УДК 519.6 УДК 517.958

СОГЛАСОВАНИЕ ПОРЯДКОВ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ И УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пастухов Д.Ф. , к.ф.м.н., Полоцкий государственный университет

Пастухов Ю.Ф. , к.ф.м.н., Полоцкий государственный университет

Зеленкевич А.А. студент 2 курса факультета информационных технологий ПГУ

Гурьева Н.А. , к.ф.м.н., Полоцкий государственный университет

Аннотация: *В работе численными методами показано, что разностная схема аппроксимирует задачу математической физики параболического типа с четвертым порядком для приведенного примера относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации. Приведен контр пример, когда граничный оператор имеет первый порядок аппроксимации, а дифференциальный четвертый порядок, сходимость разностного решения к точному решению дифференциальной задачи не имеет места. Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах. Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным и неоднородным условием Неймана для одномерных уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.*

Ключевые слова*: уравнения математической физики, разностная схема, порядок аппроксимации дифференциального и граничного операторов.*

CO-ORDINATION ORDER to APROXIMATIONS DIFFERENTIAL And BORDER OPERATOR In MARGINAL PROBLEM And EQUATIONS In QUOTIENT DERIVED

Pastuhov D.F. , k.f.m.n., Polockiy state university
Pastuhov YU.F. , k.f.m.n., Polockiy state university
Zelenkevich A.A. student 2 courses of the faculty information technology PGU
Gureva N.A. , k.f.m.n., Polockiy state university

The Abstract*: In work by numerical methods is shown that numerical scheme aproximates the problem mathematical physicists parabolic type with 4 rather for cites an instance for step of the net provided that разностные differential and border (the border condition Neymana) operators are built with alike rather aproximations. The Broughted rebels example, when border operator has a first order to aproximations, but differential 4 orders, convergence разностного decisions to exact decision of the differential problem has a no place. Is it Theoretically motivated convergence or расходимость decisions разностной problems to decision of the differential problem in specified example. Formulas are Received with aproximation четвертым rather for border operator with uniform and lumpy condition Neymana for univariate equations in quotient derived elliptical, parabolic and hyperbolic types, as well as at aproximations of the marginal problems.*

The Keywords*: equations mathematical physicists, the numerical scheme, order to convergence differential and border operator.*

Введение

Рассмотрим в области D с границей G краевую дифференциальную задачу:

$$Lu = f \quad \text{в } D \tag{1}$$

с граничным условием

$lu = \varphi$ на G (2)

Здесь L и l - дифференциальные операторы; и f, φ – заданные, а u - искомый элементы некоторых линейных нормированных функциональных пространств F, Φ, U соответственно[1]. Разностную схему определяют как семейство сеточных задач, зависящих от параметра (шага) h :

$L_h u_h = f_h$ *на сетке в области* D_h (3)

$l_h u_h = \varphi_h$ *на граничной сетке* G_h (4)

Говорят, что разностная схема $(3),(4)$ *аппроксимирует на решении* u с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу $(1),(2)$, если существуют такие положительные постоянные h_0, c_1, p_1, c_2, p_2, не зависящие от h, что при всех $h \le h_0$, справедливы неравенства:

$$\|L_h(u) - f_h\|_{F_h} \le c_1 h^{p_1}, \qquad \|l_h(u) - \varphi_h\|_{\Phi_p} \le c_2 h^{p_2}$$

Из определения порядка аппроксимации следует, что для максимальной точности аппроксимации разностной задачи $(3),(4)$ и экономии машинного времени необходимо соблюдение равенства:

$p_1 = p_2 = p$ (5)

Постановка задачи

Для обоснования условия (5) рассмотрим численное решение начально-краевой задачи параболического типа[2], стр.193:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = \cos(2x), 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,0), t \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

Система уравнений (6) имеет точное аналитическое решение: $u(x,t) = e^{-4t}\cos(2x)$. Действительно:

$$u(x,t)_t = u(x,t)_{xx} = -4\cos(2x)e^{-4t}, 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u(x,0) = \cos(2x), 0 \le x \le \pi, u_x(x,t) = -2e^{-4t}\sin(2x), u_x(0,t) = u_x(\pi,0) = 0, t \ge 0.$$

Используем задачу (6), в которой третье уравнение представляет собой граничное условие Неймана, в качестве теста при составлении программы. В задаче (6) первое уравнение соответствует дифференциальной задаче (1) в полу полосе $0 < x < \pi, t > 0$. Третье уравнение является граничным оператором (2) на лучах: $t \ge 0, x = 0, x = \pi$. Рассмотрим разностное уравнение (3) для задачи (6) :

$$\frac{(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} = \frac{(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n)}{h^2}, m = 1,2,3,..N, n = 1,2,3 \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет явную разностную схему однородного уравнения теплопроводности на сетке с равномерным шагом по времени τ и по координате $h = \pi / N$. Обозначив параметр $z = \tau / h^2$, уравнение (7) преобразуем к виду:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + z(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n), \tag{8}$$

Разложим узловые значения $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формуле (8) в ряд Тейлора для получения максимального порядка аппроксимации с центром разложения u_m^n :

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} + o(\tau^2)$$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + h\frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4)$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - h\frac{\partial(u_m^n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3(u_m^n)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} + o(h^4)$$

Подставляя разложения для $u_m^{n+1}, u_{m+1}^n, u_{m-1}^n$ в формулу(8), получим:

$$\tau\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z\left(h^2\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4}\right) + o(\tau^2 + h^4) \tag{9}$$

Потребуем по отдельности равенства первых и вторых слагаемых в формуле (9) по отдельности:

$\tau\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = zh^2\frac{\partial(u_m^n)}{\partial x^2}$, используя первое уравнение системы (6) $\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t} = \frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2}$, получим $\tau = zh^2$, которое справедливо для любого z. Преобразуем вторую производную во времени, считая функцию $u(x,t)$ дважды по t и четырежды по x непрерывно дифференцируемой:

$$\frac{\partial(u_m^n)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}u_m^n\right) = \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial t}(u_m^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_m^n) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u_m^n)$$

Учитывая последнее равенство и требование:

$$\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2(u_m^n)}{\partial t^2} = z\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4(u_m^n)}{\partial x^4} \Leftrightarrow \frac{\tau^2}{2} = z\frac{h^4}{12} = \frac{\tau}{h^2}\frac{h^4}{12} = \tau\frac{h^2}{12} \Leftrightarrow \tau = \frac{h^2}{6} \Leftrightarrow z = \frac{1}{6}. \tag{10}$$

Итак, максимальный порядок аппроксимации дифференциального оператора (1) по h $p_1 = 4$ с параметром $z = \frac{1}{6}$. Тогда уравнение (8) перепишем в виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n - 2u_m^n) + o(\tau^2 + h^4) = \frac{1}{6}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n + 4u_m^n) + o(\tau^2 + h^4). \tag{11}$$

Разностное уравнение (8) необходимо исследовать на устойчивость. Используем признак спектральной устойчивости. Спектральный признак состоит в следующем: если при заданном законе стремления τ и h к нулю для всех $0 \le \varphi < 2\pi$ справедливо неравенство $|\lambda(\varphi)| \le 1$, то спектральный признак выполнен, и численная схема может быть использована для решения уравнения $Lu = f$.

Комплексное число $\lambda(\varphi)$ определяет замкнутую кривую на комплексной плоскости при изменении φ. В качестве функций возмущения численной схемы выберем $u_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$ [1] и подставим в (8):

$$(\lambda(\varphi))^{n+1} e^{im\varphi} - (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi} = z(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2)$$

Разделим последнее уравнение на $(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$:

$$(\lambda(\varphi) - 1) = 2z(\cos(\varphi) - 1) = -4z\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \Leftrightarrow \lambda(\varphi) = 1 - 4z\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \qquad (12)$$

Если параметр $0 \le z \le \frac{1}{2}$, то справедливо из (12): $-1 \le \lambda(\varphi) \le 1 \Leftrightarrow |\lambda(\varphi)| \le 1.$

Таким образом, при $z = \frac{1}{6}$ численная схема (11) имеет не только максимальный порядок аппроксимации, но и является устойчивой.

Построим схему граничного оператора $l_h u_h = \varphi_h$ для граничного условия $lu = \varphi$

- третьего уравнения системы (6): $u_x(0,t) = u_x(\pi,0)$ с тем же порядком точности: $p_2 = p_1 = 4$. Составим квадратурную формулу для граничного оператора (производной функции в нуле $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)$) методом неопределенных коэффициентов[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{h}\left(au_0^n + bu_1^n + cu_2^n + du_3^n + eu_4^n\right) + r(x) \qquad (13)$$

В формуле неизвестные коэффициенты a, b, c, d, e подлежат определению, h шаг равномерной сетки, $u_0^n, u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n$ значения функции u_m^n в 5 ближайших узлах к левой границе отрезка $[0,\pi]$. $r(x)$ – невязка квадратуры.

Потребуем равенства нулю остатка $r(x)$ в формуле (13) для многочленов максимально высокой степени:

a) $u(x,t) = 1, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a + b + c + d + e) \Leftrightarrow a + b + c + d + e = 0.$

b) $u(x,t) = x, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1 = \frac{1}{h}(a * 0 + bh + 2hc + 3dh + 4eh) \Leftrightarrow b + 2c + 3d + 4e = 1.$

c) $u(x,t) = x^2, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a0 + bh^2 + c(2h)^2 + d(3h)^2 + e(4h)^2) \Leftrightarrow b + 4c + 9d + 16e = 0.$

d) $u(x,t) = x^3, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a0 + bh^3 + c(2h)^3 + d(3h)^3 + e(4h)^3) \Leftrightarrow b + 8c + 27d + 64e = 0.$

e) $u(x,t) = x^4, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{1}{h}(a0 + bh^4 + c(2h)^4 + d(3h)^4 + e(4h)^4) \Leftrightarrow b + 16c + 81d + 256e = 0.$

Решаем систему линейных уравнений:

$$
\begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ b+2c+3d+4e=1 \\ b+4c+9d+16e=0 \\ b+8c+27d+64e=0 \\ b+16c+81d+256e=0 \end{cases} \tag{14}
$$

Линейная система уравнений (14) имеет единственное решение: $a=-\frac{25}{12}, b=4, c=-3, d=\frac{4}{3}, e=-\frac{1}{4}$

Подставляя найденные коэффициенты в (13), получим квадратуру, точную для многочленов степени не выше четырех, т.е. порядок сходимости граничного оператора в поставленной задаче также $p_2 = 4 = p_1$:

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{1}{12h}(-25u_0^n + 48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - u_4^n) \tag{15}
$$

Так как, по условию задачи (6) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, то выразим из (15) u_0^n:

$$
u_0^n = \frac{1}{25}(48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - 3u_4^n) \tag{16}
$$

В силу симметрии задачи для граничного оператора на правой границе в точке $x = \pi$:

$$
u_N^n = \frac{1}{25}(48u_{N-1}^n - 36u_{N-2}^n + 16u_{N-3}^n - 3u_{N-4}^n) \tag{17}
$$

Учитывая связь $\tau = zh^2 = \frac{1}{6}h^2$, видим, что при малых $h: \tau \ll h$. Выберем временной отрезок $T = M\tau$ таким образом, чтобы по порядку величины $T \sim X = Nh$ и исходная задача рассматривается на прямоугольнике с соизмеримыми сторонами. Положим $M \sim N^2 \Rightarrow T = M\tau = N^2\tau = \frac{N^2h^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} \sim 1$. Окончательно выпишем разностные уравнения численной схемы, соответствующей дифференциальной задаче (6):

$$
\begin{cases} u_m^0 = \cos(2mh), m = 0,1,2,\dots,N \\ u_m^n = \dfrac{\left(u_{m+1}^{n-1} + u_{m-1}^{n-1} + 4u_m^{n-1}\right)}{6}, m = 1,2,..N-1, n = 1,2,\dots,N^2 \\ u_0^n = \dfrac{1}{25}(48u_1^n - 36u_2^n + 16u_3^n - 3u_4^n), n = 1,2,\dots,N^2 \\ u_N^n = \dfrac{1}{25}(48u_{N-1}^n - 36u_{N-2}^n + 16u_{N-3}^n - 3u_{N-4}^n), n = 1,2,..N^2 \end{cases} \tag{18}
$$

Первое уравнение в численной схеме (18) представляет собой начальное условие задачи (6). Тогда точное решение $u(x,T)$ в узлах равномерной сетки в последнем временном слое $n = N^2$:

$$
u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-4T} = \cos(2mh)e^{-\frac{4}{6}h^2N^2} = \cos(2mh)e^{-2\frac{\pi^2}{3}}, m = 0,1,2,..N \tag{19}
$$

Описание программы

Для численной схемы (18) и теста (19) напишем программу, например, на языке С.

Нижеследующая программа написана с двойной точностью:

$\# include < stdio.h >$

$\# include < math.h >$

$\operatorname{int} N = 100, N1 = N * N;$

$\operatorname{int} main()\{$

$\operatorname{int} k, j;$

$double \;\; res[N+1][N1+1], x[N+1];$

$double \;\; pi, h, dt;$

$pi = 2.0 * a\sin(1.0);$

$h = pi / double(N);$

$dt = \dfrac{h * h}{6.0};$

$for(k = 0; k < N; k++)\{$

$res[k][0] = \cos(2.0 * h * double(k));$

$x[k] = res[k][0] * \exp(-4.0 * dt * double(N1));\}$

$for(j = 1; j <= N1; j++)$

$\{$

$for(k = 1; k <= N - 1; k++)$

$\{$

$res[k][j] = \left(\dfrac{1.0}{6.0}\right) * \left(res[k+1][j-1] + res[k-1][j-1] + 4.0 * res[k][j-1]\right) \;;$

$\}\;\}$

$$res[0][j] = \left(\frac{1.0}{25.0}\right)(48.0 * res[1][j] - 36.0 * res[2][j] + 16.0 * res[3][j] - 3.0 * res[4][j]); \tag{20}$$

$$res[N][j] = \left(\frac{1.0}{25.0}\right)(48.0 * res[N-1][j] - 36.0 * res[N-2][j] + 16.0 * res[N-3][j] - 3.0 * res[N-4][j]); \tag{21}$$

$pr\operatorname{int} f(" x \qquad axact \qquad resolve \backslash n ");$

$for(k = 0; \quad k <= N; k++) \quad \{$

$if(k - 10 * \operatorname{int}(double(k) / double(10)) == 0)$

{

$printf("x = \%lf \quad axact = \%.14lf \quad res = \%.14lf \quad \backslash n", h*double(k), x(k), res[k][N1])$

}}

$printf("h = \%lf \quad h*h*h*h = \%lf \backslash n", h, h*h*h*h);$ }

Результаты численного решения

Покажем, насколько важно требовать согласование порядков аппроксимации $p_2 = p_1$ дифференциального и граничного операторов в задачах математической физики. Для этого аппроксимируем сначала граничный оператор первым порядком сходимости $p_1 = 1$, а дифференциальный оператор (11), по – прежнему, четвертым порядком $p_2 = 4$. Т.е. в формулах $(16),(17)$ положим $u_0^n = u_1^n, u_N^n = u_{N-1}^n$ и в программе в формулах $(20),(21)$ $res[0][j] = res[1][j], res[N][j] = res[N-1][j]$. Программа возвращает таблицу значений $x, axact, resolve, delta$ (координату, точное решение, численное решение, разность между численным и точным решениями $delta = resolve - axact$):

Таблица 1(N=400)

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255299240891
0.31415927	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255282114823
0.62831853	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255264003627
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00291666632857	-0.00255244911732
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255224843765
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00384758973613	-0.00255203804554
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00359015697326	-0.00255181799127
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00359015697326	-0.00255158832706
2.51327412	0.00042898213940	-0.00208561646036	-0.00255134910711
2.82743339	0.00112308982151	-0.00141598028627	-0.00255110038758
3.14159265	0.00138821536422	-0.00116477704469	-0.00255084222654

$h = 7.853981633974483E-003,$

Сравнивая значения $axact$ и $resolve$ в таблице 1, видим, что приближенное решение даже не сходится к точному, так как приближенное решение всегда отрицательно, в то время как точное

$u_m^{N^2} = \cos(2mh)e^{-2\frac{\pi^2}{3}}$, $m = 0,12,...,N$ дважды меняет знак при $0 \le x \le \pi.$.

В таблице $2(N = 200)$ и в таблице $3(N = 400)$ также указаны полученные программой значения $x, axact, resolve, delta$.

Таблица $2(N = 200)$

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000332271
0.31415927	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000332223
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000332168
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000332107
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000332039
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821219752	0.00000000331964
1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308664158	0.00000000331883
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042897892418	0.00000000331796
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898540013	0.00000000331702
2.82743339	0.00112308982151	0.00112309312266	0.00000000331602
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000331495

В пространстве C непрерывных на отрезке $[0,\pi]$ функций с нормой Чебышева $\|x\|_C = \max_{t\in[0,\pi]}|x(t)|$ норма разности приближенного и точного решений, заданной на равномерной сетке, равна $\|delta\| = \left\|u_m^{N^2}(resolve) - u_m^{N^2}(axact)\right\|_C = \max_{[m=0,\ldots N]}\left|delta_m^{N^2}\right|$

Из таблицы 2 видно при $(N = 200)$, что $\|delta\|_C < 4\ 10^{-9}$.

Таблица 3 (N=400)

x	$axact$	$resolve$	$delta$
0.00000000	0.00138821536422	0.00138821868693	0.00000000010439
0.31415927	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010439
0.62831853	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010438
0.94247780	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010437
1.25663706	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010436
1.57079633	-0.00138821536422	-0.00138821526571	0.00000000010435

1.88495559	-0.00112308982151	-0.00112308972249	0.00000000010434
2.19911486	-0.00042898213940	-0.00042898203902	0.00000000010433
2.51327412	0.00042898213940	0.00042898224150	0.00000000010432
2.82743339	0.00112308982151	0.00112308992513	0.00000000010430
3.14159265	0.00138821536422	0.00138821546861	0.00000000010429

$h = 7.853981633974483\text{E}-003,$

Аналогично, из таблицы 3 видно, что при $(N = 400)\ \|delta\|_C < 2\ 10^{-10}$.

В общем случае, для определения (оценки) порядка сходимости разностной схемы, как определяет А.А.Самарский $[3]$, стр. 57, необходимо требовать уменьшение погрешности (нормы разности приближенного и точного решений) в 16 раз при уменьшении шага сетки h в 2 раза (увеличении N в 2 раза) – для сходимости с четвертым порядком. В данной разностной схеме при увеличении N в 2 раза (с 200 до 400) погрешность по норме Чебышева уменьшается примерно в $\left(\dfrac{4\ 10^{-9}}{2 10^{-10}} = 20 > 16\right)$ раз.

Необходимо выбирать большие N , так как указанное требование может проявляться на практике только в асимптотике $[3]$.

Другими словами, численная схема (18) аппроксимирует задачу (6) и ее решение на последнем временном слое (19) с четвертым порядком. Легко видеть, что в общем случае от формулы (11) на конечном временном слое достаточно требовать меньшей точности – второй порядок сходимости:

$$\Delta u_m^{N^2} \sim \mathrm{N}^2\, o(\tau^2 + h^4) \sim \mathrm{N}^2\, o(h^4) \sim \mathrm{o}(\mathrm{N}^2\, h^4) \sim \mathrm{o}\left(\left(\frac{\pi}{\mathrm{h}}\right)^2 h^4\right) \sim \mathrm{o}\,(\mathrm{h}^2) \qquad (20)$$

Используя формулу (20), можно теоретически обосновать сходимость (расходимость) ∞ ∞Действительно, в случае равенства $p_2 = p_1 = 4$ порядок аппроксимации общей задачи $p = \min(p_1, p_2) = 4$ и согласно (20) на последнем временном слое разностное решение (18) сходится при $h \to 0$ к решению дифференциальной задачи $\left(|u(x,t) - u_h(x,t)| \sim \mathrm{o}(\mathrm{h}^2)\right)$ (6) не хуже чем со вторым порядком.

Если $p_2 = 1; p_1 = 4, mo\ p = \min(p_1, p_2) = 1$, т.е. на конечном временном слое невязка между решениями разностной и дифференциальной задачами имеет асимптотику:

$$N^2\, o(h) \sim N^2\ h\, o(1) = N^2\left(\frac{\pi}{N}\right) o(1) \sim N\, o(1)\,.$$

Поскольку $o(1)$ может иметь слабую сходимость, например, при $h \to 0 (\Leftrightarrow N \to \infty);\ o(1) \sim \dfrac{1}{\ln \mathrm{N}}$,

То $|u(x,t) - u_h(x,t)| \sim \mathrm{N}/\ln\mathrm{N} \to \infty,\ \mathrm{N} \to \infty.$

Что доказывает расходимость задачи в случае $x, axact, resolve,\ delta.$

В работе получены результаты

1) Численными методами показано, что разностная схема (18) аппроксимирует задачу математической физики (6) с уравнением параболического типа четвертым порядком относительно шага сетки при условии, что разностные дифференциальный и граничный (граничное условие Неймана) операторы построены с одинаковым четвертым порядком аппроксимации.
2) Приведен контр пример, в котором дифференциальный оператор имеет четвертый порядок аппроксимации, а граничный оператор первый порядок аппроксимации. В этом случае сходимость разностной задачи к решению дифференциальной задачи при больших N не имеет места.
3) Теоретически обоснована сходимость или расходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в указанных примерах.
4) Из таблиц 2 и 3 видно, что невязка $delta$ точного $axact$ и численного $resolve$ решений в уравнениях параболического типа с диффузионным членом u_{xx} (одномерный случай оператора Лапласа) при больших N, как уменьшается на всей области отрезка $[0,\pi]$, так и равномерно распределяется по всему отрезку. Это равномерное распределение невязки можно объяснить диффузией случайной величины машинной ошибки округления.
5) Получены формулы с аппроксимацией четвертым порядком для граничного оператора с однородным условием Неймана (формулы (16),(17)) и для неоднородного условия Неймана на границе(формула (15)). Данные формулы применимы для уравнений в частных производных эллиптического, параболического и гиперболического типов, а также при аппроксимации краевых задач.

Литература

1) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.Численные методы в задачах и упражнениях. – М.:БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.
2) Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1995.
3) Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Учебное пособие. – М.: Издательство ЛКИ, 2014 – 480 с.