫЙ БЛОК 1. ЗАКОНЫ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

При рассмотрении состояний газа и процессов изменения состояний используется модель *идеального газа*. Идеальным можно считать газ, если коллективным взаимодействием между его частицами в условиях данной задачи можно пренебречь. Из реальных газов по своим свойствам наиболее близкими к идеальным газам являются *разреженные газы*.

Анализ основных физических процессов в газе осуществляется на основе молекулярно-кинетической теории, в которой газ рассматривается в рамках механических представлений. В молекулярно-кинетической теории для описания свойств газов применяются микро- и макропараметры. К *микропараметрам* относятся масса частиц (молекул), скорость частиц, длина их свободного пробега и кинетическая энергия, а к *макропараметрам* – давление, объем, температура. Поскольку в газе содержится достаточно большое количество частиц с различными значениями микропараметров, целесообразно рассматривать усредненные микропараметры, полученные на основе статистического рассмотрения явлений в газах. Макропараметры характеризуют газ в целом и связаны с микропараметрами через основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Различные формы записи основного уравнения МКТ подробно рассматривались в курсе физики средней школы, поэтому этот раздел предполагает в основном самостоятельное повторение материала. Основное внимание в этом блоке уделяется статистическому подходу к описанию физических явлений в газе.

При изучении данного блока студенты должны **иметь представление:**

- о законах классической динамики;
- об особенностях свободного вращения тел;

**обладать навыками:**

- интегрирования, использования табличных интегралов;
- расчета основных макро- и микропараметров идеального газа на основе уравнения состояния идеального газа и других известных законов состояния газа.

### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
1. Давление идеального газа.	самост.	[5], ч.2 [6], ч. 2 [7] [10] [13]
2. Уравнение Менделеева – Клапейрона.	самост.	
3. Законы состояния газа.	самост.	
4. Понятие степеней свободы.	самост.	
5. Внутренняя энергия идеального газа.	лекция	
6. Распределение Максвелла.	лекция	
7. Идеальный газ в потенциальном поле.	лекция	
8. Поток частиц идеального газа на стенку.	лекция	
9. Средняя энергия в потоке и в объеме идеального газа	лекция	

## Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– основные уравнения МКТ;</li> <li>– уравнение Менделеева – Клапейрона и другие законы состояния газа;</li> <li>– закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы;</li> <li>– распределение Максвелла;</li> <li>– распределение Больцмана;</li> <li>– выражения для потоков частиц и энергий идеального газа на стенку;</li> <li>– способ определения средних энергий частиц газа в потоке и в объеме</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– определять макроскопические параметры идеального газа на основе законов состояния газа;</li> <li>– определять число степеней свободы молекул идеального газа и соответствующую им энергию;</li> <li>– определять средние и наиболее вероятную скорости и энергии молекул;</li> <li>– рассчитывать число частиц, имеющих скорости (энергии) в заданном диапазоне;</li> <li>– определять равновесные параметры идеального газа</li> </ul>

### 1.1. Краткое содержание теоретического материала

В основу МКТ положена **модель идеального газа**, для которого считаются справедливыми следующие утверждения:

- микрочастицы движутся хаотически и подчиняются законам механики;
- хаотичность движения означает, что система (газ) изотропна во всех направлениях по своим характеристикам и свойствам. Например, если для какого-либо направления определена средняя скорость частиц газа, то она одинакова для всех направлений;
- размер микрочастиц много меньше расстояния между ними, и поэтому частицы представляются материальными точками, взаимодействие их происходит только при столкновениях, которые подчиняются условиям упругих столкновений в механике;
- абсолютно упругий характер взаимодействия распространяется и на взаимодействие микрочастиц газа с другими макротелами, например, стенками сосуда;
- давление в МКТ есть результат изменения импульса микрочастиц газа при упругом столкновении со стенками сосуда;
- температура в МКТ характеризует скорость теплового движения молекул;
- внутренняя энергия в МКТ есть суммарная энергия теплового хаотического поступательного движения.

При определении внутренней энергии газа МКТ допускает отклонение от модели идеального газа: частицы газа могут представлять собой не материальные точки, а системы (молекулы) пространственно распределен-

ных взаимосвязанных объектов (атомов). Для таких частиц газа, который считается неидеальным, кроме поступательного движения в МКТ учитываются вращательное и колебательное движения.

Состояние заданной массы газа определяется значениями трех параметров: давления  $p$ , объема  $V$  и температуры  $T$ . Эти параметры называются макропараметрами и связаны друг с другом. Указанная связь может быть задана аналитически в виде функции

$$F(p, V, T) = 0.$$

Это соотношение, определяющее связь между параметрами какого-либо тела, называется *уравнением состояния* этого тела.

При небольших плотностях газа макропараметры его состояния с хорошей точностью связаны уравнением

$$\frac{pV}{T} = \text{const} . \quad (1)$$

Это и есть уравнение состояния идеального газа (экспериментальный закон Бойля – Мариотта). Для произвольной массы газа связь макропараметров его состояния устанавливается уравнением Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \frac{N}{N_A} RT , \quad (2)$$

где  $m$  – масса газа;  $\mu$  – молярная масса;  $N$  – число частиц в газе;  $N_A$  – число Авогадро (число частиц в моле газа);  $\frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu} = \nu$  – количество вещества;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Если учесть, что концентрация  $n = \frac{N}{V}$  и  $k = \frac{R}{N_A}$  – постоянная Больцмана, то

$$p = nkT . \quad (3)$$

Уравнения (1), (2) и (3) являются различными формами одного и того же уравнения состояния идеального газа. Используя (2), можно получить выражение для плотности идеального газа  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}$ .

Рассмотрим взаимодействие идеального одноатомного газа со стенкой. Пусть частицы не взаимодействуют между собой, а соударения о стенку абсолютно упругие (рис. 1.1). Для простоты рассмотрения допустим,



что скорость частицы лежит в плоскости  $ZX$ . Разложим  $\vec{v}$  на компоненты  $\vec{v}_x$  и  $\vec{v}_z$ . При упругом соударении изменяется только скорость  $\vec{v}_x$ . Поэтому при каждом соударении молекула передает стенке импульс  $\Delta p$ :

$$\Delta p = m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2m_0 v_x,$$

где  $v_x$  – скорость частицы в направлении  $X$ ,  $m_0$  – масса одной частицы. Далее будем считать  $v_x$  средней скоростью частицы в направлении  $X$ .

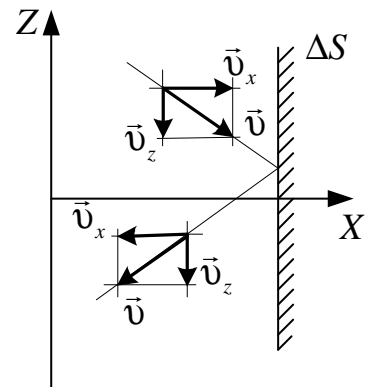


Рис. 1.1

За время  $\Delta t$  площадки  $\Delta S$  могут достигнуть все частицы, которые движутся в сторону  $\Delta S$  и находятся на расстоянии от нее не более  $v_x \Delta t$ , т.е. в объеме  $v_x \Delta t \Delta S$ . Число этих частиц, равно  $\Delta N$ , с учетом возможных направлений движения и условия хаотичности движения ( $v_x = v$ ) можно определить выражением

$$\Delta N = \frac{1}{6} n v \Delta t \Delta S.$$

Множитель  $\frac{1}{6}$  появляется потому, что все направления для движения молекул равнозначны, т.е.  $\frac{1}{3}$  от их общего количества движется по оси  $X$ , но только  $\frac{1}{2}$  от этого числа движется по оси  $X$ , т.е. в сторону стенки, а не от нее.

Эти молекулы передают стенке суммарный импульс

$$\Delta P = 2m_0 v \Delta N = \frac{1}{6} n \Delta S \Delta t v 2m_0 v = \frac{1}{3} n \Delta S \Delta t v^2 m_0.$$

Давление на стенку сосуда (по определению) равно  $p = \frac{F}{\Delta S}$ . Так как

по второму закону Ньютона  $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ ,

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2. \quad (4)$$

Если газ в объеме  $V$  содержит  $N$  молекул, движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , то для характеристики всей совокупности молекул газа вводят среднюю квадратичную скорость

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum v_{x_i}^2}.$$

С учетом этого усреднения уравнение (4) можно записать в виде

$$p = \frac{1}{3} nm_0 \langle v_{кв}^2 \rangle. \quad (5)$$

Это **основное уравнение молекулярно-кинетической теории.**

Если через  $\langle \epsilon \rangle = \frac{m_0 \langle v_{кв}^2 \rangle}{2}$  обозначить среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы, то уравнение (5) можно записать в виде

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon \rangle, \quad (6)$$

показывающем связь давления газа со средней кинетической энергией поступательного движения всех молекул, которые содержатся в единичном объеме газа.

Приравняв правые части равенств (3) и (6), получим  $\frac{2}{3} n \langle \epsilon \rangle = nkT$ , для средней энергии одной частицы идеального газа

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (7)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Из равенства (7) следует, что средние кинетические энергии молекул разных идеальных газов, находящихся при одинаковой температуре, равны, значит, *температура газа есть мера средней кинетической энергии его частиц.* Так как каждая частица идеального газа движется только поступательно, она имеет три равноправных, вследствие хаотичности движения, степени свободы, причем  $v_{кв}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  и  $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$ . Поэтому на каждую степень свободы поступательного движения приходится одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$ .

Анализ уравнения (7) показывает, что при  $T = 0$  К кинетическая энергия поступательного движения частиц идеального газа  $\epsilon = 0$ , следовательно, и  $\langle v_{кв} \rangle = 0$ . Таким образом, при  $T = 0$  К поступательное движение частиц газа прекращается.

Представим теперь формулу (7) в виде

$$\frac{m_0 \langle v_{кв}^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

откуда средняя квадратичная скорость

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{3kT/m_0}.$$

Учитывая, что  $\mu = m_0 N_A$ , получаем еще одно выражение для средне-квадратичной скорости

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Давление идеального газа не зависит от сорта молекул. Если имеем смесь нескольких газов, концентрации которых в сосуде  $n_1, n_2, \dots$  и  $n = \sum n_i$ , то  $p = (n_1 + n_2 + \dots)kT$ . Давление  $p_i = n_i kT$  называется *парциальным*. Тогда суммарное давление в сосуде  $p = \sum p_i$  (**закон Дальтона**).

Ввиду хаотичности (полной беспорядочности) движения молекул и огромного их числа нельзя судить о скорости каждой молекулы в любой момент времени. Можно определить лишь число молекул, скорости которых находятся в определенном интервале скоростей.

Теоретически задачу о распределении молекул идеального газа по скоростям поступательного движения решил Максвелл.

Пусть в сосуде постоянного объема  $V$  находится однородный идеальный газ. Температура во всех частях сосуда одинакова, внешние воздействия на газ отсутствуют. Пусть  $n$  – концентрация молекул идеального газа,  $dn$  – число молекул в единице объема газа, значения скоростей которых находятся в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , направления векторов скорости могут быть любыми. Введем понятие пространства скоростей.

На осях координат в этом пространстве указаны соответствующие проекции скорости  $(v_x, v_y, v_z)$ . Каждая точка пространства характеризует скорость частиц с определенными составляющими (рис. 1.2).

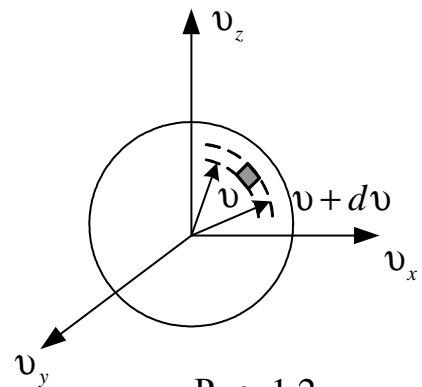


Рис. 1.2

Если ограничить вектор скорости молекулы только условием, чтобы его числовое значение находилось в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , то

на рис. 1.2 эти скорости будут изображены векторами, имеющими всевозможные направления, длина которых такова, что они оканчиваются внутри шарового слоя радиусом  $v$  и толщиной  $dv$ .

Обозначим концентрацию молекул в этом пространстве скоростей  $n_v$ . Тогда число молекул  $dn_v$  (со скоростями в интервале от  $v$  до  $v + dv$ ) можно определить как

$$dn = n_v dV,$$

где  $dV = 4\pi v^2 dv$ ;  $n_v$  – концентрация частиц со скоростями от  $v$  до  $v + dv$  в объеме  $dV$  пространства скоростей, которая характеризует распределение концентрации частиц в пространстве скоростей.

Значение  $n_v$ , как показал Максвелл, связано с концентрацией частиц в объеме газа  $n$  соотношением

$$n_v = n \left[ \frac{m_0}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right).$$

Поэтому концентрация частиц со скоростями в интервале от  $v$  до  $v + dv$  в объеме газа

$$dn_v = n \left[ \frac{m_0}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv, \quad (8)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура;  $m_0$  – масса одной молекулы,  $n$  – концентрация газа.

Разделив обе части соотношения (8) на  $ndv$ , получим

$$f(v) = \frac{dn}{ndv} = 4\pi \left[ \frac{m_0}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) v^2. \quad (9)$$

Функция  $f(v)$  называется **функцией Максвелла** для распределения молекул по скоростям в объеме газа.

Функция распределения молекул по скоростям дает относительное число частиц, скорости которых заключены в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . Эта функция для каждой температуры газа имеет максимум при некоторой скорости  $v_e$ , которая называется *наиболее вероятной скоростью движения* молекул. Можно показать, что

$$v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

График функции распределения Максвелла при некоторой температуре показан на рис. 1.3. Доля молекул газа  $dn/n$ , скорости которых заключены в бесконечно малом интервале от  $v$  до  $v+dv$ , численно равна площади заштрихованного прямоугольника. Вся площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, должна быть, очевидно, принята равной единице, так как она численно равна доле молекул, скорости которых имеют все возможные значения от 0 до  $\infty$ , т.е. эта доля равна единице, потому что содержит все частицы.

При достаточно большой концентрации молекул и постоянной температуре распределение Максвелла не изменяется с течением времени. Это означает, что при хаотическом тепловом движении устанавливается динамическое равновесие. Число молекул, теряющих данную скорость при столкновениях, равно числу молекул, приобретающих эту скорость.

Таким образом, при хаотическом движении частиц распределение Максвелла может характеризовать температуру газа, соответствующую данному распределению, и наоборот, температура газа характеризует распределение частиц по скоростям. При нагревании газа доля молекул, обладающих малыми скоростями, уменьшается, а доля молекул с большими скоростями возрастает, увеличивается и наиболее вероятная скорость (рис. 1.4.).

Распределение молекул по скоростям позволяет определить среднюю арифметическую скорость молекул газа

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

Различие значений среднеквадратичной и среднеарифметической скоростей связано со способом их определения.

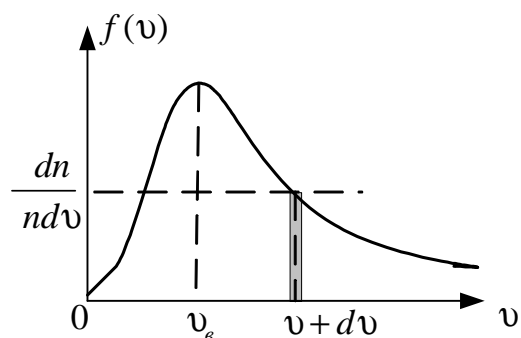


Рис. 1.3

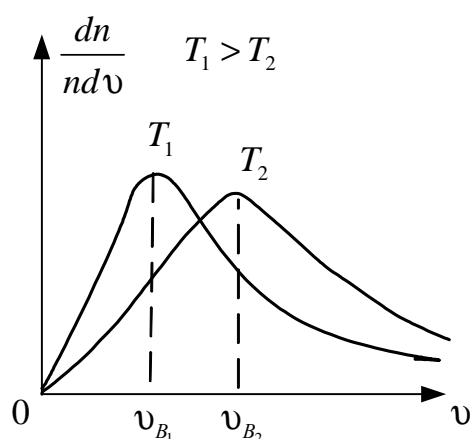


Рис. 1.4

Сравните

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i^2)} \quad \text{и} \quad \langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i,$$

где  $v_i$  – скорость  $i$ -ой частицы из всего множества  $N$  частиц.

Если правую часть равенства умножить и разделить на  $m_0$  (массу частиц газа), получим

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{Nm_0} \sum_{i=1}^N (m_0 v_i^2)} \quad \text{и} \quad \langle v \rangle = \frac{1}{Nm_0} \sum_{i=1}^N (m_0 v_i).$$

Видно, что  $\langle v_{кв} \rangle$  можно определить через кинетическую энергию поступательного движения частиц газа, а  $\langle v \rangle$  – через модули импульсов, т.е. через относительные скорости частиц газа.

Таким образом, в молекулярно-кинетической теории фигурируют три скорости, характеризующие усредненное движение всей совокупности молекул:

$$\begin{aligned} \langle v_{кв} \rangle &= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1,73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}; \\ \langle v \rangle &\approx 1,6 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}; \\ v_{г} &\approx 1,41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Средняя квадратичная скорость характеризует среднюю энергию хаотического поступательного движения молекул и связана с макроскопическими параметрами  $P_p$  и  $T$ .

Наиболее вероятная скорость  $v_{г}$  используется для характеристики распределения частиц по скоростям. Средняя арифметическая скорость, как относительная, определяет длину свободного пробега молекул и используется при изучении явления переноса и т.д.

Если в выражение для функции Максвелла (9) вместо скорости ввести кинетическую энергию молекул  $\varepsilon = \frac{1}{2} m_0 v^2$ , получим формулу распределения молекул по кинетическим энергиям:

$$\frac{dn}{d\varepsilon n} = \frac{2}{\pi^{1/2} (kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \sqrt{\varepsilon}.$$

Функция распределения  $f(\epsilon) = \frac{dn}{nd\epsilon}$  дает относительное число частиц, энергии которых заключены в узком интервале энергий около некоторого значения.

При выводе закона распределения Максвелла предполагалось, что молекулы равномерно распределены по всему объему сосуда. Это справедливо, если объем сосуда небольшой.

Для больших объемов равномерность распределения молекул по объему нарушается из-за действия силы тяжести. Рассмотрим молекулы газа, находящиеся в поле тяготения Земли. Установим зависимость давления атмосферы от высоты над поверхностью Земли. Предположим, что на поверхности Земли ( $h = 0$ ) давление атмосферы  $p_0$ , а на высоте  $h$  – давление  $p$ . При увеличении высоты на  $dh$  давление уменьшится на  $dp$ :

$$dp = -\rho g dh,$$

где  $\rho$  – плотность воздуха на данной высоте;  $\rho = m_0 n$ , где  $m_0$  – масса молекулы;  $n$  – концентрация молекул.

Используя соотношение  $p = nkT$ , получаем

$$\rho = \frac{m_0 p}{kT},$$

тогда

$$dp = -\frac{m_0 g}{kT} p dh. \quad (11)$$

Считая, что температура ( $T$ ) и ускорение свободного падения ( $g$ ) не зависят от высоты  $h$ , в уравнении (11) разделим переменные и проинтегрируем

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} \int_0^h dh; \quad \ln p \Big|_{p_0}^p = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{m_0 g h}{kT},$$

откуда

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}. \quad (12)$$

Выражение (12) является *барометрической формулой*, которая показывает зависимость давления воздуха от высоты над поверхностью Земли.

Учитывая, что концентрация молекул воздуха в атмосфере пропорциональна давлению, формулу (12) можно записать в виде:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}.$$

Так как потенциальная энергия молекул в поле сил тяжести зависит от высоты  $h$  и определяется по формуле  $\Pi = m_0 gh$ , то

$$n = n_0 e^{-\frac{\Pi(h)}{kT}}. \quad (13)$$

Выражение (13) является распределением (законом) Больцмана, характеризующим распределение участвующих в тепловом движении молекул во внешнем потенциальном поле, в частности, в поле сил тяжести.

Закон Больцмана справедлив для любых частиц, находящихся в потенциальном поле сил. Он выражает условие равновесия между тепловым движением, стремящимся к максимальному рассеянию частиц, и действием внешних сил, например, сил тяжести, стремящихся к максимальному уплотнению частиц вблизи земной поверхности.

При хаотическом движении частиц газа все направления скоростей равновероятны, поэтому нельзя отдать предпочтение какому-либо одному направлению. Следовательно, энергии поступательного движения частиц газа в направлениях  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  можно считать равными. Если за *число степеней свободы* системы принять минимально необходимое количество независимых величин, с помощью которых может быть задано состояние системы (энергия), то для поступательного движения одной частицы газа их может быть три:  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  (рис. 1.5). Поскольку

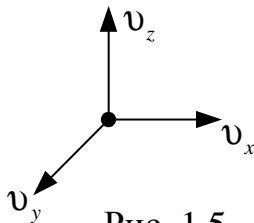


Рис. 1.5

энергии поступательного движения одной частицы газа их может быть три:  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  (рис. 1.5). Поскольку

$$\langle \varepsilon \rangle = \left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT, \text{ на одну степень свободы приходится}$$

средняя энергия поступательного движения  $\frac{1}{2} kT$ . Если система состоит из  $N$  несвязанных частиц, то количество степеней свободы равно  $3N$ ,

а полная энергия поступательного движения  $-\frac{3}{2} NkT$ .



Частицей газа может быть молекула, состоящая из нескольких атомов. При этом в дополнение к поступательному движению для характеристики состояния каждой молекулы необходимо использовать и другие виды механического движения: вращательное и колебательное (рис. 1.6).

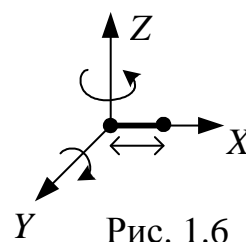


Рис. 1.6

Эти виды движения также определяют энергию частицы. Энергия каждого из видов при столкновении частиц может переходить в энергию других видов. Таким образом, устанавливается равновесие между средними значениями всех видов механической энергии частиц газа по степеням свободы. Это обстоятельство отражается в законе статистической физики *о равномерном распределении энергии по степеням свободы*: на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая средняя энергия, равная  $\frac{1}{2}kT$ .

Если молекула двухатомная с жесткой связью, то колебание атомов относительно друг друга невозможно, и в дополнение к поступательным степеням свободы появляются вращательные. Так как вращение происходит вокруг центра масс и атомы движутся по сферическим орбитам, то их вращательное движение в силу симметрии определяется двумя параметрами, причем каждое из направлений вращения равноправно. Поэтому двухатомная молекула с жесткой связью (например,  $O_2$ ,  $N_2$ ) имеет 5 степеней свободы (3 поступательные и 2 вращательные) и среднюю энергию  $\frac{5}{2}kT$ .

Если связь атомов нежесткая, то атомы могут колебаться вдоль прямой, соединяющей их центры. Число степеней свободы возрастает. При этом возрастает и полная энергия, которой может обладать частица. Следует учесть, что колеблющийся атом обладает кинетической и потенциальной энергией. Если считать, что колебания в различных молекулах происходят несогласованно, то можно считать, что в любой момент времени одна половина общей энергии колебаний кинетическая, а другая потенциальная. Отсюда следует, что, поставив в соответствие кинетической энергии колебательного движения среднюю энергию  $\frac{1}{2}kT$ , мы должны поставить в соответствие и среднему значению потенциальной энергии колебательного

движения  $\frac{1}{2}kT$ . Таким образом, на одну степень свободы колебательного движения приходится удвоенная по сравнению с другими видами движения средняя энергия –  $kT$ .

В общем случае для описания движения молекулы, состоящей из  $N$  атомов (для этого необходимо знать в любой момент времени по 3 координаты для каждого атома), необходимо задать  $3N$  координат. Однако, если в молекуле присутствуют жесткие связи, то положение одних атомов однозначно задает положение других, что позволяет уменьшить требуемое количество координат до  $3N - n$ , где  $n$  – число жестких связей в молекуле. Величина  $i = 3N - n$  определяет общее количество степеней свободы молекулы, состоящей из  $N$  атомов с  $n$  жесткими связями. Так, для двухатомной молекулы ( $N = 2$ ) имеется одна связь ( $n = 1$ ) и количество степеней свободы  $i = 5$ , а поскольку число поступательных степеней свободы ( $i_{пост}$ ) всегда равно 3, то количество вращательных степеней свободы ( $i_{вр}$ ) равно 2. Для трехатомной молекулы с двумя связями ( $H_2O$ ) имеем общее число степеней свободы 6, из них 3 поступательные и 3 вращательные, при условии, что колебательные степени свободы не возбуждаются (жесткие связи). Поэтому в случае, когда связи нежесткие, число колебательных степеней свободы ( $i_{кол}$ ) можно определить как  $3N - 6$  для трех- и более атомных молекул, если атомы в них не расположены вдоль одной прямой. В противном случае вращательных степеней свободы будет только две, а колебательных  $3N - 5$ . С таким случаем мы имели дело при рассмотрении двухатомной молекулы.

В общем случае средняя энергия многоатомной молекулы равна

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где  $i$  – сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы  $i = i_{пост} + i_{вращ} + 2(n - 1)_{кол}$ , где  $n$  – число связей атомов в молекуле.

Внутренняя энергия газа, учитывающая все виды движения всех молекул газа, может быть найдена согласно выражению

$$U = \nu N_A \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\nu RT.$$

При понижении температуры до 0 К прекращается поступательное, вращательное и колебательное движение частиц газа вследствие непрерывных взаимопревращений этих видов энергии в процессе столкновения частиц газа. Однако не следует думать, что при абсолютном нуле температуры прекращается всякое движение частиц вещества и полная внутренняя энергия становится равной нулю, так как даже в этих условиях сохраняется движение электронов в атомах и нуклонов (протонов и нейтронов) в их ядрах. Таким образом, абсолютный нуль температуры означает такое состояние тела, при котором невозможно уменьшение его внутренней энергии путем передачи ее окружающим телам без атомных и ядерных превращений. Следовательно, при абсолютном нуле температуры вещество, сохраняя свои свойства, находится в состоянии с *наименьшей возможной энергией*.

В качестве примера применения распределения Максвелла к решению технических задач рассмотрим задачу о потоке частиц газа на стенку сосуда, т.е. согласно определению потока – о числе частиц, падающих на единицу площади стенки в единицу времени, и о средней энергии поступательного движения частиц, контактирующих со стенкой (рис. 1.7).

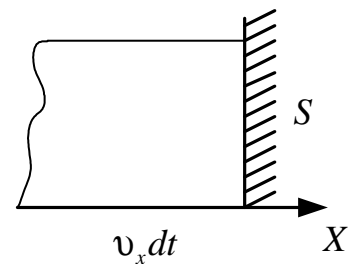


Рис. 1.7

Поток частиц на единичную площадку  $S$  можно записать в виде

$$d\nu_{v_x} = dn_{v_x} v_x, \quad (14)$$

где  $n_{v_x}$  – концентрация частиц, обладающих скоростями  $v_x$  в диапазоне от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ .

Площадки  $S$  достигнут те частицы, обладающие скоростями  $v_x$ , которые заключены в объеме  $Sv_x dt$ . Воспользуемся распределением Максвелла по скоростям для движения молекулы вдоль одного из трех возможных направлений (в отличие от трехмерного распределения Максвелла (см. формулу (9))

$$dn_{v_x} = n \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} dv_x. \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), получим выражение для потока частиц на стенку в виде

$$dv_{v_x} = n \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} v_x dv_x. \quad (16)$$

Тогда поток всех частиц на стенку ( $S=1$ ,  $t=1$ ) можно найти интегрированием (16) в пределах от 0 до  $\infty$

$$\begin{aligned} v_S &= n \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} v_x dv_x = \frac{1}{2} n \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} d v_x^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{2kT}{m_0} \right) n \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = -n \left( \frac{kT}{2\pi m_0} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} \Bigg|_0^{\infty} = n \left( \frac{kT}{2\pi m_0} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как  $\langle v_{cp} \rangle = \left( \frac{8kT}{\pi m_0} \right)^{1/2}$  (средняя скорость движения частиц относительно стенки),

$$v_S = \frac{n \langle v_{cp} \rangle}{4}. \quad (17)$$

Как видно, в выражении (17) используется среднеарифметическая скорость, поскольку поток на стенку обусловлен движением частиц относительно стенки, т.е. скоростью относительного движения.

Определим среднюю энергию частиц в потоке, падающем на стенку (площадку  $S$ ). Для этого просуммируем кинетическую энергию всех частиц, падающих на стенку за единицу времени (энергия потока), и разделим на число частиц (поток). Это соответствует интегралу

$$\langle \epsilon_{v_x} \rangle = \frac{1}{v_S} \int_0^{\infty} \frac{m_0 v_x^2}{2} dv_{v_x}, \quad (18)$$

где  $dv_{v_x}$  – число частиц в потоке  $v_S$ , обладающих энергией  $\frac{m_0 v_x^2}{2}$ .

Подставив выражения (16) и (17) в (18), получаем

$$\langle \epsilon_{v_x} \rangle = \frac{m_0^2}{2kT} \int v_x^3 e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}} dv_x;$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = -\frac{ax^2 + 1}{2a^2} e^{-ax^2},$$

где  $a = \frac{m_0}{2kT}$ ,  $x = v_x$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{v_x} \rangle &= \frac{m_0^2}{2kT} \left( -\frac{av_x^2 + 1}{2a^2} e^{-av_x^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{m_0^2}{2kT} \left( -\frac{v_x^2}{2a} - \frac{1}{2a^2} \right) e^{-av_x^2} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{m_0 v_x^2}{2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2}} \Big|_0^{\infty} - kT e^{-av_x^2} \Big|_0^{\infty} = 0 + kT = kT; \\ \langle \epsilon_{v_x} \rangle &= kT. \end{aligned} \quad (19)$$

Итак, средняя энергия частиц, падающих на стенку в потоке, обусловленная компонентой скорости  $v_x$ , равна  $kT$ . Для определения полной энергии частиц в потоке необходимо  $\langle \epsilon_{v_x} \rangle$  сложить с энергией  $\langle \epsilon_{v_y} \rangle$  и  $\langle \epsilon_{v_z} \rangle$ . Средняя энергия, приходящаяся на каждую компоненту энергии, обусловленной скоростями  $v_y$  и  $v_z$  (параллельными стенке  $S$ ), соответствует  $kT/2$ . Следовательно, полная средняя энергия частиц в потоке, обусловленная поступательным движением частиц,

$$\langle \epsilon_v \rangle = \langle \epsilon_{v_x} \rangle + \langle \epsilon_{v_y} \rangle + \langle \epsilon_{v_z} \rangle = kT + kT/2 + kT/2 = 2kT. \quad (20)$$

Средняя энергия частиц, поступающих на стенку (в потоке) ( $2kT$ ), оказывается больше, чем средняя энергия частиц в объеме, которая равна  $3/2 kT$ . Это обусловлено тем, что число частиц, падающих на стенку, пропорционально скорости, поэтому быстрые частицы смогут попасть на стенку из большего объема газа, т.е. их доля в потоке оказывается больше, чем в объеме. Это «обогащение» потока быстрыми частицами и приводит к увеличению средней энергии частиц в потоке на стенку.

## 1.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Законы состояния идеального газа</b></p> <p>Основные понятия. Давление газа и уравнение Менделеева – Клапейрона.</p> <p>Газовые законы. Внутренняя энергия идеального газа. Степени свободы молекул идеального газа</p>	лекция + самост.	[5], пп. 5.2 – 5.4 [6], п. 3 [7], пп. 8.1 – 8.5 [10], пп. 41 – 43 [13], п. 6.11	<p>Вопросы для самоконтроля</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Что выражает макроскопический параметр «температура»?</li> <li>2. Запишите основное уравнение МКТ.</li> <li>3. Сформулируйте теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы.</li> <li>4. Какая энергия приходится на одну колебательную степень свободы идеального двухатомного газа?</li> <li>5. Какие газовые явления определяют охлаждение газированной жидкости при испарении углекислого газа из нее?</li> </ol>
<p><b>Распределение Максвелла – Больцмана</b></p> <p>Распределение Максвелла.</p> <p>Газ в потенциальном поле. Распределение Больцмана.</p> <p>Поток частиц газа на стенку.</p> <p>Средняя энергия частиц газа в потоке на стенку</p>	лекция	[6], пп. 4 – 7 [7], пп. 8.6 – 8.8 [10], пп. 44 – 47 [13], п. 6.15	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Что выражает распределение Максвелла?</li> <li>2. Что выражает распределение Максвелла – Больцмана?</li> <li>3. От чего зависят средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости молекул, что они выражают? Приведите примеры.</li> <li>4. От чего зависит распределение частиц в силовом поле?</li> <li>5. Почему полная энергия частиц в потоке на стенке отличается от полной энергии частиц в объеме?</li> <li>6. Как определить среднюю энергию частиц в потоке и в объеме?</li> <li>7. Что выражает наиболее вероятная скорость частиц, как ее определить и в каких случаях можно использовать?</li> </ol>

### 1.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Определение макро- и микропараметров идеального газа	<p>Газовые законы и основное уравнение МКТ</p> <p>Внутренняя энергия и степени свободы</p>	<p>При решении задач на расчет параметров состояния газа рекомендуется следующая последовательность:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) выяснить, изменяется ли состояние газа. Если в задаче задано одно состояние газа, то пользуются уравнением Менделеева – Клапейрона, которое связывает между собой пять физических величин, характеризующих состояние газа (<math>p</math>, <math>V</math>, <math>T</math>, <math>m</math>, <math>\mu</math>), и позволяет по заданным четырем найти пятую величину. Отношение <math>\nu = m/\mu</math> представляет собой число молей газа, <math>\rho = m/V</math> есть плотность газа, <math>V' = V/\nu</math> – удельный объем газа;</li> <li>2) выяснить, изменяется ли масса газа. Если масса газа изменяется или задана в условии, то для каждого состояния нужно записать уравнение Менделеева – Клапейрона. Если масса газа не изменяется, то нужно использовать уравнение состояния идеального газа или один из законов идеального газа;</li> <li>3) представить в развернутом виде параметры начального и конечного состояний газа;</li> <li>4) записать дополнительные уравнения, связывающие искомые величины или параметры состояния, используя условие задачи;</li> <li>5) решить полученную систему уравнений.</li> </ol> <p>Надо учитывать, что в уравнение Менделеева – Клапейрона входит число молей газа, и поэтому поведение газа определяется не массой, а числом молей. Это особенно важно, если приходится рассматривать смесь газов.</p> <p>Если в условии задачи даны показания технических манометров, то они отображают не полное давление газа в баллоне, а лишь давление, избыточное над атмосферным давлением <math>p_{атм}</math>. Поэтому полное давление газа в баллоне равно показанию манометра, увеличенному на <math>p_{атм}</math>.</p>	<p>[2], №№ 5.8 – 5.45 [12], №№ 8.16 – 8.27, 9.12 – 9.23 6.1 – 6.6</p> <p>[2], №№ 5.47 – 5.63 [11], №№ 2.46 – 2.58 [1], №№ 7.1 – 7.2</p>

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Распределение Максвелла – Больцмана	<p>Определение параметров газа по распределению Больцмана.</p> <p>Определение доли частиц в заданном диапазоне скоростей и энергий.</p> <p>Определение равновесных концентрации и температуры в потоке и объеме идеального газа</p>	<p>В кинетической теории используются различные типы скоростей молекул: средняя квадратичная <math>\langle v_{ке} \rangle</math>, средняя арифметическая <math>\langle v \rangle</math> и наиболее вероятная <math>v_0</math>. Средней квадратичной скоростью <math>\langle v_{ке} \rangle</math> пользуются в тех случаях, когда необходимо рассчитать какую-либо физическую величину, пропорциональную квадрату скорости, например, кинетическую энергию поступательного движения молекул газа, давление газа.</p> <p>Средняя арифметическая скорость <math>\langle v \rangle</math> позволяет определять средние значения таких физических величин, характеризующих свойства газа, в формулу которых скорость входит в первой степени, например, среднее число столкновений молекулы в единицу времени, среднее время свободного пробега, средний импульс молекул.</p> <p>Наиболее вероятной скоростью <math>v_0</math> пользуются в задачах, связанных с применением закона распределения молекул по скоростям.</p> <p>При определении доли частиц, имеющих скорости или энергии в заданном диапазоне, можно избежать интегрирования, если ширина этого диапазона очень мала. Тогда интегрирование заменяется суммированием, а дифференциалы можно заменить конечными разностями и интегрирование не требуется.</p> <p>При определении средних и наиболее вероятных величин с использованием распределения Максвелла все интегралы сводятся к табличным, что значительно упрощает математические расчеты</p>	<p>[2],  №№ 5.106 – 5.108, 5.110, 5.111  [12],  №№ 10.1 – 10.34  [11],  №№ 2.59 – 2.83  [2],  №№ 5.92 – 5.104  [12],  №№ 10.15 – 10.30  [11],  №№ 2.59 – 2.83  [2],  №№ 5.108, 5.109  [12],  №№ 10.32 – 10.55</p>



## 1.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** Сколько ходов должен сделать поршневой насос с объемом рабочего цилиндра  $V_0$ , чтобы откачать воздух из баллона емкостью  $V$  от давления  $p_0$  до давления  $p$ ? Изменением температуры пренебречь. (Уровень 4).

**Решение.** Если в начале первого рабочего хода воздух в баллоне занимал объем  $V$  при давлении  $p_0$ , то к концу первого хода та же масса воздуха займет объем  $(V + V_0)$  при давлении  $p_1$ . Так как температура воздуха не меняется, то по закону Бойля – Мариотта получим

$$p_0 V = p_1 (V + V_0).$$

Следовательно,

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + V_0}.$$

В начале второго хода поршня объем и давление воздуха в баллоне равны соответственно  $V$  и  $p_1$ , а в конце хода –  $(V + V_0)$  и  $p_2$ . Поэтому

$$p_1 V = p_2 (V + V_0),$$

и с учетом выражения для давления  $p_1$

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_0} = p_0 \left( \frac{V}{V + V_0} \right)^2.$$

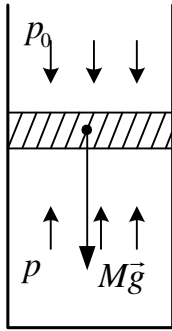
Продолжая аналогичные рассуждения, легко получить, что к концу  $n$ -го рабочего хода давление в баллоне станет равным

$$p_n = p_0 \left( \frac{V}{V + V_0} \right)^n.$$

Следовательно, для достижения давления  $p_n = p$  насос должен сделать  $n = \frac{\lg(p/p_0)}{\lg(V/(V+V_0))} = \frac{\lg(p_0/p)}{\lg((V+V_0)/V)}$  ходов.

Ответ:  $n = \frac{\lg(p_0/p)}{\lg((V+V_0)/V)}.$

**Пример 2.** В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится  $m = 1$  г азота. Площадь поршня  $S = 10$  см<sup>2</sup>, масса  $M = 1$  кг. Азот нагревают на  $\Delta T = 10$  К. Насколько при этом поднимется поршень? Давление над поршнем нормальное. Молярная масса азота  $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Трения нет. (Уровень 3).



**Решение.** В положении равновесия на поршень действуют три силы: сила тяжести, действующая на поршень ( $M\vec{g}$ ), и силы давления  $F_0 = p_0S$  над поршнем и  $F = pS$  под поршнем (где  $p_0$  и  $p$  – внешнее давление и давление под поршнем соответственно), направленные так, как показано на рисунке. При этом указанные силы уравновешивают друг друга:

$$Mg + F_0 = F, \text{ или } Mg + p_0S = pS.$$

Следовательно, давление под поршнем

$$p = \frac{Mg}{S} + p_0 \quad (1)$$

зависит только от массы, сечения поршня (сосуда) и давления над ним, т.е. не зависит от параметров газа под поршнем. Это означает, что при нагревании газа, заключенного под незакрепленным поршнем, его давление будет постоянным. В этом случае справедлив закон Гей – Люссака:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \text{ или } \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

где  $V_1 = Sh_1$ ,  $V_2 = Sh_2$  – объемы, занимаемые азотом до и после нагревания.

Следовательно, при нагревании газа его объем увеличится и поршень поднимется на высоту

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{V_1}{S} \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = \frac{V_1}{S} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{V_1}{ST_1} (T_2 - T_1) = \frac{V_1}{ST_1} \Delta T. \quad (2)$$

Записав уравнение состояния азота при температуре  $T_1$

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1,$$

с учетом (1)

$$\left( \frac{Mg}{S} + p_0 \right) V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$$

или

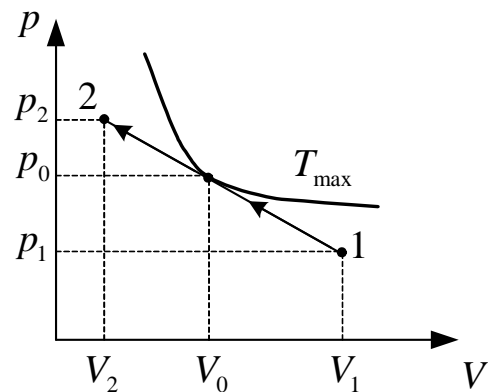
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{mR}{\mu \left( \frac{Mg}{S} + p_0 \right)},$$

тогда из (2) получим

$$\Delta h = \frac{mR\Delta T}{\mu\left(\frac{Mg}{S} + p_0\right)S} = \frac{mR\Delta T}{\mu(Mg + p_0S)} \approx 2,7 \text{ см.}$$

Ответ:  $\Delta h = \frac{mR\Delta T}{\mu(Mg + p_0S)} \approx 2,7 \text{ см.}$

**Пример 3.** Гелий массой  $m = 20$  г бесконечно медленно переводят из состояния 1, которому соответствует объем  $V_1 = 32$  л и давление  $p_1 = 4,1 \cdot 10^5$  Па, в состояние 2, где  $V_2 = 9$  л и  $p_2 = 15,5 \cdot 10^5$  Па. Какой наибольшей температуры достигает газ в этом процессе, если на диаграмме  $p - V$  зависимость давления от объема изобразится прямой линией? Молярная масса гелия  $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. (**Уровень 5**).



**Решение.** Каждой точке на графике зависимости давления газа от занимаемого им объема (см. рисунок) соответствует определенное значение температуры. Графически состояние, в котором температура гелия максимальна, можно определить, построив семейство изотерм. При этом изотерма, соответствующая наибольшей температуре (очевидно, что прямая зависимости давления от объема должна быть касательной к ней), определит значения давления  $p_0$  и объема  $V_0$ , при которых температура максимальна.

Аналитически значения  $p_0$  и  $V_0$  можно найти, исследовав на экстремум зависимость температуры от давления или объема.

Поскольку давление зависит от объема линейно,

$$p = aV + b, \tag{1}$$

то с учетом (1) уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

можно записать в виде

$$T = \frac{\mu}{mR}(aV + b)V. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\mu}{mR}(2aV + b); \quad 2aV_0 + b = 0; \quad V_0 = -\frac{b}{2a}. \quad (3)$$

Подставив значение  $V_0$  в (1), получим

$$p_0 = \frac{1}{2}b.$$

Так как зависимость  $T(V)$  имеет один экстремум, то найденные значения объема  $V_0$  и давления  $p_0$  соответствуют состоянию газа с максимальной температурой

$$T_{\max} = \frac{\mu}{mR}(aV_0 + b)V_0 = -\frac{\mu}{mR} \frac{b^2}{4a}.$$

Используя уравнение процесса (1) в начальном и конечном состояниях

$$p_1 = aV_1 + b, \quad p_2 = aV_2 + b,$$

найдем значения коэффициентов  $a$  и  $b$ :

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2} = -5 \cdot 10^7 \text{ Па/м}^3; \quad b = \frac{p_2V_1 - p_1V_2}{V_1 - V_2} = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Следовательно,

$$T_{\max} = \frac{\mu(p_2V_1 - p_1V_2)^2}{4mR(V_1 - V_2)(p_2 - p_1)} \approx 481 \text{ К}.$$

$$\text{Ответ: } T_{\max} = \frac{\mu(p_2V_1 - p_1V_2)^2}{4mR(V_1 - V_2)(p_2 - p_1)} \approx 481 \text{ К}.$$

**Пример 4.** В цилиндр с газом вдвигают поршень со скоростью  $v_1$ . Найти, какую долю кинетической энергии приобретает молекула в результате столкновения с поршнем, если скорость молекулы вдоль стен цилиндра равна  $v_2$  и перпендикулярна к основанию поршня. Удар абсолютно упругий. (**Уровень б**).

**Решение.** Обозначим  $\Delta\varepsilon$  изменение кинетической энергии молекулы вследствие удара,  $\varepsilon_1$  – энергию молекулы перед ударом. Найти отношение  $\Delta\varepsilon/\varepsilon_1$ .

При сближении молекулы с поршнем ее скорость относительно поршня равна  $v_1 + v_2$ . После абсолютно упругого удара молекула отскакивает в обратную сторону от поршня с такой же скоростью, т.е. вдоль стенок цилиндра скорость молекулы после удара станет на  $v_1$  больше, чем относительно поршня. В результате соударения поршень сообщает молекуле дополнительный импульс  $2m_0v_1$  вдоль стенок. Поэтому скорость молекулы относительно стенок станет равной  $2v_1 + v_2$ , а ее кинетическая энергия

$$\varepsilon_2 = \frac{m_0(2v_1 + v_2)^2}{2},$$

тогда как до удара она была  $\varepsilon_1 = \frac{m_0v_2^2}{2}$ .

Изменение кинетической энергии молекулы

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 &= \frac{m_0(2v_1 + v_2)^2}{2} - \frac{m_0v_2^2}{2} = \\ &= \frac{m_0}{2}(v_2^2 + 4v_1v_2 + 4v_1^2 - v_2^2) = 2m_0v_1(v_2 + v_1). \end{aligned}$$

Относительное изменение кинетической энергии

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{2m_0v_1(v_2 + v_1)}{\frac{m_0v_2^2}{2}} = 4 \frac{v_1(v_2 + v_1)}{v_2^2}$$

или

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_1} = 4 \frac{v_1}{v_2} \left( 1 + \frac{v_1}{v_2} \right).$$

Если скорость поршня  $v_1$  во много раз меньше скорости молекулы  $v_2$ , то слагаемым  $v_1/v_2$  в скобках можно пренебречь из-за его малости по сравнению с единицей. Тогда ответ получим в виде

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_1} = 4 \frac{v_1}{v_2}.$$

*Ответ:*  $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_1} = 4 \frac{v_1}{v_2} \left( 1 + \frac{v_1}{v_2} \right).$

**Пример 5.** В баллоне находится газ при температуре  $t_1^\circ = 17^\circ \text{C}$ . Во сколько раз уменьшится давление этого газа, если 20 % его выйдет из баллона, а температура при этом понизится на  $\Delta t^\circ = 10^\circ \text{C}$ ? (**Уровень 3**).

**Решение.** Введем обозначения:  $\Delta m$  – масса газа, покинувшего баллон;  $m_1$  – первоначальная масса газа;  $\Delta m/m_1 = 20\% = 0,2$  – относительное изменение массы газа в баллоне;  $p_1$  – давление в баллоне до выхода из него газа;  $p_2$  – давление после выхода газа. Требуется найти отношение  $p_1/p_2$ .

Очевидно, что объем газа в баллоне не менялся, несмотря на то, что газ его частично покинул, ведь объем газа в баллоне равен объему баллона, а изменялись давление, температура и масса газа. Запишем уравнение состояния газа применительно к начальному и конечному состояниям его в баллоне:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1 \quad \text{и} \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2.$$

Нам надо найти отношение  $p_1/p_2$ , поэтому разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{p_1 V}{p_2 V} = \frac{m_1 R T_1 \mu}{\mu m_2 R T_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}. \quad (1)$$

Нам известно относительное изменение массы газа:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m_1 - m_2}{m_1} = 1 - \frac{m_2}{m_1},$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - \frac{\Delta m}{m_1} \quad \text{и} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta m}{m_1}}. \quad (2)$$

Поскольку температура газа понизилась на  $\Delta t^\circ = \Delta T$ ,

то

$$T_2 = T_1 - \Delta T. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{\left(1 - \frac{\Delta m}{m_1}\right)(T_1 - \Delta T)}.$$

Переведем температуру в шкалу Кельвина (СИ):

$$T_1 = 17^\circ \text{C} = (17 + 273)\text{K} = 290 \text{ K}.$$

Напоминаем, что к  $\Delta t^\circ = 10^\circ \text{C}$  не надо прибавлять 273, потому что разность температур по шкалам Цельсия и Кельвина одинакова:  $\Delta t^\circ = \Delta T \text{ K}$ .

Произведем вычисления: 
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{290}{(1 - 0,2)(290 - 10)} = 1,3.$$

*Ответ:* 
$$\frac{p_1}{p_2} = 1,3.$$

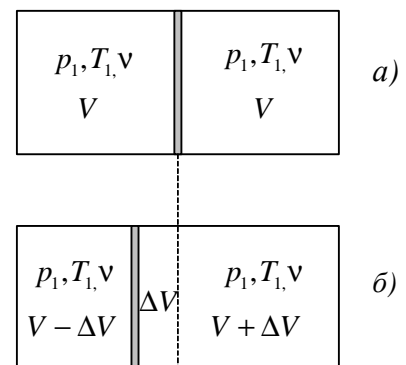
**Пример 6.** Цилиндр разделен на две части подвижной теплоизолирующей перегородкой. При одинаковой температуре по обе стороны перегородки находится одинаковое число молей газа, и при этом перегородка остается в равновесии. Затем справа от перегородки температуру газа повышают в три раза, а слева оставляют без изменения. Во сколько раз изменится давление газа в цилиндре? (**Уровень 5**).

Равновесное состояние перегородки означает равенство давлений в левой и правой частях цилиндра.

Введем обозначения:  $T_1$  – температура газа в цилиндре до нагревания газа и температура газа слева от перегородки после нагревания;  $T_2$  – температура газа справа от перегородки после нагревания;  $p_1$  – первоначальное давление газа в цилиндре;  $p_2$  – давление газа после нагревания. Требуется найти отношение  $p_2/p_1$ .

**Решение.** Для решения задачи воспользуемся уравнением состояния идеального газа. Применим это уравнение к состоянию газа справа от перегородки до и после нагревания, а также к состояниям газа слева от перегородки.

До нагревания перегородка была в равновесии, значит, давление  $p_1$  слева и справа от нее было одинаковым и одинаковой была температура  $T_1$ . Одинаковым было (и осталось) число молей  $\nu$  в обеих частях. Следовательно, согласно уравнению Менделеева – Клапейрона  $pV = \nu RT$  и объем газа  $V$  слева и справа от перегородки до нагревания был одинаковым, т.е. перегородка делила вначале сосуд пополам (см. рисунок, а).



Тогда уравнение состояния применительно к начальному состоянию газа в любой из половинок запишем так:

$$p_1V = \nu RT_1. \quad (1)$$

После нагревания газа справа от перегородки до температуры  $T_2$  давление там повысилось до  $p_2$  и перегородка передвинулась влево, сжав слева газ так, что там давление тоже стало равным  $p_2$ . При этом объем газа справа от перегородки увеличился на  $\Delta V$  и стал равным  $V + \Delta V$ , а слева настолько же уменьшился и стал равным  $V - \Delta V$  (см. рисунок, б). Количество молей в обеих частях сосуда от этого, конечно же, не изменилось. Тогда уравнение Менделеева – Клапейрона применительно к газу слева от передвинувшейся перегородки примет вид

$$p_2(V - \Delta V) = \nu RT_1, \quad (2)$$

а справа

$$p_2(V + \Delta V) = \nu RT_2,$$

где  $T_2 = 3T_1$  согласно условию задачи, поэтому

$$p_2(V + \Delta V) = \nu R \cdot 3T_1. \quad (3)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) надо найти отношение  $p_2/p_1$ , и нам практически неизвестна ни одна величина, входящая в эти уравнения. Сначала избавимся от величины изменения объема  $\Delta V$ , выразив эту величину через объем  $V$ . Для этого в правую часть уравнения (3) подставим вместо  $\nu RT_1$  левую часть уравнения (2). Тогда давление  $p_2$  сократится и мы определим  $\Delta V$  через  $V$ :

$$\begin{aligned} p_2(V + \Delta V) &= 3p_2(V - \Delta V); & V + \Delta V &= 3V - 3\Delta V; \\ 4\Delta V &= 2V & \text{и} & \Delta V = 0,5V. \end{aligned} \quad (4)$$

Если подставить (4) в (2), а затем приравнять левые части полученного уравнения и уравнения (1), ведь правые части  $\nu RT_1$  у них одинаковы, то неизвестный объем  $V$  сократится и мы найдем отношение давлений  $p_2/p_1$ :

$$p_2(V - 0,5V) = \nu RT_1; \quad 0,5p_2V = \nu RT_1; \quad p_1V = 0,5p_2V,$$

откуда  $p_2 = 2p_1$ .

*Ответ:*  $p_2 = 2p_1$ , давление увеличится в 2 раза.



**Пример 7.** Сравнить полное число молекул в атмосферном столбе с основанием в  $1 \text{ см}^2$  с числом молекул в столбе высотой  $1000 \text{ м}$  с тем же основанием. (**Уровень 3**).

**Решение.** Пусть число молекул в единице объема при  $h = 0$  равно  $n_0$ , тогда распределение числа молекул по высоте будет определяться выражением

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Полное число молекул в столбе объемом  $V = SH$  с основанием в  $S = 1 \text{ см}^2$  и заданной высотой  $H$  найдем интегрированием функции  $n(h)$

$$N(H) = \int_0^H n(h) S dh = n_0 \int_0^H e^{-\frac{\mu gh}{RT}} dh = n_0 \frac{RT}{\mu \cdot g} (1 - e^{-\frac{\mu g H}{RT}}),$$

где  $\mu$  – молярная масса воздуха.

Подставив числовые значения высоты, получим

$$N_1(H \rightarrow \infty) = 2,1 \cdot 10^{25} \quad \text{и} \quad N_2(H = 10^3) = 0,25 \cdot 10^{25}.$$

Сравнить величины можно отношением или разностью  $\Delta N$ .

$$\text{Ответ: } \frac{N_1}{N_2} = 8,4 \quad \text{или} \quad \Delta N = 1,85 \cdot 10^{25}.$$

**Пример 8.** На какой высоте находится центр масс вертикального столба воздуха в атмосфере Земли, если температура воздуха  $T$  не зависит от  $h$ ? Считать, что для воздуха имеет место распределение Больцмана. (**Уровень 6**).

**Решение.** Пусть площадь сечения столба  $S$ . Выделим на некоторой высоте  $h$  слой воздуха толщины  $dh$ , его масса  $dm = \rho(h) S dh$ , где  $\rho(h)$  – плотность воздуха на высоте  $h$ . Поскольку  $\rho(h) = m_0 n(h)$ , где  $m_0$  – масса молекулы, а  $n(h)$  – концентрация молекул на высоте  $h$ , решение дифференциального уравнения дает распределение Больцмана:  $n(h) = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}$ .

Из курса механики известно, что центр масс системы частиц с дискретным распределением массы определяется известным соотношением

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (1)$$

Поскольку можно считать, что молекулы распределены в атмосфере непрерывно, то положение центра масс можно определить, перейдя в (1) от суммирования к интегрированию:

$$H_C = \frac{\int_0^{\infty} h dm}{\int_0^{\infty} dm}.$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^{\infty} dm = m_0 n_0 S \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} dh = -\frac{m_0 n_0 S k T}{m_0 g} \left( e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} \right)_0^{\infty} = \frac{n_0 S k T}{g};$$

$$\int_0^{\infty} h dm = \int_0^{\infty} h m_0 n(h) S dh = m_0 n_0 S \int_0^{\infty} h e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} dh = \frac{n_0 S (kT)^2}{m_0 g^2}.$$

Откуда находим:  $H_C = \frac{kT}{mg}.$

Ответ:  $H_C = \frac{kT}{mg}.$

**Пример 9.** Найти наиболее вероятную скорость молекул идеального газа. (Уровень 3).

**Решение.** Предполагая, что идеальный газ находится в термодинамическом равновесии, используем функцию распределения молекул по скоростям

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 = 4\pi \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/2} e^{-av^2} v^2, \quad (1)$$

где  $a = \frac{m_0}{2kT}$ . Производная функции распределения (1) по скорости

$$f'(v) = 4\pi \left( \frac{a}{\pi} \right)^{3/2} (-2av^3 + 2v) e^{-av^2}.$$

Обозначая наиболее вероятную скорость через  $v_g$ , находим ее из уравнения  $f'(v_g) = 0$ , т.е.  $2v_g(-av_g^2 + 1) = 0$ .

Отсюда следует:

$$v_e = \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

Ответ:  $v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$

**Пример 10.** Определить долю молекул водорода, модули скоростей которых при температуре 27 °С лежат в интервале от  $v_2 = 1898$  м/с до  $v_1 = 1903$  м/с. (**Уровень 5**).

**Решение.** Интервал скоростей  $\Delta v = v_2 - v_1 = 5$  м/с достаточно мал по сравнению с самими скоростями. Поэтому  $f(v)$  в этом интервале скоростей можно считать линейной, и для определения искомой доли молекул вместо интегрирования число молекул, обладающих скоростями в этом интервале, можно определить как площадь прямоугольника (под функцией распределения по скоростям) с высотой  $v_{cp}$  для этого интервала и шириной  $\Delta v$ . Среднее значение  $f_{cp}(v)$  получаем, подставляя в  $f(v)$  величину

$$v_{cp} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Тогда

$$\Delta N = N 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v_{cp}^2 \Delta v, \quad (1)$$

и для доли молекул со скоростями в заданном интервале получим

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v_{cp}^2}{2kT}} v_{cp}^2 \Delta v. \quad (2)$$

Подставляя числовые значения в (2), получаем

$$\frac{\Delta N}{N} = 2,45 \cdot 10^{-3} = 0,245 \text{ \%}.$$

Ответ:  $\frac{\Delta N}{N} = 0,245 \text{ \%}.$

**Пример 11.** Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре  $T$ , обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более чем на 5 м/с? Задачу решить для двух значений  $T$ : 1) 400 К; 2) 900 К. (**Уровень 5**).

**Решение.** Поскольку в задаче идет речь о наиболее вероятной скорости, надо считать  $v_{cp} = v_g$  (см. пример 11), а интервал скоростей  $\Delta v = 10$  м/с. Найдем сначала наиболее вероятную скорость при  $T_1 = 400$  К и  $T_2 = 900$  К соответственно.

$$v_{g1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 400}{0,002}} \text{ м/с} = 1,82 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad v_{g2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 900}{0,002}} \text{ м/с} = 2,73 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Теперь вычислим искомые величины, используя уравнение (2), приведенное в примере 11:

$$\frac{\Delta N_1}{N} = 0,0046;$$

$$\frac{\Delta N_2}{N} = 0,003.$$

Таким образом, при увеличении температуры наиболее вероятная скорость молекул увеличивается, а число молекул, скорости которых лежат в одном и том же интервале около наиболее вероятной скорости, уменьшается. На графике функции распределения молекул по скоростям (см. рис. 1.2) с увеличением температуры максимум кривой сдвигается вправо, а величина максимума уменьшается.

*Ответ:*  $\frac{\Delta N_1}{N} = 0,0046; \quad \frac{\Delta N_2}{N} = 0,003.$

**Пример 12.** Какая часть молекул газа имеет скорости, превышающие наиболее вероятную скорость? (**Уровень 5**).

**Решение.** В условии задачи рассматриваются молекулы, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости  $v_g$  до  $v_g + \infty$ , т.е. в бесконечно большом интервале скоростей  $\Delta v$ . Введем функцию распределения Максвелла частиц газа по скоростям величину  $u = v/v_g$ . В результате получим для доли молекул со скоростями в некотором интервале

$$\frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du, \quad (1)$$

где  $u = v/v_g$ .

Найдем число молекул, относительные скорости которых лежат в заданном интервале от  $u_1$  до  $u_2$ , интегрируя правую часть (1) в этих пределах:

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{-u^2} du. \quad (2)$$

Учитывая, что  $u = v/v_B$ , для данной задачи получаем  $u_1 = 1$ ;  $u_2 = \infty$ . Следовательно, искомая часть молекул выразится интегралом

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} u^2 e^{-u^2} du.$$

Воспользуемся очевидным фактом, что скорости всех молекул лежат в интервале от 0 до  $\infty$ . Поэтому, если обозначить через  $\Delta N'$  число молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной, т.е. лежат в интервале от 0

до 1, то можно записать:  $\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N'}{N} = 1$ . Таким образом, вместо того чтобы

искать  $\frac{\Delta N}{N}$ , можно найти  $\frac{\Delta N'}{N}$  по формуле

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 u^2 e^{-u^2} du, \quad (3)$$

а затем вычислить  $\frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{\Delta N'}{N}$ .

Так как интеграл (3) все же в конечном виде не берется, воспользуемся методом приближенного интегрирования. Для этого разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$u^2 e^{-u^2} = u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \frac{u^{10}}{24} - \dots$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\Delta N'}{N} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} + \frac{1}{264} - \dots \right).$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами разложения, найдем с погрешностью, не превышающей 0,01:  $\frac{\Delta N'}{N} = 0,43$ .

$$\text{Отсюда получим ответ: } \frac{\Delta N}{N} = 1 - 0,43 = 0,57.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta N}{N} = 0,57.$$

**Пример 13.** Найти наиболее вероятную энергию молекул идеального газа. (Уровень 5).

**Решение.** Определим максимум функции распределения молекул идеального газа по энергиям:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/(kT)} \varepsilon^{1/2}.$$

Производная этой функции по  $\varepsilon$

$$f'(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/(kT)} \left( -\frac{\varepsilon^{1/2}}{kT} + \frac{1}{2\varepsilon^{1/2}} \right).$$

Искомую энергию найдем из уравнения  $f'(\varepsilon) = 0$ , т.е.

$$-\frac{\varepsilon^{1/2}}{kT} + \frac{1}{2\varepsilon^{1/2}} = 0.$$

Откуда следует:  $\varepsilon_B = \frac{1}{2}kT$ . Отметим, что  $\varepsilon_B \neq \varepsilon(v_e)$  (см. пример 10).

*Ответ:*  $\varepsilon_B = \frac{1}{2}kT$ .

### 1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. В сосуде вместимостью 0,5 л при температуре 290 К находится некоторый газ. Насколько понизится давление газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет  $N = 10^{19}$  молекул? [ $\Delta p = \frac{NkT}{V} = 133$  Па ; **уровень 1**].
2. Найти молярную массу смеси, содержащей 25 г кислорода и 75 г азота.  
[ $\mu_{см} = \frac{(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}{m_1\mu_2 + m_2\mu_1} = 28,9$  кг/моль; **уровень 2**].
3. В цилиндр длиной  $l = 1,6$  м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении  $p_0$ , начали медленно вдвигать поршень площадью  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Определить силу  $F$ , которая будет действовать на поршень, если его остановить на расстоянии  $l_1 = 10$  см от дна цилиндра.  
[ $F = \left(\frac{l}{h}\right)pS = 32,3$  кН; **уровень 3**].
4. В баллоне содержится газ при температуре  $t_1 = 100$  °С. До какой температуры  $t_2$  нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза? [ $t_2 = \frac{p_2}{p_1}(t_1 + T_0) - T_0 = 473$  °С ( $T_0 = 273$  °С); **уровень 3, 4**].

5. Баллон вместимостью  $V = 20$  л содержит углекислый газ массой  $m = 500$  г под давлением  $p = 1,3$  МПа. Определить температуру  $T$  газа.

$$[T = \frac{p\mu V}{R} = 275 \text{ К; уровень 2}].$$

6. В баллоне вместимостью  $V = 25$  л находится водород при температуре  $T = 290$  К. После того, как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на  $\Delta p = 0,4$  МПа. Определить массу  $m$  израсходованного водорода.  $[m = \frac{\mu V}{\mu T} \Delta p = 8,3$  г; **уровень 2**].

7. В сосуде вместимостью  $V = 15$  л находится смесь азота и водорода при температуре  $t = 23$  °С и давлении  $p = 200$  кПа. Определить массы смеси и ее компонентов, если массовая доля  $\omega_1$  азота в смеси равна 0,7.

$$[m = \frac{pV}{\left[ \frac{\omega_1}{\mu_1} + \frac{(1-\omega_1)}{\mu_2} \right] RT} = 6,78 \text{ г; } m_1 = \omega_1 m = 4,81 \text{ г; } m_2 = (1 - \omega_1) m = 2,06 \text{ г;}$$

**уровень 3**].

8. В баллоне вместимостью  $V = 2$  л находится кислород массой  $m = 1,17$  г. Концентрация  $n$  молекул в сосуде равна  $1,1 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Определить по этим данным постоянную Авогадро  $N_A$ .  $[N_A = nV \frac{k\mu}{m} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1};$

**уровень 2**].

9. Колба вместимостью  $V = 4$  л содержит некоторый газ массой  $m = 0,6$  г под давлением  $p = 200$  кПа. Определить среднюю квадратичную скорость  $\langle v_{кв} \rangle$  молекул газа.  $[2 \text{ км/с; уровень 3}].$

10. Найти число молекул азота в  $1 \text{ м}^3$ , если давление равно 3,69 атм, а средняя квадратичная скорость молекул равна 2400 м/с.  $[n_0 = \frac{3pN_A}{\mu \langle v_{кв} \rangle^2} = 4,2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}; \text{ уровень 3}].$

11. Насколько уменьшится атмосферное давление  $p = 100$  кПа при подъеме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту  $h = 100$  м? Считать, что температура  $T$  воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.  $[1,18 \text{ кПа; уровень 2}].$

**12.** Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Используя функцию распределения Больцмана, установить распределение концентрации  $n$  частиц массой  $m_0$ , находящихся в роторе центрифуги, как функцию расстояния  $r$  от оси вращения. [ $n = n_0 e^{-\frac{m_0 \omega^2 r^2}{2kT}}$  ( $n_0$  – концентрация частиц на оси ротора); **уровень 5**].

**13.** Определить относительное число  $\omega$  молекул идеального газа, скорости которых заключены в пределах от нуля до одной сотой наиболее вероятной скорости  $v_0$  [ $\frac{\Delta N}{N} = 7,52 \cdot 10^{-7}$ ; **уровень 4**].

**14.** Водород находится при нормальных условиях и занимает объем  $V = 1 \text{ см}^3$ . Определить число  $N$  молекул в этом объеме, обладающих скоростями, меньшими некоторого значения  $v_{\max} = 1 \text{ м/с}$ . [ $6,0 \cdot 10^9$ ; **уровень 4**].

**15.** Определить долю молекул идеального газа, энергии которых отличаются от средней энергии  $\langle \epsilon \rangle$  поступательного движения молекул при той же температуре не более чем на 1 % [ $9,3 \cdot 10^{-3}$ ; **уровень 5**].

**16.** Найти выражение для кинетической энергии молекул идеального газа, импульсы которых имеют наиболее вероятное значение. [ $\epsilon = kT$ ; **уровень 4**].

**17.** Азот находится под давлением 1 атм при температуре 300 К. Найти относительное число молекул азота, модули скоростей которых лежат в интервале скоростей от  $\langle v \rangle$  до  $\langle v \rangle + \Delta v$ , где  $\Delta v = 1 \text{ м/с}$ .

$$\left[ \frac{\Delta N}{N} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{m_0}{\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{4}{\pi}} dv = 1,9 \cdot 10^{-3} = 0,19 \% ; \text{уровень 5} \right].$$



## УЧЕБНЫЙ БЛОК 2. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Несмотря на хаотичное движение частиц газа при постоянстве его температуры, давления и объема, состояние газа можно считать среднестатистически равновесным, т.е. средние значения концентрации, скорости, распределения по скоростям можно считать неизменными. Отсюда следует вывод, что тепловое движение частиц газа способствует сглаживанию возникающих в газе неоднородностей. Это сглаживание (выравнивание) неоднородностей происходит в результате процессов, которые получили название *процессов (явлений) переноса*. К ним относятся *теплопроводность, внутреннее трение и диффузия*. В данном блоке эти процессы рассматриваются на основе МКТ.

При изучении этого блока студенты должны **иметь представление:**

- о распределении Максвелла для частиц идеального газа;
- об основных положениях МКТ;
- о степенях свободы движения микрочастиц;
- об экспериментальных проявлениях процессов диффузии, теплопроводности и вязкости;

**обладать навыками:**

- интегрирования и работы с табличными интегралами;
- расчета основных параметров состояния идеального газа.

### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Рекомендуемая литература
Критерий вакуума. Столкновения частиц газа	лекция	[5]
Теплопроводность газа	лекция	[6], часть 2
Внутреннее трение в газе	лекция	[7]
Диффузия в газе	лекция	[8] [10]

### Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– критерий вакуума;</li> <li>– коэффициенты переноса – коэффициент диффузии, коэффициент теплопроводности и коэффициент вязкости;</li> <li>– эмпирические законы Фика, Ньютона и Фурье для явлений переноса</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– определять число столкновений частиц в газе;</li> <li>– определять длину среднего пробега частиц в газе;</li> <li>– определять коэффициенты переноса в различных ситуациях;</li> <li>– определять потоки частиц и энергии, а также силы, обусловленные явлениями переноса</li> </ul>

## 2.1. Краткое содержание теоретического материала

Находясь в тепловом движении, частицы газа сталкиваются друг с другом. Под *столкновением* частиц подразумевается процесс взаимодействия между ними, в результате которого частицы изменяют скорость своего движения. Основываясь на допущениях относительно свойств идеального газа, будем считать, что система двух сталкивающихся частиц замкнута, т.е. на них не оказывают никакого действия другие частицы в процессе столкновения. Это упрощает анализ процесса столкновений частиц газа. Трудность вызывает также определение размеров частиц газа, знание которых также необходимо для анализа рассматриваемого процесса. Определим эти размеры из следующих соображений. Известно, что частицы газа состоят из атомов, которые в свою очередь состоят из ядер (+) и электронных оболочек (–), причем размеры ядер много меньше области, характерной для электронных оболочек. Наличие в частицах газа положительных и отрицательных зарядов обеспечивает возможность силового взаимодействия частиц, т.е. система из двух сталкивающихся частиц характеризуется как кинетической энергией (тепловое движение) так и потенциальной (силовое взаимодействие). Здесь мы не будем рассматривать силовое взаимодействие двух частиц, а воспользуемся известными результатами: частицы газа испытывают притяжение друг к другу на расстояниях больше некоторого значения и отталкивание на меньших расстояниях. Учитывая это, а также то, что силы отталкивания по величине значительно превосходят силы притяжения, энергетическую диаграмму сталкивающихся частиц можно представить как на рис. 2.1, а.

Суммирование энергий притяжения и отталкивания (см. рис. 2.1, б, кривая 1) приводит к образованию минимума *функции потенциальной энергии* системы частиц. Положение минимума определится расстоянием между центрами частиц  $r_{min}$ , если одна из частиц располагается в начале системы координат (см. рис. 2.1, б).

Согласно диаграммам (см. рис. 2.1, б) до расстояния  $r > r_{min}$  частица испытывает притяжение, а при  $r < r_{min}$  – отталкивание. Если использовать понятие относительной скорости частиц, то частицу  $I$ , помещенную в начало координат, можно считать неподвижной, а кинетическую энергию системы двух частиц приписать другой частице  $II$ , обозначив ее  $K_2$  при  $r = \infty$ . Увеличение кинетической энергии частицы на  $K_2$  можно интерпрети-

ровать как повышение энергии притяжения (кривая 1 опускается на  $K_2$  в положение кривой 2, так как энергия притяжения отрицательна). Ясно, что при сближении частиц кинетическая энергия частицы  $II$  будет нарастать до расстояния  $r = r_{\min}$ . При меньших  $r$  ее энергия уменьшается, становясь равной нулю на расстоянии  $r_0$  между центрами частиц. (Частица  $II$  затратила всю свою кинетическую энергию, состоящую из относительной кинетической энергии  $K_2$  и кинетической энергии, набранной при движении в область  $r_{\min} < r < \infty$ , на работу против сил отталкивания в области  $r_0 < r < r_{\min}$ ).

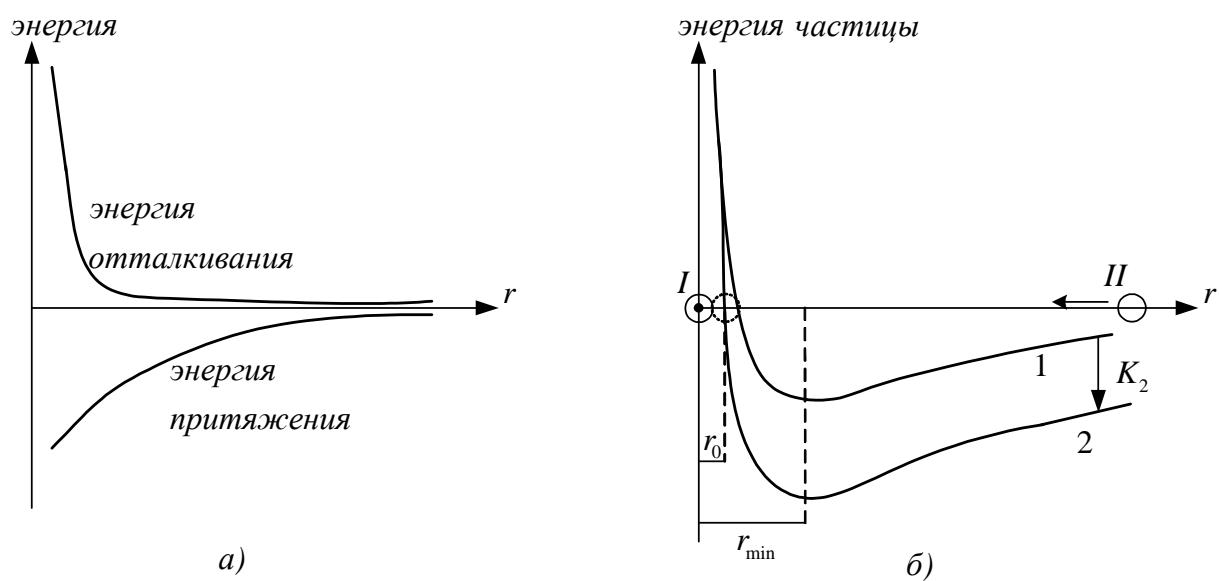


Рис. 2.1

Равенство энергии нулю означает, что частица  $II$  останавливается и начинает под действием сил отталкивания двигаться в обратном направлении. Ясно, что чем больше  $K_2$ , тем меньше будет  $r_0$ , т.е. возможное расстояние сближения частиц. Полагая сталкивающиеся частицы одинаковыми, можно считать, что  $r_0$  равно двум радиусам частицы или эффективному диаметру частицы  $d$  до столкновения. Итак, при столкновении частиц газа изменение их направления движения (относительного) происходит, можно считать, в момент сближения частиц до расстояния  $d$  и, следовательно, эта величина может быть взята для характеристики размеров сталкивающихся молекул. С увеличением кинетической энергии (температуры газа) эффективный диаметр  $d$  частицы газа уменьшается, значит, уменьшается и эффективное сечение  $\sigma$  частицы для процесса взаимодействия, определяемое

соотношением  $\sigma = \pi d^2$ . Зависимость  $\sigma$  от температуры определяется **законом Сезерленда**

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 + C/T},$$

где  $\sigma_0$  – эффективное сечение при 273 К, а  $C$  – константа, равная 50 – 300 для различных газов.

Перейдем далее к определению числа столкновений частиц газа за единицу времени (1 секунду). Для этого предположим вначале, что все частицы в газе, кроме одной, неподвижны, а движущаяся частица имеет скорость, равную средней тепловой  $\langle v \rangle$ . Очевидно, что за единицу времени движущаяся частица столкнется со всеми частицами, центры которых лежат в цилиндре с площадью  $S = \pi d^2$  и длиной  $\langle v \rangle$  ( $t = 1$  с).

$$\langle z \rangle = nV_{\text{цил}} = \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Учтем движение всех частиц. Движение частиц вдоль  $X$  не скажется на числе столкновений, т.к. сколько частиц «убегает» от частицы, для которой определяем число столкновений, столько же их и движется навстречу этой частице.

Найдем относительную скорость частиц, движущихся перпендикулярно оси  $X$ :

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{\langle v \rangle^2 + \langle v \rangle^2} = \langle v \rangle \sqrt{2},$$

тогда

$$\langle z \rangle = \pi \sqrt{2} d^2 n \langle v \rangle.$$

За единицу времени (1 с) частица проходит расстояние  $\langle v \rangle$ , поэтому средняя длина свободного пробега

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} d^2 n}.$$

Зависимость  $\lambda$  от  $T$  (формула Сезерленда) имеет вид

$$\langle \lambda \rangle = \langle \lambda_0 \rangle \frac{T}{C + T},$$

где  $C$  – постоянная Сезерленда.

Процесс теплопроводности реализуется, когда в газе возникают области с различной температурой под действием каких-либо внешних причин.

Рассмотрим явления теплопроводности на простейшем примере, когда газ заключен между двумя ограничивающими его стенками с различными температурами  $T_1$  и  $T_2$  (рис. 2.2). Выделим в пространстве между стенками воображаемую поверхность  $S$ , а также  $S_1$  и  $S_2$ , параллельные ей и отстоящие от  $S$  на расстоянии, равном средней длине свободного пробега  $\langle \lambda \rangle$ .

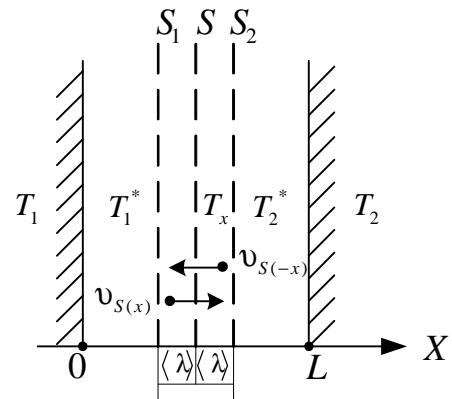


Рис. 2.2

Допустим, что  $\langle \lambda \rangle \ll L$ , где  $L$  – расстояние между стенками. У стенки с температурой  $T_1$  газ нагрет до температуры  $T_1$ , а у стенки с температурой  $T_2$  газ имеет температуру  $T_2$ . Пусть  $T_1 > T_2$ , тогда в газе вдоль оси  $OX$  будет наблюдаться изменение температуры, которую в каждой точке  $x$  можно характеризовать бесконечно малыми приращениями  $dT$ . Величина  $dT/dx$  характеризует скорость изменения температуры по координате  $x$  и соответствует проекции градиента температуры по координате  $x$  (в условиях нашей задачи  $T_1 > T_2$  и  $dT/dx < 0$ ).

Пусть на поверхности  $S_2$  температура газа соответствует  $T_2^*$ , а на поверхности  $S_1$  – температуре  $T_1^*$ . При хаотическом тепловом движении через площадку  $S$  частицы газа, движущиеся от поверхности  $S_2$  к поверхности  $S$ , будут переносить среднюю кинетическую энергию, соответствующую температуре  $T_2^*$ , а движущиеся со стороны поверхности  $S_1$  – среднюю кинетическую энергию, соответствующую температуре  $T_1^*$ . Это утверждение является справедливым, поскольку на длине свободного пробега скорость частиц не изменяется (столкновений нет). Результирующий поток энергии, переносимый через плоскость  $S$ , можно определить как разность потоков переносимой частицами энергии слева направо (в направлении  $X$ ) и справа налево (в направлении  $-X$ ). Считая движение частиц газа хаотическим (равновероятным во всех направлениях), для потоков частиц слева направо ( $X$ ) и справа налево ( $-X$ ) можем записать

$$v_{S(x)} = v_{S(-x)} = \frac{1}{6} n_x \langle v_{(T_x)} \rangle, \quad (1)$$

где  $\langle v_{(T_x)} \rangle$  – средняя скорость частиц через поверхность  $S$ , зависящая от температуры  $T_x$ . Множитель  $\frac{1}{6}$  обусловлен тем, что все направления равнозначны, т.е. на направление  $OX$  приходится  $\frac{1}{3}$  частиц, однако  $\frac{1}{2}$  из них движется в нужном направлении, а остальные в обратном ( $-X$ ). С учетом (1) для потока энергии через поверхность  $S$  запишем выражение в виде

$$q_x = v_{S(x)} \langle \epsilon_{(T_1^*)} \rangle - v_{S(-x)} \langle \epsilon_{(T_2^*)} \rangle = v_{S(x)} \left( \langle \epsilon_{(T_1^*)} \rangle - \langle \epsilon_{(T_2^*)} \rangle \right), \quad (2)$$

где  $\langle \epsilon_{(T_1^*)} \rangle$ ,  $\langle \epsilon_{(T_2^*)} \rangle$  – средние кинетические энергии частиц в области сечений  $S_1$  и  $S_2$ .

Величина  $\langle \epsilon_{(T_1^*)} \rangle - \langle \epsilon_{(T_2^*)} \rangle$  соответствует изменению кинетической энергии, которое происходит на расстоянии  $2\langle \lambda \rangle$ ,

поэтому

$$\langle \epsilon_{(T_1^*)} \rangle - \langle \epsilon_{(T_2^*)} \rangle = \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial x} 2\langle \lambda \rangle = -2\langle \lambda \rangle \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = -2\langle \lambda \rangle C_V^* \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $C_V^*$  – величина, характеризующая изменение средней энергии молекул газа с изменением температуры газа, т.е. молекулярная теплоемкость газа.

Индекс  $(^*)$  показывают, что теплоемкость определяется при постоянном объеме и отнесена к одной молекуле. Знак « $\leftarrow$ » в (3) появляется из-за снижения температуры по координате  $x$ , т.е.  $dT$  соответствует  $dx$ .

Из (1), (2) и (3) следует, что плотность потока энергии (тепловой поток) равна

$$q = -\frac{1}{3} n \langle v_{(T_x)} \rangle \langle \lambda \rangle C_V^* \frac{dT}{dx}, \quad (4)$$

где переход от  $\partial T / \partial x$  (частной производной) к  $dT / dx$  (полной производной) возможен вследствие отсутствия градиента температуры по другим координатам, кроме  $x$ .

Эмпирическое уравнение теплопроводности (**закон Фурье**) выглядит следующим образом:

$$q = -\chi \frac{dT}{dx}, \quad (5)$$

где  $\chi$  – коэффициент теплопроводности вещества.

Сравнивая (4) и (5), получаем связь коэффициента теплопроводности газа с его микропараметрами (параметрами частиц)

$$\chi = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_V^*. \quad (6)$$

Умножив и разделив правую часть на  $m_0 N_A$  ( $m_0$  – масса молекулы,  $N_A$  – число Авогадро), получим

$$\chi = \frac{1}{3} n m_0 \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \frac{C_V^* N_A}{m_0 N_A} = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_V, \quad (7)$$

где  $C_V$  – удельная теплоемкость газа при постоянном его объеме,  $\rho$  – плотность газа.

Анализ (7) показывает, что коэффициент теплопроводности, осуществляемой за счет процесса переноса, рассмотренного выше, не зависит от давления.

Действительно,  $\rho \sim p$  (в соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона),  $\langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{p}$ ,  $\langle v \rangle = \left( \frac{8kT}{\pi \cdot m_0} \right)^{1/2}$ , т.е. произведение величин, определяющих  $\chi$ , не содержит величины давления  $p$ . Этот вывод справедлив только при условии  $\langle \lambda \rangle \ll L$ .

Если условия процесса таковы, что  $\langle \lambda \rangle \geq L$ , то при движении между стенками частицы газа не сталкиваются, поэтому процесс теплопроводности осуществляется иначе: прямым переносом энергии частицами газа от стенки с температурой  $T_1$  на стенку с температурой  $T_2$ .

В этом случае поток частиц на стенку (и со стенки) равен (см. учебный блок 1, уравнение (18))

$$v_{(x)} = v_{(-x)} = \frac{n \langle v \rangle}{4}. \quad (8)$$

Различие в средних энергиях частиц, движущихся от стенки с температурой  $T_1$  на стенку с температурой  $T_2$  и наоборот, составит  $C_V^*(T_1 - T_2)\alpha$ , где  $\alpha$  – коэффициент аккомодации, учитывающий тот факт, что частица, слетающая с поверхности, температура которой  $T_1$ , может иметь энергию меньше обусловленной температурой  $T_1$  (образно говоря, частица не успевает за время контакта со стенкой прогреться до температуры  $T_1$ ), а частица, слетающая со стенки с температурой  $T_2$ , образно говоря, не успевает за время контакта со стенкой остыть до температуры  $T_2$ . Коэффициент аккомодации зависит от состояния поверхности стенок, материала, рода газа, температуры и в практических случаях составляет величину 0,1 – 0,9. С учетом (8) для удельного потока энергии можно записать при условии  $\langle \lambda \rangle > L$

$$q = \frac{n \langle v \rangle}{4} C_V^* (T_1 - T_2) \alpha. \quad (9)$$

Воспользовавшись известными соотношениями, по аналогии с (7) получаем выражение для плотности потока энергии в случае  $\langle \lambda \rangle > L$

$$q = \frac{n \langle v \rangle}{4} (T_1 - T_2) \alpha \frac{m C_V^* N_A}{m N_A} = \frac{\rho \langle v \rangle}{4} c_V \alpha (T_1 - T_2), \quad (10)$$

где  $c_V$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Так как  $\rho \sim p$ , теплопроводность газа при  $\langle \lambda \rangle > L$ , т.е. при низких давлениях, зависит от давления. В связи с этим при решении задач на теплопроводность газа необходимо, сравнивая  $\langle \lambda \rangle$  с  $L$ , установить характер процесса тепло-

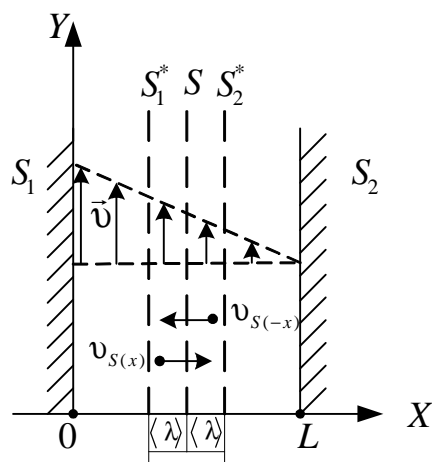


Рис. 2.3

проводности и пользоваться уравнениями (4) или (10) соответственно.

Вязкость характеризует процесс передачи направленного импульса движения молекул из области, где газ контактирует с движущимся телом, в другие области. Пусть газ расположен между стенками  $S_1$  и  $S_2$ , причем стенка  $S_1$  движется в направлении  $OY$  со скоростью  $v$  (рис. 2.3). Тогда частица газа в процессе контакта со стенкой  $S_1$  получает на-



правленный импульс  $m\mathbf{v}$  и при последующем хаотическом в совокупности с направленным (надтепловым) движении в процессе столкновений будет передавать часть направленного импульса другим частицам газа. Таким образом, в газе будет осуществляться перенос направленного импульса от  $S_1$  к  $S_2$ . При этом слои газа, располагающиеся ближе к  $S_1$ , будут двигаться с большей направленной скоростью ( $v_y$ ), чем более удаленные слои, и в промежутке между пластинами установится некоторое распределение скорости направленного движения от  $v_y$  у стенки  $S_1$  до 0 у стенки  $S_2$ .

Пусть в рассматриваемой системе выполняется условие  $\langle \lambda \rangle \ll L$ . Тогда для рассматриваемого переноса можем воспользоваться тем же методом, что и при рассмотрении процесса теплопроводности. Выделим некоторую воображаемую плоскость  $S$  и плоскости  $S_1^*$  и  $S_2^*$  на расстоянии  $\langle \lambda \rangle$  от  $S$ . На расстоянии  $\langle \lambda \rangle$  направленный импульс молекул не изменяется, т.к. нет столкновений с другими молекулами. Поток частиц через поверхность  $S$  со стороны поверхности  $S_1^*$  и со стороны  $S_{2(-x)}^*$  за счет теплового движения частиц определится, как и в случае теплопроводности (1), соотношением

$$v_{S(x)} = v_{S(-x)} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle.$$

Плотность потока импульса, переносимого от слоя газа на  $S_1^*$  к слою газа на  $S_2^*$ , будет равен

$$v_{pS} = v_{S(x)} (m_0 v_{y1}^* - m_0 v_{y2}^*) = \frac{1}{6} m_0 n \langle v \rangle (v_{y1}^* - v_{y2}^*), \quad (11)$$

где  $v_{y1}^*$  и  $v_{y2}^*$  – направленные скорости в слоях газа у поверхностей  $S_1^*$  и  $S_2^*$ .

Величина  $(v_{y1}^* - v_{y2}^*)$  может быть выражена через градиент направленной скорости  $v_y$  по координате  $x$ :

$$(v_{y1}^* - v_{y2}^*) \approx 2 \langle \lambda \rangle \frac{dv_y}{dx},$$

считая, что  $v_y$  в пределах  $2 \langle \lambda \rangle$  изменяется по  $x$  линейно.

С учетом этого (11) можно записать в виде

$$v_{pS} = -\frac{1}{3}n\langle v \rangle \langle \lambda \rangle m_0 \frac{dv_y}{dx}, \quad (12)$$

где знак «—» обусловлен тем, что значению  $(+dx)$  соответствует  $(-dv_y)$ . Величина  $v_{pS}$  характеризует передаваемый импульс от слоя  $S_1^*$  слою газа  $S_2^*$  через единичную площадь за единицу времени и может быть записана в виде

$$v_{pS} = v_{S(x)} \Delta(m_0 v_y).$$

В то же время в соответствии со вторым законом Ньютона

$$F = m_0 a = m_0 \frac{dv}{dt} = \frac{d(m_0 v)}{dt},$$

можем считать, что  $v_{pS}$  характеризует силу, с которой один слой газа действует на другой в направлении  $v_y$ .

В результате (12) можем переписать для единичной площади в единицу времени в виде

$$F_y = -\frac{1}{3}n\langle v \rangle \langle \lambda \rangle m_0 \frac{dv_y}{dx}. \quad (13)$$

Рассматривая  $F_y$  как силу трения слоев газа и сравнивая выражение (13) с эмпирически установленным **законом Ньютона**  $F = -\eta \frac{dv}{dx}$ , получаем для коэффициента внутреннего трения  $\eta$  в газе следующее выражение:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle. \quad (14)$$

Учитывая, что  $\rho = m_0 n$ ,

$$\langle v \rangle \sim \left( \frac{T}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{n},$$

из (14) имеем

$$\eta \sim \sqrt{m_0 T},$$

откуда следует, что коэффициент внутреннего трения не зависит ни от концентрации, ни от давления. Однако надо помнить, что этот вывод справедлив при условии  $\langle \lambda \rangle \ll L$  (т.е. в соответствующем диапазоне давлений газа).

При низких давлениях, когда  $\langle \lambda \rangle > L$ , нельзя оперировать понятиями «слои газа», «внутреннее трение», «коэффициент внутреннего трения», «вязкость газа». Импульс направленного движения в этом случае частицами газа переносится непосредственно от стенки к стенке. За единицу времени через единичную площадь сечения газа (на единицу площади стенки) передаваемый импульс можно определить как

$$\Delta p = \frac{1}{4} n \langle v \rangle m_0 v_y = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} m_0 v_y. \quad (15)$$

*Диффузия* – процесс, заключающийся в самопроизвольном (за счет теплового движения) взаимном проникновении частиц двух или большего количества компонентов в газах, жидкостях и даже твердых телах. Если один газ диффундирует в другой, процесс называется *взаимодиффузией*.

*Самодиффузия* – проникновение одной части частиц газа в другую часть того же газа, например, при различной концентрации частиц в различных частях объема. Процесс самодиффузии аналогичен

процессам переноса (теплопроводности, внутреннего трения) и отличается от них только величиной, которая переносится. Рассмотрим диффузию на следующей модели. Пусть объем с газом характеризуется тем, что плотность газа (концентрация) в нем в направлении  $X$  (рис. 2.4) изменяется. Воспользовавшись тем же, что и в предыдущих случаях, методическим приемом, получим суммарный поток частиц через сечение  $S$  как раз-

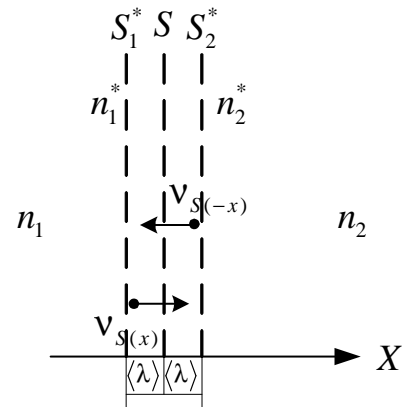


Рис. 2.4

ницу потоков от поверхности  $S_1^*$  к поверхности  $S(v_{S(x)})$  и от поверхности  $S_2^*$  к поверхности  $S(v_{S(-x)})$ .

Пусть  $n_1 > n_2$ .

$$v_x = v_{S(x)} - v_{S(-x)} = \frac{1}{6} n_1^* \langle v \rangle - \frac{1}{6} n_2^* \langle v \rangle = \frac{1}{6} \langle v \rangle (n_1^* - n_2^*).$$

Величину  $(n_1^* - n_2^*)$  выразим через градиент концентрации

$$(n_1^* - n_2^*) = \frac{dn}{dx} 2\langle\lambda\rangle.$$

Тогда выражение для  $v_x$  можно записать в виде

$$v_x = -\frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle\frac{dn}{dx}. \quad (16)$$

Сравнивая (16) с **законом Фика** для самодиффузии

$$v_x = -D\frac{dn}{dx},$$

видим, что коэффициент самодиффузии связан с микропараметрами газа выражением

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle\lambda\rangle \quad (17)$$

или, если подставить  $\langle v\rangle \sim \left(\frac{T}{m_0}\right)^{1/2}$  и  $\langle\lambda\rangle \approx \frac{1}{n}$ , – выражением

$$D \sim \frac{1}{n}\left(\frac{T}{m_0}\right)^{1/2},$$

из которого следует, что коэффициент самодиффузии в отличие от  $\chi$  и  $\eta$  зависит от  $n$  и, следовательно, – от давления газа.

Для случая взаимодиффузии разных газов (1 и 2) коэффициент взаимодиффузии определяется выражением (вывод не приводится)

$$D_{12} = \frac{n_1\langle v_2\rangle\langle\lambda_2\rangle + n_2\langle v_1\rangle\langle\lambda_1\rangle}{3(n_1 + n_2)}, \quad (18)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – концентрации соответствующих газов. Подставив в (18) выражение для соответствующих длин пробега и тепловых скоростей, получаем

$$D_{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{kT}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{pd_{12}^2} \sqrt{\frac{1}{m_{01}} + \frac{1}{m_{02}}}, \quad (19)$$

где  $d_{12}$  – сумма радиусов частиц газов 1 и 2;  $p = p_1 + p_2$  – суммарное давление газов;  $m_{01}$  и  $m_{02}$  – соответственно массы частиц газов 1 и 2.

## 2.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Явления переноса</b></p> <p>Критерий вакуума</p> <p>Столкновения</p> <p>Теплопроводность</p> <p>Внутреннее трение</p> <p>Диффузия</p>	<p>лекция + самост</p>	<p>[5], пп. 5.6 – 5.8</p> <p>[6], пп. 33 – 35</p> <p>[7], п. 8.9</p> <p>[8], пп. 17.1 – 17.2</p> <p>[10], п. 48</p>	<p>1. Что называют явлением переноса? Приведите примеры.</p> <p>2. Может ли выполняться критерий вакуума, если резиновый шар, наполненный воздухом, достать с большой глубины водоема?</p> <p>3. Что выражает коэффициент вязкости? Как он зависит от температуры, давления?</p> <p>4. Что выражает коэффициент теплопроводности? Как он зависит от температуры, давления?</p> <p>5. Что выражает коэффициент диффузии? Как он зависит от температуры, давления?</p> <p>6. Что выражают эмпирические законы Фика и Фурье?</p> <p>7. Чем определяется эффективность теплопередачи между двумя нагретыми плоскостями?</p> <p>8. Что выражает коэффициент аккомодации, где он применяется?</p> <p>9. По какой причине начинает вращаться внутренний цилиндр, отделенный от внешнего вращающегося цилиндра слоем газа?</p>

### 2.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема занятия	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборника
Определение основных параметров явлений переноса	Определение длины пробега и числа столкновений	Целесообразно рассмотреть следующие типы задач: – определение средних значений длины свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ , времени свободного пробега $\langle \tau \rangle$ , числа столкновений $\langle z \rangle$ с использованием справочных данных о диаметрах частиц газа; – определение параметров состояния газа с использованием $\langle \lambda \rangle$ , $\langle \tau \rangle$ , $\langle z \rangle$ ; – определение $\langle \lambda \rangle$ , $\langle \tau \rangle$ , $\langle z \rangle$ по заданным зависимостям коэффициентов теплопроводности и внутреннего трения (вязкости) от давления. Определение коэффициентов переноса – диффузии, теплопроводности, внутреннего трения (вязкости) необходимо начинать с определения критерия вакуума. Давление, температура и другие параметры состояния газа определяются с использованием уравнения состояния идеального газа и соотношений, связывающих микро- и макропараметры газа. Зависимости коэффициентов переноса от макропараметров состояния газа иногда удобно анализировать с использованием отношений типа $\eta_2/\eta_1$ , $D_2/D_1$ и т.п.	[2], №№ 5.112, 5.113, 5.115, 5.117 [11], №№ 2.34, 2.35 [12], №№ 10.47 – 10.59 [1], № 7.9
	Определение коэффициентов переноса		[2], №№ 5.132, 5.135, 5.138, 5.140, 5.154 [11], №№ 2.36 – 2.42 [12], №№ 10.66 – 10.79
	Определение потоков частиц и энергии в различных условиях	Потоки частиц и энергий связаны с коэффициентами переноса эмпирическими законами Фика, Фурье и Ньютона. Определить эти коэффициенты, можно получить значения этих потоков. При этом необходимо помнить, что явления переноса связаны со средними величинами (длина свободного пробега, скорость). Поскольку реальные процессы происходят в ограниченных объемах, то для решения задачи необходимо определить критерий вакуума, для того чтобы выбрать правильное выражение для коэффициентов переноса и входящих в него величин	[2], №№ 5.155, 5.157, 5.160 [11], №№ 2.40, 2.44 [12], №№ 10.80 – 10.86

## 2.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** Определите: 1) среднюю длину свободного пробега молекул; 2) число соударений за 1 с, происходящих между всеми молекулами кислорода, находящегося в сосуде емкостью 2 л при температуре 27 °С и давлении 100 кПа. (Уровень 3).

**Решение.** Средняя длина свободного пробега молекул кислорода вычисляется по формуле

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}, \quad (1)$$

где  $d = 2,9 \cdot 10^{-10}$  м – эффективный диаметр молекулы кислорода;  $n_0$  – число молекул в единице объема, которое можно определить согласно уравнению  $p = n_0 kT$ .

Число молекул равно

$$n_0 = \frac{p}{kT}, \quad (2)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

Подставляя (2) в (1), имеем

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}. \quad (3)$$

Число соударений  $Z$ , которые происходят попарно между всеми молекулами в объеме за 1 с,

$$Z = \frac{1}{2} \langle z \rangle N, \quad (4)$$

где  $N$  – число молекул кислорода в сосуде объемом  $2 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>;  $\langle z \rangle$  – среднее число соударений одной молекулы за 1 с.

Число молекул в сосуде

$$N = n_0 V. \quad (5)$$

Среднее число соударений молекулы за 1 с

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}, \quad (6)$$

где  $\langle v \rangle$  – средняя арифметическая скорость молекулы.

Она равна

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad (7)$$

где  $\mu = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль – молярная масса кислорода.

Подставляя в (4) выражения (5), (6) и (7), находим

$$Z = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \sqrt{2\pi} d^2 p}{kT} \frac{p}{kT} V = \frac{2\pi d^2 p^2 V}{k^2 T^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}.$$

Выразим все величины в системе СИ и произведем вычисления:

$$Z = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2,9^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1,38^2 \cdot 10^{-46} \cdot 9 \cdot 10^4} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 300}{3,41 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} = 9 \cdot 10^{28};$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 2,9^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5} = 3,56 \cdot 10^{-8}.$$

Ответ:  $\langle \lambda \rangle = 3,56 \cdot 10^{-8}$  м;  $Z = 9 \cdot 10^{28}$ .

**Пример 2.** Определите: 1) коэффициент самодиффузии; 2) коэффициент внутреннего трения в азоте, находящемся при температуре 300 К, давлении  $10^5$  Па в объеме  $10^{-6}$  м<sup>3</sup>. (**Уровень 3**).

**Решение.** Для нахождения  $\langle \lambda \rangle$  воспользуемся формулой

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2\pi} d^2 p}, \quad (1)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана;  $d = 3,1 \cdot 10^{-10}$  м – эффективный диаметр молекулы азота, и получаем  $\langle \lambda \rangle \approx 10^{-7}$  м.

Полагая расстояние между стенками объема  $L \approx 10^{-2}$  м, получаем  $\langle \lambda \rangle \ll L$ . Поэтому коэффициент самодиффузии

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle, \quad (2)$$

где  $\langle v \rangle$  – средняя арифметическая скорость молекул, равная

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad (3)$$

где  $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль – молярная масса азота;  $\langle \lambda \rangle$  – средняя длина свободного пробега молекул.



Подставляя (1) и (3) в (2), имеем

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{2kT}{3\pi d^2 p} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}.$$

Коэффициент внутреннего трения

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho,$$

где  $\rho$  – плотность газа при температуре 300 К и давлении  $10^5$  Па.

Для нахождения  $\rho$  воспользуемся уравнением состояния идеального газа. Запишем его для двух состояний азота: при нормальных условиях ( $T_0 = 273$  К;  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па)

$$p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0 \quad \text{и} \quad pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Учитывая, что  $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$  и  $\rho = \frac{m}{V}$ , имеем

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0 T}.$$

Коэффициент внутреннего трения газа может быть выражен через коэффициент диффузии

$$\eta = D\rho = \frac{D\rho_0 p T_0}{p_0 T}.$$

Выразим величины в системе СИ и проведем вычисления:

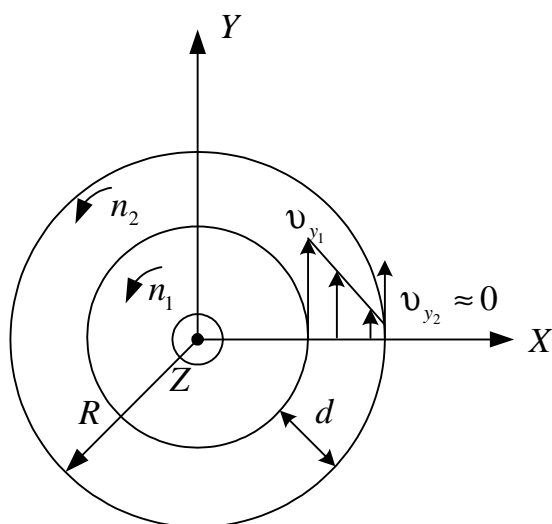
$$D = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3 \cdot 3,14 \cdot 3,1^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 300}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 4,7 \cdot 10^{-5};$$

$$\eta = 4,7 \cdot 10^{-5} \cdot 1,25 \cdot \frac{10^5 \cdot 273}{1,01 \cdot 10^5 \cdot 300} = 5,23 \cdot 10^{-5}.$$

*Ответ:*  $D = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{см}; \eta = 5,23 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$

**Пример 3.** Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной 10 см могут свободно вращаться вокруг их общей оси  $Z$ . Радиус  $R$  большого цилиндра равен 5 см. Между цилиндрами имеется зазор размером  $d = 2$  мм. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной частотой  $n_1 = 20 \text{ с}^{-1}$ . Внешний цилиндр покоится. Определить, через какой промежуток времени с

момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет частоту вращения  $n_2 = 1 \text{ с}^{-1}$ . При расчетах изменением относительной скорости цилиндров пренебречь. Масса  $m$  внешнего цилиндра равна 100 г. Вязкость воздуха  $\eta = 17,2 \text{ мкПа}\cdot\text{с} = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$ . (Уровень 5).



**Решение.** При вращении внутреннего цилиндра слой воздуха увлекается им и начинает участвовать во вращательном движении. Вблизи поверхности этого цилиндра слой воздуха приобретает со временем практически такую же линейную скорость, как и скорость точек на поверхности цилиндра, т.е.  $v_{y1} = 2\pi n_1(R-d)$ . Так как  $R \gg d$ , то приближенно можно считать

$$v_{y1} \approx 2\pi n_1 R. \quad (1)$$

Вследствие внутреннего трения момент импульса передается соседним слоям газа и в конечном счете – внешнему цилиндру. За интервал времени  $\Delta t$  внешний цилиндр (вначале покоящийся) приобретает момент импульса  $L = \Delta p R$ , где  $\Delta p$  – изменение импульса молекул в результате столкновений с внешним цилиндром. Отсюда

$$\Delta p = \frac{L}{R}. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно второму закону Ньютона  $\Delta p = F \Delta t$ ,

$$\Delta p = \eta \frac{dv_y}{dx} S \Delta t, \quad (3)$$

где  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения в газе (вязкости);  $\frac{dv_y}{dx}$  – градиент скорости;  $S$  – площадь поверхности цилиндра высотой  $h$ .

Приравняв правые части выражений (2) и (3) и выразив из полученного равенства искомый интервал  $\Delta t$ , получим

$$\Delta t = \frac{L}{\eta R \frac{dv_y}{dx} S}. \quad (4)$$

Найдем входящие в эту формулу величины  $L$ ,  $\frac{dv_y}{dx}$ ,  $S$ . Момент импульса внешнего цилиндра  $L = J\omega_2$ , где  $J$  – момент инерции тонкостенного цилиндра ( $J = mR^2$ );  $m$  – его масса;  $\omega_2$  – угловая скорость внешнего цилиндра ( $\omega_2 = 2\pi n_2$ ). С учетом этого запишем

$$L = mR^2 2\pi n_2 = 2\pi mR^2 n_2.$$

Градиент скорости  $\frac{dv_y}{dx} = \frac{\Delta v_y}{\Delta x} \approx \frac{v_{y1}}{d}$ . Подставив в (4) выражения  $L$ ,  $\frac{dv_y}{dx}$ ,  $S$ , получим

$$\Delta t = \frac{mdn_2}{\eta v_{y1} \lambda}.$$

Подставив  $v_{y1}$  из (1), найдем

$$\Delta t = \frac{mdn_2}{2\pi\eta R h n_1}. \quad (5)$$

Подставив в (5) значения входящих в формулу величин и произведя вычисления, получим

$$\Delta t = 18,5 \text{ с.}$$

*Ответ:*  $\Delta t = 18,5 \text{ с.}$

**Пример 4.** Пространство между двумя параллельными пластинами площадью  $150 \text{ см}^2$  каждая, находящимися на расстоянии  $5 \text{ мм}$  друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре  $17 \text{ }^\circ\text{C}$ , другая – при температуре  $27 \text{ }^\circ\text{C}$ . Определите количество теплоты, прошедшее за  $5 \text{ мин}$  посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится под атмосферным давлением ( $10^5 \text{ Па}$ ). (**Уровень 4**).

Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным  $0,36 \text{ нм}$ .

**Решение.** Количество теплоты, перенесенное газом в результате теплопроводности от одной пластины к другой,

$$Q = \left| \chi \frac{\Delta T}{\Delta x} S t \right|,$$

где  $\chi$  – коэффициент теплопроводности.

$$\Delta T = t_2^\circ - t_1^\circ;$$

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle \lambda \rangle \langle v \rangle C_V,$$

где  $C_V$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,

$$C_V = \frac{i R}{2 \mu},$$

где  $i$  – число степеней свободы (для кислорода  $i = 5$ );  $\rho = m/V$  – плотность.

Используем уравнение Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

откуда

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n},$$

где  $n$  – концентрация газа.

Уравнение состояния идеального газа

$$p = nkT,$$

откуда

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Средняя арифметическая скорость молекулы  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ .

Так как в условии задачи  $\langle \lambda \rangle$  составляет приблизительно  $10^{-7}$  м (см. пример 1), выполняется условие  $\langle \lambda \rangle \ll L$  (расстояние между пластинами).

Поэтому

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{i R p \mu}{2 \mu R T} \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}.$$

Подставим это выражение в формулу количества теплоты:

$$Q = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi \mu}} \frac{(t_2^\circ - t_1^\circ)}{\Delta x} S t;$$

$$Q = \frac{5}{3} \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{3,14 \cdot (3,6 \cdot 10^{-10})^2} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} \frac{27 - 17}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 76,4 \text{ (Дж)}.$$

Ответ:  $Q = 76,4$  Дж.

**Пример 5.** Найти зависимость коэффициента диффузии от температуры при постоянном давлении. (Уровень 2).

**Решение**

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}}.$$

Поэтому зависимость имеет вид  $D = AT^{3/2}$  при постоянном давлении  $p$ .

Ответ:  $D = AT^{3/2}$ .

**Пример 6.** Найти зависимость коэффициента теплопроводности газа от температуры. (Уровень 3).

**Решение**

Поскольку

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_V \rho,$$

а каждая из величин определяется как

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \quad C_V = \frac{i}{2\mu} R; \quad \langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 p}},$$

то, подставив их в первое равенство, имеем

$$\chi = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{RT}{\sqrt{2\pi d^2 p}} \frac{p\mu}{RT} \frac{v}{2\mu} R,$$

преобразуя, получим

$$\chi = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\pi R}} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{T}{\pi \mu R}},$$

т.е. зависимость имеет вид  $\chi = A\sqrt{T}$ .

Ответ:  $\chi = A\sqrt{T}$ .

**Пример 7.** Найти зависимость коэффициента внутреннего трения в газе от температуры. (Уровень 3).

**Решение.** Поскольку  $\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho$ , то согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT; \quad \frac{p\mu}{RT} = \rho.$$

Длина пробега может быть представлена в виде

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \langle d \rangle^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \text{ где учтено, что } p = nkT,$$

тогда, поскольку

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \text{ получаем } \eta = \frac{1}{3} \frac{p\mu}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Окончательно запишем

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{k}{R} \sqrt{\frac{8R}{\pi\mu}} \frac{\mu}{\sqrt{2}d^2\pi} = A\sqrt{T};$$

$$\eta = A\sqrt{T},$$

$$\text{где } A = \frac{1}{3} \frac{k}{\sqrt{2}\pi d^2} \sqrt{\frac{8\mu}{\pi R}} = \frac{2k}{3\pi d^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\pi R}}; \quad A = \frac{1}{3} \frac{k}{R} \sqrt{\frac{8R}{\pi\mu}} \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi d^2} = \frac{2k}{3\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\pi R}}.$$

$$\text{Ответ: } \eta = \frac{2k}{3\pi} \sqrt{\frac{\mu T}{\pi R}}.$$

**Пример 8.** Найти коэффициент теплопроводности водорода, если известно, что коэффициент вязкости (внутреннего трения) для него при этих условиях равен  $8,6 \cdot 10^{-6}$  кг/мс. (Уровень 2).

**Решение**

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho; \quad \chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_V \rho; \quad C_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}; \quad \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho = 3\eta; \quad \chi = \frac{3\eta}{3} C_V = \frac{i}{2} \eta R;$$

$$\chi = \frac{1}{2} 86 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 10^3 = 90 \cdot 10^{-6} = 9 \cdot 10^{-8} = 0,09 \text{ Вт/мК.}$$

Ответ:  $\chi = 0,09$  Вт/м·К.

**Пример 9.** Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты вязкости  $\eta$  углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковых условиях. (**Уровень 2**).

**Решение**

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho; \quad \rho = \frac{p\mu}{RT}; \quad \langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}};$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3} \frac{p\mu_1}{RT} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_1^2 p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_1}}; \quad \eta_2 = \frac{1}{3} \frac{p\mu_2}{RT} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_2^2 p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_2}};$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\mu_1 d_2^2}{\mu_2 d_1^2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}.$$

*Ответ:*  $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}.$

**Пример 10.** Цилиндрический термос с внешним радиусом  $r_2 = 10$  см и внутренним  $r_1 = 9$  см, высотой 20 см наполнен льдом ( $t_1 = 0^\circ\text{C}$ ). Температура льда  $0^\circ\text{C}$ , наружная температура  $20^\circ\text{C}$  ( $t_2 = 20^\circ\text{C}$ ). (**Уровень 5**).

Задание:

1. При каком максимальном давлении воздуха между стенками термоса коэффициент теплопроводности начнет зависеть от давления? Температуру воздуха считать равной  $10^\circ\text{C}$ , диаметр молекул воздуха  $3 \cdot 10^{-10}$  м,  $\mu = 29$  г/моль.

2. Найти коэффициент теплопроводности воздуха при давлении:

а)  $p_1 = 760$  мм рт. ст.;      б)  $p_2 = 10^{-4}$  мм рт. ст.

3. Какое максимальное количество тепла проходит за 1 мин через боковую поверхность термоса со средним радиусом 9,5 см за счет теплопроводности:

а)  $p_1 = 760$  мм рт. ст.;      б)  $p_2 = 10^{-4}$  мм рт. ст.

**Решение**

1. При  $\langle \lambda \rangle \geq d$  коэффициент теплопроводности зависит от давления:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \Rightarrow p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle \lambda \rangle}, \text{ откуда } p_{кр} = 7,37 \cdot 10^{-3} \text{ мм рт. ст.}$$

2, а. Поскольку  $p_{кр} \ll p_1$ , то

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle C_V \rho = \frac{ik}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{T}{\pi \mu R}} \quad \text{и} \quad \chi = 13,1 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/(м К)}.$$

2, б. Поскольку  $p_{кр} > p_2$ , то  $\langle \lambda \rangle > r_2 - r_1$  и коэффициент теплопроводности не определяется.

3, а. Поскольку  $Q = \chi \frac{\Delta T}{\Delta x} S \Delta t$ , где  $S = 2\pi r h$ ,  $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ ;  $Q = \chi \frac{\Delta T}{\Delta x} 2\pi r h \Delta t$  и  $\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{t_2 - t_1}{d}$ , то после подстановок числовых значений получаем  $Q_1 = 188$  Дж.

3, б. Поскольку  $\langle \lambda \rangle > r_2 - r_1$ ,

$$Q = \frac{\rho \langle v \rangle}{4\mu} c_V \alpha (t_2 - t_1) S t,$$

где  $\rho$  – плотность воздуха при условиях 3, б;  $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ , а температуру  $T$  можно принять равной  $\left[ \frac{t_1 + t_2}{2} + 273 \right]$  К.

Подставляя числовые значения в СИ, получим  $Q_2 = 6,15 \cdot 10^{-2}$  Дж.

*Ответ:*  $Q_1 = 188$  Дж;  $Q_2 = 6,15 \cdot 10^{-2}$  Дж.

## 2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Сосуд емкостью 2 л содержит азот при температуре 27 °С и давлении 0,5 атм. Найти число молекул в сосуде, число столкновений между всеми молекулами за 1 с, среднюю длину свободного пробега молекул.

$$\left[ N = \frac{pVN_A}{RT} = 2,45 \cdot 10^{22} \text{ молекул}; \quad Z = \frac{1}{2} n \sqrt{2} \pi d^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \frac{p}{kT} = 3,04 \cdot 10^{31} \text{ с}^{-1}; \right.$$

$$\left. \langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = 1,92 \cdot 10^{-7} \text{ м}; \text{ уровень } 4, 5]. \right.$$

2. Вакуумная система заполнена водородом при давлении  $10^{-3}$  мм рт. ст. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул водорода при

$$\text{этом давлении, если } t = 50 \text{ °С}. \left[ \langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = 0,143 \text{ м}; \text{ уровень } 1, 2]. \right.$$



3. Определить плотность разреженного азота, если средняя длина свободного пробега молекул 10 см. Какова концентрация молекул?

$$[n_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle \lambda \rangle} = 2,34 \cdot 10^{19} \text{ м}; \rho = \frac{n_0 \mu}{N_A} = 1,09 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3; \text{уровень 3}].$$

4. Определить коэффициент вязкости для водорода, имеющего температуру 27 °С.

$$[\eta = \frac{\sqrt{8\mu RT}}{3\sqrt{2}\pi^3 d^2 N_A} = 8,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}; \text{уровень 3}].$$

5. Вычислить коэффициент внутреннего трения (вязкости) и коэффициент самодиффузии кислорода, находящегося при давлении 0,2 МПа и температуре 280 К.

$$[D = \frac{2kT}{3\pi d^2 \rho} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} = 7,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\eta = \frac{2\sqrt{\mu RT}}{3\pi\sqrt{\pi} d^2 N_A} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}; \text{уровень 3}].$$

6. Наружная поверхность кирпичной стены площадью 25 м<sup>2</sup> и толщиной 37 см имеет температуру 259 К, а внутренняя поверхность – 293 К. Помещение отапливается электроплитой. Определить ее мощность, если температура в помещении поддерживается постоянной. Коэффициент теплопроводности кирпича 0,4  $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

$$[P = -\chi \frac{T_1 - T_2}{d} S = 0,92 \text{ кВт};$$

**уровень 1, 2].**

7. Вычислить коэффициент вязкости  $\eta$  (внутреннего трения) кислорода при нормальных условиях [18 мкПа·с; **уровень 2].**

8. Два горизонтальных диска радиусами  $R = 20$  см расположены друг над другом так, что оси их совпадают. Расстояние  $d$  между плоскостями дисков равно 0,5 см. Верхний диск неподвижен, нижний вращается относительно геометрической оси с частотой  $n = 10 \text{ с}^{-1}$ . Найти вращающий момент  $M$ , действующий на верхний диск. Коэффициент вязкости  $\eta$  воздуха, в котором находятся диски, равен 17,2 мкПа·с.

$$[M = \frac{\pi^2 \eta n R^4}{d} = 0,58 \text{ мН} \cdot \text{м}; \text{уровень 4}].$$

## УЧЕБНЫЙ БЛОК 3

### ТЕРМОДИНАМИКА. АГРЕГАТНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА

**Термодинамика** рассматривает общие свойства макросистем в равновесных состояниях и процессы перехода систем в другие состояния как при сохранении агрегатного состояния вещества, так и при его изменении. В дополнение к механической энергии тел термодинамика включает в рассмотрение состояния систем (тел) тепловую энергию как функцию состояния систем. Кроме этого, в термодинамике к используемому в механике способу изменения энергетического состояния систем, заключающемуся в совершении работы телами или над телами, добавляется другой способ – теплообмен между телами (системами). Взаимные превращения одного вида энергии в другой при изменении состояний систем в термодинамике рассматриваются на основе термодинамических процессов, отличающихся условиями их реализации.

В данном учебном блоке рассматриваются основы термодинамики вещества в газообразном состоянии.

При изучении данного блока студенты должны

**иметь представление:**

- об основных физических величинах: количестве теплоты, работе, удельной теплоемкости, удельной теплоте плавления и парообразования;
- о законе сохранения энергии применительно к тепловым процессам;
- о законе состояния идеального газа;

**обладать навыками:**

- применения элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- составления уравнений теплового баланса.

#### Учебная программа блока

Содержание блока	Форма подготовки	Литература
1. Первое начало термодинамики. Работа газа. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Теплоемкость	лекция	
2. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Теплоемкости идеального газа. Адиабатный процесс. Политропный процесс	лекция	[5]
3. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Цикл Карно	лекция	[6], часть 2
4. Энтропия. Второе начало термодинамики. Вычисление энтропии идеального газа. Статистическое толкование второго начала термодинамики	лекция	[7]
5. Отступления от законов идеальных газов. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса	лекция	[8]
6. Фазовые переходы I и II рода. Критическое состояние. Уравнение Клапейрона – Клаузиуса	лекция	[10]
7. Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. Капиллярные явления	самост.	

### Цели обучения

Студент должен <b>знать</b>	Студент должен <b>уметь</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– определения теплоты, внутренней энергии и работы газа;</li> <li>– связь параметров состояния в различных процессах;</li> <li>– первый закон термодинамики. Смысл величин, входящих в него;</li> <li>– понятие теплоемкости для различных процессов;</li> <li>– политропический процесс;</li> <li>– цикл Карно, термодинамические циклы;</li> <li>– КПД тепловых машин;</li> <li>– определение второго начала термодинамики;</li> <li>– способы вычисления энтропии идеального газа;</li> <li>– статистическое толкование второго начала термодинамики;</li> <li>– уравнение Ван-дер-Ваальса. Смысл поправок для давления и объема;</li> <li>– фазовое состояние вещества. Фазовые переходы I и II рода. Критическое состояние;</li> <li>– уравнение Клапейрона – Клаузиуса;</li> <li>– причины возникновения поверхностного натяжения, формулу Лапласа</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– вычислять изменение внутренней энергии, работу газа и количество теплоты в различных процессах;</li> <li>– определять КПД различных круговых процессов;</li> <li>– вычислять изменение энтропии;</li> <li>– находить связь критических параметров вещества и поправок в уравнении Ван-дер-Ваальса;</li> <li>– определять температуру фазового перехода;</li> <li>– определять работу сил поверхностного натяжения и избыточное давление</li> </ul>

### 3.1. Краткое содержание теоретического материала

Физические свойства макросистем, состоящих из большого количества частиц, изучаются взаимно дополняющими методами: статистическим и термодинамическим. **Термодинамический метод** основан на анализе условий и количественных соотношений при различных превращениях энергии, происходящих в системе. Внутренняя энергия термодинамической системы включает в себя кинетическую энергию движения частиц (поступательного, вращательного и колебательного движения), а также потенциальную энергию их взаимодействия. В модели идеального газа пренебрегают силами межмолекулярного взаимодействия, поэтому внутренняя энергия может быть принята как сумма кинетических энергий хаотического движения всех молекул

$$U = N \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT,$$

где  $i$  – число степеней свободы молекулы.

Изменение внутренней энергии газа связано с изменением температуры:

$$dU = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT .$$

Обмен энергией между системой и внешними телами может осуществляться двумя качественно различными способами: путем совершения работы и путем теплообмена.

*Элементарная работа*, совершаемая газом при изменении его объема,

$$\delta A = p dV .$$

Полная работа при изменении объема газа вычисляется с помощью интегрирования:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV ,$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – соответственно начальный и конечный объемы газа.

Количество теплоты, переданное системе, определяется по формуле

$$Q = cm\Delta T ,$$

где  $c$  – удельная теплоемкость газа в данном процессе.

Связь между молярной  $C$  и удельной  $c$  теплоемкостями газа

$$C = c\mu ,$$

где  $\mu$  – молярная масса газа.

**Первое начало термодинамики** утверждает, что *количество теплоты  $Q$ , сообщаемое системе, затрачивается на приращение внутренней энергии системы  $\Delta U$  и совершение системой работы  $A$  над внешними телами:*

$$Q = \Delta U + A .$$

Первое начало термодинамики в *дифференциальной форме*

$$\delta Q = dU + \delta A .$$

Отличия в записи бесконечно малых величин ( $\delta A$ ,  $\delta Q$ ,  $dU$ ) отражают тот факт, что внутренняя энергия является функцией состояния системы ( $dU$ ), а работа и теплота – функции процесса ( $\delta A$  и  $\delta Q$ ). В отличие от внутренней энергии системы, которая является однозначной функцией параметров состояния этой системы, понятия *теплоты* и *работы* имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Они являются энергетическими характеристиками процесса изменения состояния системы.

Применим первое начало термодинамики к изопроцессам. Запишем закон в развернутом виде:

$$c m dT = dU + p dV .$$

Так, при *изохорном* процессе  $dV = 0$ , т.е. работа  $A = 0$  и вся теплота идет на изменение внутренней энергии газа:  $c m dT = dU$ , где  $dU = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT$ .

Тогда теплоемкость газа при изохорном процессе

$$c = c_V = \frac{dU}{m dT} = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} .$$

Во всех других процессах объем газа изменяется. При *изобарном* процессе работа газа

$$A = p(V_2 - V_1) \quad \text{или} \quad A = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) .$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T \quad \text{или} \quad \Delta U = \frac{i}{2} p \Delta V .$$

Количество теплоты

$$Q = \Delta U + p \Delta V = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T .$$

Удельная теплоемкость газа при изобарном процессе

$$c = c_p = \frac{Q}{m \Delta T} = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu} .$$

*Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении*

$$C_V = \frac{i}{2} R; \quad C_p = \frac{i+2}{2} R .$$

Уравнение Майера связывает молярные теплоемкости газа при изохорном и изобарном процессах:

$$C_p = C_V + R .$$

При *изотермическом* процессе температура газа постоянна, поэтому количество теплоты идет на совершение работы:  $\delta Q = \delta A$ , где  $\delta A = p dV$ .

Работа вычисляется интегрированием:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{или} \quad A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

*Адиабатный* процесс реализуется в условиях теплоизоляции системы, но адиабатным можно считать также процесс, протекающий столь быстро, что за время его осуществления не успевает произойти существенный теплообмен с внешней средой. Из первого начала термодинамики следует, что в адиабатном процессе работа совершается за счет изменения внутренней энергии:  $\delta A = -dU$ , т.е. если газ расширяется, то его температура понижается, а при резком сжатии – возрастает.

Получим соотношение между параметрами состояния газа в адиабатном процессе. Записывая выражения для работы и изменения внутренней энергии  $\delta A = p dV$ ,  $dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$ , где  $C_V = \frac{i}{2} R$  – теплоемкость газа при изохорном процессе, имеем

$$p dV = -\frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Так как  $p = \frac{mRT}{\mu V}$ , получаем  $\frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = -\frac{m}{\mu} C_V dT$ ,  $\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V}$ .

Согласно уравнению Майера  $\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1$ , где  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$  – безразмерная величина, называемая постоянной адиабаты или коэффициентом Пуассона. Поэтому, учитывая, что теплоемкости идеального газа не зависят от температуры, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln T = -(\gamma - 1) \ln V + \text{const}, \quad \ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const}, \quad \ln(TV^{\gamma-1}) = \text{const}.$$

Таким образом, связь температуры и объема газа при адиабатном процессе имеет вид

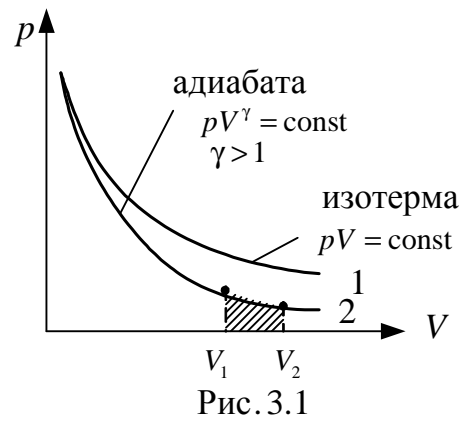
$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (1)$$

Поскольку при любом процессе для идеального газа  $\frac{pV}{T} = \text{const}$ , то давление и объем связаны соотношением

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) являются двумя формами записи **уравнения Пуассона**.

На  $p - V$ -диаграмме (рис. 3.1) адиабатный процесс изображен кривой 2, которая идет круче, чем изотерма, поскольку при адиабатном расширении газа совершается работа и происходит его охлаждение, тогда как при изотермическом расширении температура остается постоянной. (Сравните  $\frac{pV}{T} = \text{const}$  (адиабатный процесс) и



$pV = \text{const}$  (изотермический процесс). Работа при адиабатном процессе противоположна по знаку изменению внутренней энергии (заштрихованная область на рис. 3.1):

$$A = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1),$$

и с учетом связи параметров (1) при адиабатном процессе может быть записана в виде

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

где  $T_1$ ,  $T_2$ , и  $V_1$ ,  $V_2$  – соответственно начальные и конечные температуры и объемы газа.

*Политропическими называются процессы, при которых теплоемкость тела остается постоянной.* Для идеального газа уравнение политропы имеет вид

$$pV^n = \text{const},$$

где  $n$  – показатель политропы,

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Рассмотренные ранее процессы относятся к категории политропических. Изобарному процессу соответствует  $n = 0$ , изотермическому –  $n = 1$ , адиабатному –  $n = \gamma$ , изохорному –  $n = \infty$ .

Для описания термодинамических процессов первого начала термодинамики недостаточно, поскольку оно не позволяет определить направление протекания процесса. В самом деле, процесс самопроизвольной передачи теплоты от холодного тела к горячему не противоречит первому началу термодинамики. Однако опыты показывают, что самопроизвольно такой процесс не протекает. Иначе говоря, *теплота не может самопроизвольно*

(без совершения работы) *переходить от тела менее нагретого к телу более нагретому*. Это **второе начало термодинамики** в формулировке Клаузиуса. В формулировке Томсона постулат второго начала термодинамики состоит в следующем: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет изменения внутренней энергии системы*. Расширим представление о термодинамических процессах. Введем понятие *обратимого* процесса. Термодинамический процесс называется обратимым, если после него можно вернуть систему в начальное состояние таким образом, чтобы в других системах, взаимодействующих с первой, не осталось каких-либо изменений. Необходимое условие обратимого процесса – его *равновесность*. Реальные процессы являются *неравновесными*, и поэтому являются *необратимыми*.

*Круговым процессом* называется термодинамический процесс, в итоге которого система возвращается в исходное состояние. Круговые процессы изображаются в диаграммах  $p - V$ ,  $p - T$  и др. в виде замкнутых контуров, образуемых графиками (в частности – рис. 3.2).

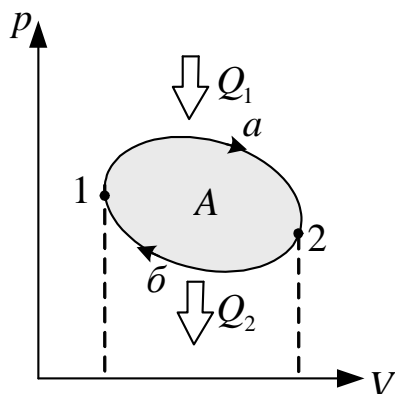


Рис. 3.2

Круговые процессы лежат в основе действия всех *тепловых машин* – устройств, которые превращают внутреннюю энергию в механическую. Основные части тепловой машины – нагреватель, рабочее тело и холодильник. Рабочее тело (обычно газ) получает количество теплоты  $Q_1$  от нагревателя, совершает работу  $A$  за цикл, отдает холодильнику количество теплоты  $Q_2$ . На  $pV$ -диаграмме (см. рис. 3.2) работа равна площади фигуры  $1a2b1$ , ограниченной графиками процессов  $1a2$  и  $2b1$ . Изменение внутренней энергии в круговом процессе равно нулю. Работа, совершаемая за цикл,  $A = Q_1 - Q_2$ .

Эффективность тепловой машины определяется термическим коэффициентом полезного действия (кпд) для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Среди всех круговых процессов большое значение имеет процесс, составленный из четырех процессов: двух изотерм и двух адиабат – цикл Карно (рис. 3.3). Определим кпд такого цикла. Запишем выражения для количеств теплоты и работ, совершаемых рабочим телом на разных участках процесса.



Участок 1 – 2:

$$\text{изотерма} - T_1, Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Участок 2 – 3:

$$\text{адиабата}, Q_{23} = 0, A_{23} = -\Delta U_{23} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

Участок 3 – 4:

$$\text{изотерма} - T_2, Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Участок 4 – 1:

$$\text{адиабата}, Q_{41} = 0, A_{41} = -\Delta U_{41} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2);$$

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23} - A_{34} - A_{41}}{Q_1} = \frac{A_{12} - A_{34}}{Q_1}.$$

Так как по значению  $A_{23} = A_{41}$ ,

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2 \ln \frac{V_1}{V_2} \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1}.$$

Температура и объем в состояниях 2 – 3 и 1 – 4 связаны уравнением Пуассона:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const};$$

$$\begin{cases} T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \\ T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ , следовательно,  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , где  $T_1$  –

температура нагревателя;  $T_2$  – температура холодильника. Коэффициент полезного действия любого реального теплового двигателя не может превышать КПД цикла Карно. Можно показать, что КПД реального цикла меньше, чем цикла Карно, т.к. протекающие в нем процессы являются *неравновесными*.

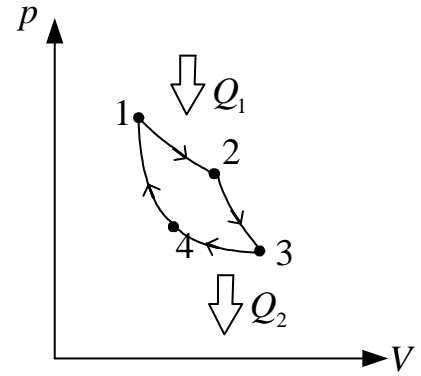


Рис. 3.3

Поскольку КПД, с одной стороны, равен  $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ , с другой стороны,  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , то верно равенство  $1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  и, значит, для обратимого цикла Карно справедливо соотношение

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (3)$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, отданное телу нагревателем, температура которого  $T_1$ ;  $Q_2$  – количество теплоты, отведенной от рабочего тела в холодильник, температура которого  $T_2$ , а отношение  $\frac{Q}{T}$  называют *приведенной теплотой*.

Если под  $Q$  понимать алгебраическую величину, то можно считать, что рабочее тело от холодильника получает количество теплоты  $(-Q_2)$ . Тогда выражение (3) примет вид:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (4)$$

или в общем виде

$$\sum \frac{Q}{T} = 0, \quad (5)$$

т.е. алгебраическая сумма приведенных теплот для обратимого цикла Карно равна нулю.

Более строго выражение (5) можно записать через интеграл по всему циклу:

$$\int \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (6)$$

Так как интеграл по замкнутому контуру равен нулю, то подынтегральное выражение  $\frac{\delta Q}{T}$  является полным дифференциалом некоторой функции, не зависящей от того, как система переходила в этом цикле от одного состояния в другое.

Функция, характеризующая направление протекания самопроизвольных процессов в замкнутой термодинамической системе, называется **энтропией**:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (7)$$

Каждому состоянию тела соответствует определенное значение энтропии, поэтому энтропия является однозначной функцией состояния.

Пусть тело обратимым путем переходит из состояния  $A$  в состояние  $B$ , тогда

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = S_B - S_A = \Delta S_{обр}. \quad (8)$$

При круговом обратимом процессе изменение энтропии  $\Delta S$ , как следует из формулы (6), равно нулю.

Для необратимого процесса

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

или

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} < 0. \quad (9)$$

Для обратимого (4) и необратимого (9) процессов записывают общее соотношение в виде **неравенства Клаузиуса**:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (10)$$

Можно предположить, что при теплообмене системы с  $n$  телами должно выполняться условие, аналогичное (5):

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (11)$$

Таким образом, сумма приведенных теплот для любого цикла не может быть больше нуля. Более строго выражение (11) следует записать в виде

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (12)$$

Согласно (8) при обратимом процессе сумма приведенных количеств теплоты равна изменению энтропии. Для того чтобы выяснить, в каком соотношении находятся сумма приведенных количеств теплоты и изменение энтропии при необратимом процессе, рассмотрим цикл, состоящий из необратимой ( $1 \rightarrow 2$ ) и обратимой ( $2 \rightarrow 1$ ) ветвей (рис. 3.4). Поскольку цикл в целом необратим, сумма приведенных количеств

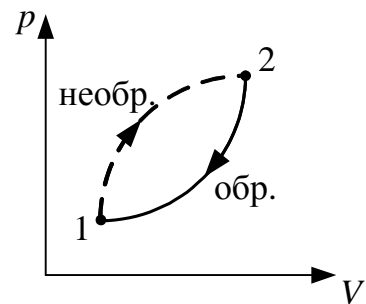


Рис. 3.4

теплоты, взятая по всему циклу, должна быть меньше нуля, согласно (11). Разобьем эту сумму на две части, соответствующие разным ветвям цикла:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{Q_i}{T_i} + \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{Q_i}{T_i} < 0. \quad (13)$$

Второе слагаемое, в соответствии с (8), равно изменению энтропии, или  $\sum_{2 \rightarrow 1} \frac{Q_i}{T_i} = S_1 - S_2$ . Поэтому (13) можно записать следующим образом:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{Q_i}{T_i} + S_1 - S_2 < 0,$$

откуда следует:

$$S_2 - S_1 > \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{Q_i}{T_i},$$

или, в общем случае, когда процесс  $1 \rightarrow 2$  может быть обратимым, получаем

$$S_2 - S_1 \geq \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{Q_i}{T_i}. \quad (14)$$

Соотношение (14) должно выполняться для каждого элементарного процесса

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Если система изолирована, т.е. не обменивается теплом с внешней средой, то  $\delta Q = 0$ , и согласно (14)

$$S_2 - S_1 \geq 0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \Delta S \geq 0.$$

Таким образом, *энтропия изолированной системы может возрастать* (если в системе протекает необратимый процесс) *или оставаться постоянной* (если в системе протекает обратимый процесс). Убывать энтропия изолированной системы не может.

Энтропия, подобно внутренней энергии, – аддитивная величина, энтропия системы равна сумме энтропий всех тел, входящих в состав системы. Изменение энтропии идеального газа в обратимых термодинамических процессах можно рассчитать с использованием первого начала термодинамики и полученных выше выражений для изменения внутренней энергии и работы для соответствующих процессов. Для рассмотренных процессов выражения, характеризующие изменение энтропии, приведены в табл. 1 изменения энтропии в процессах идеального газа.

## Изменение энтропии в процессах идеального газа

Изохорный ( $V = \text{const}$ )	Изобарный ( $p = \text{const}$ )	Изотермический ( $T = \text{const}$ )	Адиабатный ( $S = \text{const}$ )
$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$	$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0$

До сих пор, рассматривая второй закон термодинамики, мы пользовались термодинамическим методом исследования. Однако существует связь второго закона термодинамики с молекулярно-кинетической теорией строения вещества. Раскрытие этой связи позволяет глубже понять физический смысл энтропии.

С молекулярно-кинетической точки зрения каждому состоянию газа (системы частиц) соответствует некоторое распределение его молекул по объему, а также по скоростям (импульсам и энергиям). Предположим, что система, изолированная от внешней среды, содержит 4 частицы ( $n = 4$ ) и занимает объем  $V$  (рис. 3.5). Предположим, что частицы «меченые», а объем разбит на две равные ячейки. Будем считать, что различные состояния отличаются только распределением молекул 1, 2, 3, 4 по двум ячейкам. Представим в виде таблицы все возможные состояния такой системы.

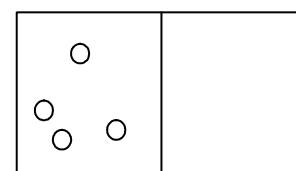


Рис. 3.5

## Возможные состояния системы

Макросостояние	Возможные микросостояния*	$\Gamma$ (число микросостояний)	$\omega$ (вероятность макросостояния)
1. Справа нет частиц ( $m = 0$ )	0000	1	1/16
2. Справа одна частица ( $m = 1$ )	1000, 0100, 0010, 0001,	4	4/16
3. Справа две частицы ( $m = 2$ )	1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011,	6	6/16
4. Справа три частицы ( $m = 3$ )	0111, 1011, 1101, 1110,	4	4/16
5. Справа четыре частицы ( $m = 4$ )	1111	1	1/16

\* Если частица находится слева, это обозначено цифрой «0», если справа – «1».

Состояния, перечисленные в одной ячейке (см. табл. 2), в макромасштабе неразличимы и обладают одинаковой энергией.

Число микросостояний, с помощью которого реализуется данное макросостояние, называется *статистическим весом*  $\Gamma$  или кратностью вырождения макросистемы. Вероятностью данного макросостояния называется отношение соответствующего значения  $\Gamma$  к количеству всех возможных микросостояний. Из табл. 2 видно, что статистический вес  $\Gamma$  и вероятность состояния одновременно достигают максимального значения. Минимальной вероятностью обладает состояние, реализуемое единственным способом.

Рассмотрим сосуд, в котором содержится  $N_A$  частиц, и они занимают объем  $V_0$ . Выделим внутри малый объем  $V$ . Вероятность обнаружить там одну частицу

$$\omega_1 = \frac{V}{V_0},$$

вероятность встретить там две частицы (поскольку эти события независимы)

$$\omega_2 = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2,$$

вероятность там встретить все  $N_A$  частиц

$$\omega_{N_A} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{N_A}. \quad (15)$$

Поскольку выделенный объем мал, то вероятность  $\omega_{N_A} \ll 1$ , поэтому состояние никогда не реализуется. Для этого состояния статистический вес  $\Gamma = 1$ , т.е. состояние реализуется единственным способом. Прологарифмируем выражение (15):

$$\ln \omega_{N_A} \sim N_A \ln \frac{V}{V_0}.$$

Сравнивая это выражение с соотношением для изменения энтропии (см. табл. 2) при изобарном процессе

$$S \sim R \ln \frac{V}{V_0},$$

можно записать:  $S \sim k \ln \omega_{N_A}$ . Поскольку вероятность состояния  $\omega \sim \Gamma$ , то между энтропией системы и ее статистическим весом существует связь, которая описывается **формулой Больцмана**

$$S = k \ln \Gamma.$$

Эта формула позволяет дать статистическое толкование второго начала термодинамики. Для реальных процессов  $\Delta S \geq 0$ , следовательно, замкнутая термодинамическая система стремится перейти из состояний менее вероятных в состояния более вероятные, пока не достигнет равновесного состояния, которое является наиболее вероятным. Иными словами, **второе начало термодинамики** имеет **статистический характер**, выражающий стремление системы, состоящей из большого количества частиц, к самопроизвольному переходу из состояний менее вероятных в состояния более вероятные.

К системам с малым количеством частиц второй закон термодинамики неприменим. Так, в сильно разреженных газах происходят значительные случайные отклонения от равномерного распределения молекул по объему. Подобные отклонения называются *флуктуациями* (отклонения параметров от средних значений, например, плотности, температуры, давления). Флуктуации обусловлены тепловым движением частиц макросистемы. Можно показать, что в газе относительная флуктуация концентрации

$$\frac{\Delta n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{N}},$$

где  $N$  – количество частиц.

Если в сосуде  $N \sim 10^8$  частиц (сильно разреженный газ), то  $\Delta n/n \sim 10^{-4}$ , а если в сосуде  $N \sim 10^{23}$  частиц, то  $\Delta n/n \sim 10^{-12}$ . Видно, что вероятность заметных отклонений параметров газа от средних величин в последнем случае ничтожно мала.

Реальный газ хорошо описывается уравнением

$$pV = \nu RT$$

только при малых плотностях, т.е. при небольшом давлении и достаточно высоких температурах. С повышением давления и уменьшением температуры наблюдается значительное отступление от уравнения Менделеева – Клапейрона.

Самым простым и вместе с тем дающим хорошие результаты при описании газов в широком интервале плотностей оказалось **уравнение Ван-дер-Ваальса**

$$\left( p + \frac{a}{V_{\mu}^2} \right) (V_{\mu} - b) = RT,$$

где  $p$  – давление газа;  $V_{\mu}$  – молярный объем;  $a$  и  $b$  – постоянные Ван-дер-Ваальса, имеющие для разных газов различные значения.

Поправка  $\frac{a}{V_\mu^2}$  характеризует ту добавку к внешнему давлению, которая обусловлена взаимным притяжением молекул друг к другу. Поправка  $b$  определяет ту часть объема, которая недоступна для движения молекул. Она возникает вследствие того, что молекулы обладают конечным объемом и пространство, доступное для движения молекул, оказывается меньшим, чем объем сосуда  $V_\mu$ . Уравнение можно переписать для произвольной массы газа  $m$ , учитывая, что  $V = \nu V_\mu$ ,

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

где  $\nu = m/\mu$  – количество вещества. Или иначе

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) (V - b\nu) = \nu RT. \quad (16)$$

Реальные газы следуют уравнению Ван-дер-Ваальса лишь приближенно. Воображаемый газ, точно подчиняющийся уравнению (16), называется *ван-дер-ваальсовским*.

Внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского газа должна включать в себя, кроме кинетической энергии молекул, энергию взаимодействия между молекулами. Кинетическая энергия молекул равна внутренней энергии идеального газа ( $\nu = 1$  моль)

$$U = C_V T,$$

При изменении объема газа от  $V_1$  до  $V_2$  внутреннее давление  $a/V_\mu^2$  совершает работу, которая для 1 моля равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V_\mu^2} dV = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}.$$

Так как работа внутренних сил равна убыли потенциальной энергии системы, то можно считать, что  $a/V_m$  – искомое выражение для потенциальной энергии одного моля газа. Окончательно внутренняя энергия одного моля газа может быть записана в виде  $U_\mu = C_V T - \frac{a}{V_\mu}$ .

Или в случае произвольного количества молей газа

$$U = \nu C_V T - \frac{a\nu^2}{V}. \quad (17)$$



На рис. 3.6 представлена графически связь между объемом и давлением газа при разных температурах (чем больше температура, тем выше располагается изотерма). Эти кривые называются *изотермами Ван-дер-Ваальса*. При высоких температурах они имеют форму, близкую к гиперболе, и описывают газообразное состояние вещества (почти идеальный газ).

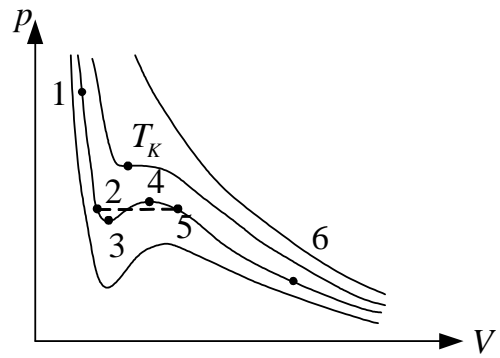


Рис. 3.6

По мере уменьшения температуры форма изотермы изменяется, и при некоторой критической температуре обнаруживается точка перегиба. Рассмотрим изотермы ниже  $T_k$ . Измерения показывают, что изотермы реального газа приближаются к изотермам Ван-дер-Ваальса на участках 1 – 2, соответствующих жидким состояниям, и на участках 5 – 6, соответствующих парообразным состояниям вещества; однако в средней части реальная изотерма идет не по кривой 2 – 3 – 4 – 5, а по изобаре 2 – 5 (в точке 2 – кипящая жидкость, в точке 5 – насыщенный пар). Но если опыты провести с очень чистым веществом, а сжатие (расширение), подвод и отвод теплоты производить достаточно медленно, то можно обнаружить состояния, соответствующие участкам 2 – 3 (перегретая жидкость) и 5 – 4 (пересыщенный пар). Не реализуется только часть изотермы Ван-дер-Ваальса – участок 3 – 4.

На изотерме Ван-дер-Ваальса при  $T = T_k$  появляется точка перегиба, для которой газ характеризуется критическими параметрами  $T_k$  и  $V_k$ . Приравняв нулю первую и вторую производные левой части уравнения (16), получаем

$$V_k = 3b; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно по известным  $a$  и  $b$  вычислить критические параметры вещества и наоборот – определить постоянные  $a$  и  $b$ .

*Фазой вещества* называется совокупность однородных, одинаковых по своим свойствам частей системы. Например, в закрытом сосуде находится вода и над ней – смесь пара воды и воздуха. В этом случае имеем дело с системой из двух фаз: одну фазу образует вода, вторую – смесь воздуха и паров воды. Три фазы одного и того же вещества (твердая, жидкая, га-

зообразная или жидкая и две твердых) могут находиться в равновесии только при единственных значениях температуры и давления, которым на диаграмме  $p - T$  соответствует тройная точка. В термодинамике доказывается, что равновесие более чем трех фаз одного и того же вещества невозможно.

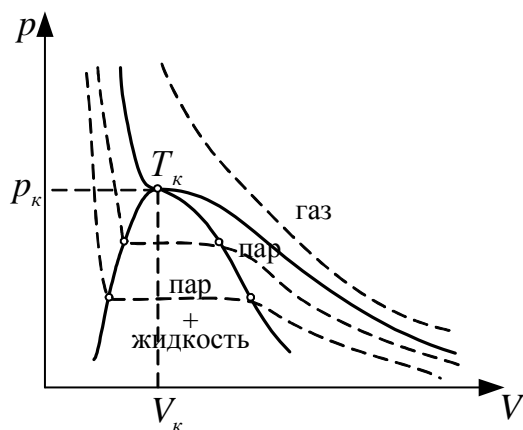


Рис. 3.7

Если для изотерм Ван-дер-Ваальса (см. рис. 3.6) провести линию через крайние точки горизонтальных участков изотерм, получается колоколообразная кривая, ограничивающая область двухфазных состояний вещества (рис. 3.7). При температурах выше критической вещество при любом давлении оказывается однородным. Необходимо отметить, что с термодинамической точки зрения различия между понятиями «пар» и «газ» не существует.

Различают два типа превращений вещества из одной фазы в другую при изменении внешних условий: *фазовые переходы первого (1) и второго (2) рода*. При фазовом переходе 1 рода скачкообразно изменяются такие характеристики вещества, как плотность, удельный и молярный объемы, и что особенно характерно, выделяется или поглощается теплота, называемая *теплотой фазового перехода*. Примерами фазовых переходов 1 рода могут служить превращения вещества из одного агрегатного состояния в другое (испарение и конденсация, плавление и кристаллизация и т.д.), фазовые превращения твердых тел из одной кристаллической модификации в другую, переход вещества из сверхпроводящего состояния в нормальное под действием сильного магнитного поля.

Определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе можно с помощью *уравнения Клапейрона – Клаузиуса*

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2 - V_1)},$$

где  $q_{12}$  – теплота фазового перехода;  $(V_2 - V_1)$  – изменение удельного объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую;  $T$  – температура перехода (процесс изотермический).

При фазовом переходе 2 рода теплота не поглощается и не выделяется, скачкообразно изменяются такие характеристики вещества, как молярная теплоемкость, коэффициент теплового расширения, удельная проводимость, вязкость. Примерами фазовых переходов могут служить: переход некоторых металлов при низких температурах из нормального в сверхпроводящее состояние, переход гелия из одной модификации в другую, обладающую свойством сверхтекучести, переход вещества из ферромагнитного в парамагнитное состояние при температуре, называемой точкой Кюри.

В четвертом учебном блоке второго модуля мы изучали гидромеханику, т.е. рассматривали движение жидкости как целого. Однако влияние на состояние жидкости явлений, происходящих на границах раздела сред, обусловленных взаимодействием молекул вещества в жидкой фазе с твердым телом или газом, не рассматривалось. К ним, в частности, относятся *капиллярные явления*. Поверхность жидкости характеризуется *текучестью*, *несжимаемостью* и наличием *свободной поверхности*. В жидкостях расстояния между молекулами значительно меньше, чем в газах. Поэтому силы взаимодействия между молекулами играют существенную роль. В поверхностном слое жидкости возникает избыточное молекулярное давление, направленное по нормали внутрь жидкости. Переход молекул из глубины жидкости в поверхностный слой сопровождается работой против сил молекулярного притяжения. Молекулы жидкости в приповерхностном слое обладают дополнительной потенциальной энергией. Поскольку положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии, жидкость, предоставленная самой себе, будет принимать форму с минимальной поверхностью. Силы поверхностного натяжения направлены по касательной к поверхности жидкости. Коэффициент поверхностного натяжения, характеризующий силы поверхностного натяжения,

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где  $F$  – сила поверхностного натяжения, действующая на контур  $l$ , ограничивающий поверхность жидкости;  $\Delta E$  – изменение поверхностной энергии, пропорциональное изменению площади  $\Delta S$  поверхности жидкости.

Поверхность жидкости представляет собой как бы растянутую пленку, которая стремится сократиться, и возникает избыточное давление, обусловленное силами поверхностного натяжения.

**Формула Лапласа** позволяет определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклая поверхность), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутая поверхность). Форма поверхности жидкости определяется явлением *смачивания*, которое обусловлено совокупным влиянием сил притяжения между молекулами взаимодействующих пар «жидкость – жидкость» и «жидкость – твердое тело».

В случае сферической поверхности избыточное давление

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

В трубках малого сечения силы поверхностного натяжения могут приводить к заметному подъему жидкости в трубке или препятствовать ее проникновению в трубку в зависимости от смачиваемости стенок трубки.

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке со смачиваемой поверхностью (рис. 3.8, *a*) определяется формулой

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r},$$

где  $\theta$  – краевой угол смачивания;  $r$  – радиус капилляра;  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения.

Положение жидкости в случае несмачиваемой поверхности трубки показано на рис. 3.8, *б*.

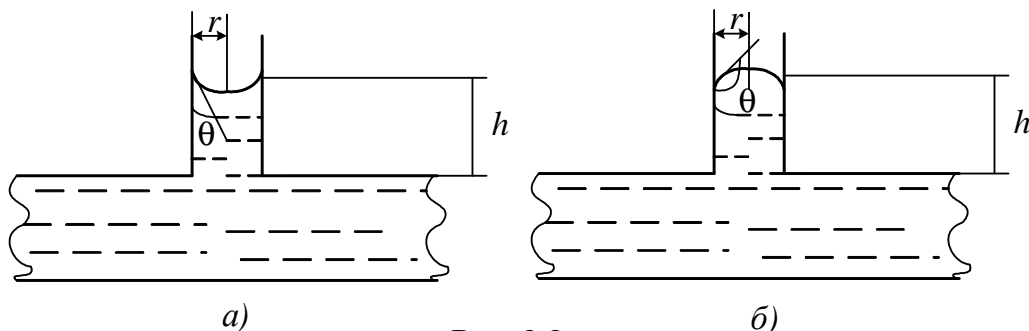


Рис.3.8

### 3.2. Методические указания к лекционным занятиям

Вопросы лекции	Форма изучения	Литература	Вопросы для самоконтроля
<p><b>Термодинамика</b>  Первое начало термодинамики. Работа газа. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Теплоемкость  Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Зависимость теплоемкости идеального газа от вида процесса. Адиабатный процесс. Политропный процесс  Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Цикл Карно  Энтропия. Второе начало термодинамики. Вычисление энтропии идеального газа.  Статистическое толкование второго начала термодинамики  Отступления от законов идеальных газов. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса  Фазовые переходы 1 и 2 рода. Критическое состояние.  Уравнение Клапейрона – Клаузиуса  Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. Капиллярные явления</p>	<p>лекция + самост.  лекция  лекция  лекция  лекция + самост.  лекция + самост.</p>	<p>[5], пп. 5.16, 5.17 [6], пп. 8 – 10 [8], п. 13.3 [7], пп. 9.2, 9.3 [10], пп. 51, 52 [5], п. 5.18 [6], пп. 11 – 13 [7], пп. 9.4 – 9.6 [10], пп. 53 – 55 [5], пп. 5.20 – 5.22] [8], п. 13.4 [6], п. 14 [7], п. 9.8 [10], пп. 5.6 – 5.9 [6], пп. 15, 16 [7], пп. 9.7, 9.8 [8], п. 13.5 [10], пп. 57, 58 [7], п. 9.10 [5], п. 5.37 [6], пп. 24 – 26 [10], пп. 6.1 – 6.2 [5], п. 5.33 [7], п. 10.5 [6], пп. 28, 29 [10], пп. 75, 76 [6], пп. 30, 32 [7], п. 10.4 [10], пп. 66 – 69</p>	<p>1. Что означают термины «термодинамическое равновесие», «термодинамическая система», «равновесное состояние»?  2. От чего зависит внутренняя энергия идеального газа?  3. Сформулируйте I начало термодинамики. Почему работа и количество теплоты не являются функциями состояния системы?  4. От чего зависит теплоемкость идеального газа?  5. Приведите примеры политропических процессов.  6. В чем различие обратимых и необратимых процессов? Почему реальные процессы необратимы?  7. Почему кпд цикла Карно является предельно максимальным?  8. Поясните статистический смысл энтропии.  9. Определите энтропию идеального газа при изотермическом процессе.  10. Каков физический смысл постоянных Ван-дер-Ваальса в уравнении состояния реального газа?  11. Что означают термины «критические параметры» и «тройная точка»?  12. В чем отличие фазовых переходов 1 и 2 рода?  13. Поясните механизм возникновения избыточного (лапласова) давления.</p>

### 3.3. Методические указания к практическим занятиям

Тема	Задачи	Рекомендации	Задачи из сборников
Термодинамика	<p>Работа. Количество теплоты. Изопроцессы. Адиабатный процесс</p>	<p>При решении задач данного раздела необходимо считать процессы квазистатическими, то есть все промежуточные состояния равновесны. Это позволяет записывать I начало термодинамики в интегральном виде. Анализ задач целесообразно начинать с графического изображения процессов, причем удобнее всего представлять их в координатах <math>p - V</math>, поскольку площадь под кривой, которая описывает процесс, при этом будет равна работе.</p> <p>Необходимо помнить, что работа при изохорном процессе равна 0, а при адиабатном процессе количество теплоты равно 0. В дополнение к I началу термодинамики, как правило, используется уравнение состояния идеального газа <math>\frac{pV}{T} = \text{const}</math> (или в виде <math>pV = \frac{m}{\mu} RT</math>).</p> <p>При определении внутренней энергии необходимо учитывать число степеней свободы молекул газа, которое зависит от структуры молекул. Использование дифференциальной записи I начала термодинамики необходимо только в том случае, когда с помощью этого закона и уравнения состояния нужно найти уравнение процесса, работу или теплоемкость газа.</p>	<p>[11], №№ 2.56 – 2.67 [12], №№ 11.1 – 11.70</p>



### 3.4. Примеры решения задач

**Пример 1.** Молекулярный пучок кислорода ударяется о неподвижную стенку. После соударения молекулы отражаются от стенки с той же по модулю скоростью. Определите давление пучка на стенку, если средняя скорость молекул 500 м/с и концентрация молекул в пучке  $5 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$ . (Уровень 3).

**Решение.** Давление определяется по формуле

$$p = \frac{F}{S}, \quad (1)$$

где  $F$  – сила давления,  $S$  – площадь.

Силу давления найдем из второго закона Ньютона

$$Ft = m\Delta v, \quad (2)$$

где  $m$  – масса молекул кислорода, ударившихся о стенку за время  $t$ ,  $\Delta v$  – изменение скорости молекул при ударе.

Массу одной молекулы кислорода найдем из закона Авогадро:

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

где  $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  – молярная масса кислорода;  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число Авогадро.

За время  $t$  о стенку ударяются молекулы, находящиеся в объеме

$$V = Sv t,$$

масса которых

$$m = m_0 n_0 v t S. \quad (3)$$

Изменение скорости при соударении

$$\Delta v = v - (-v) = 2v. \quad (4)$$

Подставляя выражения (3), (4) в (2), находим

$$Ft = \frac{\mu n_0 v t S 2v}{N_A} = \frac{2\mu n_0 v^2 t S}{N_A},$$

откуда

$$p = \frac{F}{S} = \frac{2\mu v^2 n_0}{N_A}.$$

$$p = \frac{5 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^4}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,33 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

**Ответ:**  $p = 1,33 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .



**Пример 2.** Определить количество теплоты, поглощаемое водородом массой  $m = 0,2$  кг при нагревании его от температуры  $t_1 = 0$  °С до температуры  $t_2 = 100$  °С при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу. (**Уровень 3, 4**).

**Решение.** Количество теплоты  $Q$ , поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q = mc_p \Delta T, \quad (1)$$

где  $m$  – масса нагреваемого газа;  $c_p$  – его удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\Delta T$  – изменение температуры газа.

Как известно,  $c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}$ . Подставив это выражение  $c_p$  в формулу (1), получим

$$Q = m \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu} \Delta T.$$

Поскольку водород – двухатомный газ, то число степеней свободы  $i = 5$  (связь жесткая), и, произведя вычисления, найдем

$$Q = 291 \text{ кДж.}$$

Внутренняя энергия выражается формулой

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Следовательно, изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

После подстановки в эту формулу числовых значений и вычислений получим

$$\Delta U = 208 \text{ кДж.}$$

Работу расширения газа определим по формуле, выражающей первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

откуда

$$A = Q - \Delta U.$$

Подставив значения  $Q$  и  $\Delta U$ , найдем

$$A = 83 \text{ кДж.}$$

*Ответ:*  $Q = 291$  кДж;  $\Delta U = 208$  кДж;  $A = 83$  кДж.

**Пример 3.** Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу  $A = 600$  Дж. Температура нагревателя  $T_1 = 500$  К, холодильника  $T_2 = 300$  К. Определить: 1) кпд цикла; 2) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл. (**Уровень 1**).

**Решение.** Коэффициент полезного действия цикла Карно  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ .

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2 = Q_1 - A, \quad (1)$$

а количество теплоты, полученной от нагревателя,

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}.$$

Подставив это выражение в (1), получим

$$Q_2 = A \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right).$$

Вычисляя, получаем:  $\eta = 0,4$ ;  $Q_2 = 900$  Дж.

*Ответ:*  $\eta = 0,4$ ;  $Q_2 = 900$  Дж.

**Пример 4.** Тепловая машина работает по циклу Карно. При изотермическом расширении двухатомного газа его объем увеличивается в 3 раза, а при последующем адиабатном расширении – в 5 раз. Определить кпд цикла. Какую работу совершает 1 кмоль газа за один цикл, если температура нагревателя 300 К? Какое количество теплоты получит от холодильника машина, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении, и какое количество теплоты будет передано нагревателю? (**Уровень 5**).

**Решение.** Коэффициент полезного действия цикла Карно определяется формулой

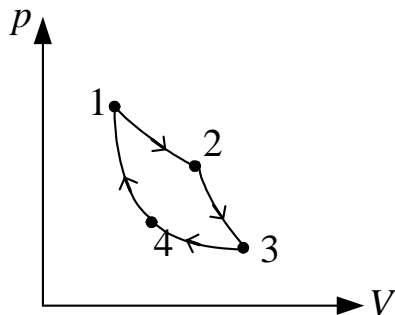
$$\eta = \frac{T_1 - T_3}{T_1}, \quad (1)$$

где  $T_1$  – температура нагревателя,  $T_3$  – температура холодильника.

При адиабатном процессе 2 – 3 (см. рисунок)

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  – показатель степени адиабаты (для двухатомного газа  $\gamma = 1,4$ ).



Из равенства (2) находим  $T_3 = T_2 \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = T_2 n^{1-\gamma}$ , где  $n_1 = \frac{V_3}{V_2}$ .

Так как  $T_1 = T_2$ , то из равенства (1) получаем

$$\eta = \frac{T_1 - T_1 n^{1-\gamma}}{T_1} = 1 - n^{1-\gamma}, \text{ где } n^{1-\gamma} = 5^{1-1,4} = 0,525.$$

Следовательно,

$$\eta = 1 - 0,525 = 0,475; \quad \eta = 47,5 \text{ \%}.$$

Работа в цикле Карно определяется разностью количества теплоты  $Q_1$ , полученного в процессе 1 – 2, и  $Q_2$ , отданного в процессе 3 – 4:

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (3)$$

При изотермическом процессе

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad Q_2 = \nu RT_3 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

Так как  $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} = n_2$ , то

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln n_2 \quad \text{и} \quad Q_2 = -\nu RT_3 \ln n_2. \quad (4)$$

Знак «–» указывает, что на участке 3 – 4 теплота отдается холодильнику.

Следовательно,

$$A = \nu R(T_1 - T_3) \ln n_2 = \nu RT_1 (1 - n_1^{1-\gamma}) \ln n_2. \quad (5)$$

Подставим числовые значения в равенство (5):

$$A = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 142,5 = 1,3 \text{ МДж}.$$

При обратном цикле Карно газ расширяется по адиабате 1 – 4, затем по изотерме 4 – 3, получая при этом от холодильника количество теплоты  $Q_2$ , далее газ сжимается по адиабате 3 – 2, затем по изотерме 2 – 1, отдавая при этом количество теплоты  $Q_1$ . По формулам (4) находим:

$$Q_1 = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 300 = 2,74 \text{ МДж}$$

$$Q_2 = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 1,1 \cdot 156 = 1,44 \text{ МДж}.$$

*Ответ:*  $\eta = 47,5 \text{ \%}$ ;  $A = 1,3 \text{ МДж}$ ;  $Q_1 = 2,74 \text{ МДж}$ ;  $Q_2 = 1,44 \text{ МДж}$ .

**Пример 5.** Некоторое количество воздуха адиабатно сжимается. При этом его давление изменяется от  $p_1 = 100$  кПа до  $p_2 = 1,2$  МПа. Затем сжатый воздух охлаждают при постоянном объеме до температуры исходного состояния. Определить давление  $p_3$  в конечном состоянии. (**Уровень 2**).

**Решение.** Согласно уравнению Пуассона для адиабатного процесса  $pV^\gamma = \text{const}$ , и с учетом уравнения состояния идеального газа  $\frac{pV}{T} = \text{const}$  связь параметров  $p$  и  $T$  можно определить уравнением (еще одна форма уравнения Пуассона)

$$\frac{T^\gamma}{p^{1-\gamma}} = \text{const}.$$

Для состояний газа 1 и 2 запишем равенство

$$\frac{T_1^\gamma}{p_1^{1-\gamma}} = \frac{T_2^\gamma}{p_2^{1-\gamma}},$$

где  $\gamma = 1,4$ , поскольку воздух принято считать двухатомным газом.

Во втором процессе, при изохорном охлаждении

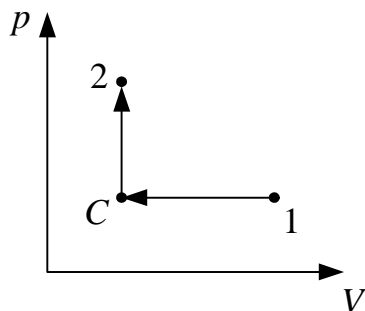
$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}. \quad (1)$$

Выражаем  $T_2$  и подставляем в (1), учитывая, что  $T_3 = T_1$ . Находим  $p_3$ :

$$p_3 = p_2 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Вычисляя, получаем  $p_3 = 590$  кПа.

*Ответ:*  $p_3 = 590$  кПа.



**Пример 6.** Некоторая масса азота в первом состоянии имеет давление  $p_1 = 100$  кПа и объем  $V_1 = 10^{-2}$  м<sup>3</sup>, а во втором состоянии  $p_2 = 300$  кПа и объем  $V_2 = 0,4 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>. Переход из первого состояния во второе осуществляется в два этапа: сначала по изобаре, а затем по изохоре (см. рисунок). Определить изменение внутренней энергии  $\Delta U = 0$ , совершенную газом работу  $A$  и количество теплоты, поглощенное газом,  $Q$ . (**Уровень 3**).

**Решение.** Внутренняя энергия системы является ее функцией состояния, следовательно, изменение определяется разностью энергий в конечном и начальном состояниях:  $\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)$ , где  $i = 5$  – число степеней свободы для молекул азота.

Разность температур определим, используя уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu}{mR} (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Следовательно,  $\Delta U = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$ .

Переход системы из состояния 1 в состояние 2 сопровождается совершением работы на участке 1С:

$$A = A_{1C} = p_1 (V_2 - V_1),$$

$A_{C2} = 0$ , поскольку участок С2 соответствует изохорному нагреву.

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии газа и на совершение работы:

$$Q = \Delta U + A_{1C} = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + p_1 (V_2 - V_1).$$

Подставляя числовые значения, вычисляем:  $\Delta U = 500$  Дж;  $A = -600$  Дж;  $Q = -100$  Дж.

*Ответ:*  $\Delta U = 500$  Дж;  $A = -600$  Дж;  $Q = -100$  Дж.

**Пример 7.** Определить изменение энтропии  $\Delta S$  при изотермическом расширении азота массой  $m = 10$  г, если давление газа уменьшилось от  $p_1 = 0,1$  МПа до  $p_2 = 50$  кПа. (**Уровень 2**).

**Решение.** Учитывая, что процесс изотермический, изменение энтропии

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \quad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты, полученной газом при изотермическом процессе, равно работе:  $Q = A$ , т.к.  $\Delta U = 0$ , а работа газа в этом процессе

$$A = \int p dV = \frac{m}{\mu} \int p \left( -\frac{dp}{p^2} \right) = -\frac{m}{\mu} RT \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}.$$

Здесь учтено, что  $pV = \frac{m}{\mu}RT$  и при  $T = \text{const}$  верно равенство

$$dV = -\frac{dp}{p^2}.$$

Поэтому искомое изменение энтропии

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем  $\Delta S = 2,1$  Дж/К.

*Ответ:*  $\Delta S = 2,1$  Дж/К.

**Пример 8.** Некоторый газ количеством вещества  $\nu = 1000$  моль занимает объем  $V_1 = 1$  м<sup>3</sup>. При расширении газа до объема  $1,5$  м<sup>3</sup> была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения  $A = 45,3$  кДж. Определить поправку  $a$ , входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса. (**Уровень 2**).

**Решение.** Работа против сил межмолекулярного притяжения выражается формулой

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p' dV,$$

где  $p' = \frac{\nu^2 a}{V^2}$  – внутреннее давление, обусловленное взаимодействием молекул.

Таким образом, работа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu^2 a}{V^2} dV = \nu^2 a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right),$$

откуда искомая поправка  $a = \frac{AV_1V_2}{\nu^2(V_2 - V_1)}$ .

Вычисляя, получаем  $a = 0,136$  Нм<sup>4</sup>/моль<sup>2</sup>.

*Ответ:*  $a = 0,136$  Нм<sup>4</sup>/моль<sup>2</sup>.

**Пример 9.** В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре  $h = 37$  мм. Принимая плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>, а ее поверхностное натяжение  $\sigma = 0,5$  Н/м, определить радиус кривизны ртутной поверхности в капилляре. Считать ртуть несмачиваемой жидкостью. (**Уровень 2**).

**Решение.** Избыточное (лапласово) давление, вызванное кривизной поверхности ртути, принимая ее как полусферу с радиусом  $R$ , запишем в виде

$$\Delta p = \frac{2\sigma \cos \theta}{R},$$

где  $\theta = 180^\circ$ .

Так как ртуть – несмачивающая жидкость, то она в капилляре опускается на такую высоту, при которой гидростатическое давление столба ртути в сосуде  $p = \rho gh$  уравнивается избыточным давлением  $\Delta p$  в капилляре, т.е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh.$$

Отсюда радиус кривизны поверхности ртути  $R = \frac{2\sigma}{\rho gh}$ .

Вычисляя, получаем  $R = 2,03$  мм.

Ответ:  $R = 2,03$  мм.

### 3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить удельную теплоемкость  $c_{V_{см}}$  смеси двух газов (гелия массой  $m_1 = 6$  г и азота массой  $m_2 = 10$  г) при постоянном объеме.

$$[c_{V_{см}} = \frac{3\left(\frac{m_1}{\mu_1}\right) + 5\left(\frac{m_2}{\mu_2}\right)}{m_1 + m_2} \frac{R}{2} = 1,63 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \text{уровень 3}].$$

2. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в одинаковых объемах. Определить показатель адиабаты  $\gamma$  такой смеси. [1,5; уровень 4].
3. Какая работа  $A$  совершается при изотермическом расширении водорода массой  $m = 5$  г при температуре  $T = 290$  К, если объем газа увеличивается в три раза? [6,62 кДж; уровень 2].
4. Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщено количество теплоты  $Q = 21$  кДж. Определить работу  $A$ , которую совершил при этом газ, и изменение  $\Delta U$  его внутренней энергии. [6 кДж; 15 кДж; уровень 3].

5. В цилиндре под поршнем находится водород массой  $m = 0,02$  кг при температуре  $T_1 = 300$  К. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найти температуру  $T_2$  в конце адиабатного расширения и полную работу  $A$ , совершенную газом. Изобразить процесс графически. [157 К;  $-21$  кДж; **уровень 3**].
6. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа  $A_1$  изотермического расширения газа равна 5 Дж. Определить работу  $A_2$  изотермического сжатия, если термический КПД цикла равен 0,2. [4 Дж; **уровень 1**].
7. Кислород массой 1 кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатном расширении совершается работа 3000 Дж. Определить работу, совершенную за цикл. [831,6 Дж; **уровень 5**].
8. В результате изотермического расширения объем кислорода массой 8 г увеличился в 2 раза. Определить изменение энтропии газа.  
 $[\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = 1,44 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}; \text{уровень 3}]$ .
9. Лед массой 2 кг, находящийся при температуре  $-13$  °С, нагрели до 0 °С и расплавили. Определить изменение энтропии, если теплота фазового перехода равна  $q$ .  $[\Delta S = m \left( c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{q}{T_2} \right) = 2,66 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}; \text{уровень 4}]$ .
10. В сосуде емкостью 10 л находится 360 г водяного пара при температуре 470 К. Вычислить давление пара на стенки сосуда. Какую часть объема  $V$  составляет объем  $V'$ , занимаемый молекулами пара? Какую часть давления  $p$  составляет внутреннее давление  $p'$ ? [ $p = 8,29 \cdot 10^6$  Па;  $\frac{V'}{V} = 1,5 \%$ ,  $\frac{p'}{p} = 0,3 \%$ ; **уровень 4, 5**].
11. Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь? [ $A = 2\pi d^2 \sigma = 2,5 \cdot 10^{-3}$  Дж; **уровень 3**].



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Некоторые внесистемные единицы, применяемые наравне с единицами СИ

Физическая величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	$10^3$ кг
	атомная единица массы	а.е.м.	$1,66057 \cdot 10^{-27}$ кг
Плоский угол	градус	...°	$(\pi/180)$ рад = $1,745329 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	...'	$(\pi/10800)$ рад = $2,90888 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	...''	$(\pi/648000)$ рад = $4,848137 \cdot 10^{-6}$ рад
	град (ГОН)	град	$(\pi/200)$ рад
Длина	астрономическая единица	а.е.	$1,49598 \cdot 10^{11}$ м
	световой год	св.год	$9,4605 \cdot 10^{15}$ м
	парсек	пк	$3,0857 \cdot 10^{16}$ м
Площадь	гектар	га	$10^4$ м <sup>2</sup>
Объем, вместимость	литр	л	$10^{-3}$ м <sup>3</sup>
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1,60219 \cdot 10^{-19}$ Дж

### Множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение приставки	Множитель	Приставка	Обозначение приставки
$10^{18}$	экса	Э	$10^{-1}$	деци	д
$10^{15}$	пета	П	$10^{-2}$	санتي	с
$10^{12}$	тера	Т	$10^{-3}$	милли	м
$10^9$	гига	Г	$10^{-6}$	микро	мк
$10^6$	мега	М	$10^{-9}$	нано	н
$10^3$	кило	к	$10^{-12}$	пико	п
$10^2$	гекто	г	$10^{-15}$	фемто	ф
$10^1$	дека	да	$10^{-18}$	атто	а

### Перевод некоторых единиц в СИ

$1 \text{ \AA} (\text{ангстрем}) = 10^{-10} \text{ м}$	$1 \text{ кПа} = 1000 \text{ Па}$
$1 \text{ нм} (\text{нанометр}) = 10^{-9} \text{ м}$	$1 \text{ мм рт.ст.} = 133 \text{ Па}$
$1 \text{ мкм} (\text{микрометр}) = 10^{-6} \text{ м}$	$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт.ст.} = 10^5 \text{ Па}$
$1 \text{ мм} (\text{миллиметр}) = 10^{-3} \text{ м}$	$1 \text{ ат} (\text{техническая атмосфера}) =$
$1 \text{ см} (\text{сантиметр}) = 10^{-2} \text{ м}$	$= 1 \text{ кгс/см}^2 = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$
$1 \text{ дм} (\text{дециметр}) = 10^{-1} \text{ м}$	$1 \text{ м/мин} = 1/60 \text{ м/с}$
$1 \text{ км} (\text{километр}) = 10^3 \text{ м}$	$1 \text{ км/ч} = 1000/3600 \text{ м/с} = 5/18 \text{ м/с}$
$1 \text{ Мм} (\text{мегаметр}) = 10^6 \text{ м}$	$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$
$1 \text{ Гм} (\text{гигаметр}) = 10^9 \text{ м}$	$1 \text{ нКл} = 10^{-9} \text{ Кл}$
$1 \text{ Тм} (\text{тераметр}) = 10^{12} \text{ м}$	$1 \text{ мкКл} = 10^{-6} \text{ Кл}$
$1 \text{ мм}^2 = 10^{-6} \text{ м}^2$	$1 \text{ МКл} = 10^{-3} \text{ Кл}$

1 см <sup>2</sup> = 10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup>	1 Кл/см <sup>2</sup> = 10 <sup>4</sup> Кл/м <sup>2</sup>
1 дм <sup>2</sup> = 10 <sup>-2</sup> м <sup>2</sup>	1 об/мин = 1/60 об/с
1 мм <sup>3</sup> = 10 <sup>-9</sup> м <sup>3</sup>	1 км/с = 10 <sup>3</sup> м/с
1 см <sup>3</sup> = 10 <sup>-6</sup> м <sup>3</sup>	1 В/см = 100 В/м
1 дм <sup>3</sup> = 1 л = 10 <sup>-3</sup> м <sup>3</sup>	1 кВ/см = 10 <sup>5</sup> В/м
1 ч = 3600 с	1 мВ = 10 <sup>-3</sup> В
1 мин = 60 с	1 мкВ = 10 <sup>-6</sup> В
1 нс = 10 <sup>-9</sup> с	1 мА = 10 <sup>-3</sup> А
1 мг = 10 <sup>-6</sup> кг	1 мкА = 10 <sup>-6</sup> А
1 г = 10 <sup>-3</sup> кг	1 Ом·мм <sup>2</sup> /м = 10 <sup>-6</sup> Ом·м
1 т = 10 <sup>3</sup> кг	1 гВт·ч = 3,6·10 <sup>5</sup> Дж
1 кДж = 10 <sup>3</sup> Дж	1 кВт·ч = 3,6·10 <sup>6</sup> Дж
1 Мдж = 10 <sup>6</sup> Дж	1 МВт·ч = 3,6·10 <sup>9</sup> Дж
1 гВт = 10 <sup>2</sup> Вт	1 г/см <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> кг/м <sup>3</sup>
1 кВт = 10 <sup>3</sup> Вт	1 МПа = 10 <sup>6</sup> Па
1 МВт = 10 <sup>6</sup> Вт	1 кПа = 10 <sup>3</sup> Па
1 л.с. = 736 Вт	1 бар = 10 <sup>5</sup> Па
T К = t °С + 273	1 кал = 4,186 Дж
0 °С = 273 К	1 ккал = 4186 Дж

#### Основные физические постоянные (округленные значения)

Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Объем одного моля идеального газа при нормальных условиях ( $T_0 = 273,15 \text{ К}$ , $p_0 = 101\,325 \text{ Па}$ )	$V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Элементарный заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Удельный заряд электрона	$e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Фарадея	$F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$
Скорость света в вакууме	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная Вина в первом законе (смещения)	$C' = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Вина во втором законе	$C'' = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	$R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ $R = 2,07 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$
Боровский радиус	$a = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ}$
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Энергия, соответствующая 1 а.е.м.	931,50 МэВ
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,57 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Магнетон Бора	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}$
Ядерный магнетон	$\mu_J = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Ф/м}$

**Плотность вещества  $\rho$**

Твердые тела	$\rho$ , $10^3 \text{ кг/м}^3$	Жидкости	$\rho$ , $10^3 \text{ кг/м}^3$	Газы при $\rho = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , $T = 273 \text{ К}$	$\rho$ , $\text{кг/м}^3$
Алмаз	3,5	Азотная кислота	1,5	Азот	1,25
Алюминий	2,7	Ацетон	0,8	Аммиак	0,77
Береза	0,6	Бензин	0,7	Аргон	1,78
Бериллий	1,85	Бензол	0,88	Водород	0,09
Бетон	2,2	Вода	1,0	Воздух	1,29
Бор	2,34	Глицерин	1,26	Гелий	0,18
Бронза	8,3	Дизельное топливо	0,86	Кислород	1,43
Висмут	9,78	Масло касторовое	0,9	Криптон	3,733
Вольфрам	19,35	Керосин	0,8	Ксенон	5,897
Германий	5,32	Мазут	0,95	Метан	0,72
Гранит	2,6	Масло растительное	0,94	Углекислый газ	1,98
Графит	1,6	Масло трансформное	0,87	Фтор	1,696
Дерево (дуб)	0,8	Молоко	1,03	Хлор	3,214
Дюралюминий	2,8	Нефть	0,84		
Железо, сталь	7,87	Олифа	0,94		
Золото	19,32	Ртуть	13,6		
Инвар	7,9	Серная кислота	1,83		
Иридий	22,42	Сероуглерод	1,26		
Калий	0,86	Скипидар	0,87		
Каменная соль	2,18	Соляная кислота	1,10		
Кирпич	1,8	Спирт	0,79		
Кобальт	8,9	Тяжелая вода	1,1		
Латунь	8,5	Эфир	0,72		
Лед	0,95				
Литий	0,534				
Магний	1,74				
Марганец	7,3				
Медь	8,96				
Мрамор	2,7				
Молибден	10,2				
Натрий	0,97				
Никель	8,91				
Олово	7,3				
Опал	2,2				
Платина	21,45				
Плутоний	19,84				
Пробка	0,24				
Свинец	11,34				
Серебро	10,5				
Сосна	0,5				
Стекло	2,6				
Тантал	16,6				
Титан	4,5				
Топаз	3,6				
Уголь (антрацит)	1,6				
Уран	19,04				
Цинк	7,133				
Фарфор	2,3				

**Упругие свойства твердых тел (округленные значения)**

Вещество	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Модуль сдвига $G$ , ГПа
Алюминий	69	24
Вольфрам	380	140
Золото	81	28,5
Кобальт	206	78,5
Медь	98	44
Никель	210	75
Свинец	16	6
Серебро	74	27
Сталь (железо)	200	76
Стекло	60	30
Титан	110	41,5

**Некоторые свойства твердых веществ**

Вещество	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температура плавления, °С	Удельная теплоем- кость, Дж/(кг · К)
Алюминий	393	660,4	896
Вольфрам	184,6	3387	–
Вода (лед)	335	0	2100
Железо	270	1535	500
Медь	213	1084,5	395
Олово	58,6	232	230
Платина	113	1770	117
Серебро	87,3	962	234
Свинец	22,6	327	126
Сталь	–	1300	460
Цинк	117	420	391

**Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость  
и теплопроводность газов в нормальных условиях**

Вещество	Эффективный диаметр, $d$ , Нм	Динамическая вязкость $\eta$ , мкПа · с	Теплопроводность $\lambda$ , мВт/м · К
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	–	17,2	24,1
Гелий	0,22	–	–
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	–	8,32	15,8
Хлор	0,45	–	–

**Динамическая вязкость  $\eta$  и поверхностное натяжение  $\sigma$  жидкостей**

Жидкость	Вязкость $\eta$ , мПа·с	Натяжение $\sigma$ , мН/м
Вода	1,00	73
Глицерин	1480	62
Масло касторовое	987	–
Масло машинное	100	–
Мыльная вода	–	40
Ртуть	1,58	$5,0 \cdot 10^2$
Спирт	–	22

**Постоянные Ван-дер-Ваальса для некоторых газов**

Вещество	$a, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$	$b, 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{моль}$
Азот	0,135	3,85
Аргон	0,134	3,23
Водород	$2,44 \cdot 10^{-2}$	2,63
Водяной пар	0,545	3,06
Гелий	$3,43 \cdot 10^{-3}$	2,34
Кислород	0,136	3,16
Углекислый газ	0,361	4,28
Неон	0,209	1,70
Хлор	0,650	5,62

**Некоторые свойства жидкостей**

Жидкость	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота парообразования, Дж/кг	Температура кипения, °С
Вода	4200	$2,3 \cdot 10^6$	100
Спирт	2500	$9 \cdot 10^5$	78
Ртуть	138	$3 \cdot 10^5$	357

**Удельная теплота сгорания**

Вещество	Удельная теплота сгорания $q, 10^7$ Дж/кг
Бензин	4,61
Дерево	1,26
Каменный уголь	2,39
Керосин	4,61
Нефть	4,61
Спирт	2,93

### Удельная теплоемкость веществ

Вещество	$C, \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$		Вещество	$C, \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$
<b>Твердое тело</b>			<b>Жидкость</b>	
Алюминий	0,90		Бензин	2,09
Бронза	0,38		Вода	4,18
Вольфрам	0,13		Глицерин	2,42
Дерево (дуб)	2,40		Масло	
Железо	0,46		(трансформаторное)	2,09
Золото	0,13		Нефть	1,67 – 2,09
Латунь	0,38		Ртуть	0,14
Лед	2,09		Скипидар	1,76
Медь	0,39		Спирт этиловый	2,42
Нихром	0,46		Эфир	2,34
Олово	0,20		<b>Газы</b>	
Парафин	3,20		Азот	1,04
Платина	0,13		Водяной пар	2,13
Пробка	2,05		Водород	14,27
Свинец	0,13		Воздух	1,01
Серебро	0,23		Гелий	5,20
Сталь	0,50		Двуокись углерода (CO <sub>2</sub> )	0,88
Стекло	0,67 – 0,83		Кислород	0,91
Углерод (графит)	0,46 – 0,71		Метан	2,48
Фарфор	0,75		Окись углерода	1,04
Цинк	0,38			
Чугун	0,54			
Эбонит	1,38			

### Критические температура и давление

Газ	$t_k, ^\circ\text{C}$	$P_k, \text{МПа}$
Азот	-146	3,39
Аргон	-122	4,86
Водяной пар	374	22,1
Кислород	-119	5,08
Неон	-128,6	2,72
Углекислый газ	31	7,38
Хлор	144	7,71

### Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$
Период обращения Луны вокруг Земли	$27,3 \text{ сут} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ с}$

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Ветрова, В.Т. Сборник задач по физике с индивидуальными заданиями: учеб. пособие для вузов / В.Т. Ветрова. – Минск: Выш. шк., 1991. – 386 с.
2. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М.: Наука, 1993.
3. Детлаф, А.А. Курс физики: учеб. пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989.
4. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М.: Наука, 1988.
5. Курс физики: учебник для вузов. В 2 т. – 2-е изд., испр. / под ред. В.Н. Лозовского. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. Т. 1. – 576 с. Т. 2. – 592 с.
6. Леденев, А.Н. Физика. В 5 кн. Кн. 1 и 2 / А.Н. Леденев. – М.: Физматлит, 2005.
7. Макаренко, Г.М. Курс общей физики: учеб. пособие для вузов / Г.М. Макаренко – Минск: ДизайнПРО, 2003. – 640 с.
8. Наркевич, И.И. Физика: учебник / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко. – Минск: Новое знание, 2004. – 680 с.
9. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 3 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1973.
10. Трофимова, Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Т.И. Трофимова. – М.: Высш. шк., 1990. – 478 с.
11. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики для вузов. – 3-е изд. / Т.И. Трофимова. – М.: ОНИКС XXI век, Мир и образование, 2003. – 384 с.
12. Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Высш. шк., 2003.

### Дополнительная

13. Аксенович, Л.А. Физика в средней школе. Теория. Задания. Тесты: учеб. пособие / Л.А. Аксенович, Н.Н. Ракина, К.С. Фарино. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2004. – 720 с.
14. Астахов, А.В. Курс физики. В 3 т. / А.В. Астахов. – М.: Наука, 1977.
15. Варикаш, В.М. Руководство по решению задач по общей физике / В.М. Варикаш, М.С. Цедрик. – Минск: Выш. шк., 1999.
16. Зисман, Г.А. Курс общей физики. В 3 т. / Г.А. Зисман, О.М. Годес. – М.: Наука, 1972.
17. Иродов, И.Е. Сборник задач по общей физике / И.Е. Иродов, И.В. Савельев, О.И. Замша. – М.: Наука, 1975.
18. Ландсберг, Г.С. Элементарный учебник физики. В 3 т. / Г.С. Ландсберг. – М.: Наука, 1992.
19. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. М.: Высш. шк., 1977.

*Учебное издание*

# ФИЗИКА

В двух частях

Часть 1

Редактор *Т.В. Булах*

Дизайн обложки *В.А. Виноградовой*

---

Подписано в печать 25.09.2009. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная  
Ризография. Усл. печ. л. 15,78. Уч.-изд. л. 14,7. Тираж 300 экз. Заказ 1627

---

Издатель и полиграфическое исполнение –  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»  
ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009  
211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29