УДК 512.548

О ПОЛИАДИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ n-АРНЫХ ГРУПП

А.М. ГАЛЬМАК
(Могилевский государственный университет продовольствия)

Для любого $n \geq 3$ на декартовой степени A^{n-1} n-арного группоида $< A, \eta >$ определяется n-арная операция $\tilde{\eta}$ и изучаются свойства n-арного группоида $< A, \tilde{\eta} >$. Особенно подробно рассмотрен случай, когда n-арный группоид $< A, \eta >$ является n-арной группой (n-арной полугруппой). В частности, установлено, что если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то $< A, \tilde{\eta} >$ – n-арная группа без единицы с пустым центром, в которую изоморфно вкладывается n-арная группа $< A, \eta >$. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы элемент $(e_1, ..., e_{n-1})$ n-арной группы $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ являлся ее идемпотентом. Найдены также необходимые и достаточные условия полуабелевости n-арной группы $< A, \tilde{\eta} >$.

1. Введение

В [1] для любых целых $k \geq 2$ и $l \geq 2$ на декартовой степени A^k произвольного группоида A была определена и изучалась l-арная операция $[\ ]_{l,\, k}$. Если A – полугруппа, то при $k = n - 1$, $l = n$ определение операции $[\ ]_{l,\, k}$ принимает следующий вид:

$$[(a_{11}, \ldots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \ldots, a_{2(n-1)}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{n(n-1)})]_{n,\, n-1} =$$
$$= (a_{11}a_{22} \ldots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1},\ a_{12} \ldots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2},\ \ldots,\ a_{1(n-1)}a_{21} \ldots a_{n(n-1)}). \qquad (1.1)$$

Из (1.1) видно, что n-арная операция $[\ ]_{n,\, n-1}$ определяется аналогично n-арной операции, которую Пост определил на множестве всех n-арных подстановок [2]. Если в определении операции $[\ ]_{n,\, n-1}$ группоид заменить n-арным группоидом, то получим определение новой n-арной операции. Изучению именно таких n-арных операций, определенных на декартовых степенях n-арных группоидов, и посвящена настоящая работа.

Важнейшими примерами n-арных группоидов являются n-арные квазигруппы, n-арные полугруппы и n-арные группы. Определение этих понятий можно найти в [2 – 5]. Там же определяются и многие другие n-арные аналоги соответствующих бинарных понятий. Здесь же приведем определения некоторых понятий, используемых в работе.

Если в n-арном группоиде $< A, [\ ] >$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество $[a_1a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}]$, то n-арный группоид $< A, [\ ] >$ называется *абелевым*. n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором выполняется тождество $[aa_1 \ldots a_{n-2}b] = [ba_1 \ldots a_{n-2}a]$, называется *полуабелевым*.

Заметим, что понятия абелевости и полуабелевости впервые появились у Дёрнте [6] при изучении n-арных групп. При $n = 2$ понятия абелевости и полуабелевости совпадают, так как в этом случае оба тождества принимают вид $ab = ba$.

Элемент a n-арного группоида $< A, [\ ] >$ называется его: 1) *идемпотентом*, если $[\underbrace{a \ldots a}_{n}] = a$; 2) *нулем*, если $[ax_1 \ldots x_{n-1}] = [x_1ax_2 \ldots x_{n-1}] = \ldots = [x_1 \ldots x_{n-1}a] = a$ для всех $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$; 3) *единицей*, если $[x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = [a x \underbrace{a \ldots a}_{n-2}] = \ldots = [\underbrace{a \ldots a}_{n-1} x] = x$ для любого $x \in A$.

Понятно, что n-арный группоид не может иметь более одного нуля, а всякая единица n-арного группоида является его идемпотентом.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, [\ ] >$ называется: 1) *нейтральной*, если для любого $x \in A$ верно $[e_1 \ldots e_{n-1}x] = [xe_1 \ldots e_{n-1}] = x$; 2) *левой нейтральной*, если для любого $x \in A$ верно $[e_1 \ldots e_{n-1}x] = x$; 3) *правой нейтральной*, если для любого $x \in A$ верно $[xe_1 \ldots e_{n-1}] = x$.

Если a – единица n-арного группоида $< A, [\ ] >$, то последовательность $\underbrace{a \ldots a}_{n-1}$ является нейтральной в $< A, [\ ] >$. Понятие нейтральной последовательности впервые было сформулировано Постом для n-арных групп [2].

Элемент a n-арного группоида $< A, [\ ] >$ с нулем 0 называется его i-*м делителем нуля*, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, если существуют $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n \in A$, отличные от нуля, такие, что $[b_1 \ldots b_{i-1}ab_{i+1} \ldots b_n] = 0$. Если элемент a является i-м делителем нуля для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то a называют *делителем нуля* в $< A, [\ ] >$.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

Делители нуля в универсальных алгебрах с полиадическими операциями, а именно, в (m, n)-кольцах изучал Кромбец [7].

Будут использоваться следующие леммы.

1.1. ЛЕММА. m-Арный группоид, производный от n-арной полугруппы, является m-арной полугруппой, т.е. m-арная операция, производная от ассоциативной n-арной операции, является ассоциативной.

1.2. ЛЕММА. Если n-арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является производной от t-арной полугруппы $< A, (\ ) >$, то из полуабелевости $< A, (\ ) >$ следует полуабелевость $< A, [\ ] >$.

1.3. ЛЕММА. Если n-арная полугруппа $< A, [\ ] >$ является производной от t-арной полугруппы $< A, (\ ) >$, обладающей нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, то из полуабелевости $< A, [\ ] >$ следует полуабелевость $< A, (\ ) >$.

2. n-Арный группоид $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для n-арного группоида $< A, \eta >$ на декартовой степени A^{n-1} определим n-арную операцию $\tilde{\eta}$ аналогично n-арной опреации (1.1):

$$\tilde{\eta}((a_{11}, \ldots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \ldots, a_{2(n-1)}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{n(n-1)})) =$$
$$= (\eta(a_{11}a_{22} \ldots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1}), \eta(a_{12} \ldots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2}), \ldots, \eta(a_{1(n-1)}a_{21} \ldots a_{n(n-1)})). \quad (2.1)$$

Если η – n-арная операция производная от бинарной операции полугруппы A, то n-арная операция $\tilde{\eta}$ совпадает с n-арной операцией $[\ ]_{n,\, n-1}$, определенной на декартовой степени A^{n-1} полугруппы A. Поэтому операция $\tilde{\eta}$, определенная с помощью (2.1), является обобщением n-арной операции $[\ ]_{n,\, n-1}$.

2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $A_o = \{(\underbrace{a, ..., a}_{n-1}) \mid a \in A\}$. Тогда отображение $f : A \to A_o$ по правилу $f : a \to (\underbrace{a, ..., a}_{n-1})$ является изоморфизмом n-арного группоида $< A, \eta >$ на n-арный подгруппоид $< A_o, \tilde{\eta} >$ n-арного группоида $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, не являющийся одноэлементным. Тогда n-арный группоид $< A, \tilde{\eta} >$ будет неабелевым, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

1) существуют такие элементы $a, b, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$, $a \neq b$, что

$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a, \ \eta(be_1 \ldots e_{n-1}) = b;$$

2) существуют такие элементы $a, b, e_1, \ldots, e_{n-1} \in A$, $a \neq b$, что

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}a) = a, \eta(e_1 \ldots e_{n-1}b) = b;$$

3) в $< A, \eta >$ существует правая нейтральная последовательность;
4) в $< A, \eta >$ существует левая нейтральная последовательность;
5) в $< A, \eta >$ существует нейтральная последовательность;
6) в $< A, \eta >$ существует единица.

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. n-Арный группоид $< A, \eta >$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда полуабелев n-арный группоид $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$.

3. n-Арная группа $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$

3.1. ТЕОРЕМА. Для n-арной квазигруппы (n-арной полугруппы) $< A, \eta >$ справедливы следующие утверждения:

1) $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – n-арная квазигруппа (n-арная полугруппа);

2) $< A_o, \tilde{\eta} >$ – n-арная подквазигруппа (n-арная подполугруппа) n-арной квазигруппы (n-арной полугруппы) $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$, изоморфная n-арной квазигруппе (n-арной полугруппе) $< A, \eta >$;

3) если $|A| > 1$ и в $< A, \eta >$ существует нейтральная (левая нейтральная, правая нейтральная) последовательность, в частности $< A, \eta >$ обладает единицей, то тогда $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – неабелева;

4) $< A, \eta >$ – полуабелева тогда и только тогда, когда $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ полуабелева.

Справедливость утверждения 1) теоремы 3.1 устанавливается непосредственной проверкой, а утверждения 2), 3) и 4) являются следствиями предложений 2.2, 2.3 и 2.4 соответственно.

3.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $< A, \gamma >$ – t-арная полугруппа, $n = k(t-1)+1$, $k \geq 1$. Определим на A^{n-1} n-арную операцию δ по правилу:

$$\delta((a_{11}, \ldots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \ldots, a_{2(n-1)}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{n(n-1)})) =$$
$$= (\gamma(a_{11}a_{22} \ldots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1}), \gamma(a_{12} \ldots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2}), \ldots, \gamma(a_{1(n-1)}a_{21} \ldots a_{n(n-1)})). \tag{3.1}$$

Тогда:

1) $< A^{n-1}, \delta >$ – n-арная полугруппа;

2) если $|A| > 1$ и в $< A, \gamma >$ существует нейтральная (левая нейтральная, правая нейтральная) последовательность, в частности $<$ A, $\gamma >$ обладает единицей, то n-арная полугруппа $< A^{n-1}, \delta >$ – неабелева;

3) если $< A, \gamma >$ – полуабелева, то $< A^{n-1}, \delta >$ также полуабелева;

4) если в $< A, \gamma >$ существует нейтральная (левая нейтральная, правая нейтральная) последовательность, в частности, $< A, \gamma >$ обладает единицей, то из полуабелевости $< A^{n-1}, \delta >$ следует полуабелевость $< A, \gamma >$.

Доказательство. Определим на A n-арную опреацию η, производную от t-арной операции γ: $\eta(a_1 \ldots a_n) = \gamma(a_1 \ldots a_n)$. Тогда операция δ, определенная с помощью (3.1), совпадает с операцией $\tilde{\eta}$, определенной с помощью (2.1).

1. По лемме 1.1 $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа. Тогда, согласно 1) теоремы 3.1, $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – n-арная полугруппа.

2. Если $e_1 \ldots e_t$ – нейтральная (левая нейтральная, правая нейтральная) последовательность в $< A, \gamma >$, то $\underbrace{e_1 \ldots e_t \ldots e_1 \ldots e_t}_{k}$ – нейтральная (левая нейтральная, правая нейтральная) последовательность в $< A, \eta >$. Согласно 3) теоремы 3.1 $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – неабелева.

3. По лемме 1.2 $< A, \eta >$ – полуабелева. Тогда, согласно утверждению 4) теоремы 3.1, $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – полуабелева.

4. Согласно 4) теоремы 3.1 из полуабелевости $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ следует полуабелевость $< A, \eta >$. Применяя теперь лемму 1.3, получаем полуабелевость $< A, \gamma >$. Следствие доказано.

Считая в следствии 3.2 γ бинарной операцией, получим

3.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – полугруппа. Определим на множестве A^{n-1} n-арную операцию δ по правилу:

$$\delta((a_{11}, \ldots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \ldots, a_{2(n-1)}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{n(n-1)})) =$$
$$= (a_{11}a_{22} \ldots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1}, a_{12} \ldots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2}, \ldots, a_{1(n-1)}a_{21} \ldots a_{n(n-1)}). \tag{3.2}$$

Тогда:

1) $< A^{n-1}, \delta >$ – n-арная полугруппа;

2) если $|A| > 1$ и A обладает единицей (левой единицей, правой единицей), то $< A^{n-1}, \delta >$ – неабелева;

3) если A – абелева, то $< A^{n-1}, \delta >$ – полуабелева;

4) если в A существует единица (левая единица, правая единица), то из полуабелевости $< A^{n-1}, \delta >$ следует абелевость A.

3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $< A, \eta >$ и $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – n-арные полугруппы из теоремы 3.1,

$$\mathbf{a_2} = (a_{21}, \ldots, a_{2(n-1)}), \ldots, \mathbf{a_{n-1}} = (a_{(n-1)1}, \ldots, a_{(n-1)(n-1)})$$

являются фиксированными элементами из A^{n-1}. Определим на A^{n-1} бинарную опрерацию $\times$ по правилу:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \tilde{\eta}(\mathbf{x a_2} \ldots \mathbf{a_{n-1} y}), \ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Тогда $< A^{n-1}, \times >$ – полугруппа, и верно равенство:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_1 \overset{1}{\times} y_1, \ldots, x_k \overset{k}{\times} y_k, \ldots, x_{n-1} \overset{n-1}{\times} y_{n-1}),$$

где $\overset{1}{\times}, \ldots, \overset{n-1}{\times}$ – полугрупповые операции, определенные на A следующим образом:

$$x_k \overset{k}{\times} y_k = \eta(x_k a_{2(k+1)} \ldots a_{(n-k)(n-1)} a_{(n-k+1)1} \ldots a_{(n-1)(k-1)} y_k), \ k = 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Ассоциативность операции $\times$ следует из ассоциативности операции $\tilde{\eta}$, а ассоциативность операций $\overset{1}{\times}, \ldots, \overset{n-1}{\times}$ является следствием ассоциативности операции η. Равенства для $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, $x_1 \overset{1}{\times} y_1, \ldots, x_{n-1} \overset{n-1}{\times} y_{n-1}$ вытекают из определения операции $\tilde{\eta}$. Предложение доказано.

3.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – полугруппа с единицей 1 и пусть $< A^{n-1}, \delta >$ – n-арная полугруппа из следствия 3.3, $\mathbf{e} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1})$. Определим на A^{n-1} бинарную операцию $\times$ по правилу:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (\mathbf{x} \underbrace{e \ldots e}_{n-2} \mathbf{y}),\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}),\ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Тогда $< A^{n-1}, \times >$ – полугруппа, и верно равенство $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_1y_1, \ldots, x_{n-1}y_{n-1})$.

3.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно сказать, что в предложении 3.4 операция $\times$ определяется с помощью $n - 1$ опрераций $\overset{1}{\times}, \ldots, \overset{n-1}{\times}$. В следствии 3.5 все операции $\overset{1}{\times}, \ldots, \overset{n-1}{\times}$ совпадают с операцией в полугруппе A, а операция $\times$ совпадает с операцией, определенной на A^{n-1} покомпонентно с помощью операции в полугруппе A.

3.7. ТЕОРЕМА. Для n-арной группы $< A, \eta >$ справедливы следующие утверждения:

1) $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – n-арная группа;

2) $< A_0, \tilde{\eta} >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$, изоморфная n-арной группе $< A, \eta >$;

3) если $|A| > 1$, то центр $Z(A^{n-1}, \tilde{\eta})$ – n-арной группы $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ пуст, в частности, $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – неабелева;

4) $< A, \eta >$ – полуабелева тогда и только тогда, когда полуабелева $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$;

5) элементы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ являются идемпотентами в $< A, \eta >$ тогда и только тогда, когда

$$(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})(e_{n-1}, e_1, \ldots, e_{n-2})(e_{n-2}, e_{n-1}, e_1, \ldots, e_{n-3}) \ldots (e_2, \ldots, e_{n-1}, e_1)$$

есть нейтральная последовательность в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$;

6) a – идемпотент в $< A, \eta >$ тогда и только тогда, когда $(\underbrace{a, \ldots, a}_{n-1})$ – идемпотент в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$;

7) элемент $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ является идемпотентом в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ тогда и только тогда, когда $e_1 \ldots e_{n-1}$ нейтральная последовательность в $< A, \eta >$;

8) если $|A| > 1$, то в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ нет единиц;

9) если $< A, \eta >$ – конечная порядка r, то $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – конечная порядка r^{n-1}, содержащая ровно r^{n-2} идемпотентов.

Доказательство

1) следует из утверждения 1) теоремы 3.1;

2) следует из утверждения 2) теоремы 3.1;

3) для элементов $a, b \in A$, где $a \neq b$, полагаем $\mathbf{x} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{n-1})$, $\mathbf{y} = (a, b, \underbrace{a, \ldots, a}_{n-3})$.

Если $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in Z(A^{n-1}, \tilde{\eta})$, то

$$\tilde{\eta}(\mathbf{zx} \underbrace{\boldsymbol{x} \ldots \boldsymbol{x}}_{n-2}) = \tilde{\eta}(\mathbf{xz} \underbrace{\boldsymbol{x} \ldots \boldsymbol{x}}_{n-2}), \tilde{\eta}(\boldsymbol{zy} \underbrace{\boldsymbol{x} \ldots \boldsymbol{x}}_{n-2}) = \tilde{\eta}(\mathbf{yz} \underbrace{\boldsymbol{x} \ldots \boldsymbol{x}}_{n-2}),$$

откуда, находя первые компоненты, получим

$$\eta(z_1 a \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) = \eta(a z_2 \underbrace{a \ldots a}_{n-2}),\ \eta(z_1 b \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) = \eta(a z_2 \underbrace{a \ldots a}_{n-2}).$$

Из равенства правых частей записанных равенств следует равенство левых частей

$$\eta(z_1 a \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) = \eta(z_1 b \underbrace{a \ldots a}_{n-2}),$$

откуда, ввиду однозначной разрешимости в n-арной группе $< A, \eta >$ соответствующих уравнений, получаем равенство $a = b$, которое невозможно, ввиду выбора $a \neq b$. Следовательно, $Z(A^{n-1}, \tilde{\eta}) = \varnothing$;

4) следует из предложения 2.4;

5) следует из определения операции $\tilde{\eta}$;

6) следует из определения операции $\tilde{\eta}$;

7) если $e_1 \dots e_{n-1}$ – нейтральная последовательность в $< A, \eta >$, то последовательности

$$e_2e_3 \dots e_{n-1}e_1,\ e_3e_4 \dots e_{n-1}e_1e_2,\ \dots,\ e_{n-2}e_{n-1}e_1 \dots e_{n-3}$$

также являются нейтральными в $< A, \eta >$. Поэтому, полагая $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$, получим

$$\tilde{\eta}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n}) = \tilde{\eta}((e_1, e_2, \dots, e_{n-1})(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) \dots (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})) =$$

$$= (\eta(e_1e_2 \dots e_{n-1}e_1), \eta(e_2e_3 \dots e_{n-1}e_1e_2), \eta(e_3e_4 \dots e_{n-1}e_1e_2e_3), \dots$$

$$\dots, \eta(e_{n-2}e_{n-1}e_1 \dots e_{n-3}e_{n-2}), \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1})) = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) = \boldsymbol{e},$$

то есть $\tilde{\eta}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n}) = \mathbf{e}$. Следовательно, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ – идемпотент в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$.

Пусть теперь $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ – идемпотент в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ – произвольный элемент в A^{n-1}. Так как $\tilde{\eta}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1}\mathbf{a}) = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$, то $\eta(e_1e_2 \dots e_{n-1}a_1) = a_1$, откуда ввиду произвольного выбора $a_1 \in A$ следует нейтральность последовательности $e_1e_2 \dots e_{n-1}$ в $< A, \eta >$;

8) так как любая единица $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ n-арной группы $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ является ее идемпотентом, то согласно 7), $e_1 \dots e_{n-1}$ – нейтральная последовательность в $< A, \eta >$. Положим

$$\mathbf{x} = (\mathrm{a}, \underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_{n-2}),\ a \neq e_1,\ \tilde{\eta}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1}\mathbf{x}) = (u_1, \dots, u_{n-1}),\ \tilde{\eta}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-2}\mathbf{xe}) = (v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Выбор злемента $a \neq e_1$ возможен, так как $|A| > 1$. Так как

$$u_1 = \eta(e_1 \dots e_{n-1}a),\ v_1 = \eta(e_1 \dots e_{n-1}e_1),$$

то, ввиду нейтральности последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$ в $< A, \eta >$, получаем $u_1 = a$, $v_1 = e_1$, то есть $u_1 \neq v_1$. Следовательно, $\tilde{\eta}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-1}\mathbf{x}) \neq \tilde{\eta}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{n-2}\mathbf{xe})$. Это означает, что $\mathbf{e}$ не является единицей в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$;

9) так как в n-арной группе порядка r существует ровно r^{n-2} различных нейтральных последовательностей длины $n - 1$, то из 7) следует, что в $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ ровно r^{n-2} идемпотентов.

3.8. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $< A, \gamma >$ – t-арная группа, $n = k(t - 1) + 1$, $k \geq 1$. Определим на A^{n-1} n-арную операцию δ по правилу (3.1) из следствия 3.2. Тогда:

1) $< A^{n-1}, \delta >$ – n-арная группа;

2) если $|A| > 1$, то центр $Z(A^{n-1}, \delta)$ – n-арной группы $< A^{n-1}, \delta >$ пуст, в частности $< A^{n-1}, \delta >$ – неабелева;

3) $< A, \gamma >$ – полуабелева тогда и только тогда, когда $< A^{n-1}, \delta >$ полуабелева;

4) элемент $(e_1, \dots, e_{n-1})$ является идемпотентом в $< A^{n-1}, \delta >$ тогда и только тогда, когда $e_1 \dots e_{n-1}$ нейтральная последовательность в n-арной группе $< A, \eta >$, производной от t-арной группы $< A, \gamma >$;

5) если $e_1 \dots e_{t-1}$ – нейтральная последовательность в $< A, \gamma >$, то

$$(\underbrace{e_1, \dots, e_{t-1}, \dots, e_1, \dots, e_{t-1}}_{k})$$

является идемпотентом в $< A^{n-1}, \delta >$;

6) если $|A| > 1$, то в $< A^{n-1}, \delta >$ нет единиц;

7) если $< A, \gamma >$ – конечная порядка r, то $< A^{n-1}, \delta >$ – конечная порядка r^{n-1}, содержащая ровно r^{n-2} идемпотентов, в число которых, в частности, входят r^{t-2} идемпотентов из 5).

3.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – группа. Определим на A^{n-1} n-арную операцию δ по правилу (3.2) из следствия 3.3. Тогда :

1) $< A^{n-1}, \delta >$ – n-арная группа;

2) если $|A| > 1$, то центр $Z(A^{n-1}, \delta)$ – n-арной группы $< A^{n-1}, \delta >$ пуст, в частности $< A^{n-1}, \delta >$ – неабелева;

3) A – абелева тогда и только тогда, когда $< A^{n-1}, \delta >$ полуабелева;

4) элемент $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ является идемпотентом в $< A^{n-1}, \delta >$ тогда и только тогда, когда $e_1 \ldots e_{n-1}$ нейтральная последовательность в n-арной группе $< A, \eta >$, производной от группы A;

5) если e – единица в A, то $(\underbrace{e, \ldots, e}_{n-1})$ – идемпотент в $< A^{n-1}, \delta >$;

6) если $|A| > 1$, то в $< A^{n-1}, \delta >$ нет единиц;

7) если A – конечная порядка r, то $< A^{n-1}, \delta >$ – конечная порядка r^{n-1}, содержащая ровно r^{n-2} идемпотентов, в число которых входит идемпотент $(\underbrace{e, \ldots, e}_{n-1})$ из 5).

Так как для любого $r \geq 2$ существует абелева группа порядка r, то из следствия 3.9 вытекает

3.10. СЛЕДСТВИЕ. Для любых $r \geq 2$, $n \geq 3$ существует неабелева, но полуабелева n-арная группа порядка r^{n-1}, содержащая ровно r^{n-2} идемпотентов, среди которых нет единиц.

3.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждения 1) и 2) теоремы 3.7 есть в [8].

Для n-арных групп предложению 3.4 соответствует следующее

3.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $< A, \eta >$ и $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – n-арные группы из теоремы 3.7. Тогда операции $\times, \overset{1}{\times}, \ldots, \overset{n-1}{\times}$ из предложения 3.4 являются групповыми, причем группы $< A, \overset{1}{\times} >, \ldots, < A, \overset{n-1}{\times} >$ изоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весцi НАН Беларусi. – 2008. – № 3. – С. 28 – 34
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208 – 350.
3. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка. – 1992.
4. Гальмак, А.М. n-Арные группы. Ч. 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003.
5. Гальмак, А.М. n-Арные группы. Ч. 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1 – 19.
7. Crombez, G. On (n, m)-rings / G Crombez // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180 – 199.
8. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги теорм Кели и Биркгофа / А.М. Гальмак // Изв. вузов, сер. Математика. – 2001. – № 2. – С. 13 – 18.

Поступила 14.10.2008