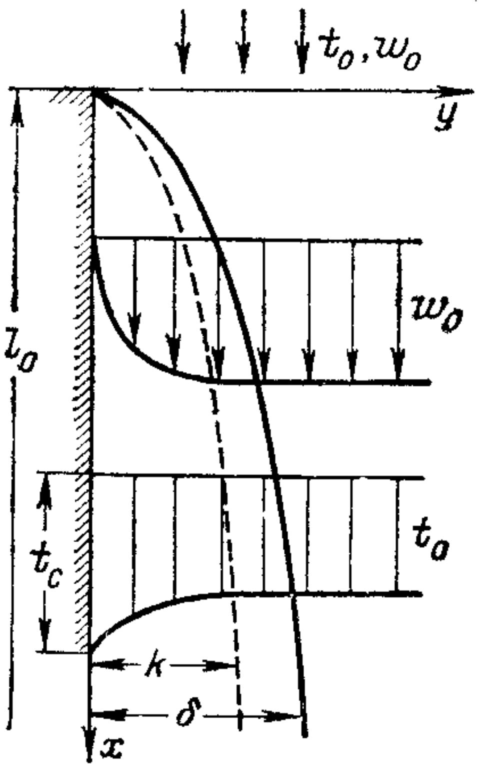
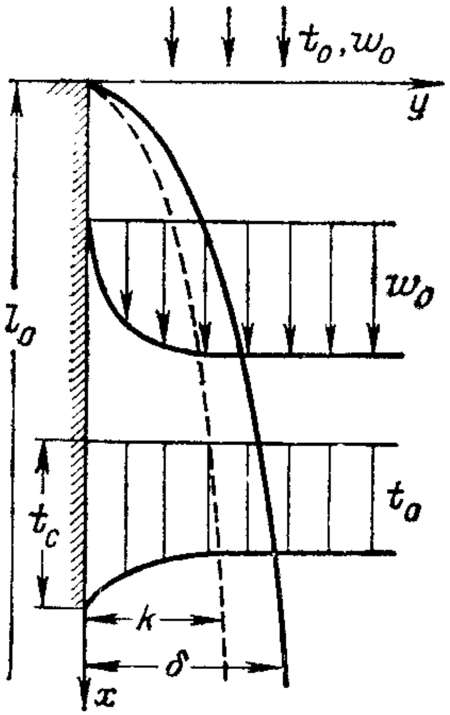
Приведение математической формулировки краевой задачи к записи в безразмерных переменных



Исходные данные:

1. Поверхность твердого тела омывается несжимаемой жидкостью, температура и скорость которой вдали от тела постоянны и равны соответственно t_0 и w_0.
2. Размер тела l_0.
3. Температура поверхности тела равна t_c. Для определённости примем, что $t_c > t_0$.
4. Физические параметры жидкости постоянны (учтём только подъемную силу, возникающую в результате зависимости плотности от температуры).



5. Теплота трения не учитывается.
6. Рассматриваемый процесс является стационарным.
7. Ось *Oy* нормальна к поверхности тела, а ось *Ox* направлена вдоль тела и вертикальна. При этом $g_x = g$, а проекции вектора сил тяжести (или подъемной силы) на оси *Oy* и *Oz* будут равны нулю ($g_y = g_z = 0$).
8. Размер тела вдоль оси *Oz* намного больше l_0.

При принятых условиях поля температур и скоростей можно описать дифференциальными уравнениями в приближении пограничного слоя.

Введем также избыточную температуру $J = t - t_0$, где t – температура жидкости.

Уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial J}{\partial x} + w_y \frac{\partial J}{\partial y} = a \frac{\partial^2 J}{\partial y^2},$$

уравнение движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = n \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + gbJ,$$

уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0.$$

Напишем граничные условия:
1) Вдали от тела $y = \infty$

$$J = J_0 = t_0 - t_0 = 0; \quad w_x = w_0; \quad w_y = 0.$$

2) На поверхности тела $y = 0; \quad 0 \le x \le l_0; \quad -\infty \le z \le +\infty$

$$J = t_c - t_0 = J_c = const; \quad w_x = w_y = 0.$$

В уравнениях и условиях однозначности можно различить три вида величин:

– *независимые переменные* – это координаты x и y.

– *зависимые переменные* – это J, w_x, w_y

однозначно определяются значениями независимых переменных, если заданы величины, входящие в условия однозначности;

– *постоянные величины* – это $w_0, t_0, l_0, J_c, n, a, gb$ и др.

задаются условиями однозначности и для определенной задачи являются постоянными, не зависящими от других переменных; постоянными эти величины называют потому, что они не являются функцией независимых переменных.

Т.о., искомые зависимые переменные J, w_x, w_y зависят от большого числа величин: они являются функцией независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности.

Величины, содержащиеся в уравнениях и условиях однозначности, можно сгруппировать в комплексы.

Число безразмерных комплексов будет меньше числа размерных величин.

Для приведения к безразмерному виду выбираются масштабы приведения – удобно принять постоянные величины, входящие в условия однозначности.

Обозначим безразмерные величины

$$X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{l_0}, \quad W_x = \frac{w_x}{l_0}, \quad W_y = \frac{w_y}{w_0}, \quad \Theta = \frac{t - t_0}{t_c - t_0} = \frac{J}{J_c}$$

Тогда $x = l_0 X, \quad y = l_0 Y, \quad w_x = w_0 W_x, \quad w_y = w_0 W_y, \quad J = J_c \Theta$

Преобразуем уравнение сплошности

$$\frac{w_0}{l_0}\left(\frac{\partial W_x}{\partial X}+\frac{\partial W_x}{\partial Y}\right)=0$$

т.к. $\frac{w_0}{l_0} \neq 0$, то $\frac{\partial W_x}{\partial X}+\frac{\partial W_y}{\partial Y}=0$

Преобразуем уравнение энергии:

$$\frac{w_0 l_0}{a}\left(W_x \frac{\partial \Theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \Theta}{\partial Y}\right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}$$

Преобразуем уравнение движения:

$$\frac{w_0 l_0}{n}\left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y}\right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \cdot b \cdot J_c \cdot l_0^3}{n^2} \frac{n}{w_0 l_0} \Theta$$

Приводя к безразмерному виду граничные условия, получаем
1) вдали от тела $Y = \infty$

$$\Theta = \Theta_0 = 0, \;\; W_x = 1, \;\; W_y = 0;$$

2) на поверхности тела $Y = 0; \;\; 0 \le X \le 1$

$$\Theta = \Theta_c = 1, \;\; W_x = W_y = 0.$$

При известном температурном поле коэффициент теплоотдачи может быть определен по уравнению

$$a = -\frac{l}{J_c}\left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Приводя к записи в безразмерных переменных, получаем

$$\frac{a_0 l_0}{l} = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y}\right)_{y=0}.$$