1.8 Критический диаметр цилиндрической стенки

Рассмотрим влияние изменения наружного диаметра на термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки.

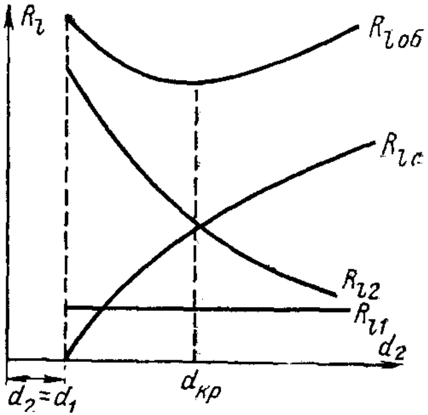
$$R_{l.об} = \frac{1}{k_l} = R_{l1} + R_{lc} + R_{l2} =$$

$$= \frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2 d_2}$$

При постоянных значениях α_1, d_1, λ и α_2 полное термическое сопротивление теплопередаче цилиндрической стенки будет зависеть от внешнего диаметра.

При этих условиях $R_{l1} = \dfrac{1}{a_1 d_1} = const$.

Термическое сопротивление теплопроводности $R_{lc} = \frac{1}{2l} \ln \frac{d_2}{d_1}$ с увеличением d_2 (толщины стенки) будет возрастать, а термическое сопротивление теплоотдачи $R_{l2} = \frac{1}{a_2 d_2}$ будет уменьшаться.

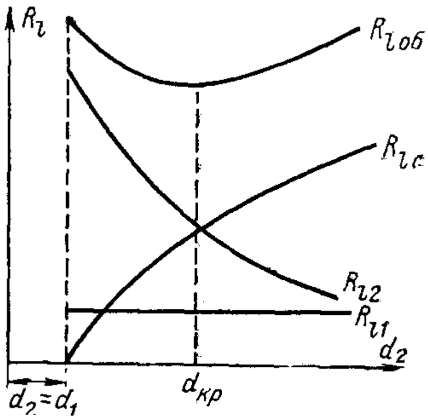


Исследуем R_l как функцию d_2. Возьмем производную R_l от d_2 и приравняем нулю, и т.о. найдём экстремум функции $R_l(d_2)$.

$$\frac{d(R_l)}{d(d_2)} = \frac{1}{2l\,d_2} - \frac{1}{a_2 d_2^2} = 0$$

или $\dfrac{1}{d_2}\left(\dfrac{1}{2l} - \dfrac{1}{a_2 d_2}\right) = 0$

Значение d_2 из последнего выражения соответствует экстремальной точке кривой $R_l=f(d_2)$.



Т.к. $\frac{d^2(R_l)}{d(d_2)^2} > 0$, то в экстремальной точке имеет место минимум.

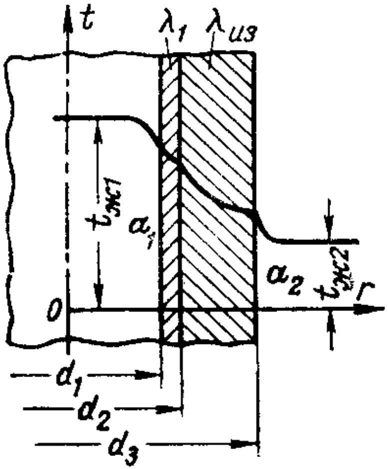
Т.о., при значении диаметра $d_2 = \frac{2l}{a_2}$ термическое сопротивление теплопередаче будет минимальным.

Значение внешнего диаметра трубы, соответствующего минималь-ному термическому сопротивлению теплопередаче, называется *критическим диаметром* и обозначается $d_{кр}$

$$d_{кр} = \frac{2 l}{a_2}$$

При $d_2 < d_{кр}$ с увеличением d_2 полное термическое сопротивление теплопередаче снижается.

При $d_2 > d_{кр}$ с увеличением d_2 термическое сопротивление теплопередачи возрастает.



Рассмотрим критический диаметр изоляции, наложенной на трубу. Термическое сопротивление теплопередаче для такой трубы запишется

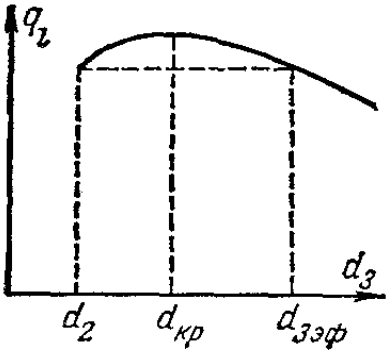
$$R_l = \frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2\,l_c} \cdot \ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\,l_{из}} \cdot \ln\frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{a_2 d_3}$$

Из формулы следует, что R_l при увеличении внешнего диаметра изоляции d_3 сначала будет уменьшаться и при $d_3=d_{кр}$ будет иметь минимум. При дальнейшем увеличении внешнего диаметра изоляции R_l будет возрастать.

С точностью наоборот будет изменяться линейный тепловой поток

$$q_l = \frac{\Delta t}{R_l}\ .$$

Выбрав какой-либо теплоизоляционный материал для покрытия ци
линдрической поверхности, прежде всего нужнс



рассчитать критический диаметр $d_{кр} = \frac{2 l_{из}}{a_2}$.

Материал изоляции выбирают из условия $d_{из} \geq d_{кр.из}$

1.9 Передача теплоты через шаровую стенку

а) Граничные условия первого рода

Имеется полый шар с радиусами r_1 и r_2 постоянным коэффициентом теплопроводности λ и с заданными равномерно распределенными температурами поверхностей t_{c1} и t_{c2}.

Т.к. в рассматриваемом случае температура измеряется только в направлении радиуса шара, то д.у. Фурье в сферических координатах имеет вид

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0$$

Вводим замену $u = \dfrac{dt}{dr}$,

тогда $\dfrac{du}{dr} + \dfrac{2}{r} \cdot u = 0$ или $\dfrac{du}{u} = -2\dfrac{dr}{r}$

После интегрирования $\ln u + 2\ln r = \ln C_1$ или $u \cdot r^2 = C_1$

или $\dfrac{dt}{dr} = \dfrac{C_1}{r^2}$ или $\int dt = C_1 \int r^{-2} dr$

Интегрирование дает

$$t = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (*)$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий:

при $r = r_1$ $\qquad t = t_{c1}$

при $r = r_2$ $\qquad t = t_{c2}$

При этом получим

$$C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}; \quad C_2 = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (*), получаем выражение для температурного поля в шаровой стенке

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$$

Для нахождения количества теплоты, проходящей через шаровую поверхность величиной *F* в единицу времени, можно воспользоваться законом Фурье

$$Q = -l \frac{dt}{dr} F = -l \frac{dt}{dr} p d^2$$

Температурный градиент

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2} = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r^2} = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) \frac{d^2}{2}}$$

Если в выражение подставить значение градиента температуры:

$$Q = l \frac{\Delta t}{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) \frac{1}{2}} p = \frac{2p\,l}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \Delta t$$

б) Граничные условия третьего рода (теплопередача)

При заданных граничных условиях третьего рода кроме r_1 и r_2 буду известны $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, а также коэффициенты теплоотдачи на поверхности шаровой стенки α_1 и α_2.

Величины $t_{ж1}$,$t_{ж2}$, α_1 и α_2 предполагаются постоянными во времени, а α_1 и α_2 – и по поверхностям.

Поскольку процесс стационарный и полный тепловой поток *Q*, Вт, будет постоянным для всех изотермических поверхностей, то можно записать

$$Q = a_1 \left(t_{ж1} - t_{с1} \right) p\, d_1^2; \qquad Q = a_2 \left(t_{с2} - t_{ж2} \right) p\, d_2^2$$

$$Q = \frac{2p\, l}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \left(t_{с1} - t_{с2} \right);$$

Из этих уравнений следует:

$$Q = \frac{p\left(t_{ж1} - t_{ж2}\right)}{\dfrac{1}{a_1 d_1^2} + \dfrac{1}{2l}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) + \dfrac{1}{a_2 d_2^2}} = k_ш \cdot p \cdot \Delta t$$

Величина

$$k_{ш} = \frac{1}{\frac{1}{a_1 d_1^2} + \frac{1}{2l}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{a_2 d_2^2}}$$

называется коэффициентом теплопередачи шаровой стенки и измеряется в Вт/К.

Обратная величина

$$\frac{1}{k_ш} = R_ш = \frac{1}{a_1 d_1^2} + \frac{1}{2l}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{a_2 d_2^2}$$

называется термическим сопротивлением теплопередаче шаровой стенки и измеряется в К/Вт.