Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

С. Г. Ехилевский
Н. А. Гурьева
О. В. Голубева

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
для студентов специальности 1-98 01 01
«Компьютерная безопасность
(математические методы программные системы)»

Новополоцк
ПГУ
2013

УДК 512(075.8)
ББК 22.11я73

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией факультета информационных технологий (протокол № 6 от 07.07.2013) в качестве учебно-методического пособия

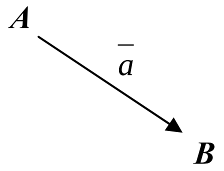
Кафедра технологий программирования

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
канд. техн. наук, доц. каф. технологий программирования
А.Ф. ОСЬКИН;
канд. техн. наук, доц., зав. каф. вычислительных систем и сетей
Р.П. БОГУШ

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Векторы и их свойства

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ (см. рис.).



Вектор обозначается указанием его начала и конца, или одной буквой, например, $\overline{a}$.

Векторы называются **равными**, если они имеют одинаковые модули (длины), лежат на параллельных прямых или на одной прямой и направлены в одну сторону.

Если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то **координаты вектора** $\overline{AB}(a_1; a_2; a_3)$ определяются следующим образом:

$$a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,\ a_3 = z_2 - z_1.$$

Координаты вектора являются его проекциями на координатные оси, поэтому вектор $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ можно представить разложением

$$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k},$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – единичные, попарно ортогональные векторы (базисные).

Модуль вектора

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, т. е. $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$, то

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_1 \pm b_1)\overline{i} + (a_2 \pm b_2)\overline{j} + (a_3 \pm b_3)\overline{k}.$$

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными**.

Условием коллинеарности двух векторов $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ является пропорциональность их координат:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Произведением вектора $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ **на скаляр** α является вектор с координатами αa_1, αa_2, αa_3.

Векторы $\overline{a}$ и $\alpha\overline{a}$ коллинеарны и одинаково направлены, если $\alpha > 0$, и противоположно направлены, если $\alpha < 0$.

Вектор $\overline{a_0} = \dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}$ называется **единичным вектором вектора** $\overline{a}$.

Пусть вектор $\overline{a}$ составляет с осью OX угол α, с осью OY угол β, с осью OZ угол γ, тогда его единичный вектор $\overline{a_0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют **направляющими косинусами вектора**.

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos(\overline{a}, \overline{b}).$$

Отметим **свойства скалярного произведения векторов**:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;

2) $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$;

3) $\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{a}\right|\cos 0 = \left|\overline{a}\right|^2$ и $\left|\overline{a}\right|^2 = \sqrt{\overline{a}^2}$;

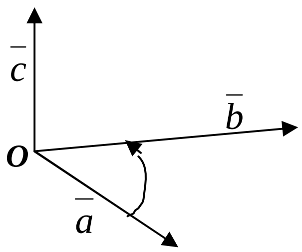
4) если $\overline{a} \perp \overline{b}$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, и обратно;

5) если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ своими координатами, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Угол между векторами легко находится:

$$\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}.$$

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, определяемый следующими условиями:



1) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\angle(\overline{a}, \overline{b})$;

2) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

3) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют правую тройку, т. е. ориентированы по отношению друг к другу, например, как векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (см. рис.).

Векторное произведение будем обозначать как $\left[\overline{a}; \overline{b}\right]$.

Отметим **свойства векторного произведения** векторов:

1) $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right]$;

2) $\left[\overline{a}, \left(\overline{b} + \overline{c}\right)\right] = \left[\overline{a}, \overline{b}\right] + \left[\overline{a}, \overline{c}\right]$;

3) $\left[\left(m\cdot\overline{a}\right),\overline{b}\right]=m\cdot\left[\overline{a},\overline{b}\right]$, где m – const;

4) если $\overline{a}\parallel\overline{b}$, $\left[\overline{a},\overline{b}\right]=0$, в частности, $\left[\overline{a},\overline{a}\right]=0$.

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$: $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$, тогда

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_3 & b_3\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}(a_2b_3-b_2a_3)-\overline{j}(a_1b_3-b_1a_3)+\overline{k}(a_1b_2-a_2b_1).$$

По определению, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна модулю их векторного произведения:

$$S_{пар.}=\left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right|.$$

Смешанным произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется произведение вида

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right]\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left[\overline{b},\overline{c}\right]=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}.$$

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Заметим, что объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$,

$$V_{пир.}=\frac{1}{6}\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right|.$$

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ заданы своими координатами $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$, $\overline{c}(c_1;c_2;c_3)$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Отметим **свойства смешанного произведения** векторов:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{a}=\overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}=-\overline{a}\cdot\overline{c}\cdot\overline{b}=-\overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c}$;

2) если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости (компланарны), то

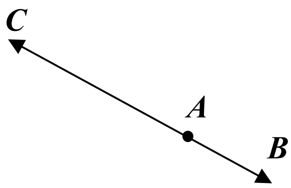
$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0.$$

Замечание. Отметим, что три некомпланарных вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$ и $\overline{c} = \overline{AD}$, взятых в указанном порядке, образуют правую тройку, если из конца $\overline{AD}$ поворот от $\overline{AB}$ к $\overline{AC}$ по кратчайшему пути виден в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

ЗАДАЧИ

1. Известно, что $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{3}{4}$. Выразить вектор $\overline{AC}$ через вектор $\overline{AB}$, если векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ противоположно направлены ($\overline{AC} \uparrow\downarrow \overline{AB}$) (см. рис.).

Решение



Т. к. векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ противоположно направлены и длина вектора $\overline{AC}$ в три раза больше длины вектора $\overline{AB}$, то $\overline{AC} = -3\overline{AB}$.

2. Пусть $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right|$. Следует ли отсюда, что $\overline{a} = \overline{b}$?

Решение

Не следует, т. к. условие задачи не содержит условия сонаправленности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3. Известно, что $\overline{a} \neq 0$ и $\overline{b} = \lambda\overline{a}$. Каким должно быть число λ, чтобы выполнялись следующие условия:

а) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены и $\left|\overline{b}\right| = 1$;

б) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены и $\left|\overline{b}\right| = 1$;

в) $\overline{b} = 0$.

Решение

а) $\lambda = \dfrac{1}{\left|\overline{a}\right|}$.

б) $\lambda = -\dfrac{1}{\left|\overline{a}\right|}$.

в) $\lambda = 0$, что непосредственно следует из условия задачи.

4. Доказать правило раскрытия скобок:

$$\left(\overline{a_1}-\overline{b_1}\right)+\left(\overline{a_2}-\overline{b_2}\right)+\ldots+\left(\overline{a_n}-\overline{b_n}\right)=\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}\right)-\left(\overline{b_1}+\overline{b_2}+\ldots+\overline{b_n}\right).$$

Решение

По определению разности векторов

$$\left(\overline{a_1}-\overline{b_1}\right)+\left(\overline{a_2}-\overline{b_2}\right)+\ldots+\left(\overline{a_n}-\overline{b_n}\right)=\left(\overline{a_1}+(-\overline{b_1})\right)+\left(\overline{a_2}+(-\overline{b_2})\right)+\ldots+\left(\overline{a_n}+(-\overline{b_n})\right).$$

Обозначим последнее выражение через $\overline{x}$ и, опуская часть скобок в соответствии с договоренностью, основанной на законе ассоциативности сложения, получаем:

$$\overline{x}=\overline{a_1}+(-\overline{b_1})+\overline{a_2}+(-\overline{b_2})+\ldots+\overline{a_n}+(-\overline{b_n}).$$

Применим теперь несколько раз закон коммутативности сложения, тогда будем иметь

$$\overline{x}=\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}\right)+\left(-\overline{b_1}\right)+\left(-\overline{b_2}\right)+\ldots+\left(-\overline{b_n}\right).$$

Отсюда

$$\overline{x}+\left(\overline{b_1}+\overline{b_2}+\ldots+\overline{b_n}\right)=\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}\right)+\left(-\overline{b_1}\right)+\left(-\overline{b_2}\right)+\ldots+\left(-\overline{b_n}\right)+$$

$$+\overline{b_1}+\overline{b_2}+\ldots+\overline{b_n}==\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}\right)+$$

$$=\left(\overline{b_1}+(-\overline{b_1})\right)+\left(\overline{b_2}+(-\overline{b_2})\right)+\ldots+\left(\overline{b_n}+(-\overline{b_n})\right)=$$

$$=\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}\right)+\overline{0}+\overline{0}+\ldots+\overline{0}=\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}.$$

Применим правило переноса слагаемых из одной части векторного равенства в другую, тогда

$$\overline{x}=\left(\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}\right)-\left(\overline{b_1}+\overline{b_2}+\ldots+\overline{b_n}\right).$$

5. Доказать, что для любого вектора $\overline{a}$ имеет место равенство $-(-\overline{a})=\overline{a}$.

Решение

Пусть $\overline{x}=-(-\overline{a})$, тогда $\overline{x}+(-\overline{a})=\overline{0}$. Прибавим к обеим частям этого равенства вектор $\overline{a}$:

$$\overline{x}+(-\overline{a})+\overline{a}=\overline{x}+\left(\overline{a}+(-\overline{a})\right)=\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}.$$

6. Доказать, что для неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равенство выполняется тогда и только тогда, когда $m = n = 0$.

Решение

Проведем доказательство методом от противного.

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарные векторы, такие что $m\overline{a} + n\overline{b} = 0$ и $m \neq 0$.

Тогда

$$\overline{0} = \left(\frac{1}{m}\right)\overline{0} = \left(\frac{1}{m}\right)\left(m\overline{a} + n\overline{b}\right) = \left(\frac{1}{m}\right)\left(m\overline{a}\right) + \left(\frac{1}{m}\right)\left(n\overline{b}\right) = 1 \cdot \overline{a} + \left(\frac{n}{m}\right)\overline{b} = \overline{a} - \left(-\frac{n}{m}\right)\overline{b},$$

т. е. $\overline{a} = \left(-\dfrac{n}{m}\right)\overline{b}$ и в силу признака коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.

Имеем противоречие.

Отметим, что аналогичные рассуждения можем предложить и для $n \neq 0$.

7. Вектор $\overline{a}$ образует с осью l угол φ. Какой угол с осью l образует $\lambda\overline{a}$ при $\lambda \neq 0$?

Решение

При $\lambda > 0$ вектор $\lambda\overline{a}$ образует с осью l угол φ, а при $\lambda < 0$ угол $(\pi - \varphi)$.

8. Выразить вектор $\overline{a}$ через коллинеарный с ним вектор $\overline{e}$, если $\left|\overline{e}\right| = 1$.

Решение

$\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\overline{e}$, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{e}$; $\overline{a} = -\left|\overline{a}\right|\overline{e}$, если $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{e}$.

9. Доказать, что если $m\overline{a} + n\overline{b} = k\overline{a} + l\overline{b}$, то $(m-k)\overline{a} + (n-l)\overline{b} = 0$.

Решение

Перенесем векторы из правой части равенства $m\overline{a} + n\overline{b} = k\overline{a} + l\overline{b}$ в левую:

$$(m\overline{a} - k\overline{a}) + (n\overline{b} - l\overline{b}) = \overline{0}.$$

На основании законов умножения вектора на число имеем

$$-k\overline{a} = (-1)(k\overline{a}) = (-k)\overline{a}.$$

Помимо этого,

$$m\overline{a} - k\overline{a} = m\overline{a} + (-k\overline{a}) = m\overline{a} + (-k)\overline{a} = (m-k)\overline{a}.$$

Аналогично доказывается, что $n\overline{b} - l\overline{b} = (n-l)\overline{b}$.

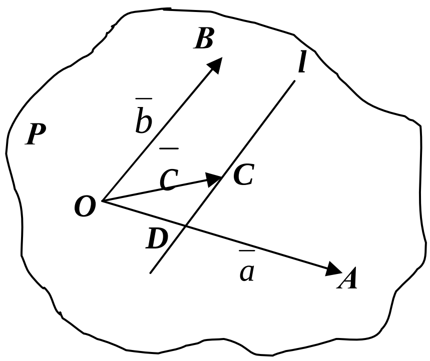
Таким образом, $m\overline{a} + n\overline{b} = k\overline{a} + l\overline{b}$ тогда и только тогда, когда $(m-k)\overline{a} + (n-l)\overline{b} = 0$.

10. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарные векторы (см. рис.). Отложим их от одной точки O:

$$\overline{OA} = \overline{a},\ \overline{OB} = \overline{b}.$$

Пусть P – плоскость, определяемая точками O, A, B. Любой вектор $\overline{c}$, компланарный векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, по определению параллелен плоскости P.

Если построить вектор $\overline{OC} = \overline{c}$, то точка C будет принадлежать плоскости P.



Проведем через точку C прямую l параллельно прямой OB.

Т. к. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то прямая l и OA пересекутся в некоторой точке D.

Векторы $\overline{OD}$ и $\overline{OA}$ коллинеарны, и при этом $\overline{OA} \neq \overline{0}$.

Согласно признаку коллинеарности векторов найдется такое действительное число x, что

$$\overline{OD} = x \cdot \overline{OA}.$$

Аналогично, найдется такое действительное число y, что

$$\overline{DC} = y \cdot \overline{OB}.$$

Поэтому $\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = x \cdot \overline{OA} + y \cdot \overline{OB}$, т. е.

$$\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}.$$

11. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – три вектора пространства, связанные соотношением $\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

Решение

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, т. е. параллельны некоторой прямой l, то этой же прямой параллельны векторы $x\overline{a}$ и $y\overline{b}$, а также и вектор $\overline{c}$, являющийся суммой векторов $x\overline{a}$ и $y\overline{b}$. Следовательно, $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ параллельны любой плоскости, содержащей прямую l.

Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то отложим их от некоторой точки O, как в предыдущей задаче:

$$\overline{OA} = \overline{a},\ \overline{OB} = \overline{b}.$$

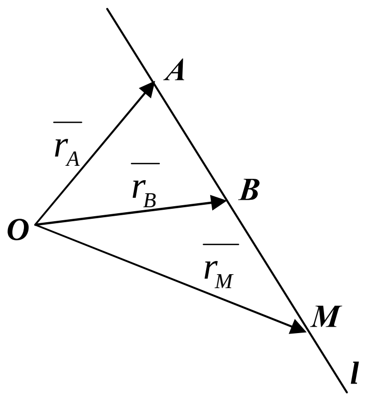
Плоскость P проходит через точки O, A, B. Возьмем на прямой OA точку D так, чтобы $\overline{OD} = x \cdot \overline{OA}$. Отложим от точки D вектор $\overline{DC} = y \cdot \overline{OB}$, который, будучи параллельным прямой OB, параллелен и плоскости P. Таким образом, начало и конец вектора $\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = x \cdot \overline{OA} + y \cdot \overline{OB}$ лежит в P. Это же означает, что вектор $\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$ параллелен плоскости P, а, следовательно, компланарен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Признак компланарности трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ получен:

$$\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}.$$

12. Задача о делении отрезка в данном отношении.

Пусть A и B – различные точки, заданные различными радиусами-векторами $\overline{r_A}$ и $\overline{r_B}$ относительно полюса O. При этом λ – положительное число. Нужно найти радиус-вектор $\overline{r_M}$ точки M отрезка AB, делящий этот отрезок в отношении λ, считая от точки A (см. рис.).

Решение



Точка M лежит на прямой AB между точками A и B, тогда $\overline{r_M} = \overline{r_A} - t(\overline{r_B} - \overline{r_A})$, где $t = \dfrac{|AM|}{|AB|} > 0$ (сделать чертеж).

Согласно условию $\lambda = \dfrac{|AM|}{|MB|}$, потому

$$|AB| = |AM| + |MB| = |AM| + \frac{|AB|}{\lambda} = \frac{(\lambda+1)|AM|}{\lambda}$$

.

Таким образом, $t = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$, $\overline{r_M} = \overline{r_A} + \dfrac{\lambda}{\lambda+1}(\overline{r_B} - \overline{r_A}) = \dfrac{1}{\lambda+1}\overline{r_A} + \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overline{r_B}$.

Соотношение $\overline{r_M} = \dfrac{\overline{r_A} + \lambda\overline{r_B}}{\lambda+1}$ называется делением отрезка в данном отношении.

При $\lambda = 1$ точка M делит отрезок AB пополам.

13. Точка $M(2,2,4)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{2}{3}$. Найти координаты точки B, если $A(-2,4,0)$.

Решение

Положим, что точка $B(x,y,z)$ – конец отрезка. Точка $M(2,2,4)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{2}{3}$, тогда

$$2 = \frac{-2 + 2 \cdot \frac{x}{3}}{1 + \frac{2}{3}}, \; 2 = \frac{4 + 2y \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}}, \; 4 = \frac{0 + 2 \cdot \frac{z}{3}}{1 + \frac{2}{3}},$$

т. е. $x = 8$, $y = -1$, $z = -10$.

14. Концы однородного стержня находятся в точках $A(3,-5,8)$ и $B(7,13,-6)$. Найти координаты центра масс стержня.

Решение

Центр масс $M(x,y,z)$ однородного стержня находится в его середине. Поэтому $\lambda = 1$ и

$$x = \frac{3+7}{2} = 5, \; y = \frac{-5+13}{2} = 4, \; z = \frac{8-6}{2} = 1.$$

15. Четырьмя точками отрезок AB делится на 5 равных частей. Определить координату точки деления, ближайшей к точке A, если $A(-3)$, $B(7)$.

Решение

Пусть $C(x)$ – искомая точка, $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{4}$, поэтому

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1} = \frac{-3 + \frac{1}{4} \cdot 7}{1 + \frac{1}{4}} = -1, \text{ т. е. } C(-1).$$

16. В базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ заданы векторы $\overline{a} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2} + \overline{e_3}$, $\overline{b} = \overline{e_1} + 3\overline{e_2} - 4\overline{e_3}$. Найти вектор $\overline{c} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$ в этом базисе.

Решение

Так как при умножении вектора на число каждая координата умножается на это число, а при сложении векторов соответствующие координаты складываются, то

$$\overline{c} = 2(2\overline{e_1} - \overline{e_2} + \overline{e_3}) + 3(\overline{e_1} + 3\overline{e_2} - 4\overline{e_3}) = 7\overline{e_1} + 1\overline{e_2} - 10\overline{e_3}.$$

17. Векторы заданы в ортонормированном базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ координатами $\overline{a}(2,-1,8)$, $\overline{e_1}(1,2,3)$, $\overline{e_2}(1,-1,-2)$, $\overline{e_3}(1,-6,0)$.

Следует убедиться, что тройка векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ образует базис, и найти координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

Решение

Если определитель, составленный из координат векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, не равен нулю (векторы не компланарны), то $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ линейно независимы и потому образуют базис (по определению):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -19 \neq 0.$$

Итак, $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ – базис.

Обозначим координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе через x, y, z, т. е.

$$\overline{a} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3}.$$

Из этого равенства следует, что

$$2\overline{i} - \overline{j} + 8\overline{k} = x\overline{i} + 2x\overline{j} + 3x\overline{k} + y\overline{i} - y\overline{j} - 2y\overline{k} + z\overline{i} - 6z\overline{j} =$$

$$= (x + y + z)\overline{i} + (2x - y - 6z)\overline{j} + (3x - 2y)\overline{k}.$$

Однако два вектора равны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты равны.

Поэтому имеем соотношения:

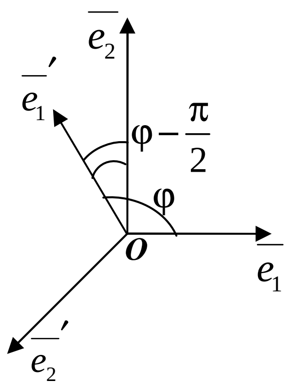
$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-y-6z=-1, \\ 3x-2y+0z=8. \end{cases}$$

Отсюда легко получить $x=2$, $y=-1$, $z=1$.

Итак, в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ вектор $\overline{a}$ представляется разложением

$$\overline{a}=2\overline{e_1}+(-1)\overline{e_2}+1\overline{e_3}.$$

18. Пусть $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ – единичные векторы, направленные по осям прямоугольной декартовой системы координат.



Повернем оси координат на угол φ против часовой стрелки, и пусть $\overline{e_1}'$ и $\overline{e_2}'$ – новые базисные векторы (см. рис.).

Углы, образуемые вектором $\overline{e_1}'$ с векторами $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$, равны соответственно φ и $\varphi-\frac{\pi}{2}$. Поэтому координаты этого вектора в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ равны $\cos\varphi$ и $\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi$. Значит, $\overline{e_1}'=\cos\varphi\cdot\overline{e_1}+\sin\varphi\cdot\overline{e_2}$.

Углы вектора $\overline{e_2}'$ с векторами $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ равны соответственно $\frac{\pi}{2}+\varphi$ и φ, а его координаты в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ равны $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Значит, $\overline{e_2}'=-\sin\varphi\cdot\overline{e_1}+\cos\varphi\cdot\overline{e_2}$.

19. Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(3,4,-5)$, $B(-1,8,-3)$.

Решение

Направление вектора $\overline{a}$ определяется углами α, β, γ, образованными им с осями координат OX, OY и OZ.

Косинусы этих углов, называемых направляющими, определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|},$$

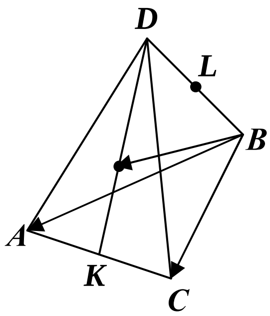
где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Координаты вектора $\overline{AB}(-4,4,2)$, длина этого вектора

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16+16+4} = 6.$$

Поэтому $\cos\alpha = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

20. В пространстве задана некоторая система координат $\{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$. Точки $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(-1,2,0)$, $D(0,0,2)$ – вершины тетраэдра $ABCD$, точки K и L – середины ребер $|AC|$ и $|DB|$. Найти матрицу перехода S от системы координат $\{A, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$ к системе координат $\{B, \overline{AC}, \overline{KL}, \overline{DB}\}$, если O – точка пересечения медиан треугольника ACD (см. рис.).



Решение

Проведем исследования, полагая, что базисными векторами могут согласно представленному тетраэдру быть следующие базисы:

$\{\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}\}$, $\{\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AD}\}$, $\{\overline{BO}, \overline{OD}, \overline{AC}\}$ и $\{\overline{DA}, \overline{BC}, \overline{BO}\}$.

Очевидно, что $\overline{BO} + \overline{OA} = \overline{BA}$, $\overline{BO} + \overline{OC} = \overline{BC}$, $\overline{BO} + \overline{OD} = \overline{BD}$.

Поэтому

$$3\overline{BO} + (\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD}) = \overline{BA} + \overline{BC} + \overline{BD}.$$

Однако, если O – точка пересечения медиан треугольника ACD, то $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD} = \bar{0}$, т. е. $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{BD}$.

Вектор $\overline{AL}$ – вектор медианы треугольника ADB. Поэтому $\overline{AL} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AB})$ и

$$\overline{KL} = \overline{AL} - \overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AB}) - \frac{1}{2}\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}.$$

Помимо этого, имеем следующие равенства:

$\overline{AC} = 0 \cdot \overline{AB} + 1 \cdot \overline{AC} + 0 \cdot \overline{AD}$;

$\overline{KL} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AD}$;

$\overline{DB} = 1 \cdot \overline{AB} + 0 \cdot \overline{AC} - 1 \cdot \overline{AD}$;

$\overline{AD} = 1 \cdot \overline{AB} + 0 \cdot \overline{AC} + 0 \cdot \overline{AD}$.

Итак,

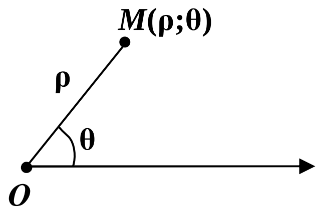
$$\begin{cases} x = 0 \cdot x' + \frac{1}{2} \cdot y' + 1 \cdot z' + 1; \\ y = 1 \cdot x' - \frac{1}{2} \cdot y' + 0 \cdot z' + 0; \\ z = 0 \cdot x' + \frac{1}{2} \cdot y' - 1 \cdot z' + 0 \end{cases}$$

– формулы перехода от системы координат $\{A, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$ к системе $\{B, \overline{AC}, \overline{KL}, \overline{DB}\}$.

При этом

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \text{ – матрица перехода.}$$

21. Введем на плоскости полярную систему координат. Эта система задается точкой O, называемой полюсом, и выходящим из полюса лучом, называемым полярной осью. Координатами точки M в полярной системе координат являются полярный радиус ρ – расстояние от точки M до полюса ($\rho = |OM|$), полярный угол θ – угол между полярной осью и радиус-вектором $\overline{OM}$ точки M: $M(\rho; \theta)$ (см. рис.). Найти связь полярных координат с декартовыми.



Решение

По определению $\rho \geq 0$, $-\infty < \theta < \infty$. Для того чтобы соответствие между точками, отличными от полюса, и упорядоченными парами чисел было взаимнооднозначным, достаточно рассматривать угол θ, удовлетворяющий неравенствам $-\pi < \theta \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Координаты ρ и θ связаны с прямоугольными координатами x и y той же точки, если полюс совпадает с началом прямоугольной системы координат, соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta; \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

причем $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \mathrm{tg}\theta = \dfrac{x}{y}$.

Например, если точка M в прямоугольной системе координат имеет координаты $(1;-\sqrt{3})$, то

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2;$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2};$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из полученных равенств следует, что $\theta = \dfrac{5}{3}\pi$.

При решении задачи учли, что точка M лежит в четвертой четверти.

Итак, $M\left(2, \dfrac{5}{3}\pi\right)$.

1.2. Векторы и действия над ними

1. Найти скалярное произведение векторов $(2\bar{a}+\bar{b})$ и $(\bar{a}-3\bar{b})$, если $\left|\bar{a}\right|=1$, $\left|\bar{b}\right|=2$, $\angle(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение

Используем определение и свойства скалярного произведения векторов:

$$(2\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-3\bar{b})=2(\bar{a},\bar{a})-6(\bar{a},\bar{b})+(\bar{b},\bar{a})-3(\bar{b},\bar{b})=$$

$$=2\left|\bar{a}\right|^2-5\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\angle(\bar{a},\bar{b})-3\left|\bar{b}\right|^2=2-5\cdot 1\cdot 2\cos\frac{\pi}{6}-3\cdot 4=-10\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. Даны векторы $\bar{a}=-\bar{m}+6\bar{n}$ и $\bar{b}=3\bar{m}+4\bar{n}$, где $\left|\bar{m}\right|=2$, $\left|\bar{n}\right|=5$, $\angle(\bar{m},\bar{n})=\dfrac{2\pi}{3}$. Найти $\cos\angle(2\bar{b}-\bar{a},4\bar{b})$.

Решение

Пусть $\bar{d}=2\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{e}=4\bar{b}$, тогда, пользуясь определением скалярного произведения векторов, имеем

$$\cos\angle(\bar{d},\bar{e})=\frac{\bar{d}\cdot\bar{e}}{|\bar{d}|\cdot|\bar{e}|}.$$

Сосчитаем скалярное произведение, пользуясь его свойствами:

$$\bar{d}\cdot\bar{e}=(7\bar{m}+2\bar{n},12\bar{m}+16\bar{n})=84\bar{m}^2+136|\bar{m}||\bar{n}|\cos\angle(\bar{m},\bar{n})+32|\bar{n}|^2=456;$$

$$|\bar{d}|=\sqrt{(7\bar{m}+2\bar{n})^2}=\sqrt{497\bar{m}^2+28|\bar{m}||\bar{n}|\cos\angle(\bar{m},\bar{n})+4\bar{n}^2}=\sqrt{156};$$

$$|\bar{e}|=\sqrt{(12\bar{m}+16\bar{n})^2}=\sqrt{144\bar{m}^2+384|\bar{m}||\bar{n}|\cos\angle(\bar{m},\bar{n})+256\bar{n}^2}=\sqrt{5056}.$$

Таким образом,

$$\cos\angle(2\bar{b}-\bar{a},4\bar{b})=\frac{456}{\sqrt{788736}}.$$

3. Вычислить работу равнодействующей $\overline{F}$ сил $\overline{F_1}(3,-4,5)$, $\overline{F_2}(2,1,-4)$, $\overline{F_3}(-1,6,2)$, приложенных к материальной точке, которая под их воздействием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4,2,-3)$ в точку $M_2(7,4,1)$.

Решение

Так как $\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}$, то $\overline{F}(4,3,3)$; $\overline{M_1M_2}=\overline{S}(3,2,4)$.

Поэтому $\overline{A}=\overline{F}\cdot\overline{S}=4\cdot 3+3\cdot 2+3\cdot 4=30$.

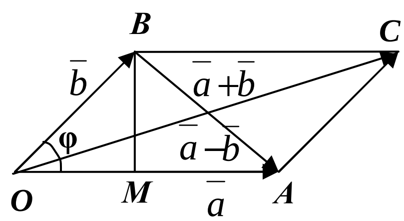
4. В прямоугольном треугольнике ABC с углом $\angle B=90°$ $\left|AC\right|=b$, $\angle A=\alpha$. Найти $(\overline{CB},\overline{CA})$.

Решение

$$\angle(\overline{CB},\overline{CA})=\angle C=90^{\text{o}}-\alpha,\ |\overline{CB}|=b\cdot\sin\alpha,\ |\overline{CA}|=b.$$

$$(\overline{CB},\overline{CA})=|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|\cdot\cos\angle(\overline{CB},\overline{CA})=b\sin\alpha\cdot b\cos(90°-\alpha)=b^2\sin^2\alpha.$$

5. Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.



Решение

Если $\overline{a}=\overline{OA}$, $\overline{b}=\overline{OB}$ – векторы сторон параллелограмма $OACB$, то $\overline{a}+\overline{b}=\overline{OC}$, $\overline{a}-\overline{b}=\overline{BA}$ – векторы его диагоналей (см. рис.).

По теореме косинусов имеем

$(\overline{a}-\overline{b})^2=\overline{a}^2+\overline{b}^2-2(\overline{a},\overline{b})^2$;

$(\overline{a}+\overline{b})^2=\overline{a}^2+\overline{b}^2+2(\overline{a},\overline{b})^2$.

Сложим почленно эти равенства:

$$(\overline{a}-\overline{b})^2+(\overline{a}+\overline{b})^2=2\overline{a}^2+2\overline{b}^2. \qquad (*)$$

Поскольку $|BC|=|OA|=|\overline{a}|$, $|AC|=|OB|=|\overline{b}|$, по формуле (*) получаем

$$|AB|^2+|OC|^2=\left(|OA|^2+|BC|^2\right)+\left(|OB|^2+|AC|^2\right).$$

6. Дано: $|\overline{a}|=11$, $|\overline{b}|=23$, $|\overline{a}-\overline{b}|=30$. Найти угол $\angle(\overline{a},\overline{b})$ и $|\overline{a}+\overline{b}|$.

Решение

По формуле (*)

$$|\overline{a}+\overline{b}|=\sqrt{2|\overline{a}|^2+2|\overline{b}|^2-|\overline{a}-\overline{b}|^2}=\sqrt{2\cdot 121+2\cdot 529-900}=20.$$

Используя теорему косинусов, имеем

$$(\overline{a},\overline{b})=\frac{1}{2}\left(\overline{a}^2+\overline{b}^2-(\overline{a}-\overline{b})^2\right)=-125.$$

Следовательно,

$$\cos\angle(\overline{a},\overline{b})=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=-\frac{125}{253}, \text{ т. е. } \angle(\overline{a},\overline{b})=180^\circ-\arccos\frac{125}{253}.$$

7. Доказать, что $(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b})=\overline{a}^2-\overline{b}^2$.

Решение

Пусть $\overline{x}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{y}=\overline{a}-\overline{b}$, т. е. $\overline{a}=\frac{1}{2}(\overline{x}+\overline{y})$, $\overline{b}=\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{y})$.

Тогда $|\overline{a}|=\frac{1}{2}|\overline{x}+\overline{y}|$, $|\overline{b}|=\frac{1}{2}|\overline{x}-\overline{y}|$;

$$\overline{a}^2-\overline{b}^2=\frac{1}{4}(|\overline{x}+\overline{y}|^2-|\overline{x}-\overline{y}|^2)=(\overline{x},\overline{y})=(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}).$$

8. Дано: $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $\angle(\overline{a},\overline{b})=120^\circ$. Найти длины векторов $\overline{p}=\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{q}=2\overline{a}-\overline{b}$, их скалярное произведение и угол между ними.

Решение

$(\overline{a},\overline{b})=3\cdot 2\cdot\cos 120^\circ=-3$;

$|\overline{p}|^2=(\overline{p},\overline{p})=(\overline{a}+2\overline{b},\overline{a}+2\overline{b})=\overline{a}^2+4(\overline{a},\overline{b})+4\overline{b}^2=9+(-12)+16=13.$

Отсюда следует, что $|\overline{p}|=\sqrt{13}$;

$|\overline{q}|^2=(\overline{q},\overline{q})=(2\overline{a}-\overline{b},2\overline{a}-\overline{b})=4\overline{a}^2-4(\overline{a},\overline{b})+\overline{b}^2=52$, т. е. $|\overline{q}|=2\sqrt{13}$;

$(\overline{p},\overline{q})=(\overline{a}+2\overline{b},2\overline{a}-\overline{b})=2\overline{a}^2+3(\overline{a},\overline{b})-2\overline{b}^2=18+(-9)-8=1$;

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{p},\overline{q})}{|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|} = \frac{1}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{26}.$$

Таким образом, $\varphi = \arccos\frac{1}{26}$.

9. Длины ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны. Найти угол φ между этими векторами, если известно, что векторы $\overline{p} = \overline{a} + 3\overline{b}$ и $\overline{q} = 5\overline{a} + 3\overline{b}$ ортогональны.

Решение

Так как $\overline{p}$ и $\overline{q}$ ортогональны, то

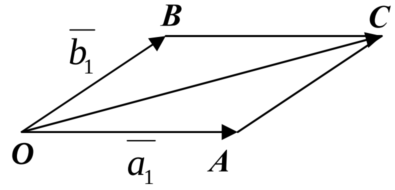
$$(\overline{p},\overline{q}) = 0 = (\overline{a} + 3\overline{b}, 5\overline{a} + 3\overline{b}) = 5\overline{a}^2 + 18(\overline{a},\overline{b}) + 9\overline{b}^2 =$$
$$= 5|\overline{a}|^2 + 18|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi + 9|\overline{b}|^2.$$

Учтем, что $|\overline{a}| = |\overline{b}| \neq 0$. Тогда найдем, что

$\cos\varphi = -\frac{7}{9}$, т. е. $\varphi = 180° - \arccos\frac{7}{9}$.

Отметим, что скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого вектора по направлению первого:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}.$$



10. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – ненулевые неколлинеарные векторы. Доказать, что вектор $\overline{c} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} + \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$ образует равные углы с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение

Векторы $\overline{a}_1 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ и $\overline{b}_1 = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$ – единичные: $|\overline{a}_1| = 1$, $|\overline{b}_1| = 1$. Отложим их от одной точки, построив параллелограмм $OACB$ (см. рис.). Так как $|\overline{OB}| = |\overline{OA}|$, то $OACB$ – ромб. Его диагональ $\overline{OC}$ является биссектрисой $\angle AOB$. Поэтому вектор диагонали $\overline{c} = \overline{OC} = \overline{a}_1 + \overline{b}_1$ образует равные углы с векторами $\overline{OA} = \overline{a}_1$ и $\overline{OB} = \overline{b}_1$ и сонаправленными им векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

11. Даны векторы $\overline{m}=\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{n}=3\overline{a}-\overline{b}$. Найти вектор $[\overline{m},\overline{n}]$, если $[\overline{a},\overline{b}]=\overline{p}$.

Решение

Воспользуемся определением и свойствами векторного произведения:

$$[\overline{m},\overline{n}]=[\overline{a}+2\overline{b},3\overline{a}-\overline{b}]=3[\overline{a},\overline{a}]-[\overline{a},\overline{b}]+6[\overline{b},\overline{a}]-2[\overline{b},\overline{b}]=$$
$$=3\cdot\overline{0}-\overline{p}-6\overline{p}-2\overline{0}=7\overline{p}.$$

Здесь воспользовались тем, что $[\overline{a},\overline{a}]=-[\overline{a},\overline{b}]$, откуда следует, что $2[\overline{a},\overline{a}]=\overline{0}$, или $[\overline{a},\overline{a}]=\overline{0}$.

12. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Выразить вектор $[\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}]$ через вектор $\overline{c}=[\overline{a},\overline{b}]$.

Решение

Согласно свойству линейности векторного произведения имеем

$$[\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}]=[\overline{a},\overline{a}-\overline{b}]+[\overline{b},\overline{a}-\overline{b}]=[\overline{a},\overline{a}]-[\overline{a},\overline{b}]+[\overline{b},\overline{a}]-[\overline{b},\overline{b}]=$$
$$=\overline{0}-[\overline{a},\overline{b}]-[\overline{a},\overline{b}]-0=-2\overline{c}.$$

13. Найти координаты единичного вектора $\overline{e}$, противоположно направленного вектору $\overline{a}(2,-2,1)$.

Решение

$$|\overline{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3,\ \overline{e}=-\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|},\ \text{т. е. } \overline{e}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

14. Вычислить площадь S параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$.

Решение

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{vmatrix}=3\overline{i}-5\overline{j}-9\overline{k};$$

$$S=\left|\,[\overline{a},\overline{b}]\,\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2+(-9)^2}=\sqrt{115}.$$

15. Вычислить площадь треугольника, вершины которого – точки $A(-1,0,-1)$, $B(0,2,-3)$, $C(4,4,1)$.

Решение

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}(1,2,-2)$, $\overline{AC}(5,4,2)$.

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=12\bar{i}-12\bar{j}-6\bar{k};$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\,[\overline{AB},\overline{AC}]\,\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+(-12)^2+(-6)^2}=9.$$

16. Даны точка $A(-1,2)$ и вектор $\bar{a}(3,-4)$. Найти координаты таких точек B и C, что $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}\perp\bar{a}$ и $|\overline{AC}|=|\bar{a}|$.

Решение

Положим, что $B(x,y)$. Тогда $\overline{AB}(x+1,y-2)$, и если $\bar{a}=\overline{AB}$, то $3=x+1$, $-4=y-2$, так что $x=2$, $y=-2$.

Получили координаты точки B: $B(2,-2)$.

Пусть теперь $C(\tilde{x},\tilde{y})$. Тогда $\overline{AC}(\tilde{x}+1,\tilde{y}-2)$. Но скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\bar{a}$ должно быть равным нулю по условию их ортогональности: $(\overline{AC},\bar{a})=3(\tilde{x}+1)-4(\tilde{y}-2)=0$.

Следовательно, $\tilde{x}\left(\frac{4}{3}\tilde{y}-\frac{11}{3}\right)$.

Помимо этого, $|\overline{AC}|=|\bar{a}|$, и потому $(\tilde{x}+1)^2+(\tilde{y}-2)^2=3^2+(-4)^2$, или $\left(\frac{4}{3}\tilde{y}-\frac{8}{3}\right)^2+\left(\tilde{y}-2\right)^2=25$, или $\tilde{y}^2-4\tilde{y}-5=0$.

Решая квадратное уравнение относительно $\tilde{y}$, получаем два значения: $\tilde{y}_1=-1$, $\tilde{y}_2=5$.

Для этих значений $\tilde{x}_1=-5$, $\tilde{x}_2=3$.

Итак, существуют две точки C, удовлетворяющие условию задачи: $C_1(-5;-1)$, $C_2(3;5)$.

17. Вычислить объем V параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его $A(1,2,3)$ и концы выходящих из нее ребер $B(9,6,4)$, $D(3,0,4)$, $A'(5,2,6)$.

Решение

Очевидно, что $\overline{AB}(8,4,1)$, $\overline{AD}(2,-2,1)$, $\overline{AA'}(4,0,3)$. Объем параллелепипеда численно равен смешанному произведению представленных векторов,

$$\text{т. е. } V = |(\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA'})| = \left| \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = 48.$$

18. Доказать, что если $[\overline{a},\overline{b}]+[\overline{b},\overline{c}]+[\overline{c},\overline{a}]=\overline{0}$, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

Решение

Умножим скалярно заданное равенство на $\overline{a}$:

$$\overline{0} = (\overline{a},[\overline{a},\overline{b}]) + (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]) + (\overline{a},[\overline{c},\overline{a}]).$$

Так как $(\overline{a},[\overline{a},\overline{b}]) = (\overline{a},[\overline{c},\overline{a}]) = 0$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = 0$ и потому, согласно свойству смешанного произведения, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

19. Выяснить, при каком значении α компланарны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a} = \overline{i} + \alpha\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + (\alpha+1)\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + \alpha\overline{j} - \overline{k}$.

Решение

Смешанное произведение указанных векторов

$$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

и потому ни при каких α указанные векторы не компланарны.

20. Даны векторы $\overline{a} = 4\overline{i} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j}$. Требуется: 1) вычислить смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $5\overline{c}$; 2) вычислить модуль векторного произведения векторов $3\overline{c}$ и $\overline{b}$; 3) вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $3\overline{b}$; 4) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$; 5) проверить, будут ли компланарны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Решение

1. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ заданы в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Так как $\overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j} + 0\overline{k}$, то $5\overline{c} = 15\overline{i} + 25\overline{j} + 0\overline{k}$, $\overline{a} = 4\overline{i} + 0\overline{j} + 4\overline{k}$, и

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480.$$

2. $3\overline{c} = 9\overline{i} + 15\overline{j} + 0\overline{k}$, и потому

$$[3\overline{c}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\overline{i} + 27\overline{k} + 15\overline{k} - 18\overline{j} = 30\overline{i} - 18\overline{j} + 42\overline{k};$$

$$\left| [3\overline{c}, \overline{b}] \right| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988}\,.$$

3. $3\overline{b} = -3\overline{i} + 9\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{a} \cdot 3\overline{b} = 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$.

4. Так как $\overline{a}(4,0,4)$, $\overline{b}(-1,3,2)$, то $\dfrac{4}{-1} \neq \dfrac{0}{3} \neq \dfrac{4}{2}$, и поэтому векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

Скалярное произведение этих векторов не равно нулю:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$$

и потому они не ортогональны.

5. Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4(-10) + 4(-14) \neq 0,$$

и потому векторы не компланарны.

ГЛАВА II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Прямая на плоскости

Если на плоскости взята декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно координат x и y

$$Ax + By + C = 0,$$

где A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую в этой системе координат. Верно и обратное утверждение.

Представленное уравнение называется общим уравнением прямой.

Следует отметить частные случаи уравнения прямой:

1) если $B = C = 0$, то $x = 0$ – уравнение прямой, совпадающей с осью Oy;

2) если $A = C = 0$, то $y = 0$ – уравнение прямой, совпадающей с осью Ox.

Углом наклона прямой к оси Ox называется наименьший угол φ, на который следует повернуть в положительном направлении ось абсцисс до ее совпадения с данной прямой.

Направление любой прямой характеризуется ее угловым коэффициентом k, который определяется как тангенс угла наклона φ этой прямой к оси Ox:

$$k = \mathrm{tg}\varphi.$$

Однако прямая, перпендикулярная к оси Ox, не имеет углового коэффициента.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и пересекающей ось Oy в точке с ординатой b, записывается как

$$y = kx + b.$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, т. е. $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$, то

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_1 \pm b_1)\overline{i} + (a_2 \pm b_2)\overline{j} + (a_3 \pm b_3)\overline{k}.$$

Угловой коэффициент прямой, заданной двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, вычисляется следующим образом:

$$k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Уравнением прямой в отрезках называется уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где a и b – соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy.

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k, представляется в виде

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Если две прямые заданы своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, условием пересечения их будет

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

условием параллельности будет

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2},$$

а совпадение определяется равенством

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Если угловые коэффициенты двух прямых k_1 и k_2 совпадают, то прямые параллельны.

Условием перпендикулярности прямых является выполнение соотношения

$$k_1k_2=0 \quad \text{или} \quad k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

Под углом между двумя прямыми понимается один из двух смежных углов, образованных их пересечением.

Тангенс угла φ между двумя прямыми вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Знак «+» соответствует острому углу φ, а знак «–» – тупому.

Прямая линия на плоскости полностью определена, если на ней задана точка M_0 и задан ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

Если известны координаты точки M_0 и координаты направляющего вектора, то параметрические уравнения прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases}$$

где $M_0(x_0, y_0)$, $\bar{a}(a_1, a_2)$ – направляющий вектор прямой.

Исключая параметр t из параметрических уравнений прямой, получим канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Всякая плоскость в координатном пространстве $OXYZ$ может быть задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B и C – координаты вектора, перпендикулярного к плоскости.

Если коэффициент $D \neq 0$, то уравнение плоскости приводится к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

называемому уравнением плоскости в отрезках.

Угол φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

а условие их перпендикулярности:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к вектору $\overline{n} = A\,\bar{i} + B\,\bar{j} + C\,\bar{k}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(\overline{r_1})$, $M_2(\overline{r_2})$, $M_3(\overline{r_3})$, где $\overline{r_1} = x_1\,\bar{i} + y_1\,\bar{j} + z_1\,\bar{k}$, $\overline{r_2} = x_2\,\bar{i} + y_2\,\bar{j} + z_2\,\bar{k}$, $\overline{r_3} = x_3\,\bar{i} + y_3\,\bar{j} + z_3\,\bar{k}$ и $\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$ – радиус-вектор текущей точки искомой плоскости M, в координатной форме имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Параметрические и канонические уравнения прямых в пространстве аналогичны уравнениям этих видов на плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt; \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

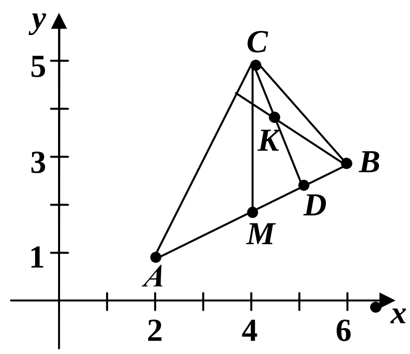
Заметим, что для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду (как и для прямой) все члены уравнения следует умножить на нормирующий множитель:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

ЗАДАЧИ

1. Даны вершины $A(2,1)$, $B(6,3)$, $C(4,5)$ треугольника. Найти: 1) длину стороны AB; 2) внутренний угол A; 3) уравнение высоты, проведенной через вершину C; 4) уравнение медианы, проведенной через вершину C; 5) точку пересечения высот треугольника; 6) длину высоты, опущенной из вершины C.



Решение

Сделаем чертеж (см. рис.).

1. Длину стороны AB найдем как расстояние между двумя точками A и B:

$$|AB| = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

2. Для определения внутреннего угла A найдем уравнение прямой AC:

$$\frac{y-1}{5-1} = \frac{x-2}{4-2}, \quad \frac{y-1}{4} = \frac{x-2}{2},$$

отсюда получаем $2x - y - 3 = 0$, $y = 2x - 3$.

Итак, угловой коэффициент прямой AC $\; k_1 = 2$.

Найдем теперь уравнение прямой AB:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{6-2}, \quad \frac{y-1}{2} = \frac{x-2}{4},$$

отсюда получим уравнение $x - 2y = 0$ или $y = \frac{1}{2}x$, причем $k_1 = \frac{1}{2}$;

$$\mathrm{tg}A = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

3. Уравнение высоты, проведенной через вершину C, ищем в виде

$$y - y_C = k_{CD}(x - x_C).$$

Так как $CD \perp AB$, то

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{0{,}5} = -2.$$

Тогда $y - 5 = -2(x - 4)$ или $2x + y - 13 = 0$. Отсюда $y = -2x + 13$.

4. Для определения уравнения медианы CM следует найти координаты точки M, делящей отрезок AB пополам:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4,\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Уравнение прямой CM:

$$\frac{y-5}{-3} = \frac{x-4}{0},$$

тогда уравнение медианы имеет вид

$$x = 4 \text{ (прямая } CM \perp OX\text{)}.$$

5. Точку пересечения высот треугольника найдем как точку K пересечения высот CD и BK.

Решаем систему уравнений, описывающих прямые CD и BK:

$$\begin{cases} 2x + y - 13 = 0; \\ x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x = \dfrac{14}{3}$, $y = \dfrac{11}{3}$.

Итак, $K\left(\dfrac{14}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$.

6. Для нахождения длины высоты CD запишем нормальное уравнение прямой AB:

$$\frac{x - 2y}{\pm\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x - 2y}{\pm\sqrt{5}} = 0.$$

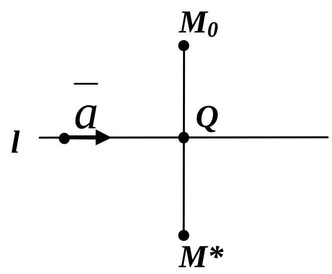
Следовательно,

$$|CD| = \left|\frac{x_C - 2y_C}{\pm\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{4 - 2\cdot 5}{\pm\sqrt{5}}\right| = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

2. Найти точку $M^*(x^*, y^*)$, симметричную точке $M_0(1,3)$ относительно прямой l: $x-2y+3=0$.

Решение

По определению симметричной точки вектор $\overline{M_0M^*}$ имеет координаты x^*-1 и y^*-3. Этот вектор перпендикулярен к прямой l, т. е. ортогонален направляющему вектору $\overline{a}(2,1)$ (см. рис.).



Имеем уравнение

$$(\overline{M_0M^*}, \overline{a}) = 2(x^*-1)+(y^*-3)=0, \text{ или}$$

$$2x^*+y^*-5=0.$$

Середина отрезка $|MM^*|$ – точка $Q\left(\dfrac{1+x^*}{2}, \dfrac{3+y^*}{2}\right)$. Эта точка лежит на прямой l и, следовательно, удовлетворяет уравнению прямой $\dfrac{1+x^*}{2} - 2\cdot\dfrac{3+y^*}{2}+3=0$, или, решая систему

$$\begin{cases} 2x^*+y^*-5=0; \\ \dfrac{1}{2}x^* - y^* + \dfrac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

находим $x^* = \dfrac{9}{5}$, $y^* = \dfrac{7}{5}$.

3. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(2,-4)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии, равном двум единицам.

Решение

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k, записывается в виде

$$y-y_1 = k(x-x_1),$$

в предположении, что эта прямая не параллельна оси ординат.

В нашем случае уравнение искомой прямой

$$y+4=k(x-2), \quad \text{или } kx-y-(4+2k)=0.$$

Для определения углового коэффициента k этой прямой воспользуемся тем, что она отстоит от начала координат на расстоянии двух единиц.

Уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $kx-y-(4+2k)=0$, имеет вид

$$y=-\frac{1}{k}x \text{ или } x+ky=0.$$

Решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} kx-y-(4+2k)=0; \\ x+ky=0, \end{cases}$$

т. е. получим координаты точки C их пересечения:

$$x_C=\frac{2k(k+2)}{1+k^2}, \quad y_C=-\frac{2(k+2)}{1+k^2}.$$

Отсюда найдем расстояние от начала координат до прямой l:

$$OC=\sqrt{{x_C}^2+{y_C}^2}=\frac{2}{1+k^2}\sqrt{k^2(k+2)^2+(k+2)^2}=$$

$$=\frac{2(k+2)}{1+k^2}\sqrt{k^2+1}=\frac{2(k+2)}{\sqrt{k^2+1}}.$$

По условию задачи $OC=2$. Поэтому получаем

$$\frac{2(k+2)}{\sqrt{k^2+1}}=2, \text{ или } k+2=\sqrt{k^2+1}.$$

Отсюда следует, что $k=-\frac{3}{4}$.

Подставим это значение k в уравнение прямой $kx-y-(4+2k)=0$:

$$-\frac{3}{4}x-y-(4-2\cdot\frac{3}{4})=0 \text{ или } 3x+4y+10=0.$$

4. Зная вершину $A(3;-4)$ треугольника ABC и уравнения двух его высот, BM : $7x-2y-1=0$ и CN : $2x-7y-6=0$, записать уравнение стороны BC.

Решение

Нормальный вектор $(7;-2)$ прямой BM параллелен прямой AC. Поэтому ее уравнение

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-7}, \text{ или } 7x+2y-13=0.$$

Координаты точки $B(x_B, y_B)$ найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 7x_B + 2y_B - 13 = 0; \\ 7x_B - 2y_B - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_B = 1$, $y_B = 3$ и уравнение прямой BC имеет вид

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-3}{-2-3}, \text{ или } x - y + 2 = 0.$$

5. Найти расстояние d между прямыми $3x - 4y + 5 = 0$ и $6x - 8y - 13 = 0$.

Решение

Данные прямые параллельны, т. к. $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{5}{-13}$. Для того чтобы найти расстояние между ними, следует взять на одной из прямых некоторую точку и найти расстояние от нее до другой прямой.

Например, возьмем точку $(1,2)$, лежащую на первой прямой, тогда искомое расстояние

$$d = \frac{|Ax_1 + By_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 13|}{\sqrt{36 + 64}} = 2{,}3.$$

Здесь $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $Ax + By + C = 0$ – уравнение второй прямой.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$: 1) перпендикулярно к вектору $\bar{n}(3,-5)$; 2) параллельно вектору $\bar{s}(0,-1)$; 3) под углом $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ к оси OX.

Решение

Выберем тот вид уравнения прямой, который приведет к цели.

1. Если точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит прямой с уравнением $Ax + By + C = 0$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$ и уравнение прямой можно записать в виде

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

В нашем случае следует воспользоваться этим уравнением, зная, что $\bar{n} = (A, B)$:

$$3(x-1) - 5(y-2) = 0 \text{ или } 3x - 5y + 7 = 0.$$

2. Во втором случае следует воспользоваться каноническим уравнением прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Получим

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{-1}, \text{ или } x - 1 = 0.$$

3. Так как координаты точки $M(x_0, y_0)$, через которую проходит прямая, и угол φ, образованный прямой с осью OX, фигурируют в уравнении

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg}\varphi$, то имеем $y - 2 = -1(x-1)$, или $x + y - 3 = 0$.

7. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x + 4y - 1 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном единице.

Решение

Уравнение каждой из прямых будем искать в виде $y = kx + b$.

Обозначим прямую буквой l.

Так как искомая прямая параллельна прямой l, то ее угловой коэффициент $k = -\dfrac{3}{4}$.

Следовательно, ее уравнение примет вид

$$y = -\frac{3}{4}x + b \text{ или } 3x + 4y + 4b = 0.$$

Для отыскания параметра b воспользуемся тем, что расстояние от любой точки прямой l, например точки $A(3,-2)$, до искомой прямой по условию равно 1.

Однако это расстояние можно вычислить непосредственно. Выпишем для этого уравнение прямой S, проведенной из точки A перпендикулярно к прямой l:

$$y + 2 = \frac{4}{3}(x - 3) \text{ или } 4x - 3y - 18 = 0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y - 18 = 0; \\ 3x + 4y - 4b = 0, \end{cases}$$

найдем координаты точки B как точки пересечения прямых l и S:

$$x_B = \frac{72 + 12b}{25}, \; y_B = \frac{16b - 54}{25}.$$

Тогда искомое расстояние равно длине отрезка AB:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{\sqrt{(12b-3)^2 + (16b-4)^2}}{25}.$$

Приравняем это выражение к единице:

$$\frac{\sqrt{(12b-3)^2 + (16b-4)^2}}{25} = 1 \text{ или } (12b-3)^2 + (16b-4)^2 = 25^2.$$

Отсюда имеем

$$2b^2 - b - 3 = 0.$$

Решая это уравнение, получим $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = -1$.

Подставим последовательно эти значения параметра в уравнение

$$3x + 4y - 4b = 0$$

и получим уравнения искомых прямых:

$$3x + 4y - 6 = 0;$$

$$3x + 4y + 4 = 0.$$

8. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 2$.

Решение

Прямые заданы уравнениями прямой с угловым коэффициентом $k_1 = 2$ и $k_2 = -3$.

Один из углов φ между прямыми определится как

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{-3 - 2}{1 + (-3) \cdot 2} = 1.$$

Таким образом, один из углов между прямыми равен $\frac{\pi}{4}$, а другой угол $\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

2.2. Прямая и плоскость в пространстве

1. Показать, что уравнения $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{1}$ и $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-6}{1}$ определяют одну и ту же прямую.

Решение

Прямые имеют один и тот же направляющий вектор $\bar{s}(2,4,1)$. Следовательно, прямые параллельны.

Из уравнения прямой видно, что она проходит через точку $R(1,-3,5)$. Подставим координаты этой точки в уравнение второй прямой, тогда получим

$$\frac{1-1}{2}=\frac{-3-1}{4}=\frac{5-6}{1} \text{ или } -1=-1=-1.$$

Отсюда следует, что и вторая прямая походит через точку R. Следовательно, оба уравнения определяют одну и ту же прямую.

2. Привести к каноническому виду уравнения, задающие прямую как линию пересечения двух плоскостей $2x-y+3z-1=0$ и $5x+4y-z-7=0$.

Решение

Первый способ

Исключив вначале y, а затем z, получим

$$13x+11z-11=0,\ 17x+11y-22=0.$$

Разрешим каждое из уравнений относительно x, тогда получим

$$x=\frac{11(y-2)}{-17}=\frac{11(z-1)}{-13},$$

откуда

$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Второй способ

Найдем вектор $\bar{s}=l\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей $\overline{n_1}(2,-1,3)$ и $\overline{n_2}(5,4,-1)$, то за него можно принять векторное произведение векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$:

$$\bar{s}=[\overline{n_1},\overline{n_2}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\bar{i}+17\bar{j}+13\bar{k}.$$

Точку $M_1(x_1,y_1z_1)$, через которую проходит искомая прямая, можно легко найти.

Положим $x_1=0$, тогда имеем

$$\begin{cases}-y+3z-1=0,\\ 4y-z-7=0.\end{cases}$$

Решая систему, находим $y_1=2$, $z_1=1$.

Таким образом, нашли точку $M_1(0,2,1)$, через которую проходит искомая прямая

$$\frac{x-0}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13} \text{ или } \frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

3. Прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{-1}$. Составить общее уравнение этой прямой.

Решение

Запишем уравнения прямой в виде системы двух независимых уравнений:

$$\begin{cases}\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5},\\ \frac{y+1}{5}=\frac{z-3}{-1}.\end{cases}$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases}5x-3y-13=0,\\ x+3z-11=0.\end{cases}$$

Получили общие уравнения прямой, которая теперь задана пересечением двух плоскостей, одна из которых $5x-3y-13=0$ параллельна оси OZ, а другая $x+3z-11=0$ параллельна оси OY.

4. Найти проекцию точки $M(1;-3;2)$ на плоскость $2x+5y-3z-19=0$.

Решение

Проекция точки M на плоскость есть точка пересечения с данной плоскостью прямой, проходящей через точку M перпендикулярно к данной плоскости.

Уравнение этой прямой таково

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-2}{-3} \text{ или } \begin{cases} x=2t+1, \\ y=5t-3, \\ z=-3t+2. \end{cases}$$

Координаты точки пересечения этой прямой с данной плоскостью находим из системы

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=5t-3, \\ z=-3t+2, \\ 2x+5y-3z-19=0. \end{cases}$$

Отсюда $2(2t+1)+5(5t-3)-3(-3t+2)-19=0$ или $38t-38=0$.

Итак, $t=1$ и $x=3$, $y=2$, $z=-1$.

Получили искомую проекцию точки M : $(3,2,-1)$.

5. Построить прямую $\begin{cases} 2x+3y+3z=9, \\ 4x+2y+z=8. \end{cases}$

Решение

Искомую прямую можно построить как линию пересечения плоскостей. Для этого запишем уравнения плоскостей, которыми определена прямая, в отрезках

$$\frac{x}{4{,}5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1,$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1.$$

Построив данные плоскости, получим искомую прямую.

6. Из точки $P(2,3,-5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Найти уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Решение

Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, будут точки $M_1(2,3,0)$, $M_2(2,0,-5)$, $M_3(0,3,-5)$. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, легко найти

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Для нашей задачи

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0 \text{ или } 15x+10y-6z-60=0.$$

7. Найти угол α между плоскостями $P_1: 4x+2y-2z+5=0$, $P_2: -x+y+2z-3=0$.

Решение

Пусть $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ – нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2: $\overline{N_1}(4,2,-2)$, $\overline{N_2}(-1,1,2)$, тогда $|\overline{N_1}|=2\sqrt{6}$, $|\overline{N_2}|=\sqrt{6}$, $(\overline{N_1},\overline{N_2})=-6$ и

$$\cos\alpha=\frac{|(\overline{N_1},\overline{N_2})|}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|}=\left|\frac{-6}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\right|=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\alpha=60^\circ$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{3}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$.

Решение

Первый способ

Так как искомая плоскость проходит через данные прямые, то она проходит через точки $M_1(1,-3,0)$ и $M_2(0,1,-2)$, лежащие соответственно на первой и второй прямой.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$A(x-1)+B(y+3)+Cz=0.$$

Так как точка M_2 лежит на плоскости, то

$$-A+4B-2C=0.$$

Используем условие параллельности прямой и плоскости:

$$2A-B+3C=0.$$

Итак, A, B и C находим из системы уравнений

$$\begin{cases} -A+4B-2C=0, \\ 2A-B+3C=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $A=10k$, $B=-k$, $C=-7k$. Положим, например, $k=1$, тогда $A=10$, $B=-1$, $C=-7$. Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид

$$10(x-1)-(y+3)-7z=0 \text{ или } 10x-y-7z-13=0.$$

Второй способ

Искомая плоскость проходит через две точки M_1 и M_2. Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно найти еще одну точку этой плоскости. Возьмем точку $M_3(3,-4,3)$, лежащую на первой прямой. Тогда уравнение искомой плоскости есть уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \text{ или } 10x-y-7z-13=0.$$

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,-1,5)$ и перпендикулярной к плоскостям $3x-2y+z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

Решение

Запишем уравнение плоскости в виде

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-5)=0.$$

Так как плоскость перпендикулярна к заданным плоскостям, то должны выполняться условия:

$$3A-2B+C=0,$$

$$5A-4B+3C=0.$$

Имеем однородную систему уравнений

$$\begin{cases} A(x-2)+B(y+1)+C(z-5)=0, \\ 3A-2B+C=0, \\ 5A-4B+3C=0. \end{cases}$$

Известно, что такая система имеет ненулевое решение, когда

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение искомой плоскости

$$x+2y+z-5=0.$$

10. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(3,2,-1)$ и пересекающей ось OX под прямым углом.

Решение

Так как прямая перпендикулярна к оси OX и пересекает ее, то она проходит через точку $N(3,0,0)$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки M и N

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1} \text{ или } \frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1},\ x-3=0.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. пособие / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – Москва: Наука, 1990. – 672 с.
2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – Москва: Наука, 1985. – 320 с.
3. Беклемишева, Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А Чубаров. – Москва: Наука, 1987. – 320 с.
4. Гусак, А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. – 3-е изд, стереотип. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – 288 с.
5. Кузютин, В.Ф. Геометрия: учеб. для вузов / В.Ф. Кузютин, Н.А. Зенкевич, В.В. Еремеев; под ред. Н.А. Зенкевич. – СПб.: Лань, 2003. – 416 с.
6. Сборник задач по геометрии и алгебре: учеб. пособие / Г.П. Размыслович [и др.]; под общ. ред. В.М. Ширяева. – Минск.: Універсітэцкае, 1999. – 383 с.
7. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учеб. пособие / А.А. Бурдун [и др.]; под общ. ред. А.С. Феденко. – 2-е изд. – Минск: Універсітэцкае, 1999. – 302 с.
8. Ефимов, А.В. Сборник задач по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – Москва: Наука, 1986. – 480 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЕХИЛЕВСКИЙ Степан Григорьевич
ГУРЬЕВА Нина Алексеевна
ГОЛУБЕВА Оксана Валерьевна

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
для студентов специальности
1-98 01 01 «Компьютерная безопасность
(математические методы программные системы)»

Редактор *Д.М. Севастьянова*

Подписано в печать 11.09.13. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 2,55. Уч.-изд. л. 1,9. Тираж 30 экз. Заказ 1194.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.