

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»**

**В. В. Ялтыхов,  
Н. О. Куприенко, П. М. Левданский**

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА  $L_p$ -ОЦЕНОК  
В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ**

**Новополоцк  
ПГУ  
2008**

УДК 528.063  
ББК 26.12  
Я52

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р техн. наук В. Ю. МИНЬКО (РУП аэрокосмических методов  
в геодезии «Беларокосмогеодезия»);  
канд. техн. наук, доц. каф. геодезии  
и кадастров УО «ПГУ» Г. Е. ГОЛОВАНЬ

**Ялтыхов, В. В.**

Я52      Применение метода Lp-оценок в уравнительных вычислениях /  
В. В. Ялтыхов, Н. О. Куприенко, П. М. Левданский. – Новополоцк :  
ПГУ, 2008. – 100 с.  
ISBN 978-985-418-718-1.

В монографии рассмотрены вопросы геодезических измерений методом Lp-оценок. Изложены ключевые разделы уравнительных вычислений – выбор весов измерений, поиск грубых ошибок в результатах измерений, оценка точности в нетрадиционных методах уравнивания и методика обработки нуль-свободных геодезических построений.

Рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов вузов, занимающихся вопросами математической обработки результатов геодезических измерений.

УДК 528.063  
ББК 26.12

ISBN 978-985-418-718-1

© Ялтыхов В. В., Куприенко Н. О., Левданский П. М., 2008  
© УО «Полоцкий государственный университет», 2008

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	4
1. Основы метода Lp-оценок .....	6
2. Целевые функции при реализации алгоритмов.....	9
3. Нелинейный метод Ньютона.....	11
3.1. Реализация метода на ЭВМ .....	11
3.1.1. Формулы численного дифференцирования .....	11
3.1.2. Выбор шага при численном дифференцировании .....	13
3.1.3. Вопросы многокритериальной оптимизации .....	14
3.2. Переход от нелинейного метода к линейному .....	18
3.3. Применение расширенной псевдообратной матрицы .....	19
4. Оценка точности функций измеренных и уравненных величин в методе Lp-оценок .....	22
5. Поиск грубых ошибок в измерениях.....	27
5.1. Формула Ю.В. Линника и ее применение при поиске грубых ошибок измерений.....	27
5.1.1. Уравнивание по углам .....	28
5.1.2. Уравнивание по направлениям .....	29
5.2. Поиск грубых ошибок в измерениях при уравнивании геодезических сетей методом Lp-оценок с использованием параметрического способа.....	30
5.3. О программе уравнивания нивелирных сетей и методике поиска грубых ошибок в измерениях, заложенной в ней.....	33
6. Уравнивание нуль-свободных геодезических сетей.....	36
6.1. Сравнение методик уравнивания геодезических сетей без исходных пунктов .....	36
6.2. Обобщение вариационного метода регуляризации на основе Lp-оценок при математической обработке плановых геодезических сетей .....	39
6.3. Уравнивание и оценка точности нуль-свободных сетей нивелирования и сетей GPS на основе Lp-оценок, минуя регуляризацию.....	52
6.4. Многокритериальное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей .....	55
Литература .....	63
Приложения .....	67

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из факторов, оказывающих влияние на ускорение технического процесса геодезического производства с целью повышения качества выпускаемой продукции, сокращения сроков работ и снижения их себестоимости, является всестороннее использование научных достижений в области математики, точного приборостроения и электронно-вычислительной техники. Повсеместно проводится большая работа по внедрению и эффективному использованию ПЭВМ в геодезическом производстве. В связи с этим значительно повышается роль научных исследований, направленных на разработку, совершенствование и внедрение математического и программного обеспечения для ПЭВМ с целью автоматизации обработки результатов измерений.

Нормальный закон распределения ошибок измерений – это идеальная математическая модель. В некоторых случаях она очень хорошо описывает действительные распределения ошибок, а иногда совершенно не подходит для их описания. Поэтому при математической обработке измерений главный вопрос состоит в том, в каких случаях можно, а в каких не следует пользоваться этой моделью. Иными словами, ключевая точка решения этого вопроса есть необходимость точного выполнения указания Лежандра, данного им в 1805 г. в его первой работе по методу наименьших квадратов (МНК). Он пишет, что прежде чем воспользоваться МНК, следует тщательно просмотреть все наблюдения и выбрать из них те, которые есть или кажутся аномальными, т.е. выбросить те наблюдения, которые не укладываются в «закон ошибок». Наличие же у эмпирических распределений более тяжелых, чем у нормального закона, «хвостов» было замечено уже давно.

Еще Бессель, анализируя в 1818 г. длинные ряды астрономических наблюдений, пришел к выводу, что большие ошибки встречаются чаще, чем следовало бы ожидать при нормальном законе. Это же обстоятельство отметили позже Ньюком и Дулитль. Но несомненная заслуга Ньюкома состоит в том, что для аппроксимации действительных распределений ошибок он впервые использовал негауссово распределение. Хотя к этому времени существовали уже статистические процедуры для исключения аномальных измерений, предложенные в 1852 г. Пирсоном и в 1863 г. Шовене, Ньюком видел сложность и практическую непригодность этих процедур для распределений с утяжеленными «хвостами». Он предложил аппроксимировать такие распределения несколькими нормальными с общим центром и различными дисперсиями, а на основании такой модели разработал метод взвешивания наблюдений, который, по сути, близок к современным методам робастного оценивания. Работы Ньюкома способствовали повышению интереса к исследованиям закона распределения ошибок.

Впоследствии были проведены обширные исследования закона распределения ошибок в фундаментальной астрометрии, которые также подтвердили наличие существенных отклонений от закона Гаусса. Часто оказывалось, что гисто-

граммы ошибок, которые при визуальном рассмотрении, казалось бы, идеально иллюстрируют закон Гаусса, при статической проверке имеют существенные ненулевые эксцессы. При этом увеличение числа измерений вовсе не означало приближения действительного распределения ошибок прибора или метода наблюдений к закону Гаусса. Скорее, наоборот, с увеличением числа измерений с все большим уровнем значимости подтверждался негауссовый характер распределения. Утяжеленные «хвосты» присущи не только астрономическим, но и некоторым видам геодезических и других измерений в различных областях науки и техники. И часто вместо многочисленных выбраковок результатов наблюдений под нормальный закон проще отказаться в каком-то конкретном случае от закона Гаусса и при обработке измерений исходить из такой теоретической формы распределения, которая лучше, чем нормальный закон, отражает свойства данного ряда измерений. Это совсем не означает, что используемая в данном случае теоретическая форма распределения истинна для данного ряда измерений, как нельзя утверждать и того, что если ограниченное число измерений согласуется с законом Гаусса, то и истинный закон ошибок этих конкретных измерений тоже гауссов.

В настоящее время произошло резкое увеличение количества измерительной информации в связи с автоматизацией процессов измерений. Объемы рядов измерений стали достигать даже не десятков, а сотен тысяч. Распределение таких измерений, если их 300 – 500, будто бы хорошо отвечает закону Гаусса, но когда число измерений достигает тысяч, начинают все более отчетливо проявляться негауссовы особенности ошибок, присущие данному ряду или даже данному месту наблюдений. Особенно это характерно для высокоточных астрономических наблюдений, когда с увеличением числа измерений все отчетливее проявляются такие особенности уклонений действительных распределений ошибок от закона Гаусса, которые присущи данному прибору или методу измерений.

Методы обработки измерений, отличные от метода наименьших квадратов, более сложные и требуют большого объема вычислений. Однако в связи с развитием вычислительной техники сейчас эта задача вполне решается. К преимуществам этих методов можно отнести и то, что они позволяют выполнять обработку всех измерений, не отбраковывая сомнительные.

Данная работа посвящена вопросам использования методов уравнивания и оценки точности геодезических сетей, отличных от метода наименьших квадратов, поиска грубых ошибок и контролей уравнивательных вычислений в этих методах.

Цель исследований заключается в разработке методики уравнивания, алгоритмического и программного обеспечения, необходимого для работ по применению нетрадиционных способов уравнивания, в частности, метода L<sub>p</sub>-оценок.

## 1. ОСНОВЫ МЕТОДА $L_p$ -ОЦЕНОК

В известном методе Флетчера – Гранта – Хебдена [38] для системы параметрических уравнений поправок ставят условие в

$$\sum_{i=1}^N P_i |\vartheta_i|^{n-2} \vartheta_i^2 \Rightarrow \min, n \geq 1, \quad (1)$$

в котором  $N$  – количество измерений;  $P$  – веса измерений;  $\vartheta$  – измеренные величины из уравнения;  $n$  – показатель степени (при  $n = 1,0$  – оценки параметров по методу наименьших модулей (МНМ); при  $n = 1,5$  – метод наименьших степеней и т.д.). При  $1,0 \leq n < 2,0$  разность  $n - 2$  отрицательна и, следовательно, при  $\vartheta_i = 0,0$  необходимо поправке присвоить малую величину.

Выражение (1.1) рассматривается как условие МНК с неизвестной весовой матрицей

$$C = P \cdot \text{diag} |\vartheta|^{n-2}, \quad (1.2)$$

уточняемой путем применения следующей процедуры [4, 15, 16]:

1. При любом  $n$  находят решение, например, по МНК ( $n = 2$ )

$$\begin{aligned} \delta X &= -(A^T P A)^{-1} A^T P L; \\ V &= A \delta X + L \end{aligned} \quad (1.3)$$

2. При  $1,0 \leq n < 2,0$  применяют итеративный метод

$$\delta X_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L; \quad (1.4)$$

$$V_j = A \delta X_j + L; \quad (1.5)$$

3. При  $n > 2$  выполняют вычисления

$$\begin{aligned} G &= 1/(n-1), \\ \delta X_j &= (1-G)\delta X_{j-1} + G\delta \hat{X}_j, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\delta \hat{X}_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L$$

и далее применяют равенства (1.5) – (1.6).

Процесс итераций заканчивается, если

$$\epsilon > \frac{\|\delta X_j - \delta X_{j-1}\|}{\|\delta X_j\|}, \quad (1.7)$$

где  $\epsilon$  – малое наперед заданное число.

Окончательное решение находят по формуле

$$\hat{X} = X_0 + \delta X, \quad (1.8)$$

где  $X_0$  – вектор предварительных координат, соответствующий  $L$ .

Для достижения наилучшего решения при данной разрядной сетке ЭВМ предлагаем другую процедуру уравнивания, позволяющую находить минимум некоторой целевой функции.

При минимизации избранной целевой функции каждый раз уточняются координаты

$$\hat{X}_{j+1} = \hat{X}_j + \delta X_{j+1} \quad (1.9)$$

и

$$\delta X_{j+1} = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L_j, \quad (1.10)$$

где

$$L_j = \varphi(\hat{X}_j) - T \quad (1.11)$$

– вектор свободных членов параметрических уравнений, а

$$C_j = P \cdot \text{diag} |L_j|^{n-2}. \quad (1.12)$$

Здесь  $X_0$  – вектор начальных координат, попавший в область сходимости итераций, например, при  $n=2$  и уточняемый по (1.9) до тех пор, пока уменьшается значение целевой функции.

Процедура (1.9) – (1.12) проще алгоритма (1.3) – (1.8), и рабочие формулы не зависят от значений  $n$ . Ее отличает простота критерия остановки итераций. Для этих целей вместо (1.7) можно использовать

$$\epsilon > \max |\delta X_{j+1}|, \quad (1.13)$$

или условие, когда вместо уменьшения критериальной функции  $\Phi(X)$  начался процесс ее увеличения. Иначе говоря, итерации продолжают до тех пор, пока

$$\Phi(X_{j+1}) < \Phi(X_j). \quad (1.14)$$

В этом случае достигается наилучшее решение, не уступающее по точности первоначально рассмотренной процедуре.

Практические испытания показали, что новая процедура дает наименьший минимум  $\Phi(X)$ , чем алгоритм (1.3) – (1.8) при любом малом  $\epsilon$ , и требует меньшее число приближений.

Выше мы рассмотрели метод Lp-оценок при параметрическом способе уравнивания. Благодаря исследованиям С.Д. Волжанина стало возможным применение в алгоритмах Lp-оценок коррелятного способа [4].

Допустим, что задана система условных уравнений  $BV + W = 0$  с весовой матрицей  $P$ . Решение этой системы методом Lp-оценок предполагает:

А. При  $1 \leq n < 2$ :

1. Нахождение приближенного решения по МНК при  $n = 2, 0$ :

$$K = -(BP^{-1}B^T)^{-1}W; \quad (1.15)$$

$$V = P^{-1}B^T K. \quad (1.16)$$

2. Вычисление векторов коррелят и поправок в измерения

$$C_j = P \cdot \text{diag} \{ \sigma_j \}^{n-2};$$
$$K_{j+1} = -(BC_j^{-1}B^T)^{-1}W;$$
$$V_{j+1} = C_j^{-1}B^TK_{j+1}$$

3. Приближения продолжают до тех пор, пока

$$\frac{\|K_{j+1} - K_j\|}{\|K_j\|} < \varepsilon. \quad (1.17)$$

Б. При  $n > 2$ :

1. Нахождение приближенного решения по (1.15), (1.16) при  $n = 2, 0$ .
2. Вычисление вспомогательного числа  $G = 1/(n-1)$  при заданном  $n$ .
3. Вычисление вектора коррелят

$$R_j = P^{-1}B^TK_j;$$
$$U_j = P \cdot \text{diag} \{ R \}^{\frac{n-2}{n-1}};$$
$$K_* = -(BU_j^{-1}B^T)^{-1}W,$$
$$K_{j+1} = (1-G)K_j + GK_*.$$

4. Приближения продолжают до тех пор, пока не выполнится неравенство (1.17) с наперед заданным значением малой величины  $\varepsilon$ .

5. Вычисляют вектор поправок в измерения

$$V = U_j^{-1}B^TK_{j+1}.$$



## 2. ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ

При нелинейном методе Lp-оценок для уравнивания геодезических сетей минимизируют целевую функцию

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(X)|^n, \quad (2.1)$$

где  $X = [X_1, X_2, \dots, X_t]^T$  – вектор неизвестных координат определяемых пунктов;  $P_i$  – вес результата измерений;  $L(X) = \varphi(X) - T$  – свободный член нелинейного параметрического уравнения, равный разности вычисленного значения измерения и результата измерения;  $N$  – количество измерений;  $n$  – показатель степени. В обычном методе Lp-оценок показатель  $n$  является общим для всей целевой функции, но можно для каждой  $L_i(X)$  принимать свою индивидуальную степень (многостепенная оптимизация). Вместо (2.1) возможна и матричная форма записи

$$\Phi(X) = (L(X))^T P |L(X)|^n, \quad (2.2)$$

где  $P$  – диагональная матрица весов результатов измерений.

Опираясь на исследования [6], рассмотрим вопрос о назначении весов измерений при уравнивании геодезических сетей методом Lp-оценок.

Если предположить, что ошибки геодезических измерений следуют Lp-распределению с плотностью вероятности [6, 15]

$$y = \frac{Z_n}{2\Delta_n} \exp\left(-\frac{1}{n} \left| \frac{\varphi(X) - T}{\Delta_n} \right|^n\right), \quad n \geq 1. \quad (2.3)$$

то, как доказывается в [38], вес  $i$ -того измерения

$$C_i = \left(\frac{1}{\Delta_n}\right)^n |\varphi_i(X) - T|^{n-2} \quad (2.4)$$

и используется при поиске решения по формуле [4]

$$\delta X_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L. \quad (2.5)$$

Здесь параметры  $Z_n$ ,  $\Delta_n$  и  $n$  устанавливаются из предварительного анализа результатов измерений, а последний из них определяют по методу максимального правдоподобия с применением критерия согласия.

Если  $\hat{X} = X_0 + \delta X$  отыскивается не с применением (2.5), а напрямую с использованием целевой функции (2.1), то согласно (2.4)  $P = (1/\Delta_n)^n$ . Минимизация функции (2.1) дает более устойчивое решение по сравнению с (2.5), имеющим при  $n < 2$  точку разрыва, когда  $\varphi_i = \varphi_i(X) - T = 0$ . В этом случае обычно применяют большое значение веса  $C_i$  (например,  $C = 10^6$ ), что

неизбежно приводит к ухудшению обусловленности информационной матрицы Фишера ( $A^T C_j A$ ).

Для определения веса  $P$  предлагаем воспользоваться формулой [15]

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}, \quad (2.6)$$

где  $\sigma$  – стандарт измерения, а

$$c^2 = \frac{n^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad (2.7)$$

где используется гамма-функция. Теперь, зная, что  $\Delta_n = \frac{\sigma}{c}$ ,

$$P_i = \left(\frac{c}{\sigma_i}\right)^n. \quad (2.8)$$

Поскольку веса  $P_i$  относительны, то в качестве « $c$ » можно брать любую константу, например,  $c=1$ . Значение веса измерения, входящего в (2.1) и равного

$$P_i = (1/\sigma_i)^n, \quad (2.9)$$

приведут даже при уравнивании линейно-угловых сетей к тем же результатам, что и с использованием формул (2.7) и (2.8).

В условиях многокритериальной оптимизации [19], когда для каждого измерения или для группы измерений отыскивается своя степень  $n_i$ , вместо (2.9) необходимо использовать формулу

$$P_i = \left(\frac{c_i}{\sigma_i}\right)^{n_i} \quad (2.10)$$

с применением равенства (2.7), поскольку постоянно  $c_i$  для каждого измерения будет индивидуальной.

При уравнивании нивелирных сетей обычно применяют веса превышений в виде  $P' = c/K$  или  $P' = c/L_{км}$ , где  $c$  – произвольная постоянная;  $K$  – число станций нивелирования в ходе;  $L_{км}$  – длина хода в километрах. Но, как будет показано ниже, и для нивелирования необходима формула (2.9).

Для этого вычисляют

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{P_i}}, \quad (2.11)$$

где  $\sigma_0$  – стандарт превышения, для которого  $P' = 1$ .

Минимизацию функции (2.1) можно выполнить любым методом нелинейного программирования [34], например, методом Ньютона.

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА

#### 3.1. Реализация метода на ЭВМ

##### 3.1.1. Формулы численного дифференцирования

Алгоритм минимизации целевой функции по методу Ньютона предусматривает итерационный процесс [34]

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - H^{-1}(X^{(j)}) \nabla \Phi(X^{(j)}), \quad (3.1)$$

где  $X^{(j)}$  – вектор неизвестных в  $j$ -том приближении;

$$H(X^{(j)}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_i \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_i^2} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

– матрица Гессе вторых частных производных, взятых в точках с координатами  $X^{(j)} = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$ , а градиент целевой функции имеет выражение

$$\nabla \Phi(X^{(j)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_i} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Для численного определения первых частных производных целевой функции по параметрам, входящим в (3.3), можно применять следующие формулы [32]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\delta} (\Phi_{\delta} - \Phi_0) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2\delta} (\Phi_{\delta} - \Phi_{-\delta}) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{12\delta} (\Phi_{-2\delta} - 8\Phi_{-\delta} + 8\Phi_{\delta} - \Phi_{2\delta}); \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{4\delta} (\Phi_{\delta, \delta} - \Phi_{-\delta, \delta} + \Phi_{\delta, -\delta} - \Phi_{-\delta, -\delta}); \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{4\delta} (\Phi_{\delta, \delta} + \Phi_{-\delta, \delta} - \Phi_{\delta, -\delta} - \Phi_{-\delta, -\delta}), \quad (3.8)$$

где используются малые приращения и в  $x$ , и в  $y$  одновременно.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{12\delta} (-3\Phi_{-\delta} - 10\Phi_0 + 18\Phi_{\delta} - 6\Phi_{2\delta} + \Phi_{3\delta}); \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{6\delta} (\Phi_{-2\delta} - 6\Phi_{-\delta} + 3\Phi_0 + 2\Phi_{\delta}); \quad (3.10)$$

Формула конечных разностей Ньютона

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\delta} (\Delta Y^I - \frac{\Delta Y^{II}}{2} - \frac{\Delta Y^{III}}{3} - \frac{\Delta Y^{IV}}{4}), \quad (3.11)$$

где  $\Delta Y^j$  –  $j$ -тая табличная разность, выбираемая из первой строки табл. 3.1.

Таблица 3.1

Табличные разности для формулы Ньютона

	$\Delta Y^I$	$\Delta Y^{II}$	$\Delta Y^{III}$	$\Delta Y^{IV}$
$\Phi_0$	$\Delta Y_0^I = \Phi_\delta - \Phi_0$	$\Delta Y_0^{II} = \Delta Y_1^I - \Delta Y_0^I$	$\Delta Y_0^{III} = \Delta Y_2^II - \Delta Y_0^{II}$	$\Delta Y_0^{IV} = \Delta Y_3^III - \Delta Y_0^{III}$
$\Phi_\delta$	$\Delta Y_1^I = \Phi_{2\delta} - \Phi_\delta$	$\Delta Y_1^{II} = \Delta Y_2^I - \Delta Y_1^I$	$\Delta Y_1^{III} = \Delta Y_2^{II} - \Delta Y_1^{II}$	–
$\Phi_{2\delta}$	$\Delta Y_2^I = \Phi_{3\delta} - \Phi_{2\delta}$	$\Delta Y_2^{II} = \Delta Y_3^I - \Delta Y_2^I$	–	–
$\Phi_{3\delta}$	$\Delta Y_3^I = \Phi_{4\delta} - \Phi_{3\delta}$	–	–	–
$\Phi_{4\delta}$	–	–	–	–

Для вычисления элементов матрицы Гессе:  $H_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ ;  $H_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$  и

$H_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$  применим следующие формулы численного дифференцирования [32]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{8^2} (\Phi_\delta - 2\Phi_0 + \Phi_{-\delta}); \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{128^2} (-\Phi_{2\delta} + 16\Phi_\delta - 30\Phi_0 + 16\Phi_{-\delta} - \Phi_{-2\delta}); \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{384^2} (\Phi_{\delta, \delta} - 2\Phi_{\delta, \delta} + \Phi_{-\delta, \delta} + \Phi_{\delta, 0} - 2\Phi_{\delta, 0} + \Phi_{-\delta, 0} + \Phi_{\delta, -\delta} - 2\Phi_{\delta, -\delta} + \Phi_{-\delta, -\delta}); \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{128^2} (11\Phi_{-\delta} - 20\Phi_0 + 6\Phi_\delta + 4\Phi_{2\delta} - \Phi_{3\delta}); \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{8^2} (2\Phi_0 - 5\Phi_\delta + 4\Phi_{2\delta} - \Phi_{3\delta}); \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{1808^2} (-13\Phi_{-2\delta} + 228\Phi_{-\delta} - 420\Phi_0 + 200\Phi_\delta + 15\Phi_{2\delta} - 12\Phi_{3\delta} + 2\Phi_{4\delta}); \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{8^2} (\Delta Y^{II} - \Delta Y^{III} + \frac{11}{12} \Delta Y^{IV}), \quad (3.18)$$

где разность  $\Delta Y^j$  берут из табл. 3.1.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{48^2} (\Phi_{\delta, \delta} - \Phi_{\delta, -\delta} - \Phi_{-\delta, \delta} + \Phi_{-\delta, -\delta}); \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{28^2} (\Phi_{\delta, 0} - \Phi_{-\delta, 0} - \Phi_{\delta, \delta} + \Phi_{\delta, -\delta} - 2\Phi_{\delta, 0} - \Phi_{\delta, \delta} - \Phi_{-\delta, -\delta}). \quad (3.20)$$

В выражениях (3.4) – (3.20)  $\delta$  – малый шаг дифференцирования, а  $\Phi_k = \Phi(x + i\delta, y + k\delta)$ . Например,  $\Phi_{\delta, -\delta} = \Phi(x + \delta, y - \delta)$ ;  $\Phi_{4\delta} = \Phi(x + 4\delta, y)$  или  $\Phi_{4\delta} = \Phi(x, y + 4\delta)$ .

Исследования [22, 23] показали, что наилучшими в геодезической практике являются формулы (3.6), (3.13) и (3.19). Важным вопросом остается выбор малого шага  $\delta$  при численном дифференцировании, который обычно задается в качестве исходной информации при применении стандартных программ.

### 3.1.2. Выбор шага при численном дифференцировании

Для обеспечения необходимой точности численного дифференцирования необходимо выбрать оптимальный шаг, который не должен быть слишком большим или слишком малым. Размер шага зависит от величины аргумента, в который задается приращение  $\delta$  и от числа знаков в малой разрядной сетке ЭВМ –  $r$ . Впервые такая зависимость  $\delta$  была получена в [24]

$$\delta = 10^m; \quad m = \lg \sqrt{|X| + 10^{-\frac{r}{4}}} - \frac{r}{4} \quad (3.21)$$

Величина  $10^{-\frac{r}{4}}$  в подкоренном выражении получена для случая, когда  $X = 0$ .

Формула (3.21) оказалась удачной во многих случаях, встречающихся в геодезической практике. И после ее комплексной проверки [35] несколько преобразилась:

$$\delta = 10^m; \quad m = \lg \sqrt{|X| + 10^{-\frac{r}{3}}} - \frac{r}{3}, \quad (3.22)$$

что привело к более устойчивому решению некорректных задач геодезии.

В выражениях (3.21), (3.22)  $X$  – это координата пункта ( $x, y$  или  $H$ ), в который задается приращение при численном дифференцировании. Но нередко встречаются задачи, в которых приращение задано не  $X$ , а измеренным величинам:  $S$  – длине стороны или  $M$  – направлению. В этом случае предлагаем применять следующие формулы:

$$\delta = 10^m; \quad m = \lg \sqrt{S} - \frac{r}{3},$$

где  $S$  – или длина линии, или превышение, или приращение, измеренное системой GPS, а поправка в направление

$$\delta_M = \frac{\delta_S \rho^*}{S}. \quad (3.23)$$

### 3.1.3. Вопросы многокритериальной оптимизации

Критериальной функцией для многостепенной оптимизации будет следующая

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{c_i}{\sigma_i} \right)^{n_i} |L_i(X)|^{n_i}, \quad (3.24)$$

объединяющая выражения (2.1) и (2.10).

Такая постановка задачи имеет практическое значение, когда, например, при уравнивании линейно-угловой сети для линейных и угловых измерений можно брать разные показатели степени  $n$ . Важность такого решения имеет тот же эффект, как если бы мы вместо равноточных результатов измерений предложили обрабатывать неравноточные данные. Минимизацию функции (3.24) можно выполнить любым методом нелинейного программирования с использованием формул численного дифференцирования.

При многокритериальном уравнивании геодезических сетей окончательное решение  $\hat{X}$  будем отыскивать под условием минимума векторной целевой функции, состоящей, например, из двух критериальных функций  $F_1$  и  $F_2$ . Функция (3.24) позволяет применять для каждого измерения свою степень  $n_i$ . Взаимосвязь  $F_1 = \Phi(X)$  и  $F_2$  определяется тем, что степени  $n_i$  отыскиваются под условием минимума  $F_2$  в следующих вариантах:

*вариант 1*

$$F_2 = \sum_{i=1}^k M_i, \quad (3.25)$$

где  $k$  – число определяемых пунктов,  $M$  – ошибка положения пункта;

*вариант 2*

$$F_2 = \min M_{\max}, \quad (3.26)$$

определяющий минимаксный подход;

*вариант 3*

$$F_2 = Sp(Q), \quad (3.27)$$

т.е. наименьший след обратной матрицы;

*вариант 4*

$$F_2 = \mu \cdot S_p(Q), \quad (3.28)$$

где  $\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}$ , а  $P$  вычисляется по (2.10);

вариант 5

$$F_2 = \mu \cdot \Psi, \quad (3.29)$$

где  $\Psi$  – относительная обусловленность [21] для данного построения;

вариант 6

$$F_2 = \mu + \Psi. \quad (3.30)$$

В таблице 3.2 приведены результаты вычислений по всем шести вариантам для линейно-угловой сети [38, с. 217], показанной на рис. 3.1. В условиях двухстепенной функции (3.24) берутся одинаковые степени для сторон ( $n_s$ ) и для направлений ( $n_p$ ), что занимает в 10 раз меньше машинного времени по сравнению с многостепенной оптимизацией.

При  $n_s = n_p = 2,0$ ,  $\sigma_s = 0,01$  м,  $\sigma_p = 0,7''$  имеем:  $\mu = 1,121$ ; ошибки положения пунктов  $M_1 = 0,0074$  м,  $M_2 = 0,0133$  м,  $M_3 = 0,0119$  м.

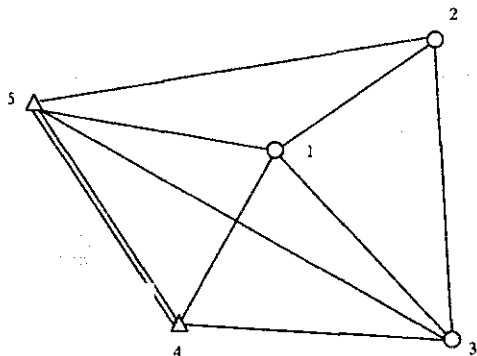


Рис. 3.1. Линейно-угловая сеть

Таблица 3.2

Варианты			Результаты вычислений					
Связи	Измерения		1	2	3	4	5	6
			СТЕПЕНИ					
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	2300,060 м	2,4	2,5	3,1	2,6	2,1	2,3
3	4	3090,353 м	2,4	2,4	3,9	2,6	1,9	2,4
2	5	3643,234 м	2,2	2,3	3,9	2,4	2,1	2,1
1	5	2115,919 м	2,2	2,3	3,0	2,4	2,6	2,4
3	5	4363,611 м	2,3	2,3	3,9	2,5	1,9	2,3
1	2	2169,073 м	2,3	2,4	3,0	2,4	1,5	1,7
1	3	2620,909 м	2,3	2,4	2,9	2,5	1,7	1,7

Окончание таблицы 3.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	3922,860 м	2,4	2,4	2,6	2,5	1,7	1,9
4	5	00° 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
4	1	57° 20' 32,10"	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9	2,7
4	3	113° 14' 06,35"	1,9	1,9	1,8	1,9	1,7	1,6
5	2	00° 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
5	1	32° 12' 22,92"	1,3	1,3	1,2	1,5	2,1	2,1
5	3	57° 50' 15,30"	1,2	1,2	1,2	1,2	2,0	1,2
5	4	98° 26' 12,73"	1,5	1,5	1,2	1,4	1,6	1,5
1	4	00° 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
1	5	56° 25' 37,99"	1,3	1,2	1,2	1,2	1,6	1,2
1	2	172° 53' 39,44"	1,5	1,6	1,2	1,9	1,8	1,2
1	3	282° 29' 53,83"	1,2	1,2	1,2	1,2	3,0	2,0
3	4	00° 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
3	5	26° 09' 54,12"	1,6	1,6	1,4	1,5	1,7	1,6
3	1	46° 36' 17,98"	1,5	1,8	1,4	1,4	2,3	3,4
3	2	77° 59' 46,71"	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
2	3	00° 00' 00,00"	–	–	–	–	–	–
2	1	39° 00' 17,79"	1,4	1,5	1,5	1,5	2,3	1,2
2	5	70° 19' 51,51"	1,7	1,8	1,3	1,7	2,4	3,7
Варианты		1	2	3	4	5	6	
Многостепенная функция (3.24)								
$\mu$		1,250	1,304	19,220	1,481	1,263	1,223	
$M_1$		0,0068	0,0069	0,0061	0,0071	0,0087	0,0089	
$M_2$		0,0117	0,0115	0,0104	0,0119	0,0187	0,0153	
$M_3$		0,0106	0,0109	0,0125	0,0115	0,0152	0,0130	
Двухстепенная функция (3.24)								
$n_s$		2,2	2,2	2,5	2,2	–	–	
$n_\beta$		1,9	1,9	1,9	1,9	–	–	
$\mu$		1,199	1,199	1,504	1,199	–	–	
$M_1$		0,0073	0,0073	0,0088	0,0073	–	–	
$M_2$		0,0126	0,0126	0,0148	0,0126	–	–	
$M_3$		0,0113	0,0113	0,0133	0,0113	–	–	

По данным табл. 3.2 видно, что функция (3.27) (вариант 3) является неудачной. Лучшей является критериальная функция (3.26).



В таблице 3.3 показаны значения оптимальных  $n_i$  для примеров, взятых из [28], где указаны результаты измерений и координаты исходных пунктов. Поиск  $n_i$  осуществлялся методом приближений под условием минимума целевой функции (3.24). Сначала для всех измерений принималось  $n = 2,0$ . Затем для каждого измерения выбирался показатель степени  $n_i$  с шагом  $\Delta n_i = \pm 0,1$  и запоминалось  $n_i$  с наименьшим значением  $F_2$  (3.25). Приближения заканчивались в том случае, если изменение  $n_i$  для всех измерений не приводило к уменьшению функции (3.24). Также ставилось ограничение на число полных приближений, когда просматривались все измерения. Число таких приближений не превышало 20.

Таблица 3.3

Одноступенная многокритериальная оптимизация

№ пп номер страницы в [28]	1	2	3	4	5	6
оптимальные $n$	2,0	2,0	2,0	2,0	2,2	2,1
$\mu$	0,608	1,139	0,833	1,053	1,054	1,153
$M_1$	0,0523	0,0475	0,0425	0,0595	0,0373	0,0073
$M_2$	0,0537	0,0292	0,0440	0,0766	0,0406	0,0128
$M_3$	0,0245	0,0387	0,0206	0,0392	—	0,0115
$M_4$	—	—	—	0,0589	—	—

В таблице 3.4 выполнена многокритериальная оптимизация для тех же примеров, что и в табл. 3.3. По данным табл. 3.3 и 3.4 видно, что ошибка положения определяемых пунктов стала меньше в 1,5 – 2,0 раза.

Таблица 3.4

Многоступенная многокритериальная оптимизация

№ пп номер страницы в [28]	1	2	3	4	5	6
$\sigma_B$	1,0	1,0	1,0	—	—	0,7
$\sigma_S$	—	—	—	0,03	0,03	0,01
	1 5 1,5	1 6 1,4	1 6 1,9	1 5 2,0	4 1 1,8	1 3 2,4
	1 4 2,6	1 5 1,5	1 5 2,4	1 6 2,0	4 2 1,8	1 4 2,4
	2 4 3,6	2 6 1,3	2 6 2,7	2 3 2,0	4 3 1,9	2 5 2,2
	2 5 2,3	2 1 1,9	2 5 1,8	2 5 2,0	4 5 1,9	2 3 2,2
	2 1 1,9	3 6 1,9	2 1 2,6	3 4 1,5	5 1 2,0	2 4 2,3
	3 5 1,8	3 2 1,7	3 6 1,8	3 5 1,6	5 2 2,0	3 5 2,3
	3 2 1,8	4 6 1,9	3 2 1,5	3 6 1,2		3 4 2,3

Окончание табл. 3.4

	4	5	1,8	4	7	1,5	4	6	2,8	4	5	1,2			4	5	2,4
	4	2	1,9	5	6	1,8	4	3	1,5	4	6	1,5			1	3	3,9
	4	3	3,9	5	7	1,9	5	2	2,3	5	6	1,5			1	4	1,9
	5	2	1,4	5	4	1,8	5	6	2,5						2	3	1,3
	5	3	3,9	6	2	2,2	5	4	1,8						2	4	1,2
	5	4	1,7	6	3	2,1	6	2	2,2						2	1	1,5
				6	7	2,0	6	3	2,6						3	2	1,3
				6	4	2,0	6	4	1,8						3	5	1,5
				6	5	1,8	6	5	1,8						3	4	1,2
				7	5	1,9									4	2	1,6
				7	6	1,9									4	3	1,5
				7	4	1,9									4	5	1,2
															5	3	1,4
															5	2	1,7
$\mu$		0,481		1,131		0,773		0,479		0,896		1,250					
$M_1$		0,0445		0,0457		0,0400		0,0408		0,0400		0,0068					
$M_2$		0,0399		0,0285		0,0431		0,0578		0,0347		0,0117					
$M_3$		0,0150		0,0377		0,0201		0,0204		-		0,0106					
$M_4$		-		-		-		0,0428		-		-					

### 3.2. Переход от нелинейного метода к линейному

Реализация метода Lp-оценок по методу Ньютона предусматривает итеративный процесс (3.1), приводящий к оценкам параметров  $\hat{X}$ , после чего вектор поправок в измерения отыскивают по формуле

$$V = \varphi(\hat{X}) - T, \quad (3.31)$$

где  $\varphi(\hat{X})$  – вектор уравненных, а  $T$  – вектор вычисленных измерений.

Для перехода от нелинейного алгоритма Ньютона к линейному требуется дифференцировать функцию вида  $y = |x|^n$ , применяя следующие формулы:

$$y' = n \cdot \text{sign}(x) \cdot |x|^{n-1}, \quad y'' = n \cdot (n-1) |x|^{n-2},$$

где  $\text{sign}(x)$  – функция передачи знака (или единица со знаком переменной  $x$ ). В результате дифференцирования функции (2.1) при одинаковом для всех измерений показателе степени  $n$  получим

$$\nabla \Phi(X) = n \cdot A^T P S |L(X)|^{n-1}, \quad (3.32)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $S$  – квадратная матрица со значениями  $\text{sign}(L(X))$  по диагонали.

Поиск вторых частных производных осуществляется путем дифференцирования (3.32). В результате получим матрицу Гессе

$$H(X) = n(n-1)A^TCA, \quad (3.33)$$

где  $C = P \cdot \text{diag}[L(X)]^{n-2}$  аналогично равенству (1.2).

Так как элементы матрицы  $A$  также зависят от значений  $X$ , разных при неодинаковых  $n$ , полагаем, что находимся в малой окрестности минимума целевой функции (3.24), при  $n=2$  считается  $A_{n+1} \approx A_{n+2}$ .

С учетом (3.32) – (3.33) формула (3.1) примет вид

$$\delta x = -\frac{1}{n-1}(A^TCA)^{-1}A^TPS[L(X)]^{n-1} \quad (3.34)$$

Учитывая, что при  $x \neq 0$ ,  $y' = n|x|^{n-1} \cdot \frac{x}{|x|} = n|x|^{n-2} \cdot x$ , можно записать

$$A^TPS[L(X)]^{n-1} = A^TCL(X) \quad (3.35)$$

Подставляя (3.35) в (3.34), окончательно получим линеаризованный вариант метода Ньютона

$$\delta x = -\frac{1}{n-1}(A^TCA)^{-1}A^TCL(X). \quad (3.36)$$

Анализ этого выражения показывает, что методом Ньютона нельзя выполнять минимизацию функции (2.1) при  $n=1$ , а также в тех случаях, когда при  $n < 2$  любое  $L_i(X) = 0$  дает деление на ноль при вычислении  $C$  по формуле (1.2). Теперь можно понять, почему нелинейный метод Ньютона начинает сходиться при  $n \geq 1.5$ .

Если  $n=2$ , то выражение (3.36) будет таким

$$\delta x = -(A^TCA)^{-1}A^TCL(X),$$

что соответствует алгоритму Гаусса и подтверждает связь методов Ньютона и Гаусса.

### 3.3. Применение расширенной псевдообратной матрицы

Допустим, что дана система линейных параметрических уравнений

$$A_{N \times n}X_{ni} + L_{N \times 1} = 0. \quad (3.37)$$

Также допустим, что вес каждого уравнения равен единице  $P = E$ . В этом случае главная псевдообратная матрица будет иметь вид

$$A^* = (A^T A)^{-1} A^T. \quad (3.38)$$

Для неравноточных измерений вместо (3.38) будем иметь

$$F = (A^T P A)^{-1} A^T P. \quad (3.39)$$

Очевидно, что  $FA = E$ . Это говорит о том, что матрица  $F$  является псевдообратной. Известно, что  $AF$  будет идемпотентной матрицей  $((AF)^2 = AF)$  или матрицей проектирования. Причем  $P = E$ ,  $F = A^+$ . Но в литературе матрица  $F$  часто используется и никак не называется. Поскольку  $F$  — это главная псевдообратная матрица, рассчитанная на случай неравноточных измерений, то мы назвали ее расширенной псевдообратной матрицей.

Взаимосвязь главной и расширенной псевдообратной матрицы будет такой

$$F = \left( P^{\frac{1}{2}} A \right)^+ P^{\frac{1}{2}}. \quad (3.40)$$

Обозначая для случая Лр-оценок

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C, \quad (3.41)$$

вместо (3.36) можно записать

$$\delta x = -\frac{1}{n-1} FL(X) \quad (3.42)$$

В главе 4 будет показано, что матрица  $F$  широко используется при оценке точности результатов уравнивания в методе Лр-оценок.

Вместо аналитической зависимости (3.41) в случае минимизации многостепенной целевой функции матрицу  $F$  можно получить численно [1]

$$F_{\alpha N} = \frac{\hat{X}_\delta - \hat{X}}{\delta}. \quad (3.43)$$

По этой формуле получают столбцы матрицы  $F$ , где  $\hat{X}_\delta$  — вектор уравненных координат после искажения некоторого одного измерения на величину  $\delta$ , вычисляемого по (3.22) — (3.23). Для получения полной матрицы  $F$  необходимо уравнивать сеть и применить (3.43)  $N$  раз, где  $N$  — количество измерений.

При отладке программы для ЭВМ можно воспользоваться следующими контролями:

$$FV = 0, \quad A = P^{\frac{1}{2}} \left( FP^{\frac{1}{2}} \right)^+ \quad (3.44)$$

Сравнивая (3.4) и (3.43), можно по аналогии с наилучшей формулой (3.6) записать новую формулу

$$F_{\alpha N} = \frac{1}{12\delta} (\hat{X}_{-2\delta} - 8\hat{X}_{-\delta} + 8\hat{X}_\delta - \hat{X}_{2\delta}). \quad (3.45)$$

Как показали исследования, в трех примерах из десяти в методе Ньютона при  $n=1,5$  (неустойчивое решение) равенство (3.45) дает для  $F$  более близкий результат к значениям, найденным аналитически с применением (3.41), чем (3.43).

Для получения  $\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$  по аналогии с наилучшей формулой (3.13) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{1}{128^2} (-\hat{X}_{28} + 16\hat{X}_8 - 30\hat{X} + 16\hat{X}_{-8} - \hat{X}_{-28}), \quad (3.46)$$

где  $T$  – вектор измерений. Если  $F$  вычислено по (3.45), то  $\frac{\partial F}{\partial T}$  по (3.46) найти легко, поскольку используются те же координаты, что и в (3.45)

$$\frac{\partial F}{\partial T_{iN}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial T_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial T_N^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial T_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial T_N^2} \end{pmatrix}$$

На основании ряда Тейлора можно получить адаптированную матрицу первых частных производных

$$\Phi_{iN} = \left( \text{sign} \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial T_N^2} \right) \cdot \sqrt{2 \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial T_N^2} \right|} \right)$$

и найти оценочную матрицу

$$q = \Phi P^{-1} \Phi^T,$$

диагональные элементы которой позволяют при  $n=2,0$  найти ошибку функции

$$m_m = \mu_m \sqrt{\frac{1}{P_q}};$$

$$\mu_m = \sqrt{\frac{V^T P V}{2(N-t)^2}};$$

$$V = L(\hat{X}).$$

#### 4. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ И УРАВНЕННЫХ ВЕЛИЧИН В МЕТОДЕ L<sub>p</sub>-ОЦЕНОК

Метод L<sub>p</sub>-оценок, теоретическое обоснование которого дано в [38], стал широко внедряться в производство после выхода в свет публикации [16]. Разработанными для этого метода оказались и алгоритмы оценки точности: для геодезических засечек [27]; для одного любого пункта сети [13, 37]; для всех пунктов геодезической сети в линеаризованном варианте [3, 26] и в численном нелинейном алгоритме [1, 18]. Причем последние три метода, предназначенные для обработки геодезических сетей, дают близкие результаты оценки точности и могут успешно применяться для оценки точности любых засечек.

Целью главы является сравнение числовых результатов оценки точности, полученных для линейно-угловых засечек на плоскости пятью различными методами. На рис. 4.1. показана засечка с исходными данными, приведенными в табл. 4.1.

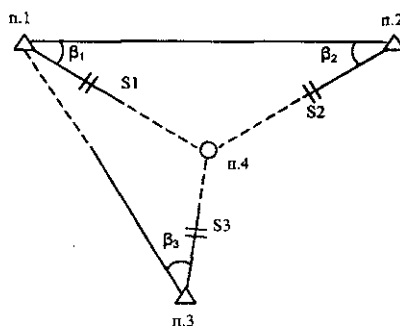


Рис. 4.1. Линейно-угловая геодезическая засечка

Таблица 4.1

Исходные данные для геодезической засечки

№ пп	Углы ( $\sigma_\beta = 2,5''$ )	Стороны ( $\sigma_s = 0,05$ м)	X, м	Y, м
1	38° 59' 53"	18257,32	84396,80	77632,31
2	51° 16' 39"	14725,80	89688,00	100428,20
3	43° 20' 58"	10143,26	66275,02	93752,04
4	-	-	76413,99	94052,08

В таблице 4.2 приведены элементы обратной матрицы весов для следующих пяти методов:

А. Оценка точности по изолиниям целевой функции с применением методики, опубликованной в [27].

В. Метод З. Адамчевского – Г.В. Макарова [13, 37].

С. Аналитический линеаризованный вариант оценки точности с применением следующих формул [26]:

$$Q = FP_n^{-1}F^T; \quad (4.1)$$

$$F = (A^T CA)^{-1} A^T C; \quad (4.2)$$

$$C = P_n \cdot \text{diag} |V|^{n-2}; \quad (4.3)$$

$$P_n = \left( \frac{c}{\sigma_i} \right)^n \cdot E; \quad (4.4)$$

где  $c = \left( \frac{n}{n-2} \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}}$ , здесь используется гамма-функция.

По данным [3] вместо (4.1) – (4.2) можно применить адекватные формулы

$$Q = (A^T CA)^{-1} (A^T DA) (A^T CA)^{-1}, \quad (4.5)$$

где  $D = P_n \cdot \text{diag} \cdot |V|^{2(n-2)}; \quad (4.6)$

Выражения (4.5) – (4.6) можно получить, подставляя (4.2) в (4.1).

Д. Численный метод, основанный на линеаризованном варианте с применением (4.1) и (3.43).

Е. Нелинейный численный алгоритм с применением метода Ньютона и целевой функции (2.1) с использованием (4.1) и (3.45).

В приложениях 1 – 8 приведены элементы обратной матрицы весов при обработке геодезических сетей, заимствованных из [28, 29].

А1 – метод Г.В. Макарова [13]:

1. Вычисление приращения целевой функции  $\Delta\Phi$  с изменением уравненных координат оцениваемого пункта на величину  $\delta x$ .

2. Вычисление фрагмента обратной матрицы по формулам:

$$N_{11} = \frac{\Delta\Phi_1}{\delta x_1}; \quad N_{22} = \frac{\Delta\Phi_2}{\delta x_2}; \quad N_{12} = \frac{\Delta\Phi_{12} - \Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2}{2\delta x_1 \delta x_2}; \quad Q = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$$

Приращения  $\delta x$  вычисляются по формулам (3.22). Этим методом можно получить  $Q$  для любого определяемого пункта геодезической сети.

$B1$  – используются формулы (4.1) – (4.4).

$C1$  – численный метод, основанный на линеаризованном варианте с применением (4.1) и (3.43).

Таблица 4.2

Величины  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{12}$  для оценки точности определяемого пункта

п	Q	A	B	C	D	E	$\mu$
	$Q_{11}$	7,09E-02	4,43E-02	1,29E-02	9,96E-03		
1,1	$Q_{22}$	4,08E-02	4,94E-02	8,97E-03	7,03E-03		4,592
	$Q_{12}$	-1,96E-02	4,14E-04	2,60E-04	1,91E-04		
	$Q_{11}$	3,50E-02	1,80E-02	9,91E-03	9,58E-03		
1,2	$Q_{22}$	4,14E-02	2,30E-03	9,54E-03	9,38E-03		4,387
	$Q_{12}$	4,99E-03	9,24E-04	-3,51E-06	-2,01E-05		
	$Q_{11}$	1,54E-02	1,07E-02	7,60E-03	7,56E-03		
1,3	$Q_{22}$	1,74E-02	1,37E-02	8,23E-03	8,21E-03		4,174
	$Q_{12}$	-2,24E-04	6,02E-04	-2,91E-05	-3,13E-05		
	$Q_{11}$	1,08E-02	6,91E-03	5,82E-03	5,79E-03		
1,4	$Q_{22}$	1,34E-02	9,22E-03	6,80E-03	6,79E-03		3,980
	$Q_{12}$	-7,28E-04	3,07E-04	-2,18E-05	-2,82E-05		
	$Q_{11}$	7,46E-03	4,78E-03	4,46E-03	4,45E-03	4,46E-03	
1,5	$Q_{22}$	1,03E-02	6,63E-03	5,56E-03	5,55E-03	5,56E-03	3,814
	$Q_{12}$	3,49E-04	2,19E-04	-1,23E-05	-1,17E-05	-1,24E-05	
	$Q_{11}$	5,33E-02	3,45E-03	3,43E-03	3,42E-03	3,43E-03	
1,6	$Q_{22}$	7,82E-02	4,98E-03	4,52E-03	4,52E-03	4,52E-03	3,683
	$Q_{12}$	-4,75E-02	1,26E-04	-6,53E-06	-8,39E-06	-6,51E-06	
	$Q_{11}$	3,59E-03	2,57E-03	2,63E-03	2,63E-03	2,63E-03	
1,7	$Q_{22}$	5,51E-03	3,86E-03	3,67E-03	3,67E-03	3,67E-03	3,594
	$Q_{12}$	-3,52E-05	6,68E-05	-4,36E-06	-5,35E-06	-4,35E-06	
	$Q_{11}$	2,45E-03	1,97E-03	2,03E-03	2,03E-03	2,03E-03	
1,8	$Q_{22}$	3,92E-03	3,06E-03	2,99E-03	2,99E-03	2,99E-03	3,554
	$Q_{12}$	-2,51E-05	2,87E-05	-4,96E-06	-6,84E-06	-4,95E-06	
	$Q_{11}$	1,71E-03	1,53E-03	1,57E-03	1,56E-03	1,57E-03	
1,9	$Q_{22}$	2,80E-03	2,47E-03	2,45E-03	2,45E-03	2,45E-03	3,572
	$Q_{12}$	-1,70E-05	4,40E-06	-7,40E-06	-6,77E-06	-7,40E-06	
	$Q_{11}$	1,21E-03	1,21E-03	1,21E-03	1,21E-03	1,21E-03	
2,0	$Q_{22}$	2,02E-03	2,02E-03	2,02E-03	2,02E-03	2,02E-03	3,656
	$Q_{12}$	-1,08E-05	-1,10E-05	-1,10E-05	-1,10E-05	-1,10E-05	



Окончание табл. 4.2

n	Q	A	B	C	D	E	$\mu$
	Q <sub>11</sub>	8,62E-04	9,74E-04	9,46E-04	9,46E-04	9,46E-04	
2,1	Q <sub>22</sub>	1,46E-03	1,67E-03	1,69E-03	1,68E-03	1,69E-03	3,814
	Q <sub>12</sub>	-6,22E-06	-2,04E-05	-1,52E-05	-1,50E-05	-1,53E-05	
	Q <sub>11</sub>	6,20E-04	7,90E-04	7,43E-04	7,43E-04	7,43E-04	
2,2	Q <sub>22</sub>	1,06E-03	1,40E-03	1,43E-03	1,43E-03	1,43E-03	4,052
	Q <sub>12</sub>	-2,94E-06	-2,59E-05	-2,00E-05	-2,01E-05	-2,00E-05	
	Q <sub>11</sub>	4,49E-04	6,46E-04	5,91E-04	5,90E-04	5,91E-04	
2,3	Q <sub>22</sub>	7,69E-04	1,17E-03	1,23E-03	1,23E-03	1,23E-03	4,378
	Q <sub>12</sub>	-6,94E-07	-2,87E-05	-2,50E-05	-2,50E-05	-2,50E-05	
	Q <sub>11</sub>	3,27E-04	5,33E-04	4,77E-04	4,75E-04	4,77E-04	
2,4	Q <sub>22</sub>	5,61E-04	9,91E-04	1,09E-03	1,08E-03	1,09E-03	4,796
	Q <sub>12</sub>	6,87E-07	2,98E-05	-3,04E-05	-3,27E-05	-3,04E-05	
	Q <sub>11</sub>	2,39E-04	4,43E-04	3,95E-04	3,95E-04	3,95E-04	
2,5	Q <sub>22</sub>	4,10E-04	8,43E-04	9,89E-04	9,82E-04	9,89E-04	5,312
	Q <sub>12</sub>	1,59E-06	-2,96E-05	-3,60E-05	-3,31E-05	-3,60E-05	
	Q <sub>11</sub>	1,76E-04	3,71E-04	3,36E-04	3,37E-04		
2,6	Q <sub>22</sub>	3,02E-04	7,18E-04	9,30E-04	9,12E-04		5,934
	Q <sub>12</sub>	2,08E-06	-2,87E-05	-4,21E-05	-7,22E-05		
	Q <sub>11</sub>	1,31E-04	3,12E-04	2,97E-04	3,02E-04		
2,7	Q <sub>22</sub>	2,22E-04	6,17E-04	9,06E-04	9,29E-04		6,669
	Q <sub>12</sub>	2,29E-06	-2,74E-05	-4,87E-05	-5,63E-05		
	Q <sub>11</sub>	9,69E-05	2,63E-04	2,75E-04	2,71E-04		
2,8	Q <sub>22</sub>	1,64E-04	5,29E-04	9,16E-04	9,20E-04		7,528
	Q <sub>12</sub>	2,30E-06	-2,58E-05	-5,21E-05	-1,35E-05		
	Q <sub>11</sub>	7,24E-05	2,24E-04	2,66E-04	1,90E-04		
2,9	Q <sub>22</sub>	1,22E-02	4,55E-04	9,56E-04	7,41E-04		8,523
	Q <sub>12</sub>	2,19E-06	-2,41E-05	-6,38E-05	-2,20E-05		
	Q <sub>11</sub>	5,37E-05	1,91E-04	3,70E-04	1,86E-04		
3,0	Q <sub>22</sub>	9,00E-05	3,94E-04	1,03E-03	2,53E-03		9,670
	Q <sub>12</sub>	2,01E-06	-2,93E-05	-7,24E-05	-6,58E-04		

В методе A1, B1 и C1 используется линейный алгоритм Lp-оценки (1.9) – (1.14), а в методах A2, B2 и C2 – нелинейный метод Ньютона, который работает только при  $1,5 \leq n \leq 2,5$ . По результатам вычислений, приведенных в приложениях 1 – 8, можно сделать следующие выводы:

1. Фрагменты обратных матриц в A1 и A2 не всегда согласуются с результатами, полученными другими методами.
2. Методы B1 и C1 дают близкие между собой результаты на промежутке  $1,5 \leq n \leq 2,5$ .
3. Все методы приводят к одинаковым результатам при  $n = 2,0$ .
4. Для геодезического производства рекомендуем использовать самый простой и надежный метод B1.
5. Метод C2 рекомендуется применять при многостепенной и многокритериальной оптимизации.

## 5. ПОИСК ГРУБЫХ ОШИБОК В ИЗМЕРЕНИЯХ

### 5.1. Формула Ю.В. Линника и ее применение при поиске грубых ошибок измерений

В этом способе поиска грубых ошибок измерений предлагается вычислять допуск на величину поправки из уравнивания параметрическим способом. Для этого можно воспользоваться строгой формулой корреляционной матрицы поправок [12]

$$K_{\vartheta} = \sigma_0^2 (P^{-1} - AN^{-1}A^T), \quad (5.1)$$

где  $\sigma_0$  – средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $P$  – матрица весов измерений;  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $N$  – матрица коэффициентов нормальных уравнений.

Диагональные элементы матрицы  $K_{\vartheta}$  – суть дисперсии  $\sigma_{\vartheta_i}^2$  поправок. Поэтому допуск для  $i$ -той поправки определяется формулой из работ [10, 12]

$$d_{\vartheta_i} = t\sigma_{\vartheta_i}, \quad (5.2)$$

где параметр  $t$  обычно принимают равным 2,5.

Применим расширенную псевдообратную матрицу

$$F = (A^T P A)^{-1} A^T P = N^{-1} A^T P \quad (5.3)$$

к выражению (5.1), вначале получая идемпотентную матрицу

$$G = AF, \quad (5.4)$$

которая еще называется матрицей проектирования.

Подставляя (5.4) в (5.1), получим

$$K_{\vartheta} = \sigma_0^2 (E - G)P^{-1}. \quad (5.5)$$

Так как справедлива формула по решению системы параметрических уравнений поправок

$$V = A\delta x + L \quad (5.6)$$

с применением матрицы  $F$

$$\delta x = -FL, \quad (5.7)$$

то подставив  $\delta x$  в (5.6), получим [5]

$$V = -AFL + L = (E - G)L, \quad (5.8)$$

где разность матриц, используемая еще в (5.5), называется матрицей, преобразующей вектор свободных членов  $L$  в вектор поправок  $V$  в измеренные величины.

Отсюда виден физический смысл формулы (5.5) и, следовательно, матричного выражения (5.1).

Наличие поправок в измерения, превышающих допуск (5.2), указывает на существование грубых ошибок измерений.

Обозначим через  $d_i$  диагональные элементы матрицы  $(E-G)P^{-1}$ , тогда формула (5.2) будет такой

$$d_{\vartheta_i} = t\sigma_0\sqrt{d_i} \quad (5.9)$$

С применением этой формулы вычислим вспомогательную величину

$$m = \frac{|\vartheta_i|_{\max}}{t\sqrt{d_i}} \quad (5.10)$$

где  $(\vartheta_i)_{\max}$  – большая поправка из уравнивания.

Далее при выводе на экран ЭВМ дается сообщение «Вас устраивает точность  $m$  для измерений, вес которых принят равным единице?»; если «Да», то счет прекращается, если «Нет», то бракуется измерение с номером  $i$ .

Применим формулу (5.2) для числовых примеров. Для этого вычислим допуски на поправки в углы для геодезического четырехугольника [17].

#### 5.1.1. Уравнивание по углам

В табл. 5.1. приведены результаты уравнивания геодезического четырехугольника.

Таблица 5.1

Допуски и поправки в углы для геодезического четырехугольника при  $\sigma_B = 5''$

Номера углов	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_{\vartheta_i}''$	8,5	9,5	8,7	7,9	8,7	9,8	9,2	8,2
$\vartheta''$	-8,66	12,23	13,79	0,22	-1,33	21,89	0,44	18,99

Из таблицы 5.1. видно, что необходимую поправку получил угол 6, поэтому в табл. 5.2. даны расчеты при удаленном угле 6.

Таблица 5.2

Допуски и поправки в углы для геодезического четырехугольника с удаленным углом 6 при  $\sigma_B = 5''$

Номера углов	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_{\vartheta_i}''$	7,3	9,4	8,7	7,2	8,0	-	9,1	7,3
$\vartheta''$	0,90	8,37	-12,14	-7,14	-8,30	-	3,55	10,18

Из таблицы 5.2 видно, что необходимо еще удалить угол 3. На самом деле коррелятным способом обнаружено, что ошибочно направление АС. Поэтому в табл. 5.3 мы удалим углы 1 и 8.

Таблица 5.3

Допуски и поправки в углы для геодезического четырехугольника с удаленными углами 1 и 8 при  $\sigma_0 = 5''$

Номера углов	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_{\theta}''$	–	7,4	6,3	7,6	8,6	6,6	6,5	–
$\vartheta''$	–	6,65	1,21	5,66	–3,63	3,76	–5,90	–

### 5.1.2. Уравнивание по направлениям

В таблице 5.4 приведены результаты уравнивания геодезического четырехугольника [17] по направлениям.

Таблица 5.4

Допуски и поправки в направления для геодезического четырехугольника при  $\sigma_n = 5''$

Номера углов	A-B	A-C	A-D	B-C	B-D	B-A	C-D	C-A	C-B	D-A	D-B	D-C
$d_{\theta}''$	6,5	7,3	6,4	6,7	8,6	7,1	6,7	7,3	6,4	6,9	8,9	7,1
$\vartheta''$	0,9	–11,1	10,2	3,5	–9,4	6,0	–2,7	1,6	1,1	–4,2	–6,0	10,2

По данным табл. 5.4 видно, что наибольшую поправку получило направление А-С. Таким образом, при уравнивании по направлениям грубая ошибка была сразу обнаружена. В таблице 5.5 приведены результаты уравнивания геодезического четырехугольника без направления А-С.

Таблица 5.5

Допуски и поправки в направления для геодезического четырехугольника без ошибочного направления А-С при  $\sigma_n = 5''$

Номера углов	A-B	A-C	A-D	B-C	B-D	B-A	C-D	C-A	C-B	D-A	D-B	D-C
$d_{\theta}''$	5,4	–	5,4	5,4	8,0	7,1	6,6	7,4	6,0	6,8	8,3	5,6
$\vartheta''$	–4,7	–	4,7	–2,5	–4,8	7,2	–0,6	–3,6	4,2	–2,4	–1,0	3,4

Теперь применим формулу (5.10) (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Применение формулы (5.10)

Номера таблицы	$\sigma_0''$	$t\sqrt{d_i}$	$(\vartheta)''_{\max}$	$m''$
1	5	1,96	21,9	11,1
2	5	1,46	10,2	7,0
3	5	1,48	6,6	4,6
4	5	1,46	11,1	7,6
5	5	1,42	7,2	5,1

Отсюда следует вывод, что выражение (5.10) может успешно применяться на практике.

## 5.2. Поиск грубых ошибок в измерениях при уравнивании геодезических сетей методом Лр-оценок с использованием параметрического способа

При уравнивании геодезических сетей параметрическим способом наличие грубой ошибки в измерениях фиксируется при соблюдении неравенства [11]

$$\frac{|\vartheta_i|}{d_i} > 1, \quad (5.11)$$

где  $\vartheta_i$  – поправка в измерение при уравнивании;  $d_i = 2,5\sqrt{(K_\sigma)_i}$ ,  $(K_\sigma)_i$  – диагональные элементы корреляционной матрицы поправок, вычисленной по формуле [12]

$$K_\sigma = \sigma_0^2 (P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T). \quad (5.12)$$

Здесь  $\sigma_0$  – средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $P$  – матрица весов измерений;  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.

При этом, как указано в [10], максимум  $|\vartheta_i|/d_i$  указывает на  $i$ -тое измерение, в котором содержится грубая ошибка.

Изложенная методика обнаружения и идентификации грубых ошибок измерений распространяется и на случай Лр-оценок. При этом вместо выражения (5.12) предлагается общая формула:

$$K_\sigma = \sigma_0^n (C^{-1} - A(A^T C A)^{-1} A^T), \quad (5.13)$$

где  $C = P \cdot \text{diag}|V|^{n-2}$ ,  $n$  – показатель степени (при  $n = 1$  имеем метод наименьших модулей, а при  $n = 2$  – метод наименьших квадратов);  $V$  – вектор поправок в измерения после уравнивания.

В таблице 5.7 приведены  $\vartheta_i$ ,  $d_i$  и  $|\vartheta_i|/d_i$  при  $n = 1,2$ , а не  $n = 1,0$ , выбранные из-за неоднозначности в получении уравненных координат при использовании метода наименьших модулей [25].

Таблица 5.7

Номера углов	$n = 1,2$			$n = 2,0$			$n = 3,0$		
	$\vartheta_i$	$d_i$	$ \vartheta_i /d_i$	$\vartheta_i$	$d_i$	$ \vartheta_i /d_i$	$\vartheta_i$	$d_i$	$ \vartheta_i /d_i$
1	-1,75	3,55	0,48	-8,67	8,46	1,02	-12,37	4,90	2,52
2	10,42	15,90	0,66	12,24	9,50	1,29	13,95	4,50	3,10
3	-18,72	20,08	0,93	-13,80	8,69	1,58	-14,90	3,77	3,96
4	0,004	0,025	0,16	0,22	7,93	0,03	3,32	12,60	0,26

Окончание табл. 5.7

5	-0,89	2,58	0,34	-1,33	8,70	0,15	-1,04	26,00	0,04
6	26,60	23,73	1,12	21,89	9,81	2,23	19,62	4,00	4,90
7	-0,09	0,55	0,16	0,44	9,20	0,05	3,51	12,40	0,28
8	14,37	17,55	0,82	19,00	8,25	2,30	17,91	3,74	4,79

По данным табл. 5.7 видно, что при  $n = 1,2$  и при  $n = 3,0$  ошибочен угол 6, а при  $n = 2,0$  – угол 8. В табл. 5.8 приведены вычисления, выполненные после исключения ошибочных измерений.

Таблица 5.8

Номера углов	$n = 1,2$			$n = 2,0$			$n = 3,0$		
	$v_i$	$d_i$	$v_i/d_i$	$v_i$	$d_i$	$v_i/d_i$	$v_i$	$d_i$	$v_i/d_i$
1	0,007	0,041	0,17	-11,00	8,40	1,31	0,13	76,40	0,002
2	8,47	13,68	0,62	1,95	8,37	0,23	9,31	5,06	1,84
3	-17,49	19,11	0,92	-4,81	7,76	0,62	-11,22	4,65	2,41
4	-0,99	1,84	0,54	3,87	7,77	0,50	8,22	4,62	1,78
5	-3,51	6,80	0,52	-3,22	8,66	0,37	-9,82	5,22	1,88
6	–	–	–	11,16	8,62	1,29	–	–	–
7	0,14	0,70	0,20	-11,49	7,60	1,51	3,94	11,07	0,36
8	14,38	17,33	0,83	–	–	–	9,62	4,31	2,23

По данным табл. 5.8 можно сделать выводы:

при  $n = 1,2$  после исключения угла 6 больше ошибок в измерениях нет;

при  $n = 2,0$  кроме ошибочного угла 8 найден ошибочный угол 7;

при  $n = 3,0$  необходимо исключить из уравнивания не только угол 6, но и угол 3.

Дальнейшие расчеты показали:

при  $n = 2,0$  после исключения углов 7 и 8 больше ошибочных измерений не обнаружено;

при  $n = 3,0$  оказались ошибочными углы 3, 6 и 8.

Для рассмотренного выше примера  $\sigma_0 = 5''$ , а так как измерения равноточные, то  $P = E$ . Для экспериментальной апробации формулы (5.13) рассмотрим пример линейно-угловой геодезической сети (см. рис. 4.1).

В таблице 5.9 приведены результаты измерений и координаты исходных пунктов для второго примера при  $\sigma_B = \sigma_0 = 2,5''$  и  $\sigma_S = 0,05$  м. В примере измерения не содержат грубых ошибок.

Таблица 5.9

Обозначения	Измеряемые стороны, м	Обозначения	Измеренные углы и координаты
S1	18257,441	u2	51° 16' 30,0"
S2	14725,972	u3	43° 20' 56,0"
S3	10143,408	u1	38° 59' 44,0"
x2	89688,000	y2	100428,200
x3	66275,020	y3	93752,040
x1	84396,800	y1	77632,310

Для испытания изложенной выше методики поиска грубых ошибок измерений введем ошибку в угол 2, равную 10", т. е.  $u_2 = 51^\circ 16' 20,0''$ . В таблице 5.10 приведены  $v_i$  и  $d_i$  при  $n = 1,5$ ,  $n = 2,0$  и  $n = 3,0$ . По данным табл. 5.10 видно, что отношение  $v_i/d_i$  максимально для  $u_2$  и соответственно равно 1,30, 1,69 и 3,17.

В таблице 5.11 приведены аналогичные результаты вычислений при ошибочной стороне S2 на величину 0,2 м, т. е.  $S_2 = 14725,772$  м. Эта ошибка также успешно найдена.

Таблица 5.10

Обозначения	$n = 1,5$		$n = 2,0$		$n = 3,0$	
	$v_i$	$d_i$	$v_i$	$d_i$	$v_i$	$d_i$
S1	-0,0081 м	0,044 м	-0,046 м	0,062 м	-0,096 м	0,040 м
S2	0,0023 м	0,041 м	0,0095 м	0,084 м	0,018 м	0,16 м
S3	0,0010 м	0,029 м	0,0098 м	0,090 м	0,023 м	0,13 м
u2	10,8"	9,0"	10,2"	6,1"	9,5"	3,0"
u3	-0,3"	3,3"	-1,0"	5,8"	-2,0"	6,6"
u1	-0,9"	4,8"	-0,8"	6,2"	-0,7"	11,6"

Таблица 5.11

Обозначения	$n = 1,5$		$n = 2,0$		$n = 3,0$	
	$v_i$	$d_i$	$v_i$	$d_i$	$v_i$	$d_i$
S1	0,0012 м	0,014 м	0,021 м	0,062 м	0,047 м	0,064 м
S2	0,108 м	0,110 м	0,094 м	0,084 м	0,085 м	0,062 м
S3	0,084 м	0,105 м	0,088 м	0,090 м	0,085 м	0,066 м
u2	0,9"	4,8"	1,2"	6,1"	1,5"	7,8"
u3	0,7"	4,4"	1,2"	5,8"	1,7"	7,1"
u1	-2,0"	5,8"	-2,1"	6,2"	-2,2"	6,6"



### 5.3. О программе уравнивания нивелирных сетей и методике поиска грубых ошибок в измерениях, заложенной в ней

Программа NIVA2, разработанная для ПЭВМ в Полоцком государственном университете, выполняет уравнивание и оценку точности несвободных, свободных и нуль-свободных нивелирных сетей параметрическим способом с поиском грубых ошибок в измерениях.

Последнее осуществляется по методике, основанной на предложении, опубликованном в [11]. Нивелирная сеть уравнивается как свободная (опирающаяся на один исходный пункт) с анализом отношения

$$\frac{v_i}{d_i} > 1, \quad (5.14)$$

где  $V_i$  – поправка в измерение из уравнивания, а

$$d_i = \left( 3.0 - \frac{n}{4} \right) \sqrt{(K_\vartheta)_{ii}}. \quad (5.15)$$

Здесь  $n$  – показатель степени (при  $n = 1,0$  уравнивание выполняется по методу наименьших модулей; при  $n = 2,0$  – по методу наименьших квадратов и т.д.). В подкоренном выражении используются диагональные элементы матрицы

$$K_\vartheta = (E - AF)C^{-1} \quad (5.16)$$

в котором  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $F = (A^T C A)^{-1} A^T C$ , а  $C = P_n \cdot \text{diag} |V|^{n-2}$ . Выражение (5.16) для корреляционной матрицы поправок справедливо в том случае, если диагональные элементы матрицы весов измерений вычисляются по формуле

$$P_{n_i} = \left( \frac{1}{\sigma_i} \right)^n, \quad (5.17)$$

где  $\sigma_i$  – стандарт измеренного превышения в метрах, поскольку  $\vartheta_i$ , входящие в (5.14), также в метрах.

За одно уравнивание исключается из обработки одно ошибочное измерение, для которого  $|\vartheta_i|/d_i$  максимально, и одновременно выполняется неравенство (5.14).

В исходной информации к программе NIVA2 веса нивелирных линий могут задаваться по одной из четырех формул

$$P_i' = \frac{L_0}{L_i} \quad \text{или} \quad P_i' = \frac{k_0}{k_i}; \quad P_i'' = L_i \quad \text{или} \quad P_i'' = k_i.$$

Здесь  $L_0$  – длина линии в км, для которой  $P_i' = 1$ ;  $k_0$  – количество нивелирных станций в линии.

Если нивелирная сеть многоклассная, то  $P'$  для превышений старшего класса умножают, а  $P''$  делят на коэффициент  $\alpha$  [36], определяемый по допускам инструкции.

Например, при совместной обработке сетей нивелирования 3 и 4 классов

$$\alpha = \left( \frac{20\sqrt{L}}{10\sqrt{L}} \right)^2 = 4,$$

где в скобках даны допуски инструкции на величину свободных членов условных уравнений.

Программный переход от заданных  $P''$  к  $P'$  осуществить легко. Для перехода от  $P'$  к  $P''$  предлагаем формулу

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{1000\sqrt{P_i}}, \quad (5.18)$$

где  $\sigma_0$  – стандарт измеренного превышения в мм, для которого  $L_0$  или  $k_0$  назначалось так, чтобы  $P_i = 1$ . Как определить  $\sigma_0$  для одной любой нивелирной линии, сказано в [36, с. 350]. В крайнем случае, можно  $\sigma_0$  назначить по  $\eta$ , указанной в табл. 5.12, с последующим применением выражений  $\sigma_0 = \eta\sqrt{L_0}$  или  $\sigma_0 = \eta\sqrt{k_0}$ . Но эта методика дает весьма приближенный результат для весов измерений.

Таблица 5.12

Дополнительные сведения

Класс	1	2	3	4
$\eta$ для $L_0$	0,8	2,0	5,0	10,0
$\eta$ для $k_0$	0,5	1	2	5

Применим программу NIVA2 для поиска грубых ошибок в измерениях для тестового примера из [7]. В табл. 5.13 указываются  $n$  – показатель степени;  $\sigma_0$  – погрешность линии № 17 в мм и номера линий в порядке выбора наибольшего и недопустимого  $|\phi_i|/d_i$ .

Таблица 5.13

Значения номеров линий

$n$	1,0	1,5	2,0	3,0			
$\sigma_0$	50	50	50	50			
Номера линий	92	92	92	92	...	...	...
	91	91	91	91	60	6	99
			76	76	74	5	45
			77	77	32	51	96
				47	81	97	103
			...	...	...	...	и т.д.

По данным табл. 5.13 видно, что поиск ошибочных превышений зависит от  $n$  и  $\sigma_0$ .

В таблице 5.14 приведены номера ошибочных линий не только при разных  $n$ , но и разных  $\sigma_0$ .

Избранный тестовый пример хорош тем, что при  $n=2,0$  варианты исключаемых превышений зависят от начального номера превышения: 92 или 63, для которых  $v_i/d_i$  в начале счета практически одинаково и недопустимо.

Таблица 5.14

Значения номеров линий

$n$	1,0	1,5	2,0	2,0	3,0
$\sigma_0$	7,0	13	20	20	200
Номера линий	92	92	92	63	92
	91	91	91	64	91
	78	77	76	76	47
	76	76	77	77	74
	47	79	79	79	60
	81	75	75	75	54
	75	81	81	81	34
	61	47	47	47	70
	79	73	73	73	6
	73	61	61	61	72
	51	51	51	51	66
	100	100	100	91	65
	53				
	38				
	44				

Сравнивая данные табл. 5.14 с результатами, опубликованными в [8], можно сделать вывод, что найдены практически одни и те же ошибочные линии. При этом нами в обработку взято превышение для линии № 64  $h_{461-462} = 2,451$  м, указанное в [7]. Отметим, что в публикации [8] принято для линии № 64  $h_{461-462} = 2,541$  м и справедливо утверждается, что оно содержит грубую ошибку.

## 6. УРАВНИВАНИЕ НУЛЬ-СВОБОДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

### 6.1. Сравнение методик уравнивания геодезических сетей без исходных пунктов

Ниже рассматривается уравнивание плановых геодезических сетей, не содержащих исходные пункты.

Возьмем пример уравнивания нуль-свободной сети триангуляции [29, с.160] (рис. 6.1).

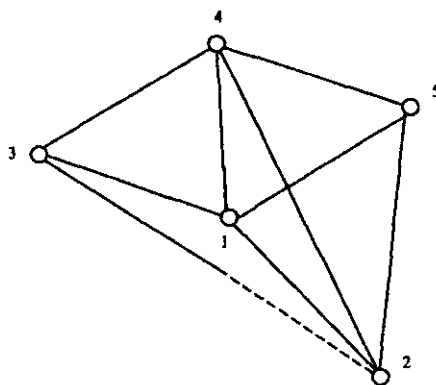


Рис. 6.1. Сеть триангуляции

Результаты уравнивания новым методом зависят от начальных координат всех пунктов сети. Эти координаты приведены в табл. 6.1. Здесь видно, что для расчетов мы принимали следующие степени  $n$ : 2,0 (метод наименьших квадратов), 1,5 и 2,5.

В колонке 2 табл. 6.1 даны координаты, полученные при  $n = 2$  с исходными пунктами 3, 4, 5. Для метода Lp-оценок начальные координаты в колонках 4 и 6 получены после уравнивания нуль-свободной сети методом Ньютона при  $n = 1,5$  и  $n = 2,5$  соответственно.

В таблице 6.2 даны уравненные координаты в полном соответствии с колонками табл. 6.1.

В таблице 6.4 даны уравненные координаты, найденные вариационным методом регуляризации при  $\alpha = 0,000400$  с начальными координатами, указанными в табл. 6.1 (колонка 2). По расхождениям координат

(см. табл. 6.4), которые сравнивались с табл. 6.2 (колонка 2) видно, что новый метод дает положительные результаты.

Для сравнения результатов уравнивания по методу Ньютона выполним математическую обработку методом Лр-оценок, используя формулу

$$\hat{X} = X_0 - (R^2 + \alpha E)^{-1} RB, \quad (6.1)$$

где  $R = A^T CA$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $B = A^T CL$ , а  $C$  находим по выражению (4.3). Величину  $\alpha$  будем искать методом Ю. Г. Карпушина [5] путем минимизации методом релаксации целевой функции  $F = |\delta - \theta|$ , где  $\delta = \sqrt{\Delta x^T \Delta x}$ ; величину  $\Delta x = \delta x_1 - \delta x_2$  получаем по формуле (6.1) для  $B_1 = A^T CL$  и  $B_2 = B_1 + \Delta B$ , где  $\Delta B$  определяется по случайному закону, а  $\theta = \sqrt{\Delta B^T \Delta B}$ . Результаты уравнивания по методу регуляризации будут следующими:

- $n = 1,5$ ; уравненные координаты – табл. 6.2 колонка 4  $\alpha = 0,00152$ .
- $n = 2,5$ ; уравненные координаты – табл. 6.2 колонка 6;  $\alpha = 0,000161$ .

Для оценки точности применим формулу

$$Q = (R^2 + \alpha E)^{-1} R. \quad (6.2)$$

Для метода регуляризации при  $n = 2,0$   $Q_n$  см. в табл. 6.3 (колонка 7).

В методе Лр-оценок для оценки точности формула (6.2) непригодна. Необходимо воспользоваться формулой

$$F = (R^2 + \alpha E)^{-1} RA^T C. \quad (6.3)$$

Следовательно, для Лр-оценок пригодны выражения (6.1) – (6.3). Квадратичные коэффициенты обратной матрицы помещены в колонках 4 и 6 табл. 6.3.

Колонки 1, 2, 3, 5 табл. 6.3 получены для метода Ньютона по формулам (4.1) и (4.3) в полном соответствии с колонками табл. 6.1 и 6.2.

Сравнивая в табл. 6.3 колонки 1 и 2 с колонкой 7 видим, что результаты оценки точности методом Ньютона при  $n = 2,01$  занижены.

Новый метод уравнивания и оценки точности геодезических сетей без исходных пунктов работает при следующих показателях степени:  $1,5 \leq n \leq 1,99$  и  $2,01 \leq n \leq 3,0$ .

При  $n = 2,0$  нуль-свободные сети по новому алгоритму уравнивать нельзя по описанным выше причинам.

Нелинейным методом Ньютона уравниваются нуль-свободные сети без существенных изменений алгоритма. Для этого особым образом выбирается шаг дифференцирования

$$\delta = 10^m; \\ m = \lg \sqrt{X + 10^{-\frac{2}{3}}} - SH. \quad (6.4)$$

Здесь  $SH$  – коэффициент, отыскиваемый методом релаксации под условием минимума функции

$$f = (\hat{X}_c - X_0)^T (\hat{X}_c - X_0), \quad (6.5)$$

где  $\hat{X}_c$  – уравненные нуль-свободные координаты, а  $X_0$  – предварительные координаты. Величина  $SH$  играет в методе Ньютона такую же роль, как параметр регуляризации  $\alpha$  в методе А. Н. Тихонова [33].

Таблица 6.1

Начальные координаты пунктов

n	2,0	2,0	1,5	1,5	2,5	2,5
	1	2	3	4	5	6
x <sub>1</sub>	83182,672	83182,681	83182,671	83182,678	83182,690	83182,694
y <sub>1</sub>	51400,594	51400,602	51400,604	51400,581	51400,601	51400,563
x <sub>2</sub>	75890,376	75890,351	75890,330	75890,313	75890,370	75890,362
y <sub>2</sub>	55930,411	55930,406	55930,404	55930,410	55930,410	55930,414
x <sub>3</sub>	82699,830	82699,830	82699,830	82699,857	82699,830	82699,871
y <sub>3</sub>	40904,620	40904,620	40904,620	40904,612	40904,620	40904,641
x <sub>4</sub>	93556,720	93556,720	93556,720	93556,715	93556,720	93556,657
y <sub>4</sub>	59750,640	59750,640	59750,640	59750,621	59750,640	59750,530
x <sub>5</sub>	82489,340	82489,340	82489,340	82489,325	82489,340	82489,365
y <sub>5</sub>	61340,410	61340,410	61340,410	61340,441	61340,410	61340,404

Таблица 6.2

Уравненные координаты для сети без исходных пунктов

n	2,01	2,01	1,5	1,5	2,5	2,5
	Методы	Ньютона	Ньютона	Ньютона	Лр-оценок	Лр-оценок
	$SH$	1,297	1,453	1,984	–	5,000
		1	2	3	4	5
x <sub>1</sub>	83182,679	83182,684	83182,678	83182,672	83182,694	83182,687
y <sub>1</sub>	51400,568	51400,571	51400,581	51400,578	51400,563	51400,547
x <sub>2</sub>	75890,335	75890,313	75890,313	75890,301	75890,362	75890,347
y <sub>2</sub>	55930,421	55930,421	55930,410	55930,420	55930,414	55930,408
x <sub>3</sub>	82699,876	82699,896	82699,857	82699,872	82699,871	82699,875
y <sub>3</sub>	40904,623	40904,619	40904,612	40904,605	40904,641	40904,666
x <sub>4</sub>	93556,692	93556,681	93556,715	93556,697	93556,657	93556,677
y <sub>4</sub>	59750,597	59750,600	59750,621	59750,613	59750,530	59750,530
x <sub>5</sub>	82489,343	82489,346	82489,325	82489,346	82489,365	82489,363
y <sub>5</sub>	61340,435	61340,449	61340,441	61340,449	61340,404	61340,401

Таблица 6.3

Результаты оценки точности

<i>n</i>	2,01		1,5		2,5		2,0
$\mu$	1,85	3,28	3,69	3,65	3,04	3,03	3,29
$Q, \text{к}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
№ пп	1	2	3	4	5	6	7
1	0,08	0,12	4,79	0,23	6,62	0,32	0,25
2	0,20	0,34	1,80	0,82	4,71	1,53	0,96
3	0,20	0,55	10,70	0,80	13,57	1,57	0,87
4	0,20	0,34	7,82	0,72	8,38	1,11	0,73
5	0,37	1,15	8,89	0,57	2,99	0,79	0,61
6	3,40	4,15	25,30	1,04	2,50	2,42	1,24
7	0,85	1,42	4,15	1,02	24,87	1,88	1,17
8	0,21	0,32	1,77	0,45	34,96	0,62	0,50
9	0,27	0,34	2,52	0,48	49,85	0,70	0,55
10	0,11	0,36	8,75	0,49	0,77	0,67	0,52

Таблица 6.4

Уравненные координаты, полученные вариационным методом регуляризации

<i>n</i>	2,0	Расхождения с методом Ньютона
$x_1$	83182,681	0,003
$y_1$	51400,575	-0,004
$x_2$	75890,316	-0,003
$y_2$	55930,435	-0,014
$x_3$	82699,878	0,018
$y_3$	40904,624	-0,005
$x_4$	93556,690	-0,009
$y_4$	59750,591	0,009
$x_5$	82489,356	-0,010
$y_5$	61340,453	-0,004

### 6.2. Обобщение вариационного метода регуляризации на основе Lp-оценок при математической обработке плановых геодезических сетей

При уравнивании и оценке точности нуль-свободных геодезических сетей вариационным методом А.Н. Тихонова используют формулы [33]

$$\hat{X} = X_0 + \delta X, \quad (6.6)$$

$$\delta X = (R^2 + \alpha E)^{-1} RB, \quad (6.7)$$

где  $X_0$  – вектор начальных координат всех пунктов, полученный по правилам, опубликованным в [20];  $\alpha$  – параметр регуляризации;

$$R = A^T P A; \quad B = A^T P L, \quad (6.8)$$

в которых  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $L$  – вектор свободных членов параметрических уравнений. При оценке точности используется формула

$$Q = (R^2 + \alpha E)^{-1} R. \quad (6.9)$$

Для случая Lp-оценок вариационный метод регуляризации реализуется следующим образом:

$$\hat{X} = X_0 + FL \quad (6.10)$$

$$F = (R^2 + \alpha E)^{-1} RA^T C \quad (6.11)$$

$$R = A^T CA, \quad (6.12)$$

$$C = P_n \cdot \text{diag}|V|^{n-2}, \quad (6.13)$$

где диагональная матрица весов

$$P_{n,i} = \left( \frac{1}{\sigma_i} \right)^n. \quad (6.14)$$

Здесь  $n$  – показатель степени: если  $n = 2$ , то уравнивание выполняется по МНК, при  $n = 1$  – МНМ и т.д.

Вместо формулы (6.9) для обратной весовой матрицы имеем

$$Q = FP_n^{-1}F^T. \quad (6.15)$$

Зная матрицу  $Q$  можно выполнить оценку точности по известным формулам

$$m_f = \mu \sqrt{\frac{1}{P_f}};$$

$$\frac{1}{P_f} = fQ^T,$$

где  $f$  – вектор коэффициентов весовой функции, а

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P_n V}{r}}. \quad (6.16)$$

Важным вопросом при уравнивании нуль-свободной сети является выбор вектора  $X_0$ . Методика его вычисления для метода Lp-оценок остается такой же, как и в работе [20]. Разница методик заключается лишь в том, что вектор предварительных координат получают методом Lp-оценок, уравнивая по этому алгоритму свободную (опирающуюся на два любых исходных пункта) геодезическую сеть. Как отмечалось в [20], в нивелирных сетях и сетях триангуляции для полученного начального вектора  $X_0$  величина  $\delta X$  из выражения (6.7) будет равна нулю.



Цель исследований – показать, в каких случаях выполняется или не выполняется равенство  $\hat{X} = X_0$ .

Если геодезическая сеть опирается на два исходных пункта (т.е. является свободной), то ниже будет показано, что координаты свободной сети окажутся и нуль-свободными, соответствующими алгоритму А.Н. Тихонова.

*Пример 1.* Исходные данные см. в [28, с. 93], а результаты счета – в табл. 6.5.

*Пример 2.* Исходные данные см. в [28, с. 217]. Результаты вычислений представлены в табл. 6.6. В примерах 1, 2 геодезическая сеть опирается на два исходных пункта.

Таблица 6.5

Уравненные координаты для нуль-свободной сети триангуляции с оценкой точности

	$n = 1,5$	$n = 2,01$	$n = 2,4$
$X_3$	74 014,197	74 014,186	74 014,185
$Y_3$	26 533,240	26 533,239	26 533,237
$X_4$	66 008,136	66 008,132	66 008,135
$Y_4$	25 624,116	25 624,114	25 624,114
$X_5$	68 403,834	68 403,830	68 403,830
$Y_5$	18 238,859	18 238,857	18 238,856
$X_1$	63 750,541	63 750,540	63 750,538
$Y_1$	12 889,102	12 889,100	12 889,099
$X_2$	75 710,979	75 710,981	75 710,983
$Y_2$	15 387,269	15 387,270	15 387,269
$\mu$	1,03	0,683	0,869
$M_3$	0,028	0,022	0,024
$M_4$	0,031	0,027	0,027
$M_5$	0,024	0,026	0,021
$M_1$	0,035	0,030	0,031
$M_2$	0,035	0,030	0,030
$\alpha$	0,088	$3,2 \cdot 10^{-9}$	$9,85 \cdot 10^{-4}$

Таблица 6.6

Уравненные координаты для нуль-свободной линейно-угловой сети с оценкой точности

	$n = 1,5$	$n = 2,1$	$n = 2,5$
$X_3$	32 993,900	32 993,901	32 993,901
$Y_3$	13 000,399	13 000,401	13 000,401
$X_5$	34 800,604	34 800,603	34 800,605
$Y_5$	14 200,698	14 200,700	14 200,698
$X_4$	30 895,195	30 895,165	30 895,198
$Y_4$	14 570,301	14 570,301	14 570,303
$X_1$	31 250,246	31 250,247	31 250,244
$Y_1$	11 500,410	11 500,410	11 500,411
$X_2$	33 256,573	33 256,575	33 256,573
$Y_2$	10 900,840	10 900,839	10 900,837

Окончание табл. 6.6

$\mu$	1,20	1,30	1,83
$M_3$	0,008	0,004	0,023
$M_5$	0,018	0,006	0,025
$M_4$	0,017	0,006	0,040
$M_1$	0,014	0,006	0,026
$M_2$	0,012	0,006	0,010
$\alpha$	10,294	1,147	$1,2 \cdot 10^{-7}$

Если в плановой геодезической сети исходных пунктов три и более, то необходимо вычислять начальные координаты всех пунктов (исходных и определяемых) по правилам, опубликованным в [20]. В таблицах 6.7 – 6.9 рассмотрен пример триангуляции, содержащей три исходных и два определяемых пункта с результатами измерений [29, с. 160].

Таблица 6.7

Получение начальных координат при  $n = 1,6$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
$X_1$	83 182,730	83 182,658	83 182,639	83 182,676
$Y_1$	51 400,505	51 400,623	51 400,567	51 400,565
$X_2$	75 890,293	75 890,278	75 890,291	75 890,287
$Y_2$	55 930,315	55 930,502	55 930,409	55 930,409
$X_3$	82 700,009	82 699,830	82 699,830	82 699,890
$Y_3$	40 904,483	40 904,620	40 904,620	40 904,574
$X_4$	93 556,720	93 556,720	93 556,631	93 556,690
$Y_4$	59 750,640	59 750,640	59 750,555	59 750,612
$X_5$	82 489,340	82 489,371	82 489,340	82 489,350
$Y_5$	61 340,410	61 340,522	61 340,410	61 340,447

Таблица 6.8

Получение начальных координат при  $n = 2,1$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
$X_1$	83 182,758	83 182,655	83 182,650	83 182,688
$Y_1$	51 400,511	51 400,610	51 400,549	51 400,557
$X_2$	75 890,334	75 890,269	75 890,307	75 890,303
$Y_2$	55 930,319	55 930,502	55 930,413	55 930,411
$X_3$	82 700,046	82 699,830	82 699,830	82 699,902
$Y_3$	40 904,530	40 904,620	40 904,620	40 904,590
$X_4$	93 556,720	93 556,720	93 556,653	93 556,698
$Y_4$	59 750,640	59 750,640	59 750,531	59 750,604
$X_5$	82 489,340	82 489,342	82 489,340	82 489,341
$Y_5$	61 340,410	61 340,530	61 340,410	61 340,450

Таблица 6.9

Получение начальных координат при  $n = 2,5$ 

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4,5	3,4	3,5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	83 182,763	83 182,654	83 182,656	83 182,691
Y <sub>1</sub>	51 400,520	51 400,606	51 400,546	51 400,557
X <sub>2</sub>	75 890,350	75 890,270	75 890,315	75 890,312
Y <sub>2</sub>	55 930,329	55 930,499	55 930,417	55 930,415
X <sub>3</sub>	82 700,046	82 699,830	82 699,830	82 699,902
Y <sub>3</sub>	40 904,554	40 904,620	40 904,620	40 904,598
X <sub>4</sub>	93 556,720	93 556,720	93 556,666	93 556,702
Y <sub>4</sub>	59 750,640	59 750,640	59 750,529	59 750,603
X <sub>5</sub>	82 489,340	82 489,330	82 489,340	82 489,337
Y <sub>5</sub>	61 340,410	61 340,526	61 340,410	61 340,449

В таблице 6.10 приведены уравненные координаты нуль-свободной сети триангуляции [29, с. 160] с начальными координатами, приведенными в табл. 6.7 – 6.9. В таблице 6.10 также указаны параметры регуляризации и оценка точности для рассмотренного примера. По данным табл. 6.10 видно, что координаты для нуль-свободной сети триангуляции практически не отличаются от координат в колонках 5 таблиц 6.7 – 6.9.

Таблица 6.10

Уравненные координаты для нуль-свободной сети триангуляции с оценкой точности

	$n = 1,6$	$n = 2,1$	$n = 2,5$
X <sub>1</sub>	83 182,675	83 182,688	83 182,694
Y <sub>1</sub>	51 400,562	51 400,556	51 400,557
X <sub>2</sub>	75 890,289	75 890,303	75 890,311
Y <sub>2</sub>	55 930,408	55 930,411	55 930,415
X <sub>3</sub>	82 699,892	82 699,902	82 699,908
Y <sub>3</sub>	40 904,576	40 904,589	40 904,598
X <sub>4</sub>	93 556,692	93 556,698	93 556,701
Y <sub>4</sub>	59 750,609	59 750,604	59 750,603
	$n = 1,6$	$n = 2,1$	$n = 2,5$
X <sub>5</sub>	82 489,347	82 489,340	82 489,337
Y <sub>5</sub>	61 340,449	61 340,450	61 340,451
$\mu$	3,59	3,23	3,02
M <sub>1</sub>	0,124	0,115	0,120
M <sub>2</sub>	0,146	0,132	0,140
M <sub>3</sub>	0,152	0,144	0,148
M <sub>4</sub>	0,145	0,134	0,140
M <sub>5</sub>	0,118	0,105	0,112
$\alpha$	0,015	$5,0 \cdot 10^{-9}$	$1,12 \cdot 10^{-6}$

*Пример 3.* Рассмотрим еще один пример уравнивания геодезической сети с тремя исходными и двумя определяемыми пунктами. Сеть триангуляции представляет собой «звезду» (рис. 6.2).

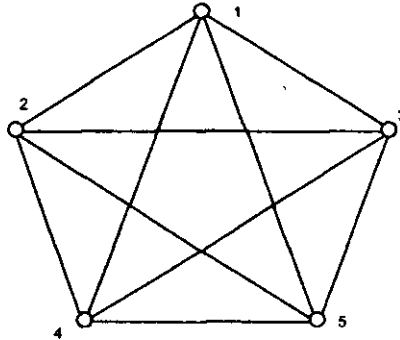


Рис. 6.2. Геодезическая сеть

Результаты измерений приведены в табл. 6.11. В таблицах 6.13 – 6.15 отображено получение начальных координат всех пунктов при разных степенях  $n = 1,5$ ;  $n = 2,1$ ;  $n = 2,5$ .

Таблица 6.11

Результаты измерений (триангуляция)

№ пункта		Направление
из	в	
1	3	00 00 00
1	5	7 47 40
1	4	36 37 00
1	2	53 59 20
2	1	00 00 00
2	3	58 38 20
2	5	99 51 00
2	4	142 13 30
3	5	00 00 00
3	4	48 56 10
3	2	96 24 40
3	1	163 47 00
4	2	00 00 00
4	1	20 24 00
4	3	48 56 20
4	5	96 24 50
5	4	00 00 00
5	2	41 12 30
5	1	75 09 50
5	3	83 35 00

Таблица 6.12

Результаты измерений (трилатерация)

№ пункта		Длины сторон, м
из	в	
1	2	1152,43
1	3	1066,21
1	4	2025,32
1	5	2033,00
2	3	1010,05
2	4	987,30
2	5	1489,20
3	4	1331,24
3	5	987,35

Таблица 6.13

Получение начальных координат при  $n = 1,5$ 

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 010,055	3 010,065	3 010,075	3 010,065
Y <sub>1</sub>	1 510,005	1 509,988	1 509,987	1 509,993
X <sub>2</sub>	2 019,950	2 019,951	2 019,955	2 019,952
Y <sub>2</sub>	0 919,992	0 919,882	0 919,973	0 919,982
X <sub>3</sub>	2 029,989	2 030,000	2 030,000	2 029,996
Y <sub>3</sub>	1 930,007	1 930,000	1 930,007	1 930,002
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,994	1 039,998
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,988	1 039,996
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,010	1 050,000	1 050,003
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 050,003	2 050,000	2 050,001

Таблица 6.14

Получение начальных координат при  $n = 2,1$ 

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 010,063	3 010,083	3 010,101	3 010,082
Y <sub>1</sub>	1 510,017	1 509,990	1 509,993	1 510,000
X <sub>2</sub>	2 019,952	2 019,957	2 019,965	2 019,958
Y <sub>2</sub>	0 919,991	0 919,975	0 919,961	0 919,976
X <sub>3</sub>	2 029,980	2 030,000	2 030,000	2 029,993
Y <sub>3</sub>	1 930,009	1 930,000	1 930,000	1 930,003
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,993	1 039,998
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,979	1 039,993
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,015	1 050,000	1 050,005
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 050,007	2 050,000	2 050,002

Таблица 6.15

Получение начальных координат при  $n = 2,5$ 

П-ты	Исходные пункты			Среднее Арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 010,068	3 010,091	3 010,010	3 010,090
Y <sub>1</sub>	1 510,021	1 509,993	1 509,996	1 510,003
X <sub>2</sub>	2 019,954	2 019,960	2 019,969	2 019,961
Y <sub>2</sub>	0 919,990	0 919,973	0 919,658	0 919,974
X <sub>3</sub>	2 029,978	2 030,000	2 030,000	2 029,993
Y <sub>3</sub>	1 930,009	1 930,000	1 930,007	1 930,009
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,993	1 039,998
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,977	1 039,992
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,016	1 050,000	1 050,005
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 050,008	2 050,000	2 050,003

В таблице 6.16 приведены уравненные координаты нуль-свободной сети триангуляции (см. рис. 6.2) с начальными координатами, приведенными в табл. 6.13 – 6.15. В таблице 6.16 также даны параметры регуляризации и оценка точности для этого примера. Как и в примере 3 [5, с. 160], видно, что координаты для нуль-свободной сети триангуляции практически не отличаются от координат в колонках 5 табл. 6.13 – 6.15.

Таблица 6.16

Уравненные координаты для нуль-свободной сети триангуляции с оценкой точности

	$n = 1,5$	$n = 2,1$	$n = 2,5$
X <sub>1</sub>	3 010,065	3 010,082	3 010,094
Y <sub>1</sub>	1 509,993	1 510,000	1 510,005
X <sub>2</sub>	2 019,952	2 019,958	2 019,961
Y <sub>2</sub>	0 919,982	0 919,976	0 919,974
X <sub>3</sub>	2 029,996	2 029,993	2 029,994
Y <sub>3</sub>	1 930,002	1 930,003	1 930,007
X <sub>4</sub>	1 039,998	1 039,998	1 039,993
Y <sub>4</sub>	1 039,996	1 039,993	1 039,994
X <sub>5</sub>	1 050,003	1 050,005	1 050,004
Y <sub>5</sub>	2 050,001	2 050,002	2 050,008
$\mu$	2,26	1,23	0,84
M <sub>1</sub>	3,093	0,130	0,023
M <sub>2</sub>	3,578	0,079	0,023
M <sub>3</sub>	4,316	0,113	0,023
M <sub>4</sub>	1,289	0,108	0,021
M <sub>5</sub>	0,575	0,055	0,021
$\alpha$	$1,30 \cdot 10^{-7}$	$1,16 \cdot 10^{-9}$	0,0603

*Пример 4.* Рассмотрим пример трилатерации. Сеть трилатерации такая же, как и в примере 3 (см. рис. 6.2). Сеть содержит три исходных и два определяемых пункта. Результаты измерений – в табл. 6.12. Начальные координаты получают по тем же правилам, что и в примере 3 при различных степенях  $n$ .

Таблица 6.17

Получение начальных координат при  $n = 1,5$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
I	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 009,989	3 009,961	3 009,964	3 009,971
Y <sub>1</sub>	1 509,980	1 509,957	1 509,938	1 509,958
X <sub>2</sub>	2 019,994	2 019,977	2 019,962	2 019,978
Y <sub>2</sub>	0 920,030	0 920,024	0 920,015	0 920,023
X <sub>3</sub>	2 030,009	2 030,000	2 030,000	2 030,003
Y <sub>3</sub>	1 930,022	1 930,000	1 930,000	1 930,007
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,977	1 039,992
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 040,007	1 040,003
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,008	1 050,000	1 050,003
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 049,984	2 050,000	2 049,995

Таблица 6.18

Получение начальных координат при  $n = 2,1$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
I	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 009,996	3 009,967	3 009,969	3 009,977
Y <sub>1</sub>	1 510,003	1 509,981	1 509,961	1 509,982
X <sub>2</sub>	2 020,003	2 019,986	2 019,969	2 019,986
Y <sub>2</sub>	0 920,036	0 920,031	0 920,022	0 920,030
X <sub>3</sub>	2 030,010	2 030,000	2 030,000	2 030,003
Y <sub>3</sub>	1 930,022	1 930,000	1 930,000	1 930,007
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,976	1 039,992
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 040,008	1 040,003
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,007	1 050,000	1 050,003
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 049,983	2 050,000	2 049,994

Таблица 6.19

Получение начальных координат при  $n = 2,5$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
I	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 009,997	3 009,967	3 009,968	3 009,977
Y <sub>1</sub>	1 510,008	1 509,988	1 509,969	1 509,988
X <sub>2</sub>	2 020,005	2 019,988	2 019,971	2 019,988
Y <sub>2</sub>	0 920,038	0 920,034	0 920,026	0 920,033
X <sub>3</sub>	2 030,011	2 030,000	2 030,000	2 030,004
Y <sub>3</sub>	1 930,021	1 930,000	1 930,000	1 930,007
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,977	1 039,992
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 040,009	1 040,003
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,006	1 050,000	1 050,002
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 049,983	2 050,000	2 049,994

В таблице 6.20 приведены уравненные координаты нуль-свободной сети трилатерации, показанной на рис. 6.2, с начальными координатами, приведенными в табл. 6.17 – 6.19. В таблице 6.20 также указаны параметры регуляризации и оценка точности. Из таблицы 6.20 видно, что в отличие от триангуляции координаты для нуль-свободной сети трилатерации отличаются от координат в колонках 5 таблиц 6.17 – 6.19.

Таблица 6.20

Уравненные координаты для нуль-свободной сети трилатерации

	$n=1,5$	$n=2,1$	$n=2,5$
$X_1$	3 009,983	3 009,989	3 009,986
$Y_1$	1 509,962	1 509,977	1 509,984
$X_2$	2 019,982	2 019,987	2 019,987
$Y_2$	0 920,018	0 920,024	0 920,026
$X_3$	2 030,010	2 030,011	2 030,006
$Y_3$	1 930,019	1 930,013	1 930,011
$X_4$	1 039,984	1 039,984	1 039,981
$Y_4$	1 040,034	1 040,018	1 040,011
	$n=1,5$	$n=2,1$	$n=2,5$
$X_5$	1 049,993	1 049,996	1 049,991
$Y_5$	2 049,990	2 049,988	2 049,982
$\mu$	1,00	1,00	1,00
$M_1$	0,065	0,027	0,015
$M_2$	0,070	0,029	0,016
$M_3$	0,076	0,032	0,018
$M_4$	0,119	0,049	0,028
$M_5$	0,119	0,050	0,028
$\alpha$	0,0351	$1,219 \cdot 10^{-9}$	$6,43 \cdot 10^{-5}$

*Пример 5.* Рассмотрим уравнивание линейно-угловой сети. Результаты измерений приведены в табл. 6.21, а в табл. 6.22 – 6.24 – начальные координаты для последующего уравнивания нуль-свободной сети.

Таблица 6.21

Результаты измерений (линейно-угловая сеть)

№ пункта		Направление	Расстояние, м
из	в		
1	3	00 00 00	1066,21
1	5	7 47 40	2033,05
1	4	36 37 00	2025,35
1	2	53 59 20	1152,45
2	1	00 00 00	
2	3	58 38 20	
2	5	99 51 00	
2	4	142 13 30	



Окончание табл. 6.21

3	5	00 00 00	
3	4	48 56 10	
3	2	96 24 40	-
3	1	163 47 00	
4	2	00 00 00	
4	1	20 24 00	
4	3	48 56 20	-
4	5	96 24 50	
5	4	00 00 00	
5	2	41 12 30	
5	1	75 09 50	-
5	3	83 35 00	

Таблица 6.22

Получение начальных координат при  $n = 1,5$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 010,023	3 010,038	3 010,049	3 010,0367
Y <sub>1</sub>	1 510,015	1 510,002	1 510,005	1 510,0073
X <sub>2</sub>	2 019,951	2 019,956	2 019,962	2 019,9563
Y <sub>2</sub>	0 920,006	0 919,997	0 919,989	0 919,9973
X <sub>3</sub>	2 029,987	2 030,000	2 030,000	2 029,9957
Y <sub>3</sub>	1 930,003	1 930,000	1 930,000	1 930,0010
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,998	1 039,9993
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,986	1 039,9953
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,008	1 050,000	1 050,0027
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 050,008	2 050,000	2 050,0027

Таблица 6.23

Получение начальных координат при  $n = 2,1$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 010.015	3 010.041	3 010.055	3 010.0370
Y <sub>1</sub>	1 510.016	1 510.000	1 510.008	1 510.0080
X <sub>2</sub>	2 019.956	2 019.965	2 019.977	2 019.9660
Y <sub>2</sub>	0 920.006	0 919.994	0 919.985	0 919.9950
X <sub>3</sub>	2 029.980	2 030.000	2 030.000	2 029.9933
Y <sub>3</sub>	1 930.001	1 930.000	1 930.000	1 930.0003
X <sub>4</sub>	1 040.000	1 040.000	1 040.001	1 040.0003
Y <sub>4</sub>	1 040.000	1 040.000	1 039.980	1 039.9933
X <sub>5</sub>	1 050.000	1 050.011	1 050.000	1 050.0037
Y <sub>5</sub>	2 050.000	2 050.011	2 050.000	2 050.0037

Таблица 6.24

Получение начальных координат при  $n = 2,5$ 

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 010,012	3 010,043	3 010,059	3 010,0380
Y <sub>1</sub>	1 510,016	1 510,001	1 510,011	1 510,0093
X <sub>2</sub>	2 019,959	2 019,971	2 019,986	2 019,9720
Y <sub>2</sub>	0 920,006	0 919,994	0 919,984	0 919,9947
X <sub>3</sub>	2 029,977	2 030,000	2 030,000	2 029,9923
Y <sub>3</sub>	1 929,999	1 930,000	1 930,000	1 929,9997
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 040,004	1 040,0013
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,977	1 039,9923
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,011	1 050,000	1 050,0037
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 050,013	2 050,000	2 050,0043

В таблице 6.25 приведены уравненные координаты нуль-свободной линейно-угловой сети с начальными координатами, приведенными в табл. 6.22 – 6.24. В таблице 6.25 также указаны параметры регуляризации и оценки точности для данного примера. По данным табл. 6.25 видно, что координаты для нуль-свободной линейно-угловой сети отличаются от координат в колонках 5 табл. 6.22 – 6.24, т. е. в случае линейно-угловой сети координаты свободной сети не будут также и нуль-свободными, значит требуется уравнение.

Таблица 6.25

Уравненные координаты для нуль-свободной линейно-угловой сети с оценкой точности

	$n = 1,5$	$n = 2,1$	$n = 2,5$
X <sub>1</sub>	3 010,028	3 010,021	3 010,024
Y <sub>1</sub>	1 510,005	1 510,004	1 510,007
X <sub>2</sub>	2 019,956	2 019,958	2 019,969
Y <sub>2</sub>	0 920,000	0 920,000	0 920,001
X <sub>3</sub>	2 029,994	2 029,987	2 029,987
Y <sub>3</sub>	1 930,000	1 929,992	1 929,989
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,007	1 040,015
Y <sub>4</sub>	1 040,002	1 040,001	1 039,997
X <sub>5</sub>	1 050,009	1 050,012	1 050,016
Y <sub>5</sub>	2 050,005	2 049,993	2 049,987
$\mu$	1,837	1,365	1,771
M <sub>1</sub>	0,060	0,427	0,205
M <sub>2</sub>	0,039	0,136	0,146
M <sub>3</sub>	0,035	0,330	0,250
M <sub>4</sub>	0,051	0,328	0,317
M <sub>5</sub>	0,064	0,138	0,071
$\alpha$	1,442	$1,481 \cdot 10^{-9}$	$4,659 \cdot 10^{-10}$

В таблицах 6.26 и 6.27 приводим начальные координаты для сети триангуляции и трилатерации соответственно при  $n = 1,0$ .

Также были проведены аналогичные исследования сети трилатерации и линейно-угловой сети при степени  $n = 1,0$ . В этом случае координаты, полученные по правилам, опубликованным в [20], не совпадают с координатами, полученными по алгоритму А.Н. Тихонова, т.е. начальные координаты подлежат уточнению по методике, использующей формулы (6.10) – (6.16).

Таблица 6.26  
Получение начальных координат для сети триангуляции при  $n = 1,0$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 010,030	3 010,039	3 010,052	3 010,040
Y <sub>1</sub>	1 510,024	1 510,003	1 510,002	1 510,010
X <sub>2</sub>	2 019,955	2 019,956	2 019,959	2 019,957
Y <sub>2</sub>	0 920,010	0 919,999	0 919,988	0 919,999
X <sub>3</sub>	2 029,988	2 030,000	2 030,000	2 029,996
Y <sub>3</sub>	1 930,009	1 930,000	1 930,000	1 930,003
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,992	1 039,997
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,987	1 039,996
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,011	1 050,000	1 050,004
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 050,002	2 050,000	2 050,001

Таблица 6.27  
Получение начальных координат для сети трилатерации при  $n = 1,0$

П-ты	Исходные пункты			Среднее арифметическое
	4, 5	3, 4	3, 5	
1	2	3	4	5
X <sub>1</sub>	3 009,963	3 009,966	3 009,987	3 009,972
Y <sub>1</sub>	1 509,968	1 509,926	1 509,917	1 509,937
X <sub>2</sub>	2 019,983	2 019,977	2 019,976	2 019,979
Y <sub>2</sub>	0 920,022	0 920,002	0 919,981	0 920,002
X <sub>3</sub>	2 029,985	2 030,000	2 030,000	2 029,995
Y <sub>3</sub>	1 930,023	1 930,000	1 930,000	1 930,008
X <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,978	1 039,993
Y <sub>4</sub>	1 040,000	1 040,000	1 039,982	1 039,994
X <sub>5</sub>	1 050,000	1 050,021	1 050,000	1 050,007
Y <sub>5</sub>	2 050,000	2 049,997	2 050,000	2 049,999

Таблица 6.28

Уравненные координаты для нуль-свободных сетей триангуляции и трилатерации с начальными координатами, взятыми из табл. 6.26, 6.27 (колонка 5)

	Триангуляция $n = 1,05$	Трилатерация $n = 1,00$
X <sub>1</sub>	3 010,037	3 009,971
Y <sub>1</sub>	1 510,010	1 509,937
X <sub>2</sub>	2 019,955	2 019,978
Y <sub>2</sub>	0 920,001	0 920,006
X <sub>3</sub>	2 029,996	2 030,000
Y <sub>3</sub>	1 930,002	1 930,005
X <sub>4</sub>	1 039,999	1 039,994
Y <sub>4</sub>	1 039,997	1 040,004
X <sub>5</sub>	1 050,007	1 050,003
Y <sub>5</sub>	2 049,999	2 049,989
$\mu$	2,936	1,00
M <sub>1</sub>	0,199	0,143
M <sub>2</sub>	0,177	0,141
M <sub>3</sub>	0,139	0,173
M <sub>4</sub>	0,186	0,261
M <sub>5</sub>	0,196	0,265
$\alpha$	$4,766 \cdot 10^{-7}$	$8,823 \cdot 10^{-4}$

### 6.3. Уравнивание и оценка точности нуль-свободных сетей нивелирования и сетей GPS на основе Lp-оценок, минуя регуляризацию

Уравнивание и оценку точности нуль-свободной сети нивелирования, не содержащей исходные пункты, можно выполнить, минуя регуляризацию, по новой методике, опубликованной в [20]. Эта методика базируется на теореме: *пусть дана нивелирная сеть, опирающаяся на K исходных пунктов. Тогда однозначные уравненные отметки для нуль-свободной сети, не содержащей ни одного исходного пункта, будут равны среднему арифметическому из K вариантов уравнивания свободной сети, опирающейся на один исходный пункт.* Простота этой методики заключается в том, что для уравнивания любой нуль-свободной сети необходимо выполнить только лишь одно уравнивание свободной сети с одним из исходных пунктов. Уравнивательные вычисления с K-1 другими исходными пунктами можно не выполнять, так как уравненные отметки для всех свободных сетей с разными исходными пунктами могут быть получены методом преобразования отметок, опубликованным в [20], где рассматривается обработка измерений только по методу наименьших квадратов при  $n = 2,0$ .

Ниже обобщена методика уравнивания нуль-свободной нивелирной сети на основе алгоритма Лр-оценок, позволяющего вести обработку измерений при любом  $n$ . Для этого необходимо применить Лр-оценки при уравнивании свободной сети, опирающейся на один конкретный исходный пункт

$$\hat{H} = H_0 + \delta H; \quad (6.17)$$

$$\delta H = -FL; \quad (6.18)$$

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C; \quad (6.19)$$

$$L = h_j - h_{\text{ис}}; \quad (6.20)$$

$$C = P \cdot \text{diag} |L|^{r-2}, \quad (6.21)$$

где  $\hat{H}$  – вектор уравненных отметок;  
 $H_0$  – приближенные отметки, соответствующие весам  $P, C_1, \dots, C_j$ ;  
 $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  
 $h_0$  – значения превышений, вычисленные по  $\hat{H}_j$ ;  
 $j$  – номер приближения.

Приближения выполняются до тех пор, пока  $\delta H$  не станет меньше наперед заданного значения.

Зная  $\hat{H}_j$  для одного исходного пункта, можно методом преобразования отметок найти  $\hat{H}_j$  для другого исходного пункта, так как это изложено в [20]. При этом

$$\hat{H}_{\text{нуль-свобод}} = \frac{\hat{H}_{i-1} + \hat{H}_{i-2} + \dots + \hat{H}_{i-k}}{K}, \quad (6.22)$$

где  $i$  – порядковый номер исходного пункта.

Для оценки точности результатов уравнивания нуль-свободной сети используются формулы

$$m_n = \mu \sqrt{Q_n}; \quad (6.23)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}, \quad (6.24)$$

где  $V = L_j$  – в последнем приближении;  $r$  – число избыточных измерений;

$$Q = P^{-1} f^T; \quad (6.25)$$

$$f_{\text{ис}} = \frac{\hat{H}_j - \hat{H}_{-j-k-1}}{\epsilon_s}, \quad (6.26)$$

где  $\hat{H}_s$  – отметка для нуль-свободной сети, полученная согласно (6.26), когда  $S$ -ые превышения искажены на величину  $\epsilon_s$ .

В таблице 6.29 приведены результаты уравнивания нивелирной сети [36, с. 254].

Таблица 6.29

Результаты уравнивания методом Лр-оценок свободной и нуль-свободной нивелирной сети с начальными отметками, полученными относительно исходных пунктов

№ репера	n = 1,0				n = 1,5				n = 2,0			
	Нсв.	мН, мм	Н м, нуль-св.	мН, мм	Нсв.	мН, мм	Н м, нуль-св.	мН, мм	Нсв.	мН, мм	Н м, нуль-св.	мН, мм
93	189,631	9,7	189,625	10,0	189,631	7,5	189,622	6,7	189,631	7,3	189,622	6,5
2	190,999	13,4	190,993	11,9	190,999	9,7	190,991	7,0	191,000	9,2	190,991	6,4
12	199,951	14,3	197,945	12,4	197,950	9,9	197,942	6,8	197,950	9,6	197,941	6,3
86	186,305	17,0	186,299	14,0	186,306	11,3	186,297	8,8	186,307	10,5	186,298	7,8
22	192,371	17,4	192,365	14,3	192,370	12,6	192,362	8,7	192,370	12,2	192,361	8,3
96	191,890	19,8	191,884	15,7	191,898	11,3	191,890	7,8	191,899	10,8	191,890	7,2
18	183,506	0	183,500	12,1	183,506	0	183,497	8,6	183,506	0	183,497	8,3

Окончание табл. 6.29

№ репера	n = 2,5				n = 3,0			
	Нсв.	мН, мм	Н м, нуль-св.	мН, мм	Нсв.	мН, мм	Н м, нуль-св.	мН, мм
93	189,631	13,8	189,624	7,9	189,631	15,7	189,625	10,4
2	190,999	17,3	190,992	7,7	190,999	20,4	190,993	11,6
12	197,950	18,4	197,944	7,6	197,951	24,7	197,945	12,9
86	186,306	20,4	186,299	9,2	186,305	27,9	186,299	14,0
22	192,370	23,5	192,364	9,8	192,371	29,9	192,365	14,7
96	191,893	22,5	191,886	9,4	191,890	33,2	191,884	16,0
18	183,506	0	183,499	9,8	183,506	0	183,500	12,3

Отметим, что для уравнивания нуль-свободной геодезической сети пригодны только те геодезические сети, при обработке которых возникают условные уравнения. Поясним сказанное на примере. Если мы будем уравнивать нуль-свободный ход нивелирования с одним исходным пунктом, то самого уравнивания не произойдет, так как для хода, опирающегося на один исходный пункт, нет условных уравнений, а значение отметок не зависит от отметки исходного пункта при уравнивании нуль-свободной сети. Результаты уравнивания такой сети не будут зависеть от весов измерений или от смены показателя степени ( $n = 2$  – МНК;  $n = 1$  – МНМ и др.). Для обобщения сделанного вывода, связанного с тем, что нуль-свободные нивелирные сети должны иметь условные уравнения, приведем другой пример (рис. 6.3), для которого отсутствует целесообразность уравнивания сети без исходных пунктов *A, B, C, D, E, F, G, K*.

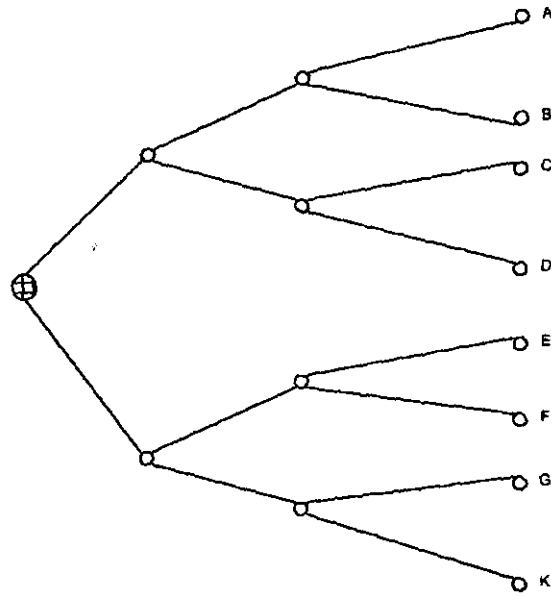


Рис. 6.3. Пример нуль-свободной сети

#### 6.4. Многокритериальное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей

Рассмотрим многокритериальную оптимизацию для нуль-свободных геодезических сетей, т. е. для таких сетей, в которых нет исходных пунктов.

В пункте 6.1 предлагается использовать один и тот же нелинейный алгоритм Ньютона, основанный на применении матрицы Гессе, для уравнивания свободных, несвободных и нуль-свободных геодезических сетей при следующих показателях степени  $1,5 \leq n \leq 1,99$ ;  $2,01 \leq n \leq 3,0$ , за исключением  $n = 2,0$ , означающей обработку по методу наименьших квадратов (для сетей без исходных пунктов). Полученные результаты уравнивания нуль-свободных сетей сравнивались с вариационным методом регуляризации, с методом, основанным на применении псевдообратной матрицы

нормальных уравнений, а также с алгоритмами Lp-оценок, обобщенными на случай регуляризованного решения.

В статье [30] и пп. 3.1.3 предлагается уравнивать и выполнять оценку точности плановых геодезических сетей методом многостепенной оптимизации. Ниже приводится обобщенная многокритериальная оптимизация на случай уравнивания нуль-свободных геодезических сетей. Это значительно расширило рамки выбора показателя степени  $n$  и одновременно позволило уравнивать нуль-свободные сети.

Методика такого уравнивания заключается в следующем. Допустим, что плановая геодезическая сеть имеет  $K$  исходных пунктов. Для получения начальных координат, используемых при уравнивании нуль-свободной сети, необходимо взять среднее арифметическое из координат, полученных при уравнивании свободной сети, изменяя номера исходных пунктов по числу сочетаний из  $K$  элементов по два. Предположим, число таких сочетаний равно  $t$ . Но  $t$  раз уравнивать свободную сеть не надо, достаточно уравнивать построение с двумя исходными пунктами, а последующие координаты получать методом трансформирования. Начальное уравнивание сети должно быть многокритериальным, при этом показатели степени останутся прежними при уравнивании нуль-свободной геодезической сети.

Если начальные координаты всех пунктов получены по вышеизложенному правилу, то, принимая их за основу, получим однозначное решение при уравнивании нуль-свободной геодезической сети по алгоритму, рассмотренному в пункте 6.1.

Проанализируем пример уравнивания сети триангуляции [29, с. 160].

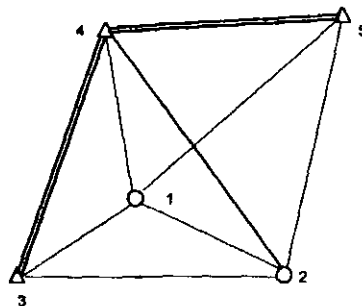


Рис. 6.4. Сеть триангуляции



Предварительные координаты определяемых пунктов и координаты исходных пунктов представлены в табл. 6.30.

Таблица 6.30

Предварительные координаты

№ пп	X	Y
1	83 182,755	51 400,510
2	75 890,329	55 930,318
3	82 700,042	40 904,524
4	93 556,720	59 750,640
5	82 489,340	61 340,410

В таблице 6.31 представлены результаты многокритериального уравнения сети триангуляции с исходными пунктами 4 и 5. Поиск показателей степени, входящих в целевую функцию, осуществляется под условием наименьшей ошибки положения пунктов.

Таблица 6.31

Уравненные координаты

Пример из [29, с. 160]				
$\sigma_i''$	1,0			
	$N_1$	$N_2$	$n_1$	$\delta_i''$
	1	4	2,0	0,25
	1	5	1,8	0,54
	1	2	2,2	-0,99
	2	4	2,1	1,14
	2	5	2,1	-2,62
	3	4	1,6	-0,19
	3	1	1,7	-0,05
	4	2	2,0	2,22
	4	1	2,0	-2,42
	4	3	1,9	0,62
	5	1	1,6	0,00
	5	4	2,0	-0,98
$\mu$	1,887			
	X	Y	M	
1	83 182,757	51 400,510	0,1028	
2	75 890,335	55 930,315	0,1099	
3	82 700,047	40 904,519	0,2339	

В таблице 6.32 приведены результаты уравнения свободной геодезической сети. При этом в первой колонке даны координаты из табл. 6.30, во второй и третьей колонках получены координаты методом трансформации с использованием исходных пунктов 3, 4 и 3, 5. В колонке 5 представлены начальные координаты для уравнения нуль-свободной сети, кото-

рые получены как среднее арифметическое из колонок 2, 3, 4. В пятой колонке даны координаты нуль-свободной многокритериальной сети, полученные по методике, изложенной в пункте 6.1.

Таблица 6.32

Результаты уравнивания

№ пп	4, 5	3, 4	3, 5	Начальные координаты	Координаты нуль-свободной сети
	2	3	4		
1	83 182,757 51 400,510	83 182,656 51 400,616	83 182,648 51 400,553	83 182,687 51 400,560	83 182,687 51 400,557
2	75 890,335 55 930,315	75 890,276 55 930,505	75 890,311 55 930,412	75 890,307 55 930,411	75 890,307 55 930,411
3	82 700,047 40 904,519	82 699,830 40 904,620	82 699,830 40 904,620	82 699,902 40 904,586	82 699,903 40 904,584
4	93 556,720 59 750,640	93 556,720 59 750,640	93 556,647 59 750,531	93 556,696 59 750,604	93 556,697 59 750,604
5	82 489,340 61 340,410	82 489,347 61 340,533	82 489,340 61 340,410	82 489,342 61 340,451	82 489,343 61 340,451

В таблице 6.33 приведены поправки в измерения и ошибки положения из уравнивания после обработки нуль-свободной многокритериальной оптимизации.

Таблица 6.33

Уравненные поправки в измерениях

$N_1$	$N_2$	$n_1$	$\delta_1''$
1	4	2,1	0,23
1	5	1,8	0,50
1	2	2,2	-1,04
2	4	2,1	1,18
2	5	2,1	-2,65
3	4	1,6	-0,18
3	1	1,7	-0,06
4	2	2,1	2,21
4	1	2,1	-2,38
4	3	1,9	0,60
5	1	1,6	0,04
5	4	2,1	-0,96
$M_1$			0,5641
$M_2$			0,2748
$M_3$			1,2155
$M_4$			0,9519
$M_5$			0,2694

Результаты оценки точности нуль-свободной сети справедливо оказались завышенными по сравнению с данными табл. 6.31. Если выполнить оценку точности свободной триангуляции с исходными пунктами 4 и 5, то при  $n = 2,0$  получим следующую оценку точности положения пунктов:

$$M_1 = 0,103 \text{ м}; \quad M_2 = 0,110 \text{ м}; \quad M_3 = 0,234 \text{ м}.$$

Поскольку степени  $n_i$  отыскивались под условием минимума ошибки положения, то указанные выше  $M_i$  оказались большими по сравнению с данными табл. 6.31.

Выполним однократное уравнивание той же нуль-свободной геодезической сети при  $n = 2,1$  (табл. 6.34). Была получена следующая оценка точности:

$$M_1 = 0,378 \text{ м}; \quad M_2 = 0,471 \text{ м}; \quad M_3 = 0,688 \text{ м}; \quad M_4 = 0,360 \text{ м}; \\ M_5 = 0,170 \text{ м}; \quad \mu = 3,232.$$

При этом сумма  $M_i$  оказалась большей в многокритериальной нуль-свободной сети (см. табл. 6.33).

Учитывая изложенное, можно сделать вывод, что поиск степеней  $n_i$  достаточно выполнить один раз для свободной геодезической сети, опирающейся на два исходных пункта, с последующим переходом к нуль-свободной сети по вышеизложенной методике.

Таблица 6.34

Одностепенное уравнивание нуль-свободной геодезической сети триангуляции

№ пп	4, 5	3, 4	3, 5	Начальные координаты	Координаты нуль-свободной сети
	2	3	4		
1	83 182,755	83 182,655	83 182,649	83 182,686	83 182,686
	51 400,510	51 400,612	51 400,551	51 400,558	51 400,555
2	75 890,329	75 890,269	75 890,305	75 890,301	75 890,301
	55 930,318	55 930,503	55 930,412	55 930,411	55 930,411
3	82 700,043	82 699,830	82 699,830	82 699,901	82 699,901
	40 904,524	40 904,620	40 904,620	40 904,588	40 904,588
4	93 556,720	93 556,720	93 556,650	93 556,697	93 556,697
	59 750,640	59 750,640	59 750,533	59 750,604	59 750,604
5	82 489,340	82 489,345	82 489,340	82 489,342	82 489,342
	61 340,410	61 340,530	61 340,410	61 340,450	61 340,450

Рассмотрим пример триангуляции из [28, с. 153] (три исходных и три определяемых пункта) и повторим предыдущие вычисления для нового примера. Возьмем в качестве исходных пунктов точки 2 и 3. Многостепенная многокритериальная оптимизация свободной сети дает результаты, приведенные в табл. 6.35.

Таблица 6.35

Результаты уравнивания

Пример из [28, с. 153]				
$\sigma_i''$	1,0			
	$N_1$	$N_2$	$n_1$	$\sigma_i''$
	1	6	2,1	0,46
	1	5	3,9	0,93
	2	6	1,4	0,10
	2	5	1,7	-0,03
	2	1	1,9	0,01
	3	6	1,7	-0,10
	3	2	2,3	0,58
	4	6	2,1	-0,33
	4	3	1,9	-0,03
	5	2	3,9	1,05
	5	6	3,8	-0,98
	5	4	2,0	-0,18
	6	2	3,9	-0,84
	6	3	2,6	0,70
	6	4	2,0	0,04
	6	5	2,2	-0,06
	Многостепенная		$n = 2,0$	
$\mu$	0,591		0,767	
$M_4$	0,038		0,049	
$M_5$	0,054		0,062	
$M_6$	0,022		0,027	
$M_1$	0,41		0,045	

Результаты многостепенного многокритериального уравнивания свободной сети представлены в табл. 6.36.

В таблице 6.37 представлены результаты многокритериального уравнивания и оценки точности нуль-свободной геодезической сети с одним исходным пунктом 3.

Таблица 6.36

№ пп	2, 3	1, 2	1, 3	Начальные координаты	Координаты нуль-свободной сети
	2	3	4		
1	10 043,557 98 997,082	10 043,540 98 997,010	10 043,540 98 997,010	10 043,546 98 997,034	10 043,546 98 997,034
2	16 987,980 94 956,270	16 987,980 94 956,270	16 987,996 94 956,224	16 987,985 94 956,255	16 987,985 94 956,255
3	24 000,160 100 994,210	24 000,088 100 994,256	24 000,160 100 994,210	24 000,136 100 994,225	24 000,136 100 994,225
4	20 662,189 109 240,109	20 662,053 109 240,103	20 662,142 109 240,109	20 662,128 109 240,107	20 662,128 109 240,107
5	10 999,846 107 008,883	10 999,756 107 008,798	10 999,792 107 008,831	10 999,798 107 008,837	10 999,798 107 008,837
6	16 684,262 102 249,807	16 684,199 102 249,785	16 684,242 102 249,774	16 684,234 102 249,789	16 684,234 102 249,789

Таблица 6.37

Многостепенное, многокритериальное уравнивание нуль-свободной геодезической сети триангуляции

$\sigma_i''$	Пример из [4, с. 153]			
	1, D			
	$N_1$	$N_2$	$n_1$	$\phi_i''$
	1	6	2,1	0,46
	1	5	3,9	0,90
	2	6	1,4	0,09
	2	5	1,7	-0,03
	2	1	1,9	0,04
	3	6	1,7	-0,11
	3	2	2,3	0,59
	4	6	2,1	-0,32
	4	3	1,9	-0,03
	5	2	3,9	1,04
	5	6	3,8	-0,98
	5	4	2,0	-0,13
	6	2	3,9	-0,87
	6	3	2,6	0,70
	6	4	2,0	0,04
	6	5	2,2	-0,06

Окончание табл. 6.37

$\mu$	0,682
$M_4$	0,0353
$M_5$	0,0493
$M_6$	0,0226
$M_1$	0,0387
$M_2$	0,0314

Поскольку программа рассчитана на пять определяемых пунктов, то уравнивание выполнялось с одним исходным пунктом № 3 с координатами, взятыми из табл. 6.36 (колонка 5). Результаты счета показали, что для нуль-свободного уравнивания достаточно выполнить уравнивание свободной сети (см. табл. 6.36, колонка 1) и путем трансформирования получить колонки 2 и 3, взяв среднее из колонок 2 и 3, получить координаты нуль-свободной геодезической сети. Следовательно, при уравнивании триангуляции программой, которую мы применили лишь для контроля, пользоваться не надо.

Как показали исследования, эта программа пригодна для сетей трилатерации и линейно-угловых сетей, выбрав начальные координаты методом трансформирования (см. табл. 6.36).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, Ю.П. Вычисление оценок точности методом моделирования ошибки / Ю.П. Андреев // Геодезия и картография. – 1971. – № 11. – С. 20 – 24.
2. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
3. Волжанин, С.Д. Оценка точности результатов уравнивания методом Lp-оценок / С.Д. Волжанин // Деп в УкрНИИТИ. – 1984. – № 622. – УК-Д84.
4. Волжанин, С.Д. Уравнивание геодезических сетей методом Lp-оценок / С.Д. Волжанин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов. – 1984. – Вып. 40. – С. 20 – 23.
5. Гудков, В.М. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений: учеб. для вузов. / В.М. Гудков, А.В. Хлебников. – М., 1990. – 335 с.
6. Джунь, И.В. Теория веса геодезического измерения, основанная на принципе правдоподобия / И.В. Джунь // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов. – 1988. – Вып. 47. – С. 9 – 13.
7. Дьяков, Б.Н. О контроле, поиске и учете грубых ошибок измерений / Б.Н. Дьяков, М.П. Рудикова // Геодезия и картография. – 1997. – № 6. – С. 21 – 24.
8. Дьяков, Б.Н. Поиск грубых ошибок при обработке нивелирной сети / Б.Н. Дьяков, М.П. Рудикова // Геодезия и картография. – 1998. – № 8. – С. 13 – 14.
9. Карпушин, Ю.Г. Выбор параметра при регуляризованном решении некорректных задач / Ю.Г. Карпушин // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1985. – № 2. – С. 19 – 23.
10. Коугия, В.А. Обнаружение грубых ошибок измерений по результатам уравнивания / В.А. Коугия // Геодезия и картография. – 1995. – № 6. – С. 14 – 19.
11. Коугия, В.А. Сравнение методов обнаружения и идентификации грубых ошибок измерений / В.А. Коугия // Геодезия и картография. – 1998. – № 5. – С. 23 – 27.

12. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е, доп. и испр. / Ю.В. Линник. – М.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
13. Макаров, Г.В. Оценка точности при поисковых методах уравнивания / Г.В. Макаров, В.В. Афанасьев, Б.В. Афанасьев // Геодезия и картография. – 1981. – № 11. – С. 20 – 22.
14. Маркузе, Ю.И. Взаимосвязь процедур уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей / Ю.И. Маркузе // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1984. – № 3. – С. 3 – 14.
15. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: справ. пособие. / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картогеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
16. Мещеряков, Г.А. Об уравнивании геодезических измерений с учетом закона распределения ошибок измерений / Г.А. Мещеряков, С.Д. Волжанкин, В.В. Киричук // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
17. Мицкевич, В.И. О невозможности поиска грубых ошибок при параметрическом способе уравнивания / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1994. – № 4. – С. 24 – 26.
18. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 5 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК, 28.06.99. – № 681. – гд. 99.
19. Мицкевич, В.И. Применение метода релаксации при многокритериальном уравнивании и оценке точности геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 680. – гд. 99.
20. Мицкевич, В.И. О вычислении начальных координат для последующего уравнивания нуль-свободных геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский, В.Г. Стержанин // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2(4). – С. 35 – 36.
21. Мицкевич, В.И. Оценка качества построения геодезических сетей с помощью относительной обусловленности / В.И. Мицкевич, С.В. Маковский // Геодезия и картография. – 1995. – № 11. – С. 16 – 17.



22. Мицкевич, В.И. Анализ предельных числовых характеристик различных формул по вычислению элементов матрицы Гессе при решении геодезических засечек методом Ньютона / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 673. – гд. 99.
23. Мицкевич, В.И. Выбор наилучших формул для численного получения компонент градиента при решении геодезических засечек методом скорейшего спуска / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 672. – гд. 99.
24. Мицкевич, В.И. Методика выбора шага для численного вычисления производных при дифференцировании функций, заданных программами, при решении ряда геодезических задач / В.И. Мицкевич, С.Г. Шнитко // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 30 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 22.03.99, № 663. – гд. 99.
25. Мицкевич, В.И. Особенности уравнивания геодезических сетей по методу наименьших модулей / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1997. – № 5. – С. 23 – 25.
26. Мицкевич, В.И. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов // Геодезия и картография. – 1994. – № 7. – С. 14 – 16.
27. Мицкевич, В.И. Уравнивание и оценка точности геодезических сетей методом Ньютона / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 6 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 22.03.99, № 658. – гд. 99.
28. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы) / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
29. Рабинович, Б.Н. Практикум по высшей геодезии. Изд. 2-е. / Б.Н. Рабинович. – М.: Изд-во геодезической лит., 1961. – 338 с.
30. Скорик, О.Г. Выбор показателя степени в целевой функции для параметрических уравнений под условием минимума ошибок положений пунктов / О.Г. Скорик, В.Г. Стержанов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2000. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК, 25.09.2000, № 714. – гд. 2000.

31. Скорик, О.Г. Оценка точности функций измеренных и уравненных величин при обработке геодезических сетей методом одно- и многокритериальной оптимизации / О.Г. Скорик, В.Г. Стержанов, С.Г. Шнитко // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2000. – 10 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК, 25.09.2000, № 713. – гд. 2000.
32. Справочник по специальным функциям и формулам, графикам и математическим таблицам / под. ред. М. Абрамовиц, Н. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
33. Тихонов, А.Н. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов [и др.] // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1980. – № 1. – С. 45 – 53.
34. Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. / Д.М. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
35. Шнитко, С.Г. Комплексная проверка на ЭВМ формул по выбору шага дифференцирования в нелинейном методе Ньютона по уравниванию и оценке точности геодезических сетей / С.Г. Шнитко // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2000. – 5 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 719. – гд. 2000.
36. Яковлев, Н.В. Высшая геодезия / Н.В. Яковлев. – М.: Недра, 1989. – 445 с.
37. Adamczewski, Z. Nieliniowe analiza dokadnosci sieci geodezyjny / Z. Adamczewski // Geodezyja i kartografia (PRL). – 1971, 20. – № 3. – S. 209 – 223.
38. Fletcher, R. The calculation of linear best Lp-approximations / R. Fletcher, I.A. Grant, M.D. Hebden // Computer Journal. – 1971. – V. 14. – № 3. – P. 277 – 279.

Приложение 1

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 5 из [28, с. 93], триангуляция

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	5,88E-05		2,11E-03		2,69E-03	
	Q22	2,96E-05		5,68E-04		7,47E-04	
	Q12	2,96E-05		7,72E-04		1,02E-03	
1,2	Q11	3,43E-05		1,49E-03		1,70E-03	
	Q22	4,96E-05		4,80E-04		6,54E-04	
	Q12	9,92E-05		5,21E-04		6,94E-04	
1,3	Q11	5,45E-04		1,24E-03		1,41E-03	
	Q22	7,08E-05		4,31E-04		6,18E-04	
	Q12	1,50E-04		3,96E-04		5,65E-04	
1,4	Q11	7,70E-04		1,16E-03		1,26E-03	
	Q22	9,61E-05		4,01E-04		5,83E-04	
	Q12	2,05E-04		3,37E-04		4,61E-04	
1,5	Q11	9,93E-04	8,01E-05	1,14E-03	1,15E-03	1,17E-03	1,18E-04
	Q22	1,22E-04	6,42E-05	3,80E-04	3,83E-04	5,38E-04	2,49E-04
	Q12	2,55E-04	-1,11E-05	3,01E-04	3,07E-04	3,80E-04	-7,06E-05
1,6	Q11	1,21E-03	-1,31E-07	1,14E-03	1,14E-03	1,16E-03	3,32E-03
	Q22	1,53E-04	-3,59E-06	3,68E-04	3,71E-04	4,62E-04	5,53E-04
	Q12	3,01E-04	-3,49E-06	2,94E-04	2,95E-04	3,28E-04	9,29E-04
1,7	Q11	1,33E-04	1,60E-03	1,16E-03	1,16E-03	1,17E-03	1,21E-03
	Q22	2,05E-04	2,75E-04	3,61E-04	3,64E-04	3,90E-04	3,72E-04
	Q12	3,45E-04	4,77E-04	2,87E-04	2,88E-04	2,98E-04	2,78E-04
1,8	Q11	1,27E-03	1,27E-03	1,18E-03	1,18E-03	1,19E-03	1,31E-03
	Q22	2,64E-04	2,89E-04	3,59E-04	3,61E-04	3,52E-04	3,78E-04
	Q12	3,37E-04	3,55E-04	2,84E-04	2,84E-04	2,84E-04	3,30E-04
1,9	Q11	1,24E-03	1,24E-03	1,22E-03	1,22E-03	1,22E-03	1,22E-03
	Q22	3,21E-04	3,20E-04	3,52E-04	3,52E-04	3,43E-04	3,47E-04
	Q12	3,11E-04	3,10E-04	2,86E-04	2,86E-04	2,85E-04	2,88E-04
2,0	Q11	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03
	Q22	3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04
	Q12	2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04
2,1	Q11	1,31E-03	1,31E-03	1,31E-03	1,31E-03	1,32E-03	1,31E-04
	Q22	3,70E-04	3,70E-04	3,68E-04	3,69E-04	3,66E-04	3,66E-04
	Q12	2,75E-04	2,75E-04	3,06E-04	3,06E-04	3,07E-04	3,06E-04
2,2	Q11	1,38E-03	1,38E-03	1,37E-03	1,37E-03	1,37E-03	1,37E-03
	Q22	3,84E-04	3,84E-04	3,92E-04	3,92E-04	3,86E-04	3,86E-04
	Q12	2,55E-04	2,55E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,24E-04	3,23E-04
2,3	Q11	1,46E-03	1,46E-03	1,43E-03	1,43E-03	1,43E-03	1,43E-03
	Q22	3,95E-04	3,95E-04	4,17E-04	4,17E-04	4,08E-04	4,08E-04
	Q12	2,33E-04	2,33E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,43E-04	3,43E-04
2,4	Q11	1,56E-03	1,56E-03	1,50E-03	1,50E-03	1,51E-03	1,51E-03
	Q22	4,05E-04	4,05E-04	4,43E-04	4,43E-04	4,32E-04	4,32E-04
	Q12	2,08E-04	2,08E-04	3,64E-04	3,64E-04	3,66E-04	3,66E-04
2,5	Q11	1,68E-03	1,68E-03	1,58E-03	1,58E-03	1,60E-03	1,59E-03
	Q22	4,15E-04	4,15E-04	4,70E-04	4,70E-04	4,57E-04	4,57E-04
	Q12	1,81E-04	1,81E-04	3,88E-04	3,88E-04	3,92E-04	3,92E-04

Окончание приложения 1

n		A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	Q11	1,82E-03		1,67E-03		1,70E-03	
	Q22	4,25E-04		4,97E-04		4,81E-04	
	Q12	1,51E-04		4,15E-04		4,19E-04	
2,7		2,00E-03		1,78E-03		1,83E-03	
		4,36E-04		5,24E-04		5,07E-04	
		1,16E-04		4,44E-04		4,53E-04	
2,8		2,20E-03		1,92E-03		1,94E-03	
		4,49E-04		5,50E-04		5,18E-04	
		7,71E-05		4,74E-04		4,68E-04	
2,9		2,22E-03		2,09E-03		1,68E-04	
		4,60E-04		5,76E-04		4,28E-04	
		2,57E-05		5,04E-04		3,96E-04	
3		3,50E-04		2,30E-03		6,00E-03	
		3,29E-04		6,02E-04		1,63E-03	
		-3,72E-05		5,34E-04		2,91E-03	

Приложение 2

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 7 из [28, с. 129], триангуляция

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	2,14E-04		3,21E-03		4,30E-03	
	Q22	1,96E-04		1,11E-03		1,10E-03	
	Q12	-4,66E-05		-9,11E-04		-1,06E-03	
1,2	Q11	8,98E-04		1,92E-03		2,10E-03	
	Q22	1,07E-03		6,77E-04		6,84E-04	
	Q12	-4,95E-04		-2,20E-04		-2,04E-04	
1,3	Q11	1,09E-03		1,02E-03		1,01E-03	
	Q22	1,20E-03		5,60E-04		5,65E-04	
	Q12	-4,25E-04		-1,01E-04		-8,67E-05	
1,4	Q11	1,00E-03		6,80E-04		6,68E-04	
	Q22	1,03E-03		5,30E-04		5,34E-04	
	Q12	-2,76E-04		-4,68E-05		-4,06E-05	
1,5	Q11	8,91E-04	8,36E-04	5,78E-04	5,75E-04	5,73E-04	6,47E-04
	Q22	8,76E-04	8,16E-04	5,54E-04	5,51E-04	5,65E-04	5,91E-04
	Q12	-1,82E-04	-1,60E-04	-4,04E-05	-1,99E-05	-3,95E-05	-3,74E-05
1,6	Q11	8,00E-04	8,15E-04	5,50E-04	5,50E-04	5,47E-04	5,48E-04
	Q22	7,79E-04	7,84E-04	5,34E-04	5,34E-04	5,29E-04	5,36E-04
	Q12	-1,28E-04	-1,31E-04	-3,97E-05	-3,97E-05	-3,64E-05	-3,31E-05
1,7	Q11	7,31E-04	7,32E-04	5,45E-04	5,45E-04	5,43E-04	5,45E-04
	Q22	7,13E-04	7,13E-04	5,20E-04	5,20E-04	5,18E-04	5,20E-04
	Q12	-9,89E-05	-9,90E-05	-3,32E-05	-3,32E-05	-3,23E-05	-3,23E-05
1,8	Q11	6,74E-04	6,74E-04	5,54E-04	5,54E-04	5,54E-04	5,55E-04
	Q22	6,52E-04	6,52E-04	5,30E-04	5,30E-04	5,29E-04	5,30E-04
	Q12	-7,48E-05	-7,48E-05	-3,30E-05	-3,30E-05	-3,22E-05	-3,28E-05
1,9	Q11	6,27E-04	6,27E-04	5,70E-04	5,70E-04	5,70E-04	5,70E-04
	Q22	6,02E-04	6,03E-04	5,44E-04	5,44E-04	5,44E-04	5,45E-04
	Q12	-5,45E-05	-5,45E-05	-3,47E-05	-3,47E-05	-3,44E-05	-3,45E-05
2,0	Q11	5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04
	Q22	5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04
	Q12	-3,64E-05	-3,64E-05	-3,65E-05	-3,64E-05	-3,64E-05	-3,64E-05
2,1	Q11	5,60E-04	5,60E-04	6,14E-04	6,14E-04	6,14E-04	6,14E-04
	Q22	5,32E-04	5,32E-04	5,86E-04	5,86E-04	5,85E-04	5,86E-04
	Q12	-1,94E-05	-1,95E-05	-3,67E-05	-3,67E-05	-3,66E-05	-3,68E-05
2,2	Q11	5,41E-04	5,43E-04	6,50E-04	6,50E-04	6,48E-04	6,50E-04
	Q22	5,10E-04	5,09E-04	6,19E-04	6,19E-04	6,18E-04	6,20E-04
	Q12	-2,13E-06	-2,14E-06	-3,31E-05	-3,31E-05	-3,19E-05	-3,25E-05
2,3	Q11	5,25E-04	5,25E-04	7,00E-04	7,00E-04	7,02E-04	7,04E-04
	Q22	4,97E-04	4,98E-04	6,72E-04	6,72E-04	6,80E-04	6,77E-04
	Q12	2,11E-05	2,12E-05	-1,28E-05	-1,28E-05	-6,81E-06	-8,03E-06
2,4	Q11	5,07E-04	5,05E-04	7,67E-04	7,67E-04	7,54E-04	7,58E-04
	Q22	4,87E-04	4,86E-04	7,67E-04	7,67E-04	7,44E-04	7,47E-04
	Q12	5,23E-05	5,22E-05	3,79E-05	3,80E-05	2,12E-05	2,50E-05
2,5	Q11	4,65E-04	4,65E-04	7,77E-04	7,77E-04	7,72E-04	7,72E-04
	Q22	4,39E-04	4,39E-04	7,71E-03	7,71E-04	7,63E-04	7,64E-04
	Q12	3,69E-05	3,69E-05	1,29E-05	1,29E-05	5,57E-06	7,56E-06
2,6	Q11	4,34E-04		8,06E-04		8,01E-04	
	Q22	4,04E-04		8,02E-04		8,00E-04	
	Q12	3,31E-05		8,75E-06		6,71E-06	

Окончание приложения 2

п		A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,7		4,07E-04		8,39E-04		8,37E-04	
		3,76E-04		8,40E-04		8,33E-04	
		3,11E-05		7,84E-06		1,95E-06	
2,8		3,83E-04		8,75E-04		8,51E-04	
		3,49E-04		8,80E-04		8,57E-04	
		1,85E-05		8,15E-06		5,24E-06	
2,9		3,61E-04		9,13E-04		7,00E-04	
		3,26E-04		9,24E-04		7,04E-04	
		2,85E-05		9,04E-06		2,26E-06	
3		3,04E-04		9,53E-04		8,79E-04	
		2,47E-04		9,69E-04		1,46E-03	
		2,94E-05		1,03E-05		8,14E-04	

Приложение 3

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 6 из [28, с. 153], триангуляция

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	2,48E-04		5,89E-04		1,30E-02	
	Q22	5,93E-05		4,72E-04		8,67E-04	
	Q12	1,33E-05		3,56E-05		-8,00E-04	
1,2	Q11	2,05E-04		4,68E-04		7,76E-04	
	Q22	6,21E-05		4,17E-04		8,58E-04	
	Q12	-3,44E-06		7,03E-05		3,69E-04	
1,3	Q11	5,60E-04		4,08E-04		5,58E-04	
	Q22	6,80E-05		3,89E-04		6,64E-04	
	Q12	-3,58E-05		8,15E-05		2,22E-04	
1,4	Q11	5,75E-04		3,89E-04		4,08E-04	
	Q22	1,31E-04		4,54E-04		3,76E-04	
	Q12	-5,43E-05		1,19E-04		7,80E-05	
1,5	Q11	4,84E-04	-1,86E-04	3,67E-04	3,70E-04	3,69E-04	1,09E-03
	Q22	2,40E-04	-2,64E-05	4,36E-04	4,53E-04	3,04E-04	2,40E-04
	Q12	4,18E-06	1,28E-04	1,05E-04	1,11E-04	4,67E-05	-1,92E-04
1,6	Q11	4,34E-04	3,63E-04	3,37E-04	3,38E-04	3,53E-04	4,05E-04
	Q22	2,61E-04	2,37E-04	3,03E-04	3,07E-04	2,80E-04	2,07E-04
	Q12	1,62E-05	1,35E-05	4,53E-05	4,68E-05	3,73E-05	5,15E-05
1,7	Q11	3,93E-04	3,99E-04	3,29E-04	3,29E-04	3,51E-04	3,48E-04
	Q22	2,65E-04	2,41E-04	2,73E-04	2,74E-04	2,72E-04	2,65E-04
	Q12	1,77E-05	1,70E-05	2,84E-05	2,87E-05	3,36E-05	3,03E-05
1,8	Q11	3,75E-04	3,68E-04	3,28E-04	3,28E-04	3,34E-04	3,39E-04
	Q22	2,68E-04	2,70E-04	2,64E-04	2,64E-04	2,64E-04	2,65E-04
	Q12	1,74E-05	1,68E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,10E-05	2,05E-05
1,9	Q11	3,59E-04	3,52E-04	3,32E-04	3,32E-04	3,33E-04	3,35E-04
	Q22	2,70E-04	2,73E-04	2,63E-04	2,63E-04	2,63E-04	2,63E-04
	Q12	1,83E-05	1,82E-05	1,65E-05	1,65E-05	1,64E-05	1,66E-05
2,0	Q11	3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04
	Q22	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04
	Q12	1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05
2,1	Q11	3,28E-04	3,28E-04	3,57E-04	3,57E-04	3,58E-04	3,57E-04
	Q22	2,69E-04	2,69E-04	2,83E-04	2,83E-04	2,84E-04	2,83E-04
	Q12	1,12E-05	1,12E-05	1,72E-05	1,72E-05	1,71E-05	1,72E-05
2,2	Q11	3,14E-04	3,14E-04	3,76E-04	3,76E-04	3,76E-04	3,77E-04
	Q22	2,68E-04	2,68E-04	3,03E-04	3,03E-04	3,04E-04	3,05E-04
	Q12	5,46E-06	5,46E-06	1,90E-05	1,90E-04	1,76E-05	1,77E-05
2,3	Q11	3,03E-04	3,03E-04	3,97E-04	3,97E-04	4,00E-04	4,00E-04
	Q22	2,67E-04	2,69E-04	3,30E-04	3,30E-04	3,35E-04	3,39E-04
	Q12	-6,66E-07	-6,77E-07	2,04E-05	2,03E-05	1,67E-05	1,58E-05
2,4	Q11	2,92E-04	2,93E-04	4,22E-04	4,22E-04	4,27E-04	4,22E-04
	Q22	2,66E-04	2,68E-04	3,64E-04	3,64E-04	3,75E-04	3,64E-04
	Q12	-6,70E-06	-6,76E-06	2,10E-05	2,09E-05	1,33E-05	2,10E-05
2,5	Q11	2,84E-04	2,83E-04	4,50E-04	4,50E-04	4,59E-04	4,58E-04
	Q22	2,64E-04	2,64E-04	4,04E-04	4,04E-04	4,33E-04	4,15E-04
	Q12	-1,24E-05	-1,24E-05	2,09E-05	2,08E-05	5,53E-06	1,06E-05
2,6	Q11	2,73E-04		4,80E-04		4,86E-04	
	Q22	2,59E-04		4,49E-04		4,56E-04	
	Q12	-1,61E-05		2,05E-05		1,52E-05	

Окончание приложения 3

$n$		A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,7		2,64E-04		5,11E-04		5,12E-04	
		2,51E-04		4,97E-04		4,84E-04	
		-1,83E-05		2,07E-05		2,38E-05	
2,8		2,57E-04		5,44E-04		5,31E-04	
		2,43E-04		5,46E-04		5,09E-04	
		-1,99E-05		2,22E-05		2,84E-05	
2,9		2,49E-04		5,78E-04		4,44E-04	
		2,34E-04		5,42E-04		4,30E-04	
		-2,13E-05		2,64E-05		2,84E-05	
3		1,77E-04		6,12E-04		6,68E-04	
		1,51E-04		6,34E-04		1,28E-03	
		-1,51E-05		3,45E-05		7,27E-04	



Приложение 4

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 6 из [28, с. 179], трилатерация

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	1,72E-04		5,26E-02		1,19E-01	
	Q22	3,37E-05		2,41E-02		4,03E-02	
	Q12	4,33E-05		2,05E-02		5,22E-02	
1,2	Q11	-6,64E-03		2,56E-02		2,25E-02	
	Q22	-3,75E-04		1,64E-02		1,68E-02	
	Q12	-1,64E-03		1,06E-02		9,59E-03	
1,3	Q11	-4,55E-04		1,71E-02		1,70E-02	
	Q22	-3,59E-05		1,23E-02		1,20E-02	
	Q12	-2,50E-04		7,38E-03		7,28E-03	
1,4	Q11	4,05E-03		1,23E-02		1,22E-02	
	Q22	1,14E-03		8,86E-03		8,69E-03	
	Q12	1,69E-03		5,49E-03		5,45E-03	
1,5	Q11	2,79E-03	2,71E-03	8,93E-03	8,93E-03	8,93E-03	8,94E-03
	Q22	1,08E-03	1,05E-03	6,34E-03	6,34E-03	6,25E-03	6,29E-03
	Q12	1,17E-03	1,13E-03	4,04E-03	4,04E-03	4,02E-03	4,06E-03
1,6	Q11	2,38E-03	2,37E-03	6,51E-03	6,51E-03	6,51E-03	6,51E-03
	Q22	1,13E-03	1,12E-03	4,58E-03	4,58E-03	4,55E-03	4,56E-03
	Q12	1,02E-03	1,01E-03	2,96E-03	2,96E-03	2,44E-03	2,96E-03
1,7	Q11	2,15E-03	2,15E-03	4,74E-03	4,74E-03	4,74E-03	4,74E-03
	Q22	1,17E-03	1,17E-03	3,32E-03	3,32E-03	3,31E-03	3,31E-03
	Q12	9,40E-04	9,38E-04	2,16E-03	2,16E-03	2,16E-03	2,16E-03
1,8	Q11	2,01E-03	2,00E-04	3,46E-03	3,46E-03	3,46E-03	3,46E-03
	Q22	1,21E-03	1,21E-03	2,42E-03	2,42E-03	2,42E-03	2,41E-03
	Q12	8,91E-04	8,89E-04	1,58E-03	1,58E-03	1,58E-03	1,58E-03
1,9	Q11	1,91E-03	1,91E-03	2,53E-03	2,53E-03	2,53E-03	2,53E-03
	Q22	1,24E-03	1,24E-03	1,76E-03	1,76E-03	1,76E-03	1,76E-03
	Q12	8,60E-04	8,59E-04	1,15E-03	1,15E-03	1,15E-03	1,15E-03
2,0	Q11	1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03
	Q22	1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03
	Q12	8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04
2,1	Q11	1,81E-03	1,81E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03
	Q22	1,33E-03	1,33E-03	9,39E-04	9,39E-04	9,39E-04	9,39E-03
	Q12	8,36E-04	8,36E-04	6,16E-04	6,16E-04	6,16E-04	6,16E-04
2,2	Q11	1,79E-03	1,89E-03	9,85E-04	9,85E-04	9,85E-04	9,85E-04
	Q22	1,38E-03	1,38E-03	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04
	Q12	8,38E-04	8,39E-04	4,50E-04	4,50E-04	4,50E-04	4,50E-04
2,3	Q11	1,80E-03	1,80E-03	7,20E-04	7,20E-04	7,20E-04	7,20E-04
	Q22	1,44E-03	1,44E-03	5,03E-04	5,03E-04	5,04E-04	5,02E-04
	Q12	8,47E-04	8,48E-04	3,29E-04	3,29E-04	3,29E-04	3,29E-04
2,4	Q11	1,81E-03	1,82E-03	5,26E-04	5,26E-04	5,28E-04	5,26E-04
	Q22	1,51E-03	1,51E-03	3,68E-04	3,68E-04	3,68E-04	3,67E-04
	Q12	8,63E-04	8,65E-04	2,40E-04	2,40E-04	2,41E-04	2,40E-04
2,5	Q11	1,85E-03	1,85E-03	3,86E-04	3,85E-04	3,86E-04	3,85E-04
	Q22	1,59E-03	1,59E-03	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,69E-04
	Q12	8,86E-04	8,88E-04	1,76E-04	1,76E-04	1,76E-04	1,76E-04

Окончание приложения 4

<i>n</i>		A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	Q11	1,89E-03		2,81E-04		2,84E-04	
	Q22	1,67E-03		1,98E-04		1,98E-04	
	Q12	9,14E-04		1,28E-04		1,29E-04	
2,7		1,95E-03		2,06E-04		2,08E-04	
		1,77E-03		1,45E-04		1,47E-04	
		9,50E-04		9,40E-05		9,59E-05	
2,8		2,03E-03		1,51E-04		1,48E-04	
		1,88E-03		1,06E-04		1,07E-04	
		9,93E-04		6,87E-05		6,84E-05	
2,9		1,94E-03		1,10E-04		8,51E-05	
		1,87E-03		7,80E-05		5,99E-05	
		9,04E-04		5,03E-05		3,88E-05	
3		4,00E-04		8,08E-05		4,48E-05	
		5,15E-04		5,73E-04		1,63E-04	
		-4,44E-05		3,68E-05		4,96E-05	

Приложение 5

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 5 из [28, с. 202], трилатерация

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	1,60E-03		1,26E-02		1,28E-02	
	Q22	2,04E-03		1,36E-02		2,14E-02	
	Q12	-1,88E-04		1,44E-03		-5,40E-03	
1,2	Q11	1,34E-03		8,79E-03		8,69E-03	
	Q22	1,53E-03		9,26E-03		9,38E-03	
	Q12	-5,06E-05		-5,48E-04		-7,96E-04	
1,3	Q11	1,16E-03		6,34E-03		6,29E-03	
	Q22	1,26E-03		6,51E-03		6,53E-03	
	Q12	-4,53E-05		-2,92E-04		-3,93E-04	
1,4	Q11	1,05E-03		4,59E-03		4,57E-03	
	Q22	1,11E-03		4,62E-03		4,60E-03	
	Q12	-4,48E-05		-1,55E-04		-1,95E-04	
1,5	Q11	9,53E-04	9,54E-04	3,33E-03	3,33E-03	3,31E-03	3,33E-03
	Q22	9,96E-04	9,91E-04	3,32E-03	3,32E-03	3,30E-03	3,32E-03
	Q12	-3,90E-05	-3,88E-05	-8,92E-05	-8,92E-05	-9,16E-05	-8,97E-05
1,6	Q11	8,75E-04	8,76E-04	2,42E-03	2,42E-03	2,42E-03	2,42E-03
	Q22	9,00E-04	8,97E-04	2,40E-03	2,40E-03	2,40E-03	2,40E-03
	Q12	-3,22E-05	-3,21E-05	-5,58E-05	-5,58E-05	-5,50E-05	-5,62E-05
1,7	Q11	8,12E-04	8,12E-04	1,77E-03	1,77E-03	1,76E-03	1,77E-03
	Q22	8,24E-04	8,22E-04	1,75E-03	1,75E-03	1,79E-03	1,75E-03
	Q12	-2,62E-05	-2,61E-05	-3,71E-05	-3,71E-05	-3,67E-05	-3,73E-05
1,8	Q11	7,61E-04	7,62E-04	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03
	Q22	7,63E-04	7,62E-04	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03
	Q12	-2,11E-05	-2,11E-05	-2,57E-05	-2,57E-05	-2,55E-05	-2,59E-05
1,9	Q11	7,20E-04	7,20E-04	9,41E-04	9,41E-04	9,40E-04	9,41E-04
	Q22	7,16E-04	7,15E-04	9,28E-04	9,28E-04	9,28E-04	9,28E-04
	Q12	-1,69E-05	-1,69E-05	-1,84E-05	-1,84E-05	-1,84E-05	-1,84E-05
2,0	Q11	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04
	Q22	6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04
	Q12	-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05
2,1	Q11	6,61E-04	6,61E-04	5,02E-04	5,02E-04	5,02E-04	5,02E-04
	Q22	6,48E-04	6,48E-04	4,95E-04	4,95E-04	4,95E-04	4,95E-04
	Q12	-1,03E-05	-1,03E-05	-9,77E-06	-9,77E-06	-9,71E-06	-9,73E-06
2,2	Q11	6,40E-04	6,40E-04	3,67E-04	3,67E-04	3,67E-04	3,67E-04
	Q22	6,25E-04	6,25E-04	3,62E-04	3,62E-04	3,62E-04	3,62E-04
	Q12	-7,69E-06	-7,69E-06	-7,22E-06	-7,22E-06	-7,04E-06	-7,16E-06
2,3	Q11	6,25E-04	6,25E-04	2,68E-04	2,68E-04	2,68E-04	2,68E-04
	Q22	6,07E-04	6,07E-04	2,65E-04	2,65E-04	2,65E-04	2,65E-04
	Q12	-5,38E-06	-5,38E-06	-5,36E-06	-5,36E-06	-5,34E-06	-5,28E-06
2,4	Q11	6,13E-04	6,13E-04	1,96E-04	1,96E-04	1,96E-04	1,96E-04
	Q22	5,92E-04	5,93E-04	1,94E-04	1,94E-04	1,94E-04	1,94E-04
	Q12	-3,29E-06	-3,29E-06	-3,98E-06	-3,98E-06	-3,87E-06	-3,91E-06
2,5	Q11	6,05E-04	6,05E-04	1,43E-04	1,43E-04	1,43E-04	1,43E-04
	Q22	5,83E-04	5,83E-04	1,42E-04	1,42E-04	1,42E-04	1,42E-04
	Q12	-1,38E-06	-1,38E-06	-2,97E-06	-2,97E-06	-2,77E-06	-2,89E-06
2,6	Q11	6,00E-04		1,05E-04		1,06E-04	
	Q22	5,77E-04		1,04E-04		1,04E-04	
	Q12	4,19E-07		-2,21E-06		-1,91E-06	

Описание приложения 5

n	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,7	5,98E-04		7,67E-05		7,73E-05	
	5,74E-04		7,60E-05		7,61E-05	
	2,13E-06		-1,65E-06		-1,37E-06	
2,8	5,99E-04		5,62E-05		5,51E-05	
	5,74E-04		5,56E-05		5,44E-05	
	3,80E-06		-1,23E-06		1,41E-06	
2,9	6,01E-04		4,11E-05		3,17E-05	
	5,74E-04		4,08E-05		3,10E-05	
	6,27E-06		-9,18E-05		-6,07E-07	
3	5,84E-04		3,01E-05		8,45E-06	
	4,85E-04		2,99E-05		3,34E-05	
	5,20E-05		-6,85E-07		-1,68E-05	

Приложение 6

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 4 из [28, с. 217], линейно-угловая сеть

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	1,69E-05		9,44E-03		9,18E-03	
	Q22	5,83E-06		3,58E-03		5,34E-03	
	Q12	4,73E-06		2,99E-03		3,39E-03	
1,2	Q11	2,49E-05		5,79E-03		6,35E-03	
	Q22	1,01E-05		2,18E-03		3,45E-03	
	Q12	6,73E-06		1,70E-03		2,16E-03	
1,3	Q11	4,04E-05		2,56E-03		2,65E-03	
	Q22	2,64E-05		1,25E-03		1,87E-03	
	Q12	1,50E-05		9,03E-04		1,08E-03	
1,4	Q11	5,40E-05		1,53E-03		1,44E-03	
	Q22	4,12E-05		7,25E-04		7,99E-04	
	Q12	2,08E-05		6,00E-04		5,38E-04	
1,5	Q11	6,21E-05	8,89E-05	1,53E-03	1,22E-03	1,18E-03	4,44E-04
	Q22	4,28E-05	5,18E-05	5,91E-04	5,11E-04	5,06E-04	3,21E-04
	Q12	2,26E-05	3,41E-05	6,72E-04	5,16E-04	4,32E-04	-3,60E-05
1,6	Q11	7,98E-05	7,96E-05	4,07E-04	3,83E-04	5,31E-04	1,77E-04
	Q22	4,58E-05	4,35E-05	2,21E-04	2,16E-04	2,84E-04	2,52E-04
	Q12	3,28E-05	3,16E-05	1,30E-04	1,19E-04	1,10E-04	7,77E-05
1,7	Q11	8,89E-05	7,57E-05	2,19E-04	2,11E-04	1,88E-04	1,82E-04
	Q22	4,98E-05	4,36E-05	1,40E-04	1,35E-04	1,21E-04	1,18E-04
	Q12	2,97E-05	2,54E-05	1,91E-05	2,48E-05	5,31E-05	5,14E-05
1,8	Q11	8,57E-05	8,41E-05	1,12E-04	1,12E-04	1,11E-04	1,15E-04
	Q22	4,37E-05	4,45E-05	7,64E-05	7,64E-05	7,72E-05	7,79E-05
	Q12	2,62E-05	2,61E-05	2,61E-05	2,61E-05	2,80E-05	2,95E-05
1,9	Q11	7,95E-05	7,95E-05	8,37E-05	8,37E-05	8,38E-05	8,40E-05
	Q22	4,16E-05	4,19E-05	5,28E-05	5,28E-05	5,31E-05	5,31E-05
	Q12	2,30E-05	2,32E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,14E-05	2,15E-05
2,0	Q11	7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05
	Q22	3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05
	Q12	2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05
2,1	Q11	6,62E-05	6,62E-05	6,86E-05	6,86E-05	6,86E-05	6,85E-05
	Q22	3,73E-05	3,73E-05	3,17E-05	3,17E-05	3,18E-05	3,17E-05
	Q12	1,80E-05	1,80E-05	2,12E-05	2,12E-05	2,12E-05	2,12E-05
2,2	Q11	6,02E-05	6,02E-05	6,78E-05	6,78E-05	6,76E-05	6,76E-05
	Q22	3,54E-05	3,54E-05	2,76E-05	2,76E-05	2,77E-05	2,77E-05
	Q12	1,59E-05	1,59E-05	2,28E-05	2,28E-05	2,28E-05	2,29E-05
2,3	Q11	5,48E-05	5,49E-05	6,86E-05	6,86E-05	6,84E-05	6,85E-05
	Q22	3,38E-05	3,38E-05	2,57E-05	2,57E-05	2,61E-05	2,61E-05
	Q12	1,42E-05	1,42E-05	2,46E-05	2,47E-05	2,49E-05	2,99E-05
2,4	Q11	5,01E-05	5,01E-05	7,03E-05	7,03E-05	7,02E-05	7,01E-05
	Q22	3,23E-05	3,23E-05	2,54E-05	2,54E-05	2,60E-05	2,59E-05
	Q12	1,26E-05	1,26E-05	2,66E-05	2,66E-05	2,71E-05	2,70E-05
2,5	Q11	4,58E-05	4,59E-05	7,24E-05	7,24E-05	7,20E-05	7,21E-05
	Q22	3,11E-05	3,10E-05	2,60E-05	2,60E-05	2,67E-05	2,67E-05
	Q12	1,12E-05	1,12E-05	2,86E-05	2,86E-05	2,92E-05	2,92E-05

Граничное приложение 6

<i>n</i>		A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	Q11	4,20E-05		7,46E-05		7,42E-05	
	Q22	3,00E-05		2,73E-05		2,82E-05	
	Q12	1,00E-05		3,06E-05		3,14E-05	
2,7		3,87E-05		7,68E-05		7,63E-05	
		2,90E-05		2,91E-05		3,02E-05	
		8,96E-06		3,26E-05		3,36E-05	
2,8		3,57E-05		7,89E-05		7,68E-05	
		2,81E-05		3,12E-05		3,16E-05	
		7,99E+04		3,46E-05		3,48E-05	
2,9		3,20E-05		8,08E-05		6,20E-05	
		2,88E-05		3,36E-05		2,70E-05	
		6,62E-05		3,65E-05		2,88E-05	
3		1,13E-05		8,26E-05		2,91E-06	
		1,54E-05		3,62E-05		1,65E-05	
		-1,13E-06		3,83E-05		-5,46E-06	

Приложение 7

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта С из [29, с. 145], триангуляция

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	7,10E-02		6,38E-03		4,93E-03	
	Q22	4,94E-02		9,73E-03		7,23E-03	
	Q12	2,07E-02		-2,38E-03		1,46E-03	
1,2	Q11	3,56E-02		6,27E-03		6,10E-03	
	Q22	2,62E-02		9,81E-03		9,26E-03	
	Q12	1,06E-02		2,12E-03		2,00E-03	
1,3	Q11	2,34E-02		6,22E-03		6,13E-03	
	Q22	1,84E-02		9,88E-03		9,45E-03	
	Q12	7,06E-03		2,26E-03		2,18E-03	
1,4	Q11	1,74E-02		6,23E-03		6,15E-03	
	Q22	1,47E-02		9,93E-03		9,59E-03	
	Q12	5,34E-03		2,41E-03		2,34E-03	
1,5	Q11	1,38E-02	1,23E-02	6,28E-03	6,28E-03	6,22E-03	6,24E-03
	Q22	1,25E-03	1,22E-02	1,00E-02	9,95E-03	9,69E-03	1,03E-02
	Q12	4,35E-03	3,88E-03	2,54E-03	2,55E-03	2,48E-03	2,61E-03
1,6	Q11	1,15E-02	1,12E-02	6,38E-03	6,38E-03	6,35E-03	6,32E-03
	Q22	1,10E-02	1,18E-02	1,03E-02	1,01E-02	9,96E-03	1,00E-02
	Q12	3,72E-03	3,86E-03	2,68E-03	2,68E-03	2,63E-03	2,72E-03
1,7	Q11	9,86E-03	1,00E-02	6,52E-03	6,52E-03	6,46E-03	6,52E-03
	Q22	1,05E-02	1,02E-02	9,65E-03	9,61E-03	9,54E-03	9,66E-03
	Q12	3,36E-03	3,35E-03	2,77E-03	2,76E-03	2,72E-03	2,78E-03
1,8	Q11	8,69E-03	8,68E-03	6,70E-03	6,70E-03	6,67E-03	6,69E-03
	Q22	1,01E-02	1,02E-02	9,39E-03	9,39E-03	9,32E-03	9,33E-03
	Q12	3,15E-03	3,17E-03	2,82E-03	2,82E-03	2,80E-03	2,79E-03
1,9	Q11	7,81E-03	7,81E-03	6,90E-03	6,90E-03	6,89E-03	6,90E-03
	Q22	9,84E-03	9,88E-03	9,47E-03	9,47E-03	9,44E-03	9,45E-03
	Q12	3,02E-03	3,03E-03	2,88E-03	2,88E-03	2,87E-03	2,88E-03
2,0	Q11	7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03
	Q22	9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03
	Q12	2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03
2,1	Q11	6,64E-03	6,64E-03	7,44E-03	7,44E-03	7,43E-03	7,43E-03
	Q22	9,88E-03	9,98E-03	1,04E-02	1,04E-02	1,02E-02	1,02E-02
	Q12	3,01E-03	3,04E-03	3,15E-03	3,15E-03	3,12E-03	3,12E-03
2,2	Q11	6,25E-03	6,29E-03	7,75E-03	7,75E-03	7,77E-03	7,78E-03
	Q22	1,02E-02	1,04E-02	1,10E-02	1,10E-02	1,13E-02	1,13E-02
	Q12	3,12E-03	3,19E-03	3,31E-03	3,32E-03	3,41E-03	3,40E-03
2,3	Q11	5,89E-03	5,88E-03	8,08E-03	8,08E-03	8,10E-03	8,10E-03
	Q22	9,78E-03	9,63E-03	1,15E-02	1,15E-02	1,17E-02	1,17E-02
	Q12	3,04E-03	3,00E-03	3,48E-03	3,48E-03	3,53E-03	3,53E-03
2,4	Q11	5,61E-03	5,61E-03	8,44E-03	8,44E-03	8,48E-03	8,46E-03
	Q22	9,54E-03	9,56E-03	1,22E-02	1,22E-02	1,24E-02	1,24E-02
	Q12	3,01E-03	3,02E-03	3,66E-03	3,66E-03	3,70E-03	3,70E-03
2,5	Q11	5,38E-03	5,38E-03	8,84E-03	8,84E-03	8,87E-03	8,86E-03
	Q22	9,36E-03	9,36E-03	1,29E-02	1,29E-02	1,30E-02	1,30E-02
	Q12	3,01E-03	3,01E-03	3,87E-03	3,87E-03	3,89E-03	3,90E-03

Окончание приложения 7

п		A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	Q11	5,20E-03		9,27E-03		9,31E-03	
	Q22	9,22E-03		1,37E-02		1,38E-02	
	Q12	1,02E-03		4,10E-03		4,12E-03	
2,7		5,05E-03		9,73E-03		9,75E-03	
		4,07E-03		1,44E-02		1,47E-02	
		3,03E-03		4,32E-03		4,40E-03	
2,8		4,91E-03		1,02E-02		1,00E-02	
		8,94E-03		1,50E-02		1,49E-02	
		3,04E-03		4,53E-03		4,47E-03	
2,9		4,74E-03		1,07E-02		8,30E-03	
		8,73E-03		1,58E-02		1,24E-02	
		2,97E-03		4,77E-03		3,71E-03	
3		2,49E-03		1,13E-02		4,32E-02	
		5,06E-03		1,65E-02		5,81E-02	
		5,94E-04		5,03E-03		1,69E-02	



Приложение 8

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта С из [29, с. 160], триангуляция

n	Q	A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	4,87E-03		3,41E-03		3,38E-03	
	Q22	2,84E-03		1,67E-03		1,64E-03	
	Q12	-3,32E-03		6,67E-04		-3,33E-04	
1,2	Q11	2,62E-03		2,28E-03		2,16E-03	
	Q22	1,24E-03		1,37E-03		1,36E-03	
	Q12	7,13E-04		2,57E-04		1,75E-04	
1,3	Q11	2,28E-03		2,10E-03		2,07E-03	
	Q22	1,26E-03		1,35E-03		1,37E-03	
	Q12	6,92E-04		2,22E-04		1,65E-04	
1,4	Q11	1,98E-03		2,08E-03		2,05E-03	
	Q22	1,24E-03		1,37E-03		1,41E-03	
	Q12	5,92E-04		2,55E-04		1,97E-04	
1,5	Q11	1,78E-03	1,38E-03	2,08E-03	2,09E-03	2,05E-03	2,13E-03
	Q22	1,24E-03	1,56E-03	1,38E-03	1,38E-03	1,42E-03	1,43E-03
	Q12	4,56E-04	4,57E-04	3,13E-04	3,20E-04	2,62E-04	2,74E-04
1,6	Q11	1,62E-03	1,40E-03	2,11E-03	2,11E-03	2,06E-03	2,55E-03
	Q22	1,24E-03	1,44E-03	1,39E-03	1,39E-03	1,41E-03	1,62E-03
	Q12	3,17E-04	3,37E-04	3,89E-03	3,91E-04	3,38E-04	7,04E-04
1,7	Q11	1,29E-03	1,28E-03	2,34E-03	2,34E-03	2,14E-03	2,23E-03
	Q22	1,19E-03	1,21E-03	1,44E-03	1,44E-03	1,42E-03	1,41E-03
	Q12	3,88E-05	3,98E-05	5,58E-04	5,57E-04	4,52E-04	4,92E-04
1,8	Q11	1,68E-03	1,70E-03	1,83E-03	1,83E-03	1,87E-03	1,88E-03
	Q22	1,30E-03	1,30E-03	1,31E-03	1,31E-03	1,33E-03	1,33E-03
	Q12	3,12E-04	3,15E-04	3,55E-03	3,55E-04	3,64E-04	3,68E-04
1,9	Q11	1,79E-03	1,79E-03	1,71E-03	1,71E-03	1,71E-03	1,72E-03
	Q22	1,39E-03	1,33E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,30E-03	1,30E-03
	Q12	3,63E-04	3,63E-04	3,27E-04	3,27E-04	3,25E-04	3,27E-04
2,0	Q11	1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03
	Q22	1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03
	Q12	3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04
2,1	Q11	1,64E-03	1,65E-03	1,83E-03	1,83E-03	1,84E-03	1,83E-03
	Q22	1,31E-03	1,31E-03	1,39E-03	1,39E-03	1,40E-03	1,40E-03
	Q12	3,00E-04	3,00E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,38E-04	3,38E-04
2,2	Q11	1,54E-03	1,53E-03	1,99E-03	1,99E-03	2,02E-03	2,03E-03
	Q22	1,30E-03	1,33E-03	1,52E-03	1,52E-03	1,57E-03	1,59E-03
	Q12	2,46E-04	2,48E-04	3,06E-04	3,05E-04	2,64E-04	2,52E-04
2,3	Q11	1,42E-03	1,41E-03	2,20E-03	2,20E-03	2,32E-03	2,26E-03
	Q22	1,32E-03	1,33E-03	1,74E-03	1,74E-03	2,02E-03	1,86E-03
	Q12	2,01E-04	2,02E-04	2,18E-04	2,17E-04	3,47E-05	1,32E-04
2,4	Q11	1,26E-03	1,26E-03	2,45E-03	2,45E-03	2,48E-03	2,49E-03
	Q22	1,28E-03	1,26E-03	2,03E-03	2,03E-03	2,11E-03	2,11E-03
	Q12	1,98E-04	1,97E-04	9,66E-05	9,82E-05	4,57E-05	4,37E-05
2,5	Q11	1,13E-03	1,13E-03	2,70E-03	2,70E-03	2,68E-03	2,71E-03
	Q22	1,20E-03	1,18E-03	2,32E-03	2,32E-03	2,31E-03	2,34E-03
	Q12	2,06E-04	2,04E-04	2,68E-07	1,80E-06	1,03E-05	-1,47E-05

Окончание приложения 8

п		A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	Q11	1,02E-03		2,93E-03		2,93E-03	
	Q22	1,02E-03		2,56E-03		2,58E-03	
	Q12	2,11E-04		-4,34E-05		-4,54E-05	
2,7		9,14E-04		3,15E-03		3,18E-03	
		1,02E-03		2,75E-03		2,85E-03	
		2,13E-04		-5,15E-05		-1,06E-04	
2,8		8,23E-04		3,38E-03		3,34E-03	
		9,26E-04		2,93E-03		2,99E-03	
		2,14E-04		-4,51E-05		-1,04E-04	
2,9		7,29E-04		3,61E-03		2,80E-03	
		8,25E-04		3,11E-03		2,46E-03	
		2,00E-04		-3,47E-05		-6,14E-05	
3		4,31E-04		3,85E-03		1,12E-02	
		3,47E-04		3,29E-03		7,56E-03	
		-6,95E-05		-2,41E-05		-1,29E-03	

Приложение 9

Таблица П9.1

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 5 из [5, с. 93], триангуляция

n		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	5,88E-05		2,11E-03		2,69E-03	
	Q22	2,96E-05		5,68E-04		7,47E-04	
	Q12	2,96E-05		7,72E-04		1,02E-03	
1,2		3,43E-05		1,49E-03		1,70E-03	
		4,96E-05		4,80E-04		6,54E-04	
		9,92E-05		5,21E-04		6,94E-04	
1,3		5,45E-04		1,24E-03		1,41E-03	
		7,08E-05		4,31E-04		6,18E-04	
		1,50E-04		3,96E-04		5,65E-04	
1,4		7,70E-04		1,16E-03		1,26E-03	
		9,61E-05		4,01E-04		5,83E-04	
		2,05E-04		3,37E-04		4,61E-04	
1,5		9,93E-04	8,01E-05	1,14E-03	1,15E-03	1,17E-03	1,18E-04
		1,22E-04	6,42E-05	3,80E-04	3,83E-04	5,38E-04	2,49E-04
		2,55E-04	-1,11E-05	3,01E-04	3,07E-04	3,80E-04	-7,06E-05
1,6		1,21E-03	-1,31E-07	1,14E-03	1,14E-03	1,16E-03	3,32E-03
		1,53E-04	-3,59E-06	3,68E-04	3,71E-04	4,62E-04	5,53E-04
		3,01E-04	-3,49E-06	2,94E-04	2,95E-04	3,28E-04	9,29E-04
1,7		1,33E-04	1,60E-03	1,16E-03	1,16E-03	1,17E-03	1,21E-03
		2,05E-04	2,75E-04	3,61E-04	3,64E-04	3,90E-04	3,72E-04
		3,45E-04	4,77E-04	2,87E-04	2,88E-04	2,98E-04	2,78E-04
1,8		1,27E-03	1,27E-03	1,18E-03	1,18E-03	1,19E-03	1,31E-03
		2,64E-04	2,89E-04	3,59E-04	3,61E-04	3,52E-04	3,78E-04
		3,37E-04	3,55E-04	2,84E-04	2,84E-04	2,84E-04	3,30E-04
1,9		1,24E-03	1,24E-03	1,22E-03	1,22E-03	1,22E-03	1,22E-03
		3,21E-04	3,20E-04	3,52E-04	3,52E-04	3,43E-04	3,47E-04
		3,11E-04	3,10E-04	2,86E-04	2,86E-04	2,85E-04	2,88E-04
2		1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03
		3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04	3,51E-04
		2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04	2,93E-04
2,1		1,31E-03	1,31E-03	1,31E-03	1,31E-03	1,32E-03	1,31E-04
		3,70E-04	3,70E-04	3,68E-04	3,69E-04	3,66E-04	3,66E-04
		2,75E-04	2,75E-04	3,06E-04	3,06E-04	3,07E-04	3,06E-04
2,2		1,38E-03	1,38E-03	1,37E-03	1,37E-03	1,37E-03	1,37E-03
		3,84E-04	3,84E-04	3,92E-04	3,92E-04	3,86E-04	3,86E-04
		2,55E-04	2,55E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,24E-04	3,23E-04
2,3		1,46E-03	1,46E-03	1,43E-03	1,43E-03	1,43E-03	1,43E-03
		3,95E-04	3,95E-04	4,17E-04	4,17E-04	4,08E-04	4,08E-04
		2,33E-04	2,33E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,43E-04	3,43E-04
2,4		1,56E-03	1,56E-03	1,50E-03	1,50E-03	1,51E-03	1,51E-03
		4,05E-04	4,05E-04	4,43E-04	4,43E-04	4,32E-04	4,32E-04
		2,08E-04	2,08E-04	3,64E-04	3,64E-04	3,66E-04	3,66E-04
2,5		1,68E-03	1,68E-03	1,58E-03	1,58E-03	1,60E-03	1,59E-03
		4,15E-04	4,15E-04	4,70E-04	4,70E-04	4,57E-04	4,57E-04
		1,81E-04	1,81E-04	3,88E-04	3,88E-04	3,92E-04	3,92E-04

Окончание табл. П9.1

<i>n</i>	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	1,82E-03		1,67E-03		1,70E-03	
	4,25E-04		4,97E-04		4,81E-04	
	1,51E-04		4,15E-04		4,19E-04	
2,7	2,00E-03		1,78E-03		1,83E-03	
	4,36E-04		5,24E-04		5,07E-04	
	1,16E-04		4,44E-04		4,53E-04	
2,8	2,20E-03		1,92E-03		1,94E-03	
	4,49E-04		5,50E-04		5,18E-04	
	7,71E-05		4,74E-04		4,68E-04	
2,9	2,22E-03		2,09E-03		1,68E-04	
	4,60E-04		5,76E-04		4,28E-04	
	2,57E-05		5,04E-04		3,96E-04	
3	1,50E-04		2,30E-03		6,00E-03	
	3,29E-04		6,02E-04		1,63E-03	
	-3,72E-05		5,34E-04		2,91E-03	

Таблица П9.2

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 7 из [5, с. 129], триангуляция

n		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	2,14E-04		3,21E-03		4,30E-03	
	Q22	1,96E-04		1,11E-03		1,10E-03	
	Q12	-4,66E-05		-9,11E-04		-1,06E-03	
1,2		8,98E-04		1,92E-03		2,10E-03	
		1,07E-03		6,77E-04		6,84E-04	
		-4,95E-04		-2,20E-04		-2,04E-04	
1,3		1,09E-03		1,02E-03		1,01E-03	
		1,20E-03		5,60E-04		5,65E-04	
		-4,25E-04		-1,01E-04		-8,67E-05	
1,4		1,00E-03		6,80E-04		6,68E-04	
		1,03E-03		5,30E-04		5,34E-04	
		-2,76E-04		-4,68E-05		-4,06E-05	
1,5		8,91E-04	8,36E-04	5,78E-04	5,75E-04	5,73E-04	6,47E-04
		8,76E-04	8,16E-04	5,54E-04	5,51E-04	5,65E-04	5,91E-04
		-1,82E-04	-1,60E-04	-4,04E-05	-3,99E-05	-3,95E-05	-3,74E-05
1,6		8,00E-04	8,15E-04	5,50E-04	5,50E-04	5,47E-04	5,48E-04
		7,79E-04	7,84E-04	5,34E-04	5,34E-04	5,29E-04	5,36E-04
		-1,28E-04	-1,31E-04	-3,97E-05	-3,97E-05	-3,64E-05	-3,31E-05
1,7		7,31E-04	7,32E-04	5,45E-04	5,45E-04	5,43E-04	5,45E-04
		7,13E-04	7,13E-04	5,20E-04	5,20E-04	5,18E-04	5,20E-04
		-9,89E-05	-9,90E-05	-3,32E-05	-3,32E-05	-3,23E-05	-3,23E-05
1,8		6,74E-04	6,74E-04	5,54E-04	5,54E-04	5,54E-04	5,55E-04
		6,52E-04	6,52E-04	5,30E-04	5,30E-04	5,29E-04	5,30E-04
		-7,48E-05	-7,48E-05	-3,30E-05	-3,30E-05	-3,22E-05	-3,28E-05
1,9		6,27E-04	6,27E-04	5,70E-04	5,70E-04	5,70E-04	5,70E-04
		6,02E-04	6,03E-04	5,44E-04	5,44E-04	5,44E-04	5,45E-04
		-5,45E-05	-5,45E-05	-3,47E-05	-3,47E-05	-3,44E-05	-3,45E-05
2		5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04	5,89E-04
		5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04	5,63E-04
		-3,64E-05	-3,64E-05	-3,65E-05	-3,64E-05	-3,64E-05	-3,64E-05
2,1		5,60E-04	5,60E-04	6,14E-04	6,14E-04	6,14E-04	6,14E-04
		5,32E-04	5,32E-04	5,86E-04	5,86E-04	5,85E-04	5,86E-04
		-1,94E-05	-1,95E-05	-3,67E-05	-3,67E-05	-3,66E-05	-3,68E-05
2,2		5,41E-04	5,43E-04	6,50E-04	6,50E-04	6,48E-04	6,50E-04
		5,10E-04	5,09E-04	6,19E-04	6,19E-04	6,18E-04	6,20E-04
		-2,13E-06	-2,14E-06	-3,31E-05	-3,31E-05	-3,19E-05	-3,25E-05
2,3		5,25E-04	5,25E-04	7,00E-04	7,00E-04	7,02E-04	7,04E-04
		4,97E-04	4,98E-04	6,72E-04	6,72E-04	6,80E-04	6,77E-04
		2,11E-05	2,12E-05	-1,28E-05	-1,28E-05	-6,81E-06	-8,03E-06
2,4		5,07E-04	5,05E-04	7,67E-04	7,67E-04	7,54E-04	7,58E-04
		4,87E-04	4,86E-04	7,67E-04	7,67E-04	7,44E-04	7,47E-04
		5,23E-05	5,22E-05	3,79E-05	3,80E-05	2,12E-05	2,50E-05
2,5		4,65E-04	4,65E-04	7,77E-04	7,77E-04	7,72E-04	7,72E-04
		4,39E-04	4,39E-04	7,71E-03	7,71E-04	7,63E-04	7,64E-04
		3,69E-05	3,69E-05	1,29E-05	1,29E-05	5,57E-06	7,56E-06

Окончание табл. П9.2

<i>n</i>	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	4,34E-04		8,06E-04		8,01E-04	
	4,04E-04		8,02E-04		8,00E-04	
	3,31E-05		8,75E-06		6,71E-06	
2,7	4,07E-04		8,39E-04		8,37E-04	
	3,76E-04		8,40E-04		8,33E-04	
	3,11E-05		7,84E-06		1,95E-06	
2,8	3,83E-04		8,75E-04		8,51E-04	
	3,49E-04		8,80E-04		8,57E-04	
	2,85E-05		8,15E-06		5,24E-06	
2,9	3,61E-04		9,13E-04		7,00E-04	
	3,26E-04		9,24E-04		7,04E-04	
	2,85E-05		9,04E-06		2,26E-06	
3	3,04E-04		9,53E-04		8,79E-04	
	2,47E-04		9,69E-04		1,46E-03	
	2,94E-05		1,03E-05		8,14E-04	

Таблица П9.3

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 6 из [5, с. 153], триангуляция

n		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	2,48E-04		5,89E-04		1,30E-02	
	Q22	5,93E-05		4,72E-04		8,67E-04	
	Q12	1,33E-05		3,56E-05		-8,00E-04	
1,2		2,05E-04		4,68E-04		7,76E-04	
		6,21E-05		4,17E-04		8,58E-04	
		-3,44E-06		7,03E-05		3,69E-04	
1,3		5,60E-04		4,08E-04		5,58E-04	
		6,80E-05		3,89E-04		6,64E-04	
		-3,58E-05		8,15E-05		2,22E-04	
1,4		5,75E-04		3,89E-04		4,08E-04	
		1,31E-04		4,54E-04		3,76E-04	
		-5,43E-05		1,19E-04		7,80E-05	
1,5		4,84E-04	-1,86E-04	3,67E-04	3,70E-04	3,69E-04	1,09E-03
		2,40E-04	-2,64E-05	4,36E-04	4,53E-04	3,04E-04	2,40E-04
		4,18E-06	1,28E-04	1,05E-04	1,11E-04	4,67E-05	-1,92E-04
1,6		4,34E-04	3,63E-04	3,37E-04	3,38E-04	3,53E-04	4,05E-04
		2,61E-04	2,37E-04	3,03E-04	3,07E-04	2,80E-04	2,07E-04
		1,62E-05	1,35E-05	4,53E-05	4,68E-05	3,73E-05	5,15E-05
1,7		3,93E-04	3,99E-04	3,29E-04	3,29E-04	3,51E-04	3,48E-04
		2,65E-04	2,41E-04	2,73E-04	2,74E-04	2,72E-04	2,65E-04
		1,77E-05	1,70E-05	2,84E-05	2,87E-05	3,36E-05	3,03E-05
1,8		3,75E-04	3,68E-04	3,28E-04	3,28E-04	3,34E-04	3,39E-04
		2,68E-04	2,70E-04	2,64E-04	2,64E-04	2,64E-04	2,65E-04
		1,74E-05	1,68E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,10E-05	2,05E-05
1,9		3,59E-04	3,32E-04	3,32E-04	3,32E-04	3,33E-04	3,35E-04
		2,70E-04	2,73E-04	2,63E-04	2,63E-04	2,63E-04	2,63E-04
		1,83E-05	1,82E-05	1,65E-05	1,65E-05	1,64E-05	1,66E-05
2		3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04	3,42E-04
		2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04
		1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05	1,60E-05
2,1		3,28E-04	3,28E-04	3,57E-04	3,57E-04	3,58E-04	3,57E-04
		2,69E-04	2,69E-04	2,83E-04	2,83E-04	2,84E-04	2,83E-04
		1,12E-05	1,12E-05	1,72E-05	1,72E-05	1,71E-05	1,72E-05
2,2		3,14E-04	3,14E-04	3,76E-04	3,76E-04	3,76E-04	3,77E-04
		2,68E-04	2,68E-04	3,03E-04	3,03E-04	3,04E-04	3,05E-04
		5,46E-06	5,46E-06	1,90E-05	1,90E-04	1,76E-05	1,77E-05
2,3		3,03E-04	3,03E-04	3,97E-04	3,97E-04	4,00E-04	4,00E-04
		2,67E-04	2,69E-04	3,30E-04	3,30E-04	3,35E-04	3,39E-04
		-6,66E-07	-6,77E-07	2,04E-05	2,03E-05	1,67E-05	1,58E-05
2,4		2,92E-04	2,93E-04	4,22E-04	4,22E-04	4,27E-04	4,22E-04
		2,66E-04	2,68E-04	3,64E-04	3,64E-04	3,75E-04	3,64E-04
		-6,70E-06	-6,76E-06	2,10E-05	2,09E-05	1,33E-05	2,10E-05
2,5		2,84E-04	2,83E-04	4,50E-04	4,50E-04	4,59E-04	4,58E-04
		2,64E-04	2,64E-04	4,04E-04	4,04E-04	4,33E-04	4,15E-04
		-1,24E-05	-1,24E-05	2,09E-05	2,08E-05	5,53E-06	1,06E-05

Окончание табл. П9.3

<i>n</i>	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	2,73E-04		4,80E-04		4,86E-04	
	2,59E-04		4,49E-04		4,56E-04	
	-1,61E-05		2,05E-05		1,52E-05	
2,7	2,64E-04		5,11E-04		5,12E-04	
	2,51E-04		4,97E-04		4,84E-04	
	-1,83E-05		2,07E-05		2,38E-05	
2,8	2,57E-04		5,44E-04		5,31E-04	
	2,43E-04		5,46E-04		5,09E-04	
	-1,99E-05		2,22E-05		2,84E-05	
2,9	2,49E-04		5,78E-04		4,44E-04	
	2,34E-04		5,42E-04		4,30E-04	
	-2,13E-05		2,64E-05		2,84E-05	
3	1,77E-04		6,12E-04		6,68E-04	
	1,51E-04		6,34E-04		1,28E-03	
	-1,51E-05		3,45E-05		7,27E-04	



Таблица П9.4

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 6 из [5, с. 179], трилатерали

n		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	1,72E-04		5,26E-02		1,19E-01	
	Q22	3,37E-05		2,41E-02		4,03E-02	
	Q12	4,33E-05		2,05E-02		5,22E-02	
1,2		-6,64E-03		2,56E-02		2,25E-02	
		-3,75E-04		1,64E-02		1,68E-02	
		-1,64E-03		1,06E-02		9,59E-03	
1,3		-4,55E-04		1,71E-02		1,70E-02	
		-3,59E-05		1,23E-02		1,20E-02	
		-2,50E-04		7,38E-03		7,28E-03	
1,4		4,05E-03		1,23E-02		1,22E-02	
		1,14E-03		8,86E-03		8,69E-03	
		1,69E-03		5,49E-03		5,45E-03	
1,5		2,79E-03	2,71E-03	8,93E-03	8,93E-03	8,93E-03	8,94E-03
		1,08E-03	1,05E-03	6,34E-03	6,34E-03	6,25E-03	6,29E-03
		1,17E-03	1,13E-03	4,04E-03	4,04E-03	4,02E-03	4,06E-03
1,6		2,38E-03	2,37E-03	6,51E-03	6,51E-03	6,51E-03	6,51E-03
		1,13E-03	1,12E-03	4,58E-03	4,58E-03	4,55E-03	4,56E-03
		1,02E-03	1,01E-03	2,96E-03	2,96E-03	2,44E-03	2,96E-03
1,7		2,15E-03	2,15E-03	4,74E-03	4,74E-03	4,74E-03	4,74E-03
		1,17E-03	1,17E-03	3,32E-03	3,32E-03	3,31E-03	3,31E-03
		9,40E-04	9,38E-04	2,16E-03	2,16E-03	2,16E-03	2,16E-03
1,8		2,01E-03	2,00E-04	3,46E-03	3,46E-03	3,46E-03	3,46E-03
		1,21E-03	1,21E-03	2,42E-03	2,42E-03	2,42E-03	2,41E-03
		8,91E-04	8,89E-04	1,58E-03	1,58E-03	1,58E-03	1,58E-03
1,9		1,91E-03	1,91E-03	2,53E-03	2,53E-03	2,53E-03	2,53E-03
		1,24E-03	1,24E-03	1,76E-03	1,76E-03	1,76E-03	1,76E-03
		8,60E-04	8,59E-04	1,15E-03	1,15E-03	1,15E-03	1,15E-03
2		1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03	1,84E-03
		1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03	1,28E-03
		8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04	8,43E-04
2,1		1,81E-03	1,81E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03
		1,33E-03	1,33E-03	9,39E-04	9,39E-04	9,39E-04	9,39E-03
		8,36E-04	8,36E-04	6,16E-04	6,16E-04	6,16E-04	6,16E-04
2,2		1,79E-03	1,89E-03	9,85E-04	9,85E-04	9,85E-04	9,85E-04
		1,38E-03	1,38E-03	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04
		8,38E-04	8,39E-04	4,50E-04	4,50E-04	4,50E-04	4,50E-04
2,3		1,80E-03	1,80E-03	7,20E-04	7,20E-04	7,20E-04	7,20E-04
		1,44E-03	1,44E-03	5,03E-04	5,03E-04	5,04E-04	5,02E-04
		8,47E-04	8,48E-04	3,29E-04	3,29E-04	3,29E-04	3,29E-04
2,4		1,81E-03	1,82E-03	5,26E-04	5,26E-04	5,28E-04	5,26E-04
		1,51E-03	1,51E-03	3,68E-04	3,68E-04	3,68E-04	3,67E-04
		8,63E-04	8,65E-04	2,40E-04	2,40E-04	2,41E-04	2,40E-04
2,5		1,85E-03	1,85E-03	3,86E-04	3,85E-04	3,86E-04	3,85E-04
		1,59E-03	1,59E-03	2,70E-04	2,70E-04	2,70E-04	2,69E-04
		8,86E-04	8,88E-04	1,76E-04	1,76E-04	1,76E-04	1,76E-04

Окончание таблицы П9.4

<i>n</i>	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	1,89E-03		2,81E-04		2,84E-04	
	1,67E-03		1,98E-04		1,98E-04	
	9,14E-04		1,28E-04		1,29E-04	
2,7	1,95E-03		2,06E-04		2,08E-04	
	1,77E-03		1,45E-04		1,47E-04	
	9,50E-04		9,40E-05		9,59E-05	
2,8	2,03E-03		1,51E-04		1,48E-04	
	1,88E-03		1,06E-04		1,07E-04	
	9,93E-04		6,87E-05		6,84E-05	
2,9	1,94E-03		1,10E-04		8,51E-05	
	1,87E-03		7,80E-05		5,99E-05	
	9,04E-04		5,03E-05		3,88E-05	
3	4,00E-04		8,08E-05		4,48E-05	
	5,15E-04		5,73E-04		1,63E-04	
	-4,44E-05		3,68E-05		4,96E-05	

Таблица П9.5

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 5 из [5, с. 202], трилатерация

n		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	1,60E-03		1,26E-02		1,28E-02	
	Q22	2,04E-03		1,36E-02		2,14E-02	
	Q12	-1,88E-04		1,44E-03		-5,40E-03	
1,2		1,34E-03		8,79E-03		8,69E-03	
		1,53E-03		9,26E-03		9,38E-03	
		-5,06E-05		-5,48E-04		-7,96E-04	
1,3		1,16E-03		6,34E-03		6,29E-03	
		1,26E-03		6,51E-03		6,53E-03	
		-4,53E-05		-2,92E-04		-3,93E-04	
1,4		1,05E-03		4,59E-03		4,57E-03	
		1,11E-03		4,62E-03		4,60E-03	
		-4,48E-05		-1,55E-04		-1,95E-04	
1,5		9,53E-04	9,54E-04	3,33E-03	3,33E-03	3,31E-03	3,33E-03
		9,96E-04	9,91E-04	3,32E-03	3,32E-03	3,30E-03	3,32E-03
		-3,90E-05	-3,88E-05	-8,92E-05	-8,92E-05	-9,16E-05	-8,97E-05
1,6		8,75E-04	8,76E-04	2,42E-03	2,42E-03	2,42E-03	2,42E-03
		9,00E-04	8,97E-04	2,40E-03	2,40E-03	2,40E-03	2,40E-03
		-3,22E-05	-3,21E-05	-5,58E-05	-5,58E-05	-5,50E-05	-5,62E-05
1,7		8,12E-04	8,12E-04	1,77E-03	1,77E-03	1,76E-03	1,77E-03
		8,24E-04	8,22E-04	1,75E-03	1,75E-03	1,79E-03	1,75E-03
		-2,62E-05	-2,61E-05	-3,71E-05	-3,71E-05	-3,67E-05	-3,73E-05
1,8		7,61E-04	7,62E-04	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03
		7,63E-04	7,62E-04	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03	1,27E-03
		-2,11E-05	-2,11E-05	-2,57E-05	-2,57E-05	-2,55E-05	-2,59E-05
1,9		7,20E-04	7,20E-04	9,41E-04	9,41E-04	9,40E-04	9,41E-04
		7,16E-04	7,15E-04	9,28E-04	9,28E-04	9,28E-04	9,28E-04
		-1,69E-05	-1,69E-05	-1,84E-05	-1,84E-05	-1,84E-05	-1,84E-05
2		6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04	6,87E-04
		6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04	6,78E-04
		-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05	-1,33E-05
2,1		6,61E-04	6,61E-04	5,02E-04	5,02E-04	5,02E-04	5,02E-04
		6,48E-04	6,48E-04	4,95E-04	4,95E-04	4,95E-04	4,95E-04
		-1,03E-05	-1,03E-05	-9,77E-06	-9,77E-06	-9,71E-06	-9,73E-06
2,2		6,40E-04	6,40E-04	3,67E-04	3,67E-04	3,67E-04	3,67E-04
		6,25E-04	6,25E-04	3,62E-04	3,62E-04	3,62E-04	3,62E-04
		-7,69E-06	-7,69E-06	-7,22E-06	-7,22E-06	-7,04E-06	-7,16E-06
2,3		6,25E-04	6,25E-04	2,68E-04	2,68E-04	2,68E-04	2,68E-04
		6,07E-04	6,07E-04	2,65E-04	2,65E-04	2,65E-04	2,65E-04
		-5,38E-06	-5,38E-06	-5,36E-06	-5,36E-06	-5,34E-06	-5,28E-06
2,4		6,13E-04	6,13E-04	1,96E-04	1,96E-04	1,96E-04	1,96E-04
		5,92E-04	5,93E-04	1,94E-04	1,94E-04	1,94E-04	1,94E-04
		-3,29E-06	-3,29E-06	-3,98E-06	-3,98E-06	-3,87E-06	-3,91E-06
2,5		6,05E-04	6,05E-04	1,43E-04	1,43E-04	1,43E-04	1,43E-04
		5,83E-04	5,83E-04	1,42E-04	1,42E-04	1,42E-04	1,42E-04
		-1,38E-06	-1,38E-06	-2,97E-06	-2,97E-06	-2,77E-06	-2,89E-06

Окончание таблицы П9.5

$\pi$	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	6,00E-04		1,05E-04		1,06E-04	
	5,77E-04		1,04E-04		1,04E-04	
	4,19E-07		-2,21E-06		-1,91E-06	
2,7	5,98E-04		7,67E-05		7,73E-05	
	5,74E-04		7,60E-05		7,61E-05	
	2,13E-06		-1,65E-06		-1,37E-06	
2,8	5,99E-04		5,62E-05		5,51E-05	
	5,74E-04		5,56E-05		5,44E-05	
	3,80E-06		-1,23E-06		1,41E-06	
2,9	6,01E-04		4,11E-05		3,17E-05	
	5,74E-04		4,08E-05		3,10E-05	
	6,27E-06		-9,18E-05		-6,07E-07	
3	5,84E-04		3,01E-05		8,45E-06	
	4,85E-04		2,99E-05		3,34E-05	
	5,20E-05		-6,85E-07		-1,68E-05	

Таблица П19.6

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта № 4 из [5, с. 217], линейно-угловая сеть

n		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	1,69E-05		9,44E-03		9,18E-03	
	Q22	5,83E-06		3,58E-03		5,34E-03	
	Q12	4,73E-06		2,99E-03		3,39E-03	
1,2		2,49E-05		5,79E-03		6,35E-03	
		1,01E-05		2,18E-03		3,45E-03	
		6,73E-06		1,70E-03		2,16E-03	
1,3		4,04E-05		2,56E-03		2,65E-03	
		2,64E-05		1,25E-03		1,87E-03	
		1,50E-05		9,03E-04		1,08E-03	
1,4		5,40E-05		1,53E-03		1,44E-03	
		4,12E-05		7,25E-04		7,99E-04	
		2,08E-05		6,00E-04		5,38E-04	
1,5		6,21E-05	8,89E-05	1,53E-03	1,22E-03	1,18E-03	4,44E-04
		4,28E-05	5,18E-05	5,91E-04	5,11E-04	5,06E-04	3,21E-04
		2,26E-05	3,41E-05	6,72E-04	5,16E-04	4,32E-04	-3,60E-05
1,6		7,98E-05	7,96E-05	4,07E-04	3,83E-04	5,31E-04	1,77E-04
		4,58E-05	4,35E-05	2,21E-04	2,16E-04	2,84E-04	2,52E-04
		3,28E-05	3,16E-05	1,30E-04	1,19E-04	1,10E-04	7,77E-05
1,7		8,89E-05	7,57E-05	2,19E-04	2,11E-04	1,88E-04	1,82E-04
		4,98E-05	4,36E-05	1,40E-04	1,35E-04	1,21E-04	1,18E-04
		2,97E-05	2,54E-05	1,91E-05	2,48E-05	5,31E-05	5,14E-05
1,8		8,57E-05	8,41E-05	1,12E-04	1,12E-04	1,11E-04	1,15E-04
		4,37E-05	4,45E-05	7,64E-05	7,64E-05	7,72E-05	7,79E-05
		2,62E-05	2,61E-05	2,61E-05	2,61E-05	2,80E-05	2,95E-05
1,9		7,95E-05	7,95E-05	8,37E-05	8,37E-05	8,38E-05	8,40E-05
		4,16E-05	4,19E-05	5,28E-05	5,28E-05	5,31E-05	5,31E-05
		2,30E-05	2,32E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,14E-05	2,15E-05
2		7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05	7,27E-05
		3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05	3,94E-05
		2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05	2,03E-05
2,1		6,62E-05	6,62E-05	6,86E-05	6,86E-05	6,86E-05	6,85E-05
		3,73E-05	3,73E-05	3,17E-05	3,17E-05	3,18E-05	3,17E-05
		1,80E-05	1,80E-05	2,12E-05	2,12E-05	2,12E-05	2,12E-05
2,2		6,02E-05	6,02E-05	6,78E-05	6,78E-05	6,76E-05	6,76E-05
		3,54E-05	3,54E-05	2,76E-05	2,76E-05	2,77E-05	2,77E-05
		1,59E-05	1,59E-05	2,28E-05	2,28E-05	2,28E-05	2,29E-05
2,3		5,48E-05	5,49E-05	6,86E-05	6,86E-05	6,84E-05	6,85E-05
		3,38E-05	3,38E-05	2,57E-05	2,57E-05	2,61E-05	2,61E-05
		1,42E-05	1,42E-05	2,46E-05	2,47E-05	2,49E-05	2,99E-05
2,4		5,01E-05	5,01E-05	7,03E-05	7,03E-05	7,02E-05	7,01E-05
		3,23E-05	3,23E-05	2,54E-05	2,54E-05	2,60E-05	2,59E-05
		1,26E-05	1,26E-05	2,66E-05	2,66E-05	2,71E-05	2,70E-05
2,5		4,58E-05	4,59E-05	7,24E-05	7,24E-05	7,20E-05	7,21E-05
		3,11E-05	3,10E-05	2,60E-05	2,60E-05	2,67E-05	2,67E-05
		1,12E-05	1,12E-05	2,86E-05	2,86E-05	2,92E-05	2,92E-05

Окончание таблицы П9.6

<i>n</i>	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	4,20E-05		7,46E-05		7,42E-05	
	3,00E-05		2,73E-05		2,82E-05	
	1,00E-05		3,06E-05		3,14E-05	
2,7	3,87E-05		7,68E-05		7,63E-05	
	2,90E-05		2,91E-05		3,02E-05	
	8,96E-06		3,26E-05		3,36E-05	
2,8	3,57E-05		7,89E-05		7,68E-05	
	2,81E-05		3,12E-05		3,16E-05	
	7,99E+04		3,46E-05		3,48E-05	
2,9	3,20E-05		8,08E-05		6,20E-05	
	2,88E-05		3,36E-05		2,70E-05	
	6,62E-05		3,65E-05		2,88E-05	
3	1,13E-05		8,26E-05		2,91E-06	
	1,54E-05		3,62E-05		1,65E-05	
	-1,13E-06		3,83E-05		-5,46E-06	

Таблица П9.7

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта С из [6, с. 145], триангуляция

и		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	7,10E-02		6,38E-03		4,93E-03	
	Q22	4,94E-02		9,73E-03		7,23E-03	
	Q12	2,07E-02		-2,38E-03		1,46E-03	
1,2		3,56E-02		6,27E-03		6,10E-03	
		2,62E-02		9,81E-03		9,26E-03	
		1,06E-02		2,12E-03		2,00E-03	
1,3		2,34E-02		6,22E-03		6,13E-03	
		1,84E-02		9,88E-03		9,45E-03	
		7,06E-03		2,26E-03		2,18E-03	
1,4		1,74E-02		6,23E-03		6,15E-03	
		1,47E-02		9,93E-03		9,59E-03	
		5,34E-03		2,41E-03		2,34E-03	
1,5		1,38E-02	1,23E-02	6,28E-03	6,28E-03	6,22E-03	6,24E-03
		1,25E-03	1,22E-02	1,00E-02	9,95E-03	9,69E-03	1,03E-02
		4,35E-03	3,88E-03	2,54E-03	2,55E-03	2,48E-03	2,61E-03
1,6		1,15E-02	1,12E-02	6,38E-03	6,38E-03	6,35E-03	6,32E-03
		1,10E-02	1,18E-02	1,03E-02	1,01E-02	9,96E-03	1,00E-02
		3,72E-03	3,86E-03	2,68E-03	2,68E-03	2,63E-03	2,72E-03
1,7		9,86E-03	1,00E-02	6,52E-03	6,52E-03	6,46E-03	6,52E-03
		1,05E-02	1,02E-02	9,65E-03	9,61E-03	9,54E-03	9,66E-03
		3,36E-03	3,35E-03	2,77E-03	2,76E-03	2,72E-03	2,78E-03
1,8		8,69E-03	8,68E-03	6,70E-03	6,70E-03	6,67E-03	6,69E-03
		1,01E-02	1,02E-02	9,39E-03	9,39E-03	9,32E-03	9,33E-03
		3,15E-03	3,17E-03	2,82E-03	2,82E-03	2,80E-03	2,79E-03
1,9		7,81E-03	7,81E-03	6,90E-03	6,90E-03	6,89E-03	6,90E-03
		9,84E-03	9,88E-03	9,47E-03	9,47E-03	9,44E-03	9,45E-03
		3,02E-03	3,03E-03	2,88E-03	2,88E-03	2,87E-03	2,88E-03
2		7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03	7,15E-03
		9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03	9,73E-03
		2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03	2,97E-03
2,1		6,64E-03	6,64E-03	7,44E-03	7,44E-03	7,43E-03	7,43E-03
		9,88E-03	9,98E-03	1,04E-02	1,04E-02	1,02E-02	1,02E-02
		3,01E-03	3,04E-03	3,15E-03	3,15E-03	3,12E-03	3,12E-03
2,2		6,25E-03	6,29E-03	7,75E-03	7,75E-03	7,77E-03	7,78E-03
		1,02E-02	1,04E-02	1,10E-02	1,10E-02	1,13E-02	1,13E-02
		3,12E-03	3,19E-03	3,31E-03	3,32E-03	3,41E-03	3,40E-03
2,3		5,89E-03	5,88E-03	8,08E-03	8,08E-03	8,10E-03	8,10E-03
		9,78E-03	9,63E-03	1,15E-02	1,15E-02	1,17E-02	1,17E-02
		3,04E-03	3,00E-03	3,48E-03	3,48E-03	3,53E-03	3,53E-03
2,4		5,61E-03	5,61E-03	8,44E-03	8,44E-03	8,48E-03	8,46E-03
		9,54E-03	9,56E-03	1,22E-02	1,22E-02	1,24E-02	1,24E-02
		3,01E-03	3,02E-03	3,66E-03	3,66E-03	3,70E-03	3,70E-03
2,5		5,38E-03	5,38E-03	8,84E-03	8,84E-03	8,87E-03	8,86E-03
		9,36E-03	9,36E-03	1,29E-02	1,29E-02	1,30E-02	1,30E-02
		3,01E-03	3,01E-03	3,87E-03	3,87E-03	3,89E-03	3,90E-03

Окончание таблицы П9.

n	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	5,20E-03		9,27E-03		9,31E-03	
	9,22E-03		1,37E-02		1,38E-02	
	3,02E-03		4,10E-03		4,12E-03	
2,7	5,05E-03		9,73E-03		9,75E-03	
	4,07E-03		1,44E-02		1,47E-02	
	3,03E-03		4,32E-03		4,40E-03	
2,8	4,91E-03		1,02E-02		1,00E-02	
	8,94E-03		1,50E-02		1,49E-02	
	3,04E-03		4,53E-03		4,47E-03	
2,9	4,74E-03		1,07E-02		8,30E-03	
	8,73E-03		1,58E-02		1,24E-02	
	2,97E-03		4,77E-03		3,71E-03	
3	2,49E-03		1,13E-02		4,32E-02	
	5,06E-03		1,65E-02		5,81E-02	
	5,94E-04		5,03E-03		1,69E-02	



Таблица П9.8

Элементы Q11, Q22, Q12 для пункта С из [6, с. 160], триангуляции

и		A1	A2	B1	B2	C1	C2
1,1	Q11	4,87E-03		3,41E-03		3,38E-03	
	Q22	2,84E-03		1,67E-03		1,64E-03	
	Q12	-3,32E-03		6,67E-04		-3,33E-04	
1,2		2,62E-03		2,28E-03		2,16E-03	
		1,24E-03		1,37E-03		1,36E-03	
		7,13E-04		2,57E-04		1,75E-04	
1,3		2,28E-03		2,10E-03		2,07E-03	
		1,26E-03		1,35E-03		1,37E-03	
		6,92E-04		2,22E-04		1,65E-04	
1,4		1,98E-03		2,08E-03		2,05E-03	
		1,24E-03		1,37E-03		1,41E-03	
		5,92E-04		2,55E-04		1,97E-04	
1,5		1,78E-03	1,38E-03	2,08E-03	2,09E-03	2,05E-03	2,13E-03
		1,24E-03	1,56E-03	1,38E-03	1,38E-03	1,42E-03	1,43E-03
		4,56E-04	4,57E-04	3,13E-04	3,20E-04	2,62E-04	2,74E-04
1,6		1,62E-03	1,40E-03	2,11E-03	2,11E-03	2,06E-03	2,55E-03
		1,24E-03	1,44E-03	1,39E-03	1,39E-03	1,41E-03	1,62E-03
		3,17E-04	3,37E-04	3,89E-03	3,91E-04	3,38E-04	7,04E-04
1,7		1,29E-03	1,28E-03	2,34E-03	2,34E-03	2,14E-03	2,23E-03
		1,19E-03	1,21E-03	1,44E-03	1,44E-03	1,42E-03	1,41E-03
		3,88E-05	3,98E-05	5,58E-04	5,57E-04	4,52E-04	4,92E-04
1,8		1,68E-03	1,70E-03	1,83E-03	1,83E-03	1,87E-03	1,88E-03
		1,30E-03	1,30E-03	1,31E-03	1,31E-03	1,33E-03	1,33E-03
		3,12E-04	3,15E-04	3,55E-03	3,55E-04	3,64E-04	3,68E-04
1,9		1,79E-03	1,79E-03	1,71E-03	1,71E-03	1,71E-03	1,72E-03
		1,39E-03	1,33E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,30E-03	1,30E-03
		3,63E-04	3,63E-04	3,27E-04	3,27E-04	3,25E-04	3,27E-04
2		1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03	1,74E-03
		1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03	1,32E-03
		3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,43E-04
2,1		1,64E-03	1,65E-03	1,83E-03	1,83E-03	1,84E-03	1,83E-03
		1,31E-03	1,31E-03	1,39E-03	1,39E-03	1,40E-03	1,40E-03
		3,00E-04	3,00E-04	3,43E-04	3,43E-04	3,38E-04	3,38E-04
2,2		1,54E-03	1,53E-03	1,99E-03	1,99E-03	2,02E-03	2,03E-03
		1,30E-03	1,33E-03	1,52E-03	1,52E-03	1,57E-03	1,59E-03
		2,46E-04	2,48E-04	3,06E-04	3,05E-04	2,64E-04	2,52E-04
2,3		1,42E-03	1,41E-03	2,20E-03	2,20E-03	2,32E-03	2,26E-03
		1,32E-03	1,33E-03	1,74E-03	1,74E-03	2,02E-03	1,86E-03
		2,01E-04	2,02E-04	2,18E-04	2,17E-04	3,47E-05	1,32E-04
2,4		1,26E-03	1,26E-03	2,45E-03	2,45E-03	2,48E-03	2,49E-03
		1,28E-03	1,26E-03	2,03E-03	2,03E-03	2,11E-03	2,11E-03
		1,98E-04	1,97E-04	9,66E-05	9,82E-05	4,57E-05	4,37E-05
2,5		1,13E-03	1,13E-03	2,70E-03	2,70E-03	2,68E-03	2,71E-03
		1,20E-03	1,18E-03	2,32E-03	2,32E-03	2,31E-03	2,34E-03
		2,06E-04	2,04E-04	2,68E-07	1,80E-06	1,03E-05	-1,47E-05

Окончание таблицы П9.8

<i>n</i>	A1	A2	B1	B2	C1	C2
2,6	1,02E-03		2,93E-03		2,93E-03	
	1,02E-03		2,56E-03		2,58E-03	
	2,11E-04		-4,34E-05		-4,54E-05	
2,7	9,14E-04		3,15E-03		3,18E-03	
	1,02E-03		2,75E-03		2,85E-03	
	2,13E-04		-5,15E-05		-1,06E-04	
2,8	8,23E-04		3,38E-03		3,34E-03	
	9,26E-04		2,93E-03		2,99E-03	
	2,14E-04		-4,51E-05		-1,04E-04	
2,9	7,29E-04		3,61E-03		2,80E-03	
	8,25E-04		3,11E-03		2,46E-03	
	2,00E-04		-3,47E-05		-6,14E-05	
3	4,31E-04		3,85E-03		1,12E-02	
	3,47E-04		3,29E-03		7,56E-03	
	-6,95E-05		-2,41E-05		-1,29E-03	

*Научное издание*

ЯЛТЫХОВ Вадим Викторович  
КУПРИЕНКО Николай Олегович  
ЛЕВДАНСКИЙ Павел Михайлович

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА  $L_p$ -ОЦЕНОК  
В УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ**

Редактор *Г.А. Тарасова*

Дизайн обложки *В.А. Виноградовой*

---

Подписано в печать 30.09.08. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.  
Ризография. Усл. печ. л. 5,8. Уч.-изд. л. 5, 5. Тираж 50. Заказ 1610.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛП № 02330/0133020 от 30.04.2004 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.2004  
211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29