Подобие процессов конвективного теплообмена

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности с большим количеством переменных. Аналитическое решение полной системы уравнений наталкивается на серьезные трудности.

Поэтому большое значение приобретает экспериментальный путь исследования. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить числовые значения искомых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов.

Однако для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно из-за большого количества переменных.

Кроме того, при этом нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо конкретной установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образец).

Эти трудности помогает разрешить теория подобия.

С помощью теории подобия размерные физические величины можно объединить в *безразмерные комплексы*, причем так, что число комплексов будет меньше числа величин, из которых составлены эти комплексы. Полученные безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные.

При введении в уравнения *безразмерных комплексов* число величин под знаком искомой функции формально сокращается, что упрощает исследование физических процессов.

Кроме того, новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных факторов, но и их совокупности, что позволяет легче определить физические связи в исследуемом процессе.

Для практического использования выводов теории подобия необходимо уметь приводить к безразмерному виду математические описания изучаемых процессов.

Критерии подобия и уравнения подобия

Помимо безразмерных величин

$$\Theta = \frac{J}{J_0} = \frac{t - t_0}{t_{ж} - t_0},\ W_x = \frac{w_x}{w_0},\ W_y = \frac{w_y}{w_0}$$

и безразмерных координат

$$X = \frac{x}{l_0},\ Y = \frac{y}{l_0},\ Z = \frac{z}{l_0}$$

, в уравнения конвективного теплообмена входят также безразмерные комплексы, состоящие из разнородных физических величин

$$\frac{a\,l_0}{l},\ \frac{w_0 l_0}{n},\ \frac{w_0 l_0}{a},\ \frac{g\,b\,J_c l_0^3}{n^2}.$$

Этим комплексам, называемым числами подобия, присвоены имена ученых, внесших значительный вклад в развитие теплотехники и механики.

Первый из этих безразмерных комплексов обозначают

$$\mathrm{Nu} = \frac{a\, l_0}{l_{ж}}$$

и называют *числом Нуссельта* или безразмерным коэффициентом теплоотдачи.

Число Нуссельта характеризует теплообмен на границе стенка/жидкость. В задачах конвективного теплообмена число Nu обычно является искомой величиной, поскольку в него входит определяемая величина α.

Безразмерный комплекс

$$\mathrm{Re} = \frac{w_0 l_0}{n_{ж}}$$

называют числом *Рейнольдса*. Оно характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости.

Третий безразмерный комплекс обозначают

$$\mathrm{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a_{ж}}$$

и называют числом *Пекле*.

Его можно преобразовать следующим образом

$$\frac{w_0 l_0}{a_{ж}} = \frac{r_{ж} w_0 c_p J}{\dfrac{l_{ж}}{l_0} J}$$

здесь числитель характеризует теплоту, переносимую конвекцией, а знаменатель – теплоту, переносимую теплопроводностью.

Безразмерный комплекс

$$\mathrm{Gr} = \frac{g b_{ж} J_c l_0^3}{n_{ж}^2}$$

называют *числом Грасгофа*. Оно характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей.

Т.к. при выводе уравнения движения было принято

$r = r_0\left(1 - b_{ж} J_c\right)$ -> $b_{ж} = \dfrac{r - r_0}{r_0 J_c}$, то вместо Gr можно написать его общую модификацию – *число Архимеда*

$$\mathrm{Ar} = \frac{g l_0^3}{n_{ж}^2} \frac{r_0 - r}{r_0}$$

В случае однородной среды при условии *β*=const число Архимеда идентично числу Gr.

Безразмерные величины Θ, W_x, W_y, X, Y, Nu, Re, Pe, Gr можно рассматривать как новые переменные. Их можно разделить на три группы:

- независимые переменные – это безразмерные координаты X, $У$;
- зависимые переменные – это Nu, Θ, W_x, W_y;
- постоянные величины – это Pe, Re, Gr; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи являются постоянными.

В результате можно написать

$$Nu = f_1\left(X_c, Y_c, \mathrm{Pe}, \mathrm{Re}, \mathrm{Gr}\right)$$

$$\Theta = f_2\left(X, Y, \mathrm{Pe}, \mathrm{Re}, \mathrm{Gr}\right)$$

$$W_x = f_3\left(X, Y, \mathrm{Pe}, \mathrm{Re}, \mathrm{Gr}\right)$$

$$W_y = f_4\left(X, Y, \mathrm{Pe}, \mathrm{Re}, \mathrm{Gr}\right)$$

Здесь X_c, Y_c соответствуют поверхности теплоотдачи (стенки).

Безразмерный комплекс $\mathrm{Eu} = \dfrac{p}{r_{ж} w_0^2}$

называют числом *Эйлера.* Это число характеризует соотношение сил давления и сил инерции.

В уравнения конвективного теплообмена зависимая переменная Eu входит только под знаком производной. Следовательно, для несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами существенно не абсолютное значение давления, а его изменение. Поэтому число Эйлера обычно представляют в виде

$$\mathrm{Eu} = \frac{p - p_0}{r_{ж} w_0^2},$$

где p_0 – какое-либо фиксированное значение давления, например давление на входе в канал.

Очевидно, при неизменной математической формулировке задачи новые безразмерные величины могут быть получены комбинированием старых безразмерных величин.

Число Pe можно представить как произведение двух безразмерных переменных

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} = \frac{w_0 l_0}{n_{ж}} \frac{n_{ж}}{a_{ж}}$$

Безразмерная величина $\Pr = \dfrac{n_{ж}}{a_{ж}}$ представляет собой новую переменную, называемую числом *Прандтля*. Число Прандтля целиком составлено из физических параметров, и поэтому само является физическим параметром. Его можно записать и в виде

$$\Pr = \frac{n_{ж}}{a_{ж}} = \frac{m_{ж} \cdot c_p}{l_{ж}}$$

Числу Прандтля можно придать определенный физический смысл.

Уравнение энергии $$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2},$$

и уравнение движения $$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = n \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

по записи аналогичны.

При $a = n$ расчетные поля температур и скоростей будут подобны, если только аналогичны и условия однозначности. Таким образом, при определенных условиях числу Прандтля может быть придан смысл меры подобия полей температур и скоростей.

Безразмерные переменные можно разделить на два вида:

- *определяемые* – это числа, в которые входят искомые зависимые переменные; в рассматриваемом случае зависимыми являются a, J, w_x, w_y, следовательно, определяемыми являются Nu, Θ, W_x и W_y;

- *определяющие* – это числа, целиком составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности; в рассматриваемом случае определяющими являются *X*, *У*, Re, Pr (или Pe) и Gr.