

Система уравнений конвективного теплообмена:

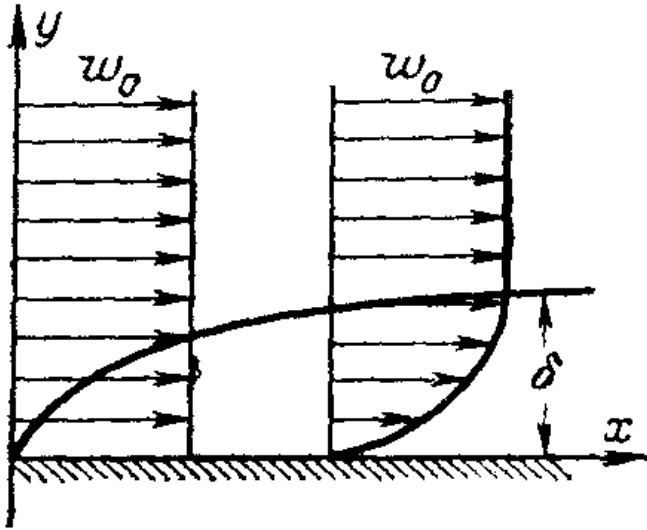
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t}{\partial t} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_J}{c_p \cdot r} \\ \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\mathbf{g} \cdot bJ - \frac{1}{r} \nabla p + n \nabla^2 \mathbf{w} \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

*Гидродинамический пограничный слой*

Рассмотрим продольное обтекание плоской поверхности тела потоком жидкости. Скорость и температура набегающего потока постоянны и равны  $w_0$  и  $t_0$ .

При соприкосновении частиц жидкости с поверхностью тела они «прилипают» к ней. В результате в области около пластины вследствие действия сил вязкости образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока (вдали от тела).

Этот слой заторможенной жидкости получил название *гидродинамического пограничного слоя*.



Чем больше расстояние  $x$  от передней кромки пластины, тем толще пограничный слой, т.к. влияние вязкости по мере движения жидкости вдоль тела всё дальше проникает в невозмущенный поток.

Для течения жидкости внутри пограничного слоя справедливо условие  $\partial w_x / \partial y \neq 0$ , вне пограничного слоя и на его внешней границе  $\partial w_x / \partial y = 0$  и  $w_x = w_0 = const$ .

Понятия «толщина пограничного слоя» и «внешняя граница пограничного слоя» довольно условны, т.к. резкого перехода от пограничного слоя к течению вне слоя нет.

Под толщиной пограничного слоя  $\delta$  подразумевается такое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определенную заранее заданную величину  $e \ll 1$ , т.е. при  $y = d$   $w_x = (1 - e)w_0$ .

Во внешнем потоке преобладают силы инерции, вязкостные силы здесь не проявляются. Напротив, в пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы.

Система д.у., описывающих стационарное поле скоростей при омывании плоской пластины, бесконечной по оси Oz:

Уравнения движения

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = n \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = n \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

Рассмотрим возможности упрощения для пограничного слоя записанной системы дифференциальных уравнений.

Ввиду малости толщины пограничного слоя ( $d \ll l$ ) поперек него давление не изменяется, т.е.  $\partial p / \partial y = 0$ .

При омывании плоской поверхности потоком, когда во внешнем течении скорость  $w_0 = const$  из уравнения Бернулли

$$p + \frac{rw_0^2}{2} = const$$

следует, что во внешнем потоке не изменяется и давление.

Тогда  $\partial p / \partial x = 0$ .

Условия  $\partial p / \partial y = 0$  для пограничного слоя и  $\partial p / \partial x = 0$  для внешнего течения приводят к выводу, что производная  $\partial p / \partial x$  равна нулю и в области пограничного слоя (в рассматриваемом случае).



Для пограничного слоя  $\delta \ll l$ , отсюда  $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$  (скорость «прилипшей» жидкости равна нулю), последней производной можно пренебречь.

Тогда уравнение движения в проекциях на ось  $Ox$  может быть записано в следующем виде

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

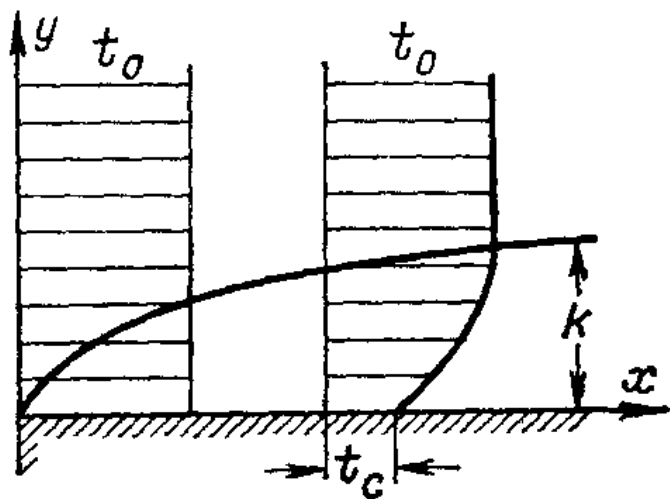
И все члены уравнения движения в проекциях на ось  $Oy$  малы по сравнению с членами уравнения в проекциях на ось  $Ox$ .

Тогда для стационарного течения вязкой жидкости в пограничном слое у плоской поверхности можно записать

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

Здесь две зависимые переменные:  $w_x$  и  $w_y$ .

*Тепловой пограничный слой*



Тепловой пограничный слой – это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки, до значения, равного температуре жидкости вдали от тела. Для области внутри теплового пограничного слоя справедливо условие  $\partial t / \partial y \neq 0$ , а на внешней границе и вне его  $\partial t / \partial y = 0$  и  $t = t_0$ .

Т.о., все изменение температуры жидкости сосредотачивается в тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела.

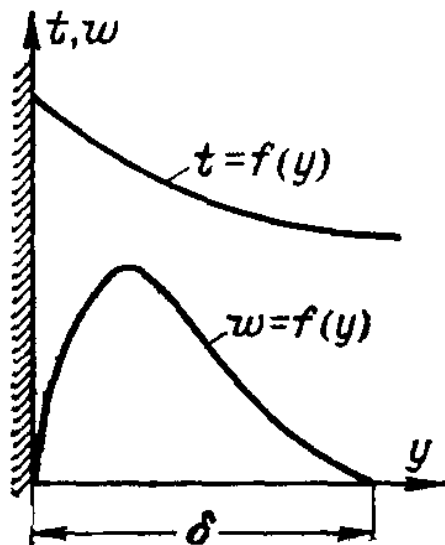
Толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев  $\delta$  и  $k$  в общем случае не совпадают, но они одного порядка малости, т.е.  $k \ll l$ . Ввиду малости толщины теплового граничного слоя можно пренебречь теплопроводностью вдоль слоя по сравнению с поперечным переносом теплоты:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad \text{т.к.} \quad k^2 \ll l^2$$

Тогда для рассматриваемого случая уравнение энергии:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

Чтобы замкнуть систему, необходимо добавить уравнение движения и уравнение сплошности, полученные для гидродинамического пограничного слоя.



Своеобразно строится пограничный слой в случае свободного течения, вызванного разностью плотностей в жидкости. Во многих случаях скорость вдали от тела, у которого возникло свободное движение, равна нулю. Также толщины теплового и гидродинамического слоев могут не совпадать.

Скорость в пограничном слое меняется от нуля на стенке до нуля в невозмущённом потоке, и её максимум находится на расстоянии  $1/3\delta$  от стенки.

При свободном тепловом движении ( $w_0=0$ ) в дифференциальном уравнении движения должен быть учтён член  $\bar{g}bJ$ .