УДК 528.063

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НУЛЬ-СВОБОДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Н.С. СЫРОВА
(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

Геодезические сети, не содержащие исходных пунктов (нуль-свободные), часто используются на геодезическом производстве для определения деформаций сооружений и осадок реперов. Рассматриваются вопросы получения обратной весовой матрицы для этих сетей с целью дальнейшей оценки точности функции уравненных измеренных величин. Показаны различные способы, с помощью которых можно получить обратную весовую матрицу для нуль-свободных сетей.

Математическая обработка геодезических сетей, не содержащих исходных пунктов (нуль-свободных геодезических сетей), является актуальной задачей геодезического производства.

Целью данного исследования явилось получение обратной весовой матрицы для нуль-свободных геодезических сетей с целью дальнейшей оценки точности функции уравненных измеренных величин.

Получение обратной матрицы весов методом А.Н. Тихонова

Известно, что для геодезических сетей, не содержащих исходных пунктов, определитель матрицы системы нормальных уравнений при параметрическом способе уравнивания равен нулю, т.е. говорят, что матрица коэффициентов нормальных уравнений вырожденная. Существуют несколько методов получения обратной матрицы Q от вырожденной матрицы коэффициентов системы нормальных уравнений R. Если матрица системы нормальных уравнений особенная (вырожденная), то в MATLABе обратная матрица весов может быть получена так:

$$q = pinv(r)\,, \tag{1}$$

где функция *pinv* в MATLABе всегда записывается прописными буквами, которые удобно использовать при записи имени как матрицы обратных весов Q, так и матрицы коэффициентов нормальных уравнений R.

Тогда можно записать

$$Q = pinv(R), \tag{2}$$

что неудобно использовать при записи с переключением CapsLock.

Если матрица R вырожденная, то формула (2) приведет к верному результату, а формула

$$Q = inv(R) \tag{3}$$

даст деление на ноль, где *inv* – функция обращения матриц.

Если использовать другие программные продукты (например, Excel), подпрограмму *pinv* можно не найти, и для того чтобы обращать вырожденную матрицу R, необходимо использовать другие методы.

Например:

1) метод регуляризации, предложенный А.Н. Тихоновым;
2) метод Г.Г. Асташенкова (только для нивелирных и спутниковых сетей);
3) метод В.Н. Ганьшина, применяемый для нивелирных и спутниковых сетей;
4) метод В.И. Мицкевича, предназначенный для уравнивания любых геодезических сетей без исходных пунктов как плановых, нивелирных, так и спутниковых GNSS-построений.

Рассмотрим основные формулы метода А.Н. Тихонова [1]:

$$Q_\alpha = (R^2 + \alpha E)^{-1} R\,, \tag{4}$$

где Q_α – обратная весовая матрица, используемая для оценки точности функции измеренных и уравненных величин, размерностью t (по числу строк и столбцов квадратной матрицы), где t – число параметров; $R_{t\times t}$ – матрица коэффициентов нормальных уравнений, вычисляемая по формуле:

$$R = A^T PA\,, \tag{5}$$

в которой $A_{N\times t}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок, вычисляемая для каждого из N измерений (для одного измерения в матрице A будет отведена одна строка), $P_{N\times N}$ – матрица весов измерений. Далее в формуле (4) α – параметр регуляризации (скаляр); $E_{t\times t}$ – единичная матрица.

Формула (4) универсальна: если матрица R не особенная, можно принять α = 0; если матрица R вырожденная, α необходимо искать особыми методами.

Один из таких методов разработал Ю.Г. Карпушин. Суть этого метода в следующем:

1) для некоторого вектора свободных членов *y* вычисляют вектор поправок в предварительные координаты пунктов размерностью $t \times 1$:

$$\delta x_{\alpha} = -(R^2 + \alpha E)^{-1} R y_{t\times 1}; \tag{6}$$

2) находят целевую функцию

$$\Phi|\delta - \Theta|, \tag{7}$$

в которой

$$\delta = \sqrt{\delta x_{\alpha}^{T} \delta x \alpha}; \tag{8}$$

$$\Theta = \sqrt{\Delta B^T \Delta B}, \tag{9}$$

где $\Delta B_{t\times 1}$ – некоторый вектор, зависящий от *y*.

Задача нахождения α решается путем минимизации функции Φ методом приближений, начиная с $\alpha = 0{,}1$. Величину α отыскивают приближениями, уменьшая её в 10 раз.

Например:

$\alpha_1 = 0{,}1$; $\Phi_1|\delta_1 - \Theta_1|$;

$\alpha_2 = 0{,}01$; $\Phi_2|\delta_2 - \Theta_2|$;

$\alpha_3 = 0{,}001$; $\Phi_3|\delta_3 - \Theta_3|$;

$\alpha_4 = 0{,}0001$; $\Phi_4|\delta_4 - \Theta_4|$.

При переходе от одного приближения к другому Φ должна уменьшаться. Приближения продолжаются до тех пор, пока не произойдет увеличение Φ.

Метод А.Н. Тихонова позволяет вычислять Q_{α} для любых геодезических сетей.

Метод Г.Г. Асташенкова

Этим методом можно найти псевдообратную матрицу R^+ от матрицы коэффициентов нормальных уравнений *R* при параметрическом способе уравнивания. Метод предназначен для вычисления R^+ только для нивелирных и спутниковых GNSS-сетей.

Основная формула

$$Q = R^+ = (R + I^T I) - I^T I / t^2, \tag{10}$$

где $I = (1,\ 1,\ 1,\ \ldots,1)_{1\times t}$ – вспомогательная матрица; *t* – число параметров.

Это наиболее простой метод получения псевдообратной матрицы для нивелирных сетей. При этом $R = A^T PA$согласно формуле (5).

Метод В.Н. Ганьшина

В основе метода [2] лежит принцип нахождения средней плоскости относительно пунктов нивелирной сети, отметки которых вычисляются по соответствующим формулам.

Для нахождения расширенной псевдообратной матрицы *F* и матрицы *Q* используют формулы:

$$F = G(S^T PS)^{-1} S^T P; \tag{11}$$

$$Q = FP^{-1}F^T; \tag{12}$$

$$G_{t\times(t-1)} = \frac{1}{t}\cdot\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & t-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & t-1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $G_{t\times(t-1)}$ – вспомогательная псевдообратная матрица, формируемая программой; $S_{N,(t-1)}$ – матрица *A* без последнего столбца для одного исходного пункта; $A_{N\times 1}$ – матрица коэффициентов уравнений поправок; $P_{N\times N}$ – диагональная матрица весов измерений.

Метод В.И. Мицкевича

Главная псевдообратная матрица при параметрическом способе уравнивания для случая равноточных измерений вычисляется по формуле [3, с. 47]:

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}. \tag{14}$$

Для неравноточных измерений, когда диагональная матрица весов $P \neq E$, существует матричное выражение:

$$A^{+} = (A^{T}PA)^{-1}A^{T}P^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

а псевдообратная матрица от матрицы R, найденная по (5), будет такой:

$$R^{+} = A^{+}(A^{+})^{T}, \tag{16}$$

что справедливо и для равноточных измерений. Вычисление матрицы $(A^{T}PA)^{-1}$, входящей в (15), проблематично, если определитель матрицы $R = A^{T}PA$ равен нулю. Однако В.И. Мицкевичем в 2010 году получена новая формула:

$$A^{+} = Q_{рек.}A^{T}P^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

где $Q_{рек.}$ – матрица обратных весов, найденная рекуррентным способом при соответствующем выборе матрицы Q_0.

Формулы для вычисления Q при неособенной матрице R хорошо известны [4; 5];

$$Q_i = Q_{i-1} - \frac{Z_i^{T}}{g_i} \cdot Z_i; \tag{18}$$

$$Z_i^{T} = Q_{i-1} \cdot A_i^{T}; \tag{19}$$

$$g_i = \frac{1}{P_i} + A_i Z_i^{T}, \tag{20}$$

где i – номер измерения.

При подключении последнего n-го измерения

$$Q_{рек.} = Q_n. \tag{21}$$

Матрица $Q_{рек}$ должна быть вычислена с максимальным числом значащих цифр.

Матрица A^{+}, вычисленная по формуле (17), будет иметь $S/2$ верных значащих цифр, где S – число разрядов в разрядной сетке чисел на ЭВМ (например, в MATLABе при $S = 16$).

Начальная матрица Q_0 может быть получена по следующей формуле [6]:

$$Q_0 = 10^{m} \cdot E, \tag{22}$$

предложенной Ю.И. Маркузе.

Степень m может быть найдена по эмпирическим формулам, разработанным В.И. Мицкевичем [8].

Окончательный вариант формул для вычисления степени m, внедренный в программный комплекс «Россия – Беларусь», имеет вид:

$$C = \max\left|\sqrt{P_i}A_i\right|; \tag{23}$$

$$m = \frac{S}{2} - \lg C, \tag{24}$$

где S – количество разрядов в сетке ЭВМ.

Формулы (23), (24) позволяют выбирать m автоматически.

Исследуем точность вычисления матрицы Q (анализируя ее первый диагональный элемент Q (1,1)) в зависимости от выбора m при дальнейшем использовании как метода Ю.И. Маркузе [5], так и нового метода.

Вычисление матрицы Q разными методами

m	Метод Ю.И. Маркузе	Метод В.И. Мицкевича	Метод В.И. Мицкевича
1	2	3	4
1	$0{,}89482974 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89482632 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20307902 \cdot 10^{-5}$
2	$0{,}89482973 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89482938 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20307939 \cdot 10^{-5}$
3	$0{,}89482971 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89482969 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20307943 \cdot 10^{-5}$
4	$0{,}89482971 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89482972 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20307939 \cdot 10^{-5}$
5	$0{,}89482973 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89482980 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20307900 \cdot 10^{-5}$
6	$0{,}89482952 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89482869 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20308327 \cdot 10^{-5}$
7	$0{,}89482791 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89482784 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20311111 \cdot 10^{-5}$
8	$0{,}89486969 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89483112 \cdot 10^{-5}$	$0{,}20321287 \cdot 10^{-5}$
9	$0{,}89492830 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89391073 \cdot 10^{-5}$	$0{,}19835263 \cdot 10^{-5}$
10	$0{,}89406367 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89675895 \cdot 10^{-5}$	$0{,}24231995 \cdot 10^{-5}$
11	$0{,}87614053 \cdot 10^{-5}$	$0{,}85899143 \cdot 10^{-5}$	$0{,}74747950 \cdot 10^{-4}$

Для примера геодезического четырехугольника [9] см. таблицу: в колонке 1 – показатель степени m; в колонках 2, 3 применены методы Ю.И. Маркузе и В.И. Мицкевича для обычного геодезического четырехугольника с исходными пунктами; в колонке 4 – способ В.И. Мицкевича, когда в сети отсутствуют исходные пункты.

По данным таблицы видно, что при m = 1 – 8 величины Q (1,1) близки между собой, поэтому формулы (23) – (24) можно использовать повсеместно, так как они дают величину m, при которой матрица Q всегда будет получена рекуррентным способом с наивысшей точностью.

В *заключение* отметим, что метод В.И. Мицкевича как наиболее простой и надежный можно рекомендовать для внедрения на геодезическом производстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов [и др.] // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1980. – № 1. – С. 45 – 53.
2. Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов / В.Н. Ганьшин [и др.]; под общ. ред. В.Н. Ганьшина. – М.: Недра, 1981. – 215 с.
3. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука,1984. – 320 с.
4. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.
5. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
6. Маркузе, Ю.И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
7. Двоенко, Г.М. О выборе начальной матрицы при рекуррентном способе уравнивания плановых геодезических сетей / Г.М. Двоенко // Геодезия и картография. – 1994. – № 8. – С. 9 – 11.
8. Мицкевич, В.И. Математические методы и модели на ЭВМ: учеб.-метод. компл. / В.И. Мицкевич. – Новополоцк, 2007. – 184 с.
9. Грищенков, Е.В. Универсальный алгоритм идентификации необходимых и избыточных измерений и его практические приложения / Е.В. Грищенков, В.И. Мицкевич // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2011. – № 3. – С. 64 – 68.

Поступила 29.03.2012

ESTIMAITION OF THE ACCURACY OF ZERO-FREE GEODETIC NETWORKS WITH DIFFERENT WAYS

N. SYROVA

Geodetic networks that do not contain the entry points (zero-free) are often used in the geodetic manufacture for the determination of sediment deformation structures and frames. The problems of obtaining inverse weight matrix for these networks in order to further estimate the accuracy of equation of the measured values. Inverse weight matrix for the zero-free networks can be obtained in various ways.