1.11 Теплопроводность в стержне (ребре) постоянного поперечного сечения

а) Дифференциальное уравнение теплопроводности и его решение

Рассмотрим распространение теплоты в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине. Обозначим площадь поперечного сечения стержня через ***f*** и периметр поперечного сечения через ***u.***

Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_ж$, коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к окружающей среде будем считать постоянным для всей поверхности.

Коэффициент теплопроводности стержня λ достаточно велик, а поперечное сечение очень мало по сравнению с его длиной.

Пренебрегаем изменением температуры в поперечном сечении и считаем, что она изменяется только вдоль оси стержня.

Для удобства дальнейших выкладок отсчет температуры будем вести от $t_ж$=*const*. Отсчитанную таким образом избыточную температуру стержня обозначим через J. Очевидно,

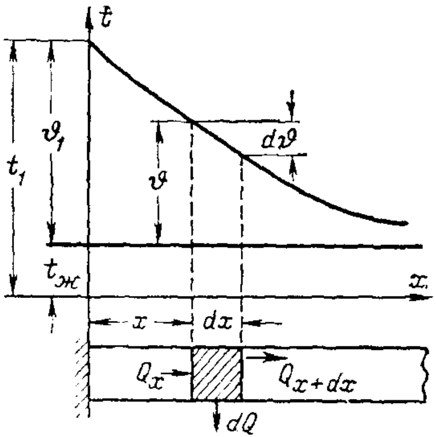
$$J = t - t_{ж}$$

где t – текущая температура стержня; $t_ж$ – температура среды, окружающей стержень.

Если задана температура основания стержня t_1 то избыточная температура стержня будет

$$J_1 = t_1 - t_{ж}$$

На расстоянии *x* от основания стержня выделим элемент стержня длиной *dx.*



Уравнение теплового баланса для рассматриваемого элемента можно записать:

$$Q_x - dQ = Q_{x+dx} \qquad \text{(a)}$$

где Q_x – теплота, входящая в левую грань за единицу времени;

Q_{x+dx} – теплота, выходящая из противоположной грани;

dQ – теплота, отдаваемая наружной поверхностью элемента окружающей среде.

Согласно закону Фурье

$$Q_x = -l\,\frac{dJ}{dx}\,f \qquad \text{(a)}$$

и

$$Q_{x+dx} = -l\,\frac{d}{dx}(J + dJ)\,f = -l\,\frac{d}{dx}\left(J + \frac{dJ}{dx}dx\right)f\,,$$

откуда $Q_{x+dx} = -lf\,\dfrac{dJ}{dx} - lf\,\dfrac{d^2J}{dx^2}dx$.

Следовательно,

$$Q_x - Q_{x+dx} = lf\,\frac{d^2 J}{dx^2}\,dx \qquad (б)$$

С другой стороны, по закону Ньютона-Рихмана

$$dQ = a_{\,p}\left(t - t_{ж}\right)dF_n = a_{\,p} J\,u\,dx \qquad (в)$$

Приравнивая (б) и (в), получаем следующее дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры стержня

$$\frac{d^2 J}{dx^2} = \frac{a_p u}{l\ f} J = m^2 J \quad , \qquad (1.11.1)$$

где $m = \sqrt{\dfrac{a_p u}{l\ f}}$, 1/м (г)

Предполагают, что температура по длине ребра изменяется нелинейно. Эту зависимость удобно выражать через функцию экспоненты. Т.о., решение уравнения (1.11.1) можно представить:

$$J = e^{kx} \quad \text{или} \quad J = C_1 J_1 + C_2 J_2 \qquad (1.11.2)$$

где k – постоянная, которую необходимо найти.

Т.е., теоретически, текущая избыточная температура складывается из части температурного напора у основания ребра и части на его торце.

Дифференцируя (1.11.2), имеем:

$$\frac{dJ}{dx} = ke^{kx} \quad \text{и} \quad \frac{d^2J}{dx^2} = k^2e^{kx} \qquad (1.11.2')$$

Подставляя (1.11.2') в (1.11.1), имеем

$$k^2e^{kx} - m^2e^{kx} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - m^2 = 0$$

Значит, у основания ребра и на торце *k* может принимать значения $\pm m$.

Тогда, общее решение имеет вид:

$$J = C_1 J_1 + C_2 J_2 = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \qquad (1.11.2'')$$

Значения постоянных C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Граничные условия могут быть заданы по-разному в зависимости от длины стержня и других факторов.

б) Стержень бесконечной длины

В начальном сечении стрежня температура поддерживается постоянной, т.е. при *x*=0 величина $J = J_1$.

Если длина стержня $l \to \infty$, то вся теплота, подводимая к стержню, будет отдана им в окружающую среду и при $x \to \infty$ на торце стержня имеем $J = t_{ж} - t_{ж} = 0$.

Подстановка граничных условий в уравнение (1.11.2'') дает

при $x = 0$ $\quad J_1 = C_1 + C_2;$

при $x \to \infty$ $\quad J_2 = 0 = C_1 e^{\infty}$

Последнее равенство возможно только при C_1=0. Т.о., $C_2 = J_1$.

Подставляя значения постоянных C_1 и C_2 в уравнение (1.11.2''), получаем

$$J = J_1 \cdot e^{-mx} \qquad (1.11.3)$$

или $$\Theta = \frac{J}{J_1} = e^{-mx} \qquad (1.11.3^{/})$$

где Θ – безразмерная температура, выраженная в долях температуры J_1 начального сечения стержня.

Из уравнения $m = \sqrt{\dfrac{a_p u}{l\, f}}$ следует, что величина m пропорциональна теплоотдаче с боковой поверхности и обратно пропорциональна $\sqrt{lf}$ – фактору, определяющему передачу теплоты теплопроводностью вдоль стержня.

Отсюда следует, что при оребрении нужно выбирать материал для ребер с бо́льшим коэффициентом теплопроводности. Последнее приводит к уменьшению m и сохранению больших избыточных температур вдоль стержня.

При $\dfrac{a_p}{l} = \mathrm{const}$ величина m возрастает с возрастанием u/f, что указывает на более эффективную работу рёбер с профилями, имеющими меньшее отношение u/f при том же поперечном сечении.

Количество теплоты, передаваемое стержнем в окружающую среду, очевидно, будет равняться количеству теплоты, подводимому к его основанию (закон сохранения энергии):

$$Q = -l\left(\frac{dJ}{dx}\right)_{x=0} f$$

Из уравнения (1.11.3) находим

$$\left(\frac{dJ}{dx}\right)_{x=0} = \left(-me^{-mx}J_1\right)\Big|_{x=0} = -mJ_1 .$$

Подставляя значение градиента температуры при x=0 в предыдущее уравнение для теплового потока, получаем формулу, определяющую количество теплоты, отданной стержнем в окружающую среду

$$Q = l\, m J_1 f = \sqrt{l^2}\sqrt{\frac{a_p u}{l\, f}}\, J_1 \sqrt{f^2} = J_1 \sqrt{a_p\, l\, u\, f} \tag{1.11.4}$$

в) Стержень конечной длины

Для стержня конечной длины дифференциальное уравнение (1.11.1) и его решение (1.11.2) сохраняет силу, но граничные условия будут другими

при $x = 0$ $\quad J = J_1;$

при $x = \mathbf{l}$ $\quad -l\left(\frac{dJ}{dx}\right)_{x=\mathbf{l}} = a_1 J_\mathbf{l}$ или $\left(\frac{dJ}{dx}\right)_{x=\mathbf{l}} = -\frac{a_1}{l} J_\mathbf{l}$ (1.11.5)

где $J_\mathbf{l}$ – температура на конце стержня; α_1 – коэффициент теплоотдачи с торца стержня.

При $x = \mathbf{l}$ имеет место равенство количества теплоты, подведенного к торцу стержня за счет теплопроводности и количества теплоты, отдаваемого поверхностью торца в окружающую среду за счет теплоотдачи.

Для определения постоянных C_1 и C_2 в уравнении (1.11.2) используем граничные условия (1.11.5)

при $x = 0$ $\quad J_1 = C_1 + C_2;$

при $x = \mathbf{l}$ $\quad \left(\dfrac{dJ}{dx}\right)_{x=\mathbf{l}} = C_1 m e^{m\mathbf{l}} - C_2 m e^{-m\mathbf{l}} = -\dfrac{a_1}{l} J_{\mathbf{l}};$ $\qquad$ (1.11.5$^{/}$)

и $J_{\mathbf{l}} = C_1 e^{m\mathbf{l}} + C_2 e^{-m\mathbf{l}}$

Из полученных уравнений (1.11.5$^{/}$) определяем постоянные C_1 и C_2

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (1.11.2), и произведя алгебраические преобразования, получим

$$J = J_1 \left[\frac{m\left[e^{m(\mathbf{l}-x)} + e^{-m(\mathbf{l}-x)}\right] + \frac{a_{\mathbf{l}}}{l}\left[e^{m(\mathbf{l}-x)} - e^{-m(\mathbf{l}-x)}\right]}{m\left[e^{m\mathbf{l}} + e^{-m\mathbf{l}}\right] + \frac{a_{\mathbf{l}}}{l}\left[e^{m\mathbf{l}} - e^{-m\mathbf{l}}\right]} \right].$$

Напомним, что $\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch(x)$ и $\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = sh(x)$.

С учетом сказанного уравнение (1.11.6) запишется

$$J = J_1 \frac{ch\left[m\left(\mathbf{l} - x\right)\right] + \dfrac{a_{\mathbf{1}}}{m\,l}\, sh\left[m\left(\mathbf{l} - x\right)\right]}{ch(m\mathbf{l}) + \dfrac{a_{\mathbf{1}}}{m\,l}\, sh(m\mathbf{l})} \qquad (1.11.6^{/})$$

Если <u>теплоотдачей с конца стержня пренебречь</u>, то граничные условия (1.11.5) можно записать в виде

при $x = 0$ $\quad J = J_1$;

при $x = \mathbf{l}$ $\quad \left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=\mathbf{l}} = 0$.

Последнее можно допустить для случая, когда a_1 на торце стержня мало, а коэффициент теплопроводности материала λ велик и отношение $\frac{a_1}{l} \to 0$.

Для этих условий в соотношении (1.11.6$^{/}$) вторые члены числителя и знаменателя правой части обращаются в нуль и уравнение принимает вид

$$J = J_1 \frac{ch\left[m\left(\mathbf{l} - x\right)\right]}{ch(m\mathbf{l})} \tag{1.11.7}$$

Когда $x = \mathbf{l}$, формула принимает вид $J_{x=\mathbf{l}} = \dfrac{J_1}{ch(m\mathbf{l})}$.

Количество теплоты Q_p, Вт, отдаваемое поверхностью ребра в окружающую среду, равно теплоте, подводимой к основанию ребра

$$Q_p = -l \left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=0} f \quad .$$

Дифференцируя уравнение (1.11.7), находим

$$\left(\frac{dJ}{dx} \right)_{x=0} = -J_1 m \frac{sh(m\mathbf{l})}{ch(m\mathbf{l})} = -J_1 m \cdot th(m\mathbf{l}) \quad .$$

Тогда $Q_p = l\ \ mJ_1\, th(m\mathbf{l})\ f$ (1.11.8)

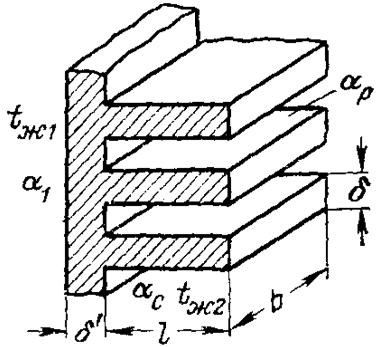
Подставив $m = \sqrt{\dfrac{a_{\ p} u}{l\ f}}$ в (1.11.8), получим

$$Q_p = J_1 \sqrt{a_{\ p} u\ l\ \ f}\ th(m\mathbf{l}) \qquad (1.11.8^{/})$$

Если длина стержня очень велика, то $sh(m\mathbf{l}) \rightarrow \infty$ и $ch(m\mathbf{l}) \rightarrow \infty$, а $th(m\mathbf{l}) \approx 1$. Тогда $J_{x=\mathbf{l}} = 0$ и формула (1.11.8) превращается в (1.11.4).

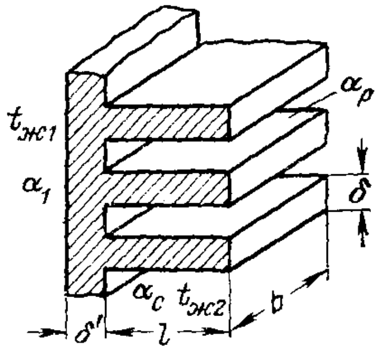
1.12 Теплопередача через ребристую плоскую стенку

Необходимо найти тепловой поток через плоскую ребристую стенку безграничных размеров. Стенка оребрена со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи.



Заданы постоянные значения коэффициентов теплоотдачи на неоребренной поверхности стенки $\boldsymbol{\alpha_1}$, гладкой части оребренной поверхности $\boldsymbol{\alpha_c}$ и на поверхности ребер $\boldsymbol{\alpha_p}$. Заданы геометрические размеры ребер и температуры теплоносителей $\boldsymbol{t_{ж1}}$ и $\boldsymbol{t_{ж2}}$.

Поскольку для ребра ***b***>>***δ***, то полагаем, что периметр поперечного сечения ребер ***u***=2***b***. Площадь поперечного сечения ребра ***f***=***bδ***.



Следовательно, $m = \sqrt{\dfrac{a_p u}{l\ f}} = \sqrt{\dfrac{2a_p}{l d}}$, 1/м.

Подставив полученное выражение для *m* в уравнение (1.11.8), умножив и разделив на $2\mathbf{l}$, получим

$$Q_p = J_1 \sqrt{a_p (2b)\, l\, (bd)}\, \frac{2\mathbf{l}}{2\mathbf{l}}\, \mathrm{th}\left(\frac{\mathbf{l}}{d} \sqrt{\frac{2a_p d}{l}} \right) = a_p J_1 F_p \frac{\mathrm{th}\left(\frac{\mathbf{l}}{d} \sqrt{\frac{2a_p d}{l}} \right)}{\frac{\mathbf{l}}{d} \sqrt{\frac{2a_p d}{l}}},$$

здесь $\dfrac{a_p d}{l} = \mathrm{Bi}$ – безразмерный комплекс, называемый *числом Био́*

Число Bi является важной характеристикой процесса теплопроводности. Оно представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдаче

$$\mathrm{Bi} = \frac{\dfrac{d}{l}}{\dfrac{1}{a_p}}$$

Окончательно уравнение для теплового потока с поверхности ребра можно записать в виде

$$Q_p = a_p J_1 F_p \frac{\mathrm{th}\left(\dfrac{\mathbf{l}}{d}\sqrt{2\mathrm{Bi}}\right)}{\dfrac{\mathbf{l}}{d}\sqrt{2\mathrm{Bi}}} \qquad (1.11.9)$$

Обозначим $$\frac{\operatorname{th}\left(\frac{l}{d}\sqrt{2\mathrm{Bi}}\right)}{\frac{l}{d}\sqrt{2\mathrm{Bi}}} = e$$.

Величина *ε* называется *коэффициентом эффективности ребра*. Тогда уравнение (1.11.9) принимает вид

$$Q_p = a_{\,p} J_1 F_p e \;.$$

Величина ε есть функция $\left(\frac{\mathbf{l}}{d}\sqrt{2\mathrm{Bi}}\right)$, и она стремится к своему максимальному значению, равному единице, при $\frac{\mathbf{l}}{d}\sqrt{2\mathrm{Bi}} \to 0$ (при заданных геометрических размерах ребра последнее возможно в случае, если $l \to \infty$, т.е. $\mathrm{Bi} \to 0$).

Теплота Q_c, Вт, отдаваемая гладкой частью оребренной поверхности

$$Q_c = a_c J_1 F_c .$$

Общее количество теплоты

$$Q = Q_p + Q_c = a_p J_1 F_p E + a_c J_1 F_c \qquad \text{(а)}$$

или $Q = a_{np} J_1 F_{p.c.}, \; F_{p.c.} = F_p + F_c$ (б)

Из сопоставления (а) и (б) следует, что

$$a_{пр} = a_{р} e \frac{F_{р}}{F_{р.с}} + a_{с} \frac{F_{с}}{F_{р.с}} \qquad (1.11.10)$$

Величина $\alpha_{пр}$, входящая в уравнение (1.11.10), называется *приведенным коэффициентом теплоотдачи.*

Это усредненный коэффициент теплоотдачи ребристой стенки, который учитывает теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой стенки и эффективность работы ребра.

Можно записать систему уравнений

$$Q = a_1 (t_{ж1} - t_{c1}) F_1; \qquad Q = a_{пр} (t_{c2} - t_{ж2}) F_{p.c.};$$

$$Q = \frac{l}{d^{/}} \left(t_{c1} - t_{c2} \right) F_1;$$

здесь $\delta^{/}$ – на рисунке выше.

Из этих уравнений получаем

$$Q = \frac{t_{жс1} - t_{жс2}}{\dfrac{1}{a_1 F_1} + \dfrac{d^{/}}{l F_1} + \dfrac{1}{a_{np} F_{p.c.}}} \qquad (1.11.11)$$

Если тепловой поток отнести к единице оребренной поверхности стенки, то

$$\frac{Q}{F_{р.с.}} = q_{р.с.} = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{a_1}\frac{F_{р.с.}}{F_1} + \frac{d^{/}}{l}\frac{F_{р.с.}}{F_1} + \frac{1}{a_{пр}}} = k_{р.с.}(t_{ж1} - t_{ж2}) \qquad (1.11.12)$$

где $k_{р.с.} = \frac{1}{\frac{1}{a_1}\frac{F_{р.с.}}{F_1} + \frac{d^{/}}{l}\frac{F_{р.с.}}{F_1} + \frac{1}{a_{пр}}}$ – коэффициент теплопередачи через ребристую стенку при отнесении теплового потока к оребренной поверхности, Вт/(м^2·К).

Если тепловой поток отнести к неоребренной поверхности стенки, то получим

$$\frac{Q}{F_1} = q_1 = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{d^{/}}{l} + \dfrac{1}{a_{пр}} \cdot \dfrac{F_1}{F_{р.с.}}} = k_1 (t_{ж1} - t_{ж2}) \qquad (1.11.13)$$

где $k_1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{d^{/}}{l} + \dfrac{1}{a_{пр}} \dfrac{F_1}{F_{р.с.}}}$ – коэффициент теплопередачи при отнесении теплового потока к неоребренной поверхности стенки.

Отношение оребренной поверхности $F_{р.с}$ к гладкой F_1 называется *коэффициентом оребрения*.

Влияние оребрения на коэффициент теплопередачи можно показать на следующем примере.

Пусть α_1= 1000 и α_2 = 20 Вт/(м^2·К). Предположим, что $d^{/} / l$ мало и им можно пренебречь, тогда

$$k_1^{/} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{пр}} \frac{F_1}{F_{р.с.}}}.$$

Для плоской поверхности (коэффициент оребрения $F_{р.с}/F_1$ равен единице) получим

$$k_1^{/} = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20}} \approx 20 \text{ Вт/(м}^2\text{·К).}$$

Если стенка имеет ребра с одной стороны, причем коэффициент $F_{р.с}./F_1=2$, то

$$k_1^{/} = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2}} \approx 40 \text{ Вт/(м}^2\text{·К).}$$

Следовательно, при заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребрении плоской стенки со стороны малого α с коэффициентом оребрения $F_{р.с}/F_1=2$, передача теплоты увеличивается примерно в 2 раза.