

Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»**

**В. И. Мицкевич,
А. Ю. Будо, Е. В. Грищенко**

**АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ И УРАВНИВАНИЯ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ**

**Новополоцк
ПУ
2008**

УДК 528.063
ББК 26.12
М70

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики УО «ПГУ» Э. М. ПАЛЬЧИК;
канд. техн. наук, доц. каф. геодезии и кадастров УО «ПГУ» Г. Е. ГОЛОВАНЬ

Мицкевич, В. И.

М70 Альтернативные методы проектирования и уравнивания геодезических сетей / В. И. Мицкевич, А. Ю. Будо, Е. В. Грищенко. – Новополоцк : ПГУ, 2008. – 280 с.
ISBN 978-985-418-716-7.

В монографии рассмотрены вопросы проектирования геодезических построений с использованием чисел обусловленности, а также объединенный способ уравнивания, включающий в себя как частный случай обобщенный метод наименьших квадратов.

Предназначена для специалистов в области геодезии. Может быть полезна студентам и аспирантам геодезических специальностей.

УДК 528.063
ББК 26.12

ISBN 978-985-418-716-7

© Мицкевич В. И., Будо А. Ю., Грищенко Е. В., 2008
© УО «Полоцкий государственный университет», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
1. Оптимальное проектирование геодезических сетей.....	6
1.1. Засечки как элементы геодезических сетей.....	6
1.1.1. Исследования логических взаимосвязей между качеством построения засечек и сетей из них состоящих	6
1.1.2. Применение элементов генной инженерии при проектировании геодезических сетей.....	11
1.1.3. Об исключении из правил Ансермета	15
1.2. О проектировании геодезических построений методами нелинейного программирования	19
1.2.1. Проектирование засечек на плоскости	19
1.2.2. Проектирование пространственных засечек.....	25
1.2.3. Исследование эффекта сжатия сетей	32
1.2.4. Проектирование космических засечек.....	36
1.3. О дефектах конфигурации и дефектах построений	39
1.3.1. Анализ построений геодезических засечек на плоскости	39
1.3.2. Дефект конфигурации пространственных засечек	55
2. Анализ качества построений засечек группы пунктов.....	60
2.1. Засечки двух определяемых пунктов	60
2.1.1. Засечки двух пунктов по двум исходным	60
2.1.2. О дополнительных измерениях при устранении дефектов конфигурации и дефектов данных.....	64
2.1.3. Противоположные по качеству засечки	74
2.2. Засечки трёх определяемых пунктов по трём исходным	88
2.3. Засечки четырёх определяемых пунктов по четырём исходным	95
3. Универсальный метод решения геодезических засечек.....	103
3.1. Об области сходимости итераций, выполняемых нелинейными методами.....	103
3.2. О вычислении координат пунктов методом релаксации и другими методами нелинейного программирования.....	118
4. Разработка обобщённых методов Lp-оценок и многокритериальной оптимизации	128
4.1. Обоснование обобщённого метода наименьших квадратов, выполненное Ю.В. Кемницем.....	128
4.1.1. Основная теорема обобщённого метода наименьших квадратов	128
4.1.2. Обобщённый коррелятный способ уравнивания	132
4.1.3. Вспомогательная теорема обобщённого метода наименьших квадратов.....	135
4.2. Вывод формул для обобщённого уравнивания по методу Lp-оценок	137
4.2.1. Минимизация целевых функций по методу Ньютона	139
4.2.2. Аналитический контроль формул классического (необобщённого) метода Lp-оценок.....	139
4.2.3. Анализ формул обобщённого метода Lp-оценок	142
4.3. Основные формулы для обобщённого многокритериального способа уравнивания	147

5. Практическая апробация нового метода Lp-оценок	158
5.1. Нелинейный обобщенный метод Ньютона	158
5.2. О методике правильного выбора начальных координат определяемых пунктов	165
5.3. О свойствах обобщенного метода Lp-оценок	168
5.4. Примеры математической обработки	175
6. Практическая апробация обобщенного метода многокритериальной оптимизации	183
6.1. Теорема Гаусса – Маркова и многокритериальная оптимизация	183
6.2. Тестирование нового метода МК	190
6.3. Сравнение программных продуктов на тестовых примерах	207
6.3.1. Уравнивание геодезического четырёхугольника по МНК с использованием углов, замыкающих горизонт, и корреляционной матрицы поправок K_p	207
6.3.2. Уравнивание геодезического четырёхугольника по МК	209
6.4. О вычислении корреляционной матрицы измерений после уравнивания	217
7. Новые методы математической обработки спутниковых зависимых GPS-измерений	238
7.1. Робастное уравнивание GPS-измерений	238
7.2. Обобщенный метод Lp-оценок	243
7.2.1. Целевые функции при реализации алгоритма Lp-оценок	244
7.2.2. Реализация алгоритма Lp-оценок параметрическим способом	246
7.2.3. Реализация алгоритмов Lp-оценок коррелятным способом	248
7.3. О влиянии коэффициентов корреляции на результаты уравнивания	251
7.4. Об обработке GPS и плановых сетей без исходных пунктов	259
Литература	272

ПРЕДИСЛОВИЕ

С широким внедрением в производство современной вычислительной техники по-новому и более универсально стали решаться задачи проектирования и уравнивания сетей сгущения, съемочных сетей и сетей глобального спутникового позиционирования.

В первых трех главах книги с помощью спектрального числа обусловленности осуществлен поиск качественных геодезических построений. Оценка качества геодезических сетей выполняется с помощью относительной обусловленности, когда сравниваются реальные числа обусловленности с их эталонными значениями, присущими симметричным геометрическим фигурам.

На основе опыта обработки геодезических сетей с вырожденной матрицей коэффициентов параметрических нормальных уравнений указываются три основные причины плохой обусловленности системы уравнений:

- 1) наличие дефекта конфигурации, впервые обнаруженного проф. Ю.И. Маркузе;
- 2) дефект геометрического построения сетей;
- 3) отсутствие исходных пунктов в геодезическом построении.

В главах 4 – 7 изложена сущность единого подхода к уравниванию независимых и зависимых результатов измерений по методу многокритериальной оптимизации.

Главы 1 – 3 написаны аспирантом Е.В. Гришенковым, главы 4 – 7 изложены студентом геодезического факультета Полоцкого государственного университета А.Ю. Будо. Общее научное руководство осуществлялось проф. д.т.н. В.И. Мицкевичем.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

1.1. Засечки как элементы геодезических сетей

1.1.1. Исследования логических взаимосвязей между качеством построения засечек и сетей, из них состоящих

Проанализируем качество построения съемочных или инженерно-геодезических сетей с $S_{cp} = 50$ м. Цель исследований заключается в проверке, казалось бы, очевидного предположения: «Качество всей сети зависит от качества элементарных фигур (засечек), из которых состоит сеть». При развитии государственных геодезических сетей триангуляции для того, чтобы они были качественными, даются ограничения на величину наименьшего угла треугольника и длины стороны. Последнее подтверждает указанное выше предположение, но на основе оценки качества сети анализ еще не производился.

Под качеством сети в [57] предполагается

$$\Psi = \frac{c}{C^3}, \quad (1.1)$$

где c – число обусловленности; C^3 – эталонное число обусловленности.

В дальнейшем, кроме Ψ и c , будем указывать

$$M = \sigma_0 \sqrt{Q_{ii} + Q_{i+1,i+1}}, \quad (1.2)$$

где Q – диагональные элементы обратной матрицы весов неизвестных; σ_0 – среднее квадратическое отклонение (СКО) единицы веса, вычисляемого по формуле $P = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$; при $\sigma_p = 30''$, $\sigma_s = 15$ мм. Кроме этого, будем оценивать площадь фигуры по контуру всей сети (m_p / P_L , где P_L – значение площади).

На рис. 1.1 показана геодезическая сеть 3×3 квадрата, каждая из ячеек которого изображена в виде засечки двух пунктов [27], начиная с исходных пунктов, показанных треугольником.

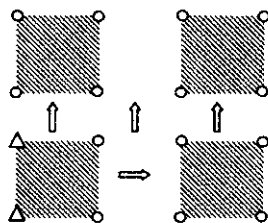


Рис. 1.1. Геодезическая сеть, состоящая из девяти засечек двух определяемых пунктов

На рис. 1.2 показана засечка Зубрицкого, из которых состоит геодезическая сеть (см. рис. 1.1).

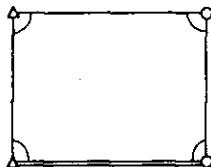


Рис. 1.2. Засечка Зубрицкого

При обработке сети Зубрицкого, состоящей из девяти построений (см. рис. 1.2), получены следующие результаты:

$$\Psi = 16,0; \quad C = 5500; \quad M_{\max} = 0,040 \text{ м}; \quad m_p / P_L = 1/2700.$$

На рис. 1.3 показана наилучшая по качеству построения засечка.

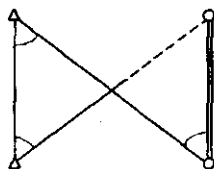
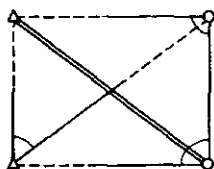


Рис. 1.3. Наилучшая линейно-угловая засечка

При обработке сети (см. рис. 1.1), состоящей из засечек (см. рис. 1.3), получены следующие результаты:

$$\Psi = 4,44; \quad C = 1540; \quad M_{\max} = 0,031 \text{ м}; \quad m_p / P_L = 1/4214.$$

На рис. 1.4 показана одна из наихудших (невырожденных) засечек.



$$\begin{aligned} \Psi &= 44,8 \\ C &= 423 \\ M &= 0,057 \text{ м} \end{aligned}$$

Рис. 1.4. Линейно-угловая засечка плохого качества.

При обработке сети, состоящей из засечек (см. рис. 1.4), получены следующие результаты:

$$\Psi = 61,5; \quad C = 21300; \quad M_{\max} = 0,097 \text{ м}; \quad m_p / P_L = 1/3200.$$

По результатам обработки трех сетей сделаем следующие выводы:

1. Если для засечки $\Psi_1 > \Psi_2$, то и для сетей это выполняется.
2. Если для засечки $C_1 > C_2$, то и для сетей это выполняется.
3. Для оценки точности площадей закономерности не установлены.

На рис. 1.5 показана сеть 4×4 квадрата для аналогичного исследования засечек трех определяемых пунктов по трем исходным [26], состоящая из восьми засечек трех определяемых пунктов по трем исходным.

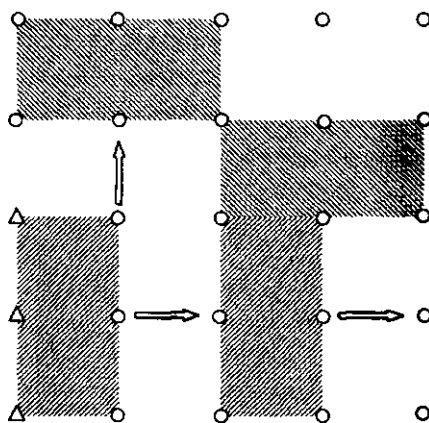


Рис. 1.5. Геодезическая сеть

На рис. 1.6 показана наилучшая линейно-угловая засечка трех определяемых пунктов по трем исходным.

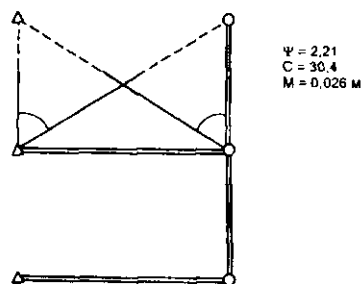


Рис. 1.6. Наилучшая засечка трех определяемых пунктов

При обработке сети (см. рис. 1.5), состоящей из засечек (см. рис. 1.6), получены следующие результаты:

$$\Psi = 6,1; \quad C = 7210; \quad M_{\max} = 0,072 \text{ м}; \quad m_p / P_i = 1/3670.$$

На рис. 1.7 показана наихудшая (невыврожденная) линейно-угловая засечка трех определяемых пунктов по трем исходным.

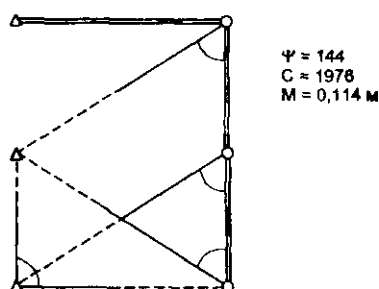


Рис. 1.7. Наихудшая засечка трех определяемых пунктов

При обработке сети, состоящей из засечек (см. рис. 1.7), получены следующие результаты:

$$\Psi = 10,2; \quad C = 12000; \quad M_{\max} = 0,074 \text{ м}; \quad m_p / P_i = 1/3090.$$

По результатам обработки последнего примера видно, что

$$\Psi_{\text{сети}} < \Psi_{\text{зас.}}; \quad M_{\text{сети}} < M_{\text{зас.}}$$

На рис. 1.8 показана геодезическая сеть 3×3 квадрата, состоящая из трех засечек четырех определяемых пунктов по четырем исходным [25].

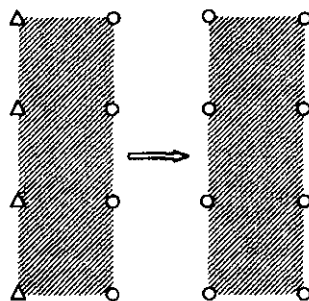


Рис. 1.8. Геодезическая сеть для засечек четырех определяемых пунктов

На рис. 1.9 показана наилучшая линейно-угловая засечка четырех определяемых пунктов по четырем исходным.

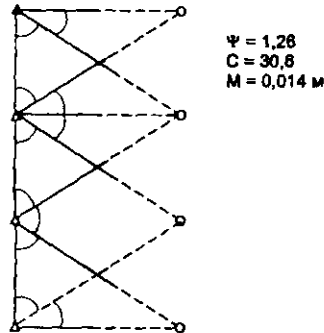


Рис. 1.9. Наилучшая засечка четырех определяемых пунктов по четырем исходным

При обработке сети (см. рис. 1.8), состоящей из засечек (см. рис. 1.9), получены следующие результаты:

$$\Psi = 6,70; \quad C = 1630; \quad M_{\max} = 0,032 \text{ м}; \quad m_p / P_L = 1/5047.$$

На рис. 1.10 показана наихудшая (невыврожденная) линейно-угловая засечка четырех определяемых пунктов по четырем исходным.

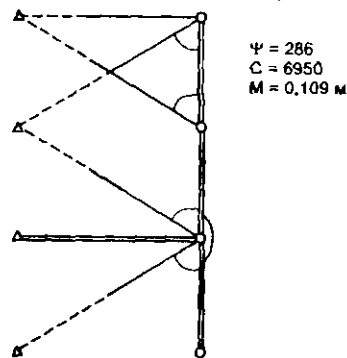


Рис. 1.10. Наихудшая засечка четырех определяемых пунктов по четырем исходным

При обработке сети, состоящей из засечек (см. рис. 1.10), получены следующие результаты:

$$\Psi = 202; \quad C = 49100; \quad M_{\max} = 0,177 \text{ м}; \quad m_p / P_L = 1/1174.$$

Сравнивая результаты обработки геодезических сетей для двух примеров, показанных на рис. 1.3 и рис. 1.9, видим, что в последнем случае (см. рис. 1.9) оценка точности площади выше, чем для сети, составленной из наилучших геодезических засечек, показанных на рис. 1.3.

1.1.2. Применение элементов генной инженерии при проектировании геодезических сетей

Плановые геодезические сети, за исключением полигонометрии, состоят из элементарных фигур – треугольников, квадратов, неравносторонних четырехугольников и др. Для треугольников в геодезии введено понятие – ошибка геометрической связи [82]

$$\frac{2}{3}R = \frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B), \quad (1.3)$$

Чем хуже качество построения треугольника, тем больше R . Например, для равностороннего треугольника $R = 4,43$ ед. 6-го знака логарифма, а для углов $A = 40^\circ$, $B = 25^\circ$ – $R = 38$ ед. 6-го знака логарифма. Для определения СКО логарифма стороны используют известную формулу

$$m_{\log s}^2 = m_{\log b}^2 + \frac{2}{3}\mu^2 \sum_1^n R, \quad (1.4)$$

где n – количество треугольников, b – базис, μ – СКО единицы веса.

Из формулы (1.4) видно, что если в ряде триангуляции встретится некачественный треугольник, то это повлияет на значение $m_{\log s}^2$ для всего ряда, следовательно, и на относительную ошибку выходной стороны, вычисляемую по формуле

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_{\log s}}{10^6 M}, \quad (1.5)$$

где $M = 0,4343$ – модуль перехода.

Для анализа качества построения ряда можно применить относительную обусловленность (1.1).

Предлагаем ввести понятие *геодезического гена*, характеризующегося величиной Ψ [57], – чем хуже ген, тем больше Ψ .

Величина Ψ и ΣR для ряда изменяется с возрастанием генов практически одинаково: чем больше генов в ряде, тем больше Ψ и ΣR , одновременно плохой ген («ложка дегтя») увеличивает названные величины. Для ряда триангуляции, состоящего из 10 генов, приведем результаты вычислений, показанные в табл. 1.1.

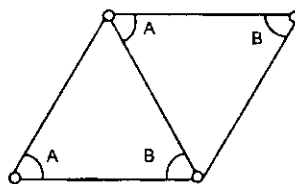


Рис. 1.11. Ген триангуляции

Таблица 1.1

Результаты обработки ряда

Номера ячейки	$\Sigma R_{57^\circ, 57^\circ}$	Ψ	$K = \frac{\Psi_{\text{ид}}}{\Psi_i}$	$\Sigma R_{90^\circ, 45^\circ}$	Ψ	Ψ $N=13$
1	2	3	4	5	6	7
1	11,2	2,2	–	8,88	1,63	1,28
2	22,4	10,6	4,8	17,8	6,40	4,05
3	33,6	15,6	1,5	26,6	8,72	4,69
4	44,9	22,2	1,4	35,5	12,0	5,83
5	56,1	54,0	2,4	44,4	28,9	13,1
6	67,1	93,0	1,7	53,3	49,5	21,4
7	78,5	127	1,4	62,2	67,5	28,1
8	89,7	151	1,2	71,0	80,3	32,5
9	101,0	182	1,2	76,9	96,8	38,3
10	112,2	207	1,1	88,8	111	43,0

В колонке 7 (табл. 1.1) дано Ψ для линейно-углового гена, содержащего 13 измерений.

По данным табл. 1.1 можно сделать следующие выводы:

- 1) величины Ψ и ΣR близки для первых пяти генов;
- 2) с увеличением генов Ψ и ΣR возрастают;
- 3) коэффициент K стремится к 1 по мере увеличения количества генов в ряде;
- 4) величины Ψ и ΣR хуже для связующих углов $A = B = 57^\circ$, чем для $A = 90^\circ, B = 45^\circ$, поэтому в дальнейшем будем работать только с квадратными генами.

Отметим, что величины R применимы только для ряда триангуляции, в то время как Ψ можно использовать для любых сетей и, следовательно, для любых генов. Введем понятие *наилучшего гена*, называя его таким, если $\Psi \pm \Delta\Psi$ меньше, чем для остальных генов. Величина $\Delta\Psi$ может быть равна 0,80, т.е. для гена, показанного на рис. 1.11. Характеристика гена G изменяется $1,2 - 0,8 \leq G \leq 1,2 + 0,8$.

Найдем лучшие гены при минимуме геодезических измерений, для которых наращивание в ряд соответствует наилучшему Ψ . На основании выполненных исследований обнаружены следующие наилучшие гены, входящие в геодезический генофонд (рис. 1.12).

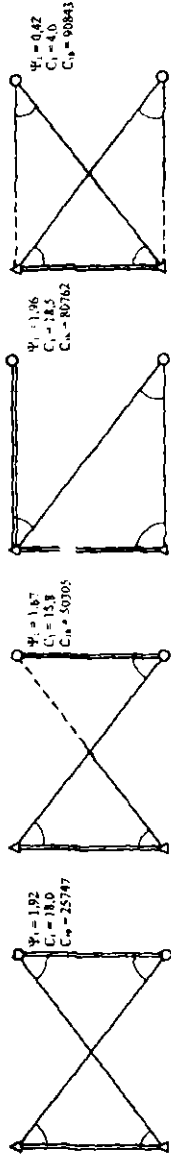


Рис. 1.12.1

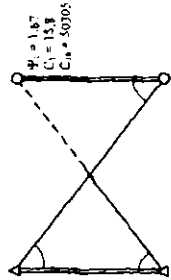


Рис. 1.12.2

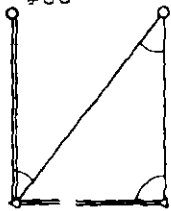


Рис. 1.12.3

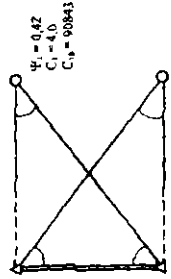


Рис. 1.12.4

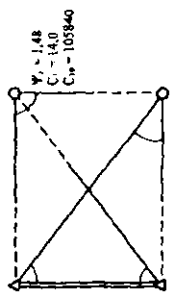


Рис. 1.12.5

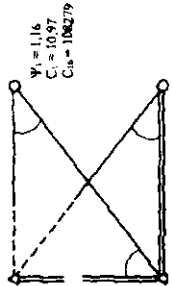


Рис. 1.12.6

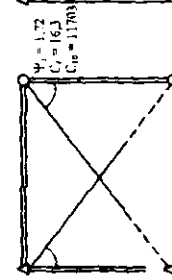


Рис. 1.12.7

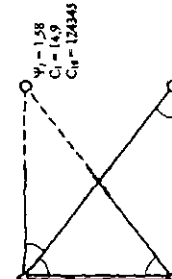


Рис. 1.12.8

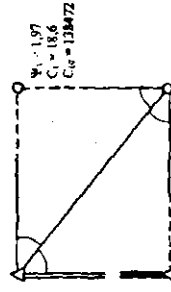


Рис. 1.12.9

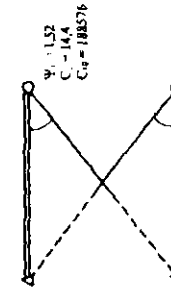


Рис. 1.12.10

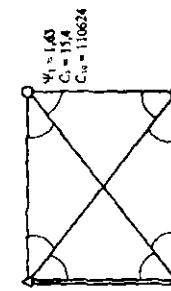


Рис. 1.12.11

Рис. 1.12. Лушние построения из геодезического генофонда

Таблица 1.2

Характеристики тенев из геодезического тенофонда для рядов

№№ госзна под счетами в ряде	Рис. 1.12.1		Рис. 1.12.2		Рис. 1.12.3		Рис. 1.12.4		Рис. 1.12.5		Рис. 1.12.6		Рис. 1.12.7		Рис. 1.12.8		Рис. 1.12.9		Рис. 1.12.10		Рис. 1.12.11	
	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С	Ψ, М	С
1	1,92 0,016	15,8	1,67 0,019	18,5	1,96 0,020	4,0	0,42 0,015	14,0	1,48 0,015	10,97 0,026	16,3	1,72 0,023	14,9	1,58 0,017	18,6	1,97 0,012	14,4	1,52 0,026	15,4	1,63 0,008	15,4	1,52 0,008
2	6,3 0,025	154	6,3 0,030	283	11,6 0,028	144	5,9 0,021	189	7,8 0,023	197,1	8,11 0,031	175	7,2 0,035	180	7,4 0,025	217	8,9 0,024	254,2	10,5 0,042	155	6,40 0,015	
3	6,3 0,013	312	6,3 0,042	1073	13,3 0,040	682	8,5 0,035	866	10,7 0,038	952,5	11,8 0,046	785	9,7 0,052	818	10,1 0,038	974	12,1 0,039	1230	15,2 0,070	704	8,72 0,026	
4	6,4 0,042	1291	7,0 0,054	2733	14,8 0,052	2107	11,4 0,050	2600	14,1 0,053	2846	15,4 0,063	2432	13,2 0,074	2573	13,9 0,055	3007	16,3 0,058	3919	21,2 0,104	2214	12,0 0,039	
5	12,1 0,050	2341	14,8 0,069	5837	30,2 0,064	5137	26,6 0,066	6231	32,3 0,071	6726	34,8 0,082	6055	31,4 0,099	6450	33,4 0,074	7927	38,5 0,080	9843	51,0 0,142	5571	28,9 0,053	
6	17,3 0,060	5797	23,8 0,086	11212	46,1 0,077	10779	44,3 0,084	12970	51,0 0,090	13742	56,5 0,102	12994	53,4 0,128	13865	56,9 0,096	15795	64,9 0,104	21151	86,9 0,185	12050	49,5 0,070	
7	20,4 0,069	10075	31,4 0,104	19932	67,6 0,091	20344	58,8 0,104	24137	69,7 0,110	25718	73,3 0,123	25029	72,2 0,139	26701	71,1 0,120	30177	87,2 0,130	40674	118 0,231	23356	67,5 0,084	
8	21,8 0,080	19107	36,8 0,125	33322	64,2 0,106	35477	68,4 0,125	41782	80,6 0,132	43471	83,8 0,146	44428	85,7 0,193	47343	91,3 0,145	53180	102,5 0,158	72006	138 0,281	41670	80,3 0,107	
9	24,1 0,091	31746	44,1 0,147	52973	71,6 0,122	58179	80,9 0,147	68117	94,7 0,156	70234	97,6 0,170	73981	102,8 0,230	78723	109 0,173	88004	122,3 0,187	119550	166 0,315	69680	96,8 0,128	
10	25,8 0,102	50305	50,3 0,170	80762	80,8 0,139	90834	90,9 0,170	105640	106 0,180	108279	108 0,196	117079	117 0,268	124345	124 0,202	138472	138 0,219	188576	189 0,391	110624	110,7 0,150	

Для каждого гена выполним расчеты и приведем число обусловленности S , относительную обусловленность Ψ и наибольшую ошибку положения M в метрах. Будем наращивать эти гены в ряды вплоть до 10 генов. Отметим, что при вычислении коэффициентов нормальных уравнений параметрические уравнения поправок составляются для всех сторон и углов, включая угол, замыкающий горизонт при числе направлений больше двух.

Числовые данные приведены в табл. 1.2, по которой можно сделать следующие выводы:

1. Для предложенных генов $\Psi_{\max} - \Psi_{\min} = 1,97 - 0,42 = 1,55$, следовательно, все гены равноценны. Аналогично $M_{\max} - M_{\min} = 0,026 \text{ м} - 0,012 \text{ м} = 0,014 \text{ м}$, что пренебрегаемо мало.

2. По мере увеличения ряда методом наращивания генов Ψ и M возрастают.

3. По возрастанию величины Ψ_{10} гены были пронумерованы. Величина M также возрастает, если взять ген № 1 и ген № 10, что подтверждает справедливость ранее сделанного правила [62], если $\Psi_2 > \Psi_1$, то и $M_2 > M_1$.

4. Замечено, что $\Psi_{\text{дон}} < 40$ для всех генов при ряде, состоящем из 4 ячеек, следовательно, на производстве смело можно применять ряды, состоящие из четырех генов (8 определяемых пунктов).

1.1.3. Об исключении из правил Ансермета

На протяжении всей статьи [34] утверждается неверный тезис: если в геодезической сети имеются избыточные измерения, то такие сети могут применяться на производстве. На практике это не так. На рис. 1.13 приведена геодезическая линейно-угловая сеть (А, В, С – исходные пункты) с вырожденной матрицей нормальных параметрических уравнений (определитель системы равен нулю).

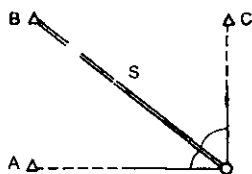


Рис. 1.13. Схема сети

В статье [23] приведено до 20 аналогичных линейно-угловых построений. При этом если к сплошной сети триангуляции с большим числом избыточных измерений подсоединить такое построение («ложка дегтя»),

то произойдет деление на ноль и решить задачу уравнивания невозможно. Поэтому, чтобы избежать подобных ситуаций, необходимо на производстве выполнять на ЭВМ проектирование геодезических сетей и предрасчет точности не только положения пунктов, но и предварительную оценку точности определения площадей.

По сети (см. рис. 1.13) видно, что правило Ансермета [11, с. 190]

$$(P:p)_{cp} \equiv n:k, \quad (1.6)$$

где P и p – веса уравненной и измеренной величины; n и k – числа всех измеренных и необходимых величин соответственно. Правило Ансермета не выполняется, т.к. из обработки $P = 0$ (вырожденный случай). В дополнение к этому далее предлагаем расчеты, действительно не имеющие аналогов в практике.

На рис. 1.14.1 и 1.14.2 приведены сети хорошего качества построения с разным количеством избыточных измерений 1 и 3 соответственно при $\sigma_{угла} = 20,0''$, $\sigma_{стороны} = 20$ мм.

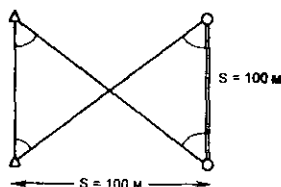


Рис. 1.14.1. Схема сети D

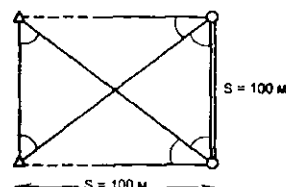


Рис. 1.14.2. Схема сети E

В таблице 1.3 приведены наибольшие ошибки положения M самого удаленного пункта от двух исходных по мере наращивания справа в ряд этого же построения с одновременным возрастанием n и k .

Таблица 1.3

Результаты вычислений

№ пп	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{длн D}$	0,021	0,033	0,044	0,056	0,067	0,080	0,093	0,106	0,121	0,136
$M_{длн E}$	0,013	0,026	0,038	0,052	0,066	0,080	0,096	0,112	0,129	0,146

По данным табл. 1.3 видно, что начиная с седьмой ячейки и далее $M_E > M_D$, хотя $n_E > n_D$ при $k_D = k_E$. Это и требовалось доказать: правило Ансермета не всегда выполняется.

Следует иметь в виду, что формула (1.6), как сказано в [3, с. 346], «... будет давать достаточно точные результаты лишь при умелом ее применении...». Цель исследований – привести примеры, когда правило

Ансермета не выполняется при предрасчете точности плановых линейно-угловых геодезических сетей.

Сначала рассмотрим линейно-угловое геодезическое построение с дефектом данных (см. рис. 1.13) и с дефектом конфигурации, последнее понятие впервые предложено Ю.И. Маркузе [5] (рис. 1.15).

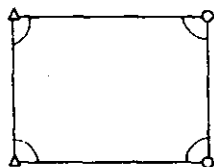


Рис. 1.15. Схема сети с дефектом конфигурации

В обоих случаях дефекта определитель системы нормальных параметрических уравнений равен нулю. Построение на рис. 1.15 содержит $n = k = 4$, но в нем возникает условное уравнение фигур, что вызывает дефект конфигурации.

Зная это свойство, можно найти и другие построения с дефектом конфигурации (рис. 1.16.1). Если добавить к сети на схеме рис. 1.16.1 одну измеренную сторону (рис. 1.16.2), то получим наилучшее построение из всех засечек такого же вида.

Покажем, что по сравнению с построением рис. 1.16.2 дополнительные измерения, приводящие к рис. 1.17, не дают улучшения при оценке точности функций для состоящих из них рядов.

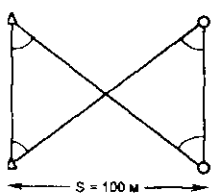


Рис. 1.16.1. Схема сети с дефектом конфигурации

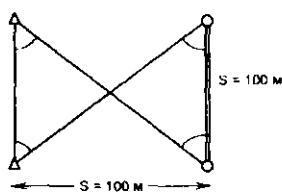


Рис. 1.16.2. Схема наилучшей геодезической засечки двух определяемых пунктов

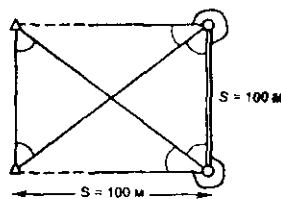


Рис. 1.17. Схема сети, полученная из рис. 1.16.2, с дополнительными четырьмя углами

В таблице 1.4 приведены наибольшие ошибки положения пункта (M) в слабом месте по мере наращивания справа в ряд из ячеек, показанных на рис. 1.16.2 и 1.17 соответственно при $S_{cp} = 100$ м; $\sigma_B = 20''$; $\sigma_S = 20$ мм.

По данным табл. 1.4 видно, что начиная с ячейки 7 и далее $M_{рис.1.17} > M_{рис.1.16.2}$, хотя $n_{рис.1.17} > n_{рис.1.16.2}$, а это говорит о том, что правило Ансермета не всегда выполняется, — «получается, что чем больше число избыточных измерений, тем хуже результаты оценки точности».

Таблица 1.4

Результаты вычислений

№ ячейки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>рис. 1.16.2</i> $n/k = 1,25$										
k	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
M_M	0,021	0,033	0,044	0,056	0,067	0,080	0,093	0,106	0,121	0,136
<i>рис. 1.17</i> $n/k = 2,25$										
k	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
n	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
M_M	0,013	0,026	0,038	0,052	0,066	0,080	0,096	0,112	0,129	0,146

Покажем, что в сплошных геодезических сетях правило Ансермета практически всегда выполняется. Для этого рассмотрим сдвоенные цепочки, состоящие из ячеек (рис. 1.18 и 1.19), и поместим результаты вычислений в табл. 1.5. Здесь видно, что $M_{рис.1.19} \approx M_{рис.1.18}$, хотя $n_{рис.1.19} > n_{рис.1.18}$, но расхождения в величинах M незначительны.

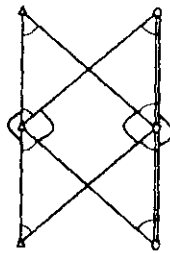


Рис. 1.18. Схема сети

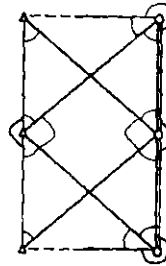


Рис. 1.19. Схема сети

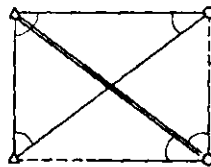


Рис. 1.20. Схема сети

Таблица 1.5

Результаты вычислений

№ ячейки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>k</i>	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
Рис. 1.18 <i>n/k = 2</i>										
<i>n</i>	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
<i>M_n</i>	0,028	0,031	0,038	0,047	0,058	0,069	0,081	0,095	0,109	0,124
Рис. 1.19 <i>n/k = 2,7</i>										
<i>n</i>	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160
<i>M_n</i>	0,020	0,027	0,035	0,045	0,056	0,068	0,081	0,094	0,108	0,123

Отметим, что правило Ансермета не выполняется для геодезических сетей, если к ним присоединить ячейку с дефектом данных. Так, для построения на рис. 1.20 $M = \infty$, поскольку оно содержит ячейку, состоящую из построения на рис. 1.13. Отсюда следует вывод, что на производстве следует выполнять предрасчет точности геодезических сетей на ЭВМ, чтобы избежать в сетях появления дефектов построений, которые невозможно найти заранее, соблюдая любые инструкции по проектированию плановых геодезических сетей.

1.2. О проектировании геодезических построений методами нелинейного программирования

1.2.1. Проектирование засечек на плоскости

Известно, что автоматизация проектирования геодезических сетей на ЭВМ осуществляется путем минимизации целевой функции, в качестве которой принимают либо ошибку положения пунктов в слабом месте построения геодезических сетей, либо определитель матрицы нормальных уравнений, либо одно из известных чисел обусловленности. Но вместо числа обусловленности можно использовать относительную обусловленность (Ψ) [57], на которую удалось найти её допустимые значения в зависимости от класса геодезического построения.

С помощью величины Ψ сопоставляются обусловленности для реальных сетей с обусловленностью для симметричных сетей с одним и тем же количеством определяемых пунктов.

При анализе величины Ψ для различных геодезических построений установлено, что:

1) самыми надежными по качеству построения являются линейно-угловые сети, затем сети трилатерации и триангуляции;

- 2) чем ближе проектируемая сеть к сплошной сети, тем выше качество её построения;
- 3) значение относительной обусловленности Ψ уменьшается, если исходные пункты находятся в центре симметрии сети;
- 4) чем больше в геодезической сети исходных пунктов, тем меньше Ψ и, следовательно, выше качество её построения;
- 5) изломанные сети лучше по качеству неизломанных;
- 6) величина Ψ зависит от формы треугольников, из которых состоит геодезическая сеть.

Из всего этого видно, что относительная обусловленность адекватно отражает известные требования к качеству построения геодезических сетей. Из перечисленных выше закономерностей только шестая подлежит автоматизации путём уменьшения Ψ , перемещая положение определяемых пунктов на величины Δx и Δy , найденные методами нелинейного программирования. Применим эти методы к проектированию линейно-угловой засечки плохого качества построения (рис. 1.21).

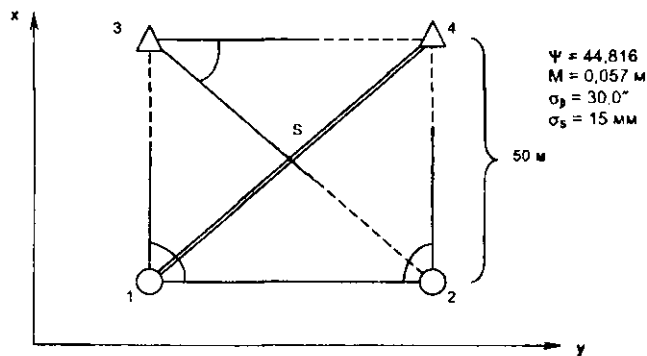


Рис. 1.21. Засечка двух определяемых пунктов

Приведем основные рабочие формулы для указанных выше методов нелинейного программирования.

Метод Якоби

$$\Delta x = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}}; \quad \Delta y = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}}. \quad (1.7)$$

Метод Коши

$$\Delta x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \lambda; \quad \Delta y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \lambda; \quad (1.8)$$

$$\lambda = \frac{\Psi}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2}.$$

Метод Ньютона

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Поскольку целевая функция Ψ имеет сложный вид и аналитическое её дифференцирование невозможно, применим следующие формулы численного дифференцирования:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\delta} (\Psi_{\delta,0} - \Psi_{-\delta,0});$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2\delta} (\Psi_{0,\delta} - \Psi_{0,-\delta});$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\delta^2} (\Psi_{\delta,0} - 2\Psi_{0,0} + \Psi_{-\delta,0});$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} (\Psi_{0,\delta} - 2\Psi_{0,0} + \Psi_{0,-\delta});$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\delta^2} (\Psi_{\delta,\delta} - \Psi_{\delta,-\delta} - \Psi_{-\delta,\delta} + \Psi_{-\delta,-\delta}).$$

Здесь $\Psi_{a,\delta}$ – это относительная обусловленность при изменении координат определяемого пункта геодезической сети на величину $x = x_0 + a$; $y = y_0 + b$, а $\Psi_{0,0}$ соответствует x_0 и y_0 . Шаг численного дифференцирования можно вычислить по формуле

$$\delta = \frac{\sqrt{|x| + 10^{-5}}}{m/3}, \quad (1.10)$$

где x – координата, к которой задается приращение δ ; m – число знаков в разрядной сетке ЭВМ. Например, при $x = 100$; $m = 8$ величина $\delta = 4$ м.

Приведём числовые данные для примера, показанного на рис. 1.21, при $\delta = 1$ м.

Метод Якоби

Первое приближение для точки № 1:

$$\Psi_{0,0} = 44,816; \quad \Psi_{8,0} = 45,206; \quad \Psi_{0,8} = 49,383;$$

$$\Psi_{8,8} = 44,493; \quad \Psi_{0,-8} = 40,731.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,3565; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 4,326; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0,0670; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0,4820.$$

$$\Delta x = -5 \text{ м}; \quad \Delta y = -9 \text{ м}; \quad x_1 = 1 - 5 = -4 \text{ м}; \quad y_1 = 1 - 9 = -8 \text{ м}; \\ x_2 = 1 \text{ м}; \quad y_2 = 51 \text{ м}; \quad \Psi_{\text{нов.}} = \Psi_{0,0} = 21,150.$$

Первое приближение для точки № 2 при новых значениях $x_1 = -4$ м $y_1 = -8$ м;

$$\Psi_{8,0} = 21,935; \quad \Psi_{0,8} = 20,124;$$

$$\Psi_{8,8} = 20,424; \quad \Psi_{0,-8} = 22,238.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,7555; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -1,057; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0,0590; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0,0620.$$

$$\Delta x = -13 \text{ м}; \quad \Delta y = 17 \text{ м}; \quad x_2 = 1 - 13 = -12 \text{ м}; \quad y_2 = 51 + 17 = 68 \text{ м}; \quad \Psi_{\text{нов.}} = 8,578.$$

Метод Коши

Значения производных для точки № 1 такие же, как в методе Якоби.

Первое приближение для точки № 1:

$$\lambda = 2,378; \quad \Delta x = -1 \text{ м}; \quad \Delta y = -10 \text{ м}; \quad x_1 = 1 - 1 = 0 \text{ м}; \quad y_1 = 1 - 10 = -9 \text{ м};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}; \quad y_2 = 51 \text{ м}; \quad \Psi_{\text{нов.}} = \Psi_{0,0} = 18,844.$$

Первое приближение для точки № 2:

$$\Psi_{8,0} = 19,468; \quad \Psi_{0,8} = 17,992;$$

$$\Psi_{8,8} = 18,266; \quad \Psi_{0,-8} = 19,746.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,601; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -0,877; \quad \lambda = 16,67; \quad \Delta x = -10 \text{ м}; \quad \Delta y = 15 \text{ м};$$

$$x_2 = 1 - 10 = -9 \text{ м}; \quad y_2 = 51 + 15 = 66 \text{ м}; \quad \Psi_{\text{нов.}} = 9,016.$$

Метод Ньютона

Первое приближение для точки № 1:

$$\Psi_{0,0} = 44,816; \quad \Psi_{8,8} = 45,911; \quad \Psi_{8,-8} = 41,005;$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0,130 \quad \Psi_{\delta,\delta} = 48,937; \quad \Psi_{\delta,\delta} = 40,551.$$

$$\Delta x = 25 \text{ м}; \quad \Delta y = -16 \text{ м}; \quad x_1 = 1 + 25 = 26 \text{ м}; \quad y_1 = 1 - 16 = -15 \text{ м};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}; \quad y_2 = 51 \text{ м}; \quad \Psi_{\text{нов.}} = \Psi_{0,0} = 8,646.$$

Первое приближение для точки № 2:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -0,0195; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -0,1708; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0,0050; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0,0100; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -0,0050;$$

$$\Delta x = 42 \text{ м}; \quad \Delta y = 38 \text{ м}; \quad x_2 = 1 + 42 = 43 \text{ м}; \quad y_2 = 51 + 38 = 89 \text{ м}; \quad \Psi_{\text{нов.}} = 12,950.$$

Здесь видно, что первое приближение получено не столь качественно, как в методах Якоби и Коши.

Метод релаксации

В этом методе перемещаются сразу все точки геодезической сети по x и y на величину шага λ , заданного в исходной информации.

Решим пример.

Таблица 1.6

Траектория минимизации по методу релаксации

№ приближения	λ	x_1	y_1	x_2	y_2	Ψ
1	25	1	1	1	51	44,816
2	13	1	-12	-12	64	8,163
3	6	-5	-18	-18	70	4,927
4	3	-5	-21	-21	73	4,052
5	2	-5	-21	-21	73	4,052

По данным табл. 1.6 видно, что методом релаксации получен стабильный результат после четвертого приближения. Но метод релаксации имеет недостаток: требуется большое количество времени при вычислении на ЭВМ величины Ψ для десяти и более определяемых пунктов.

Отметим, что при малом количестве определяемых пунктов (до десяти) метод релаксации уверенно приводит к конечным результатам. При большом числе определяемых пунктов предпочтение отдается методу Коши, т. к. в нем не используются вторые производные величины Ψ , затем методу Якоби. Исследования показали, что методом Ньютона можно получить конечный результат после того как получено стабильное начальное приближение, иначе процесс итераций может быть расходящимся.

Проектирование геодезических сетей при различных целевых функциях, минимизируемых различными методами математического программирования, рассматривалось в следующих работах: К.Ф. Афонин [1], М.Д. Герасименко [17], Ю.М. Нейман [78], И.И. Купчинов [37], Ю.И. Маркузе [43], К.Л. Проворов [81], З.И. Тамугис [86] и др.

В работе [86] дана классификация задач математического программирования геодезических измерений при их проектировании. Сущность этой классификации заключается в следующем:

1) проектирование нулевого порядка – к нему относится задача определения X и Q , где X – вектор определяемых параметров сети, Q – матрица обратных весов, для получения которой надо знать матрицу коэффициентов параметрических уравнений поправок A и матрицу весов измерений P ;

2) проектирование первого порядка – решают задачу определения конфигурации сети, т.е. при заданных матрицах Q и P требуется определить матрицу A ;

3) проектирование второго порядка – решают задачу определения оптимального плана измерений (матрицы P) при заданных матрицах Q и A ;

4) проектирование третьего порядка – имеет цель улучшить существующую сеть, заключается в частичном изменении конфигурации сети и разработке оптимального плана наблюдений для дополнительных элементов, включаемых в существующую сеть при заданной матрице Q .

При проектировании различного порядка применяют минимизацию следующих целевых функций:

$$\Phi_1(X) = spQ;$$

$$\Phi_2(X) = \det Q;$$

$$\Phi_3(X) = \max \lambda(Q);$$

$$\Phi_4(X) = \frac{\max \lambda(Q)}{\min \lambda(Q)} = C,$$

где $\lambda(Q)$ – собственное значение матрицы Q ;

$$\Phi_5(X) = \max M,$$

где $\max M$ – ошибка положения пункта в слабом месте;

$$\Phi_6(X) = \sum_1^k M^2,$$

где k – число определяемых пунктов;

$$\Phi_7(X) = \Psi = \frac{C}{C^*}; \quad (1.11)$$

где Ψ – относительная обусловленность [57], вычисляемая с помощью числа обусловленности реального (C) и эталонного (C^*), полученного для сплошных симметричных сетей.

1.2.2. Проектирование пространственных засечек

В статье [29] для проектирования геодезических сетей предложено использовать целевую функцию (1.11) с применением методов Якоби, Коши, Ньютона и релаксации. Последний метод реализован нами в SERP1 и SERP2. Эти программы работают по методу релаксации, позволяющему легко учитывать область сходимости итерации, не выходя за ее границы. В программе SERP1 используется целевая функция (1.11), а в SERP2 – функция $\Phi_s(X) = C$.

Для пространственных засечек применим наиболее надежный метод, предложенный Коши, с использованием градиента по формулам

$$\Delta x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \lambda; \quad \Delta y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \lambda; \quad \Delta z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \lambda; \quad (1.12)$$

$$\lambda = \frac{\Psi_{q,0,0}}{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\delta} (\Psi_{\delta,0,0} - \Psi_{-\delta,0,0}); \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2\delta} (\Psi_{0,\delta,0} - \Psi_{0,-\delta,0}); \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2\delta} (\Psi_{0,0,\delta} - \Psi_{0,0,-\delta}).$$

На рис. 1.22 показана плохо обусловленная (малый угол при определяемом пункте) пространственная линейно-угловая засечка. Измеренные величины выполнены с точностью: для горизонтального угла $\delta_p = 5,0''$; для измеренных наклонных дальностей $\delta_s = 0,01\text{ м}$; для вертикальных углов $\delta_v = 5,0''$. Расчеты выполнялись по программе OZVE, которая вычисляет коэффициенты матрицы параметрических уравнений поправок по координатам исходных и определяемых пунктов.

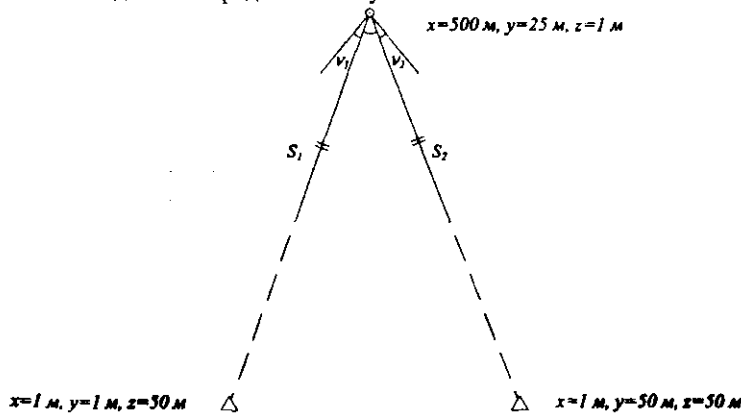


Рис. 1.22. Пространственная засечка

Для обработки пространственной засечки при минимизации целевой функции (1.11) выполним три приближения (табл. 1.7).

Отметим, что при проектировании пространственных засечек целевая функция (1.11) используется впервые. В научных работах [81, 86] применяется целевая функция $\Phi_*(X)$. В результате выполненных вычислений целевая функция (1.11) уменьшилась от начального значения 91,1 до значения 21,8 и допустимого значения 16,6.

Во всех приближениях при проектировании пространственной засечки $\Delta z = 0$, т. к. изменять положение определяемого пункта по высоте нецелесообразно. Такая задача использует ограничения по переменной z .

Таблица 1.7

Минимизация целевой функции (1.11) методом Коши

	Первое приближение	Второе приближение	Третье приближение
$\delta, \text{ м}$	10	10	10
$\Psi_{0,0,0}$	91,067	27,525	21,778
$\Psi_{\delta,0,0}$	93,662	30,850	25,412
$\Psi_{0,\delta,0}$	91,081	27,335	21,707
$\Psi_{0,0,\delta}$	91,065	32,787	27,030
$\Psi_{-\delta,0,0}$	88,591	23,975	18,097
$\Psi_{0,-\delta,0}$	91,084	27,312	21,691
$\Psi_{0,0,-\delta}$	91,072	23,315	17,933
$\frac{\partial \Psi}{\partial x}$	0,2536	0,3438	0,3658
$\frac{\partial \Psi}{\partial y}$	-0,00015	0,00115	0,00080
$\frac{\partial \Psi}{\partial z}$	-0,00035	0,04736	0,4548
$\lambda, \text{ м}$	1416	47,03	37,31
$\Delta x, \text{ м}$	-359	-16,2	-14
$\Delta y, \text{ м}$	0,21	-0,05	0
$\Delta z, \text{ м}$	12	-22	-17
$x, \text{ м}$	141	125	111
$y, \text{ м}$	25,1	25	25
$z, \text{ м}$	1	1	1

Рассмотрим реализацию на ПК методов оптимального проектирования линейной и угловой пространственных засечек. Целью является сравнение различных методов нелинейного программирования по трем основным критериям:

- 1) область сходимости итераций;

2) надежность решения при плохо обусловленных системах нелинейных уравнений;

3) точность локализации минимума целевой функции за наименьший промежуток времени.

Большая часть указанных характеристик известна из литературных источников [13, 80, 89]. Например, метод релаксации имеет радиус области сходимости $6 S_{cp}$. Достигается минимум большим количеством приближений, но общее затрачиваемое время сопоставимо практически со всеми известными методами нелинейного программирования. Так как вычисления на ПК осуществляются с большой скоростью, различия во времени вычислений в реальности незначительны.

Преимущества других методов нелинейного программирования снижаются из-за потребности в нахождении первых и вторых частных производных, точное вычисление которых проблематично.

В работе [89] впервые указан недостаток метода Коши, заключающийся в пилообразности траектории минимизации, в окрестности минимума плохо обусловленной целевой функции.

Метод Якоби может дать деление на ноль при отсутствии ускорения в изменении целевой функции.

Метод Ньютона, как указано во многих литературных источниках, имеет самую небольшую область сходимости, равную $0,3 S_{cp}$, что может привести к расходящемуся процессу итераций.

В дальнейшем будем использовать две целевые функции

$$\Phi(x, y, z) = M = \sigma_0 \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}; \quad (1.13)$$

$$\Phi(x, y, z) = \Psi = \text{cond}(Q) / C^3, \quad (1.14)$$

где (x, y, z) – координаты проектируемого определяемого пункта; M – априорная ошибка положения; Ψ – относительная обусловленность, вычисляемая по формуле, указанной в [57].

Рассмотрим минимизацию целевых функций (1.13) и (1.14) методом релаксации.

Прежде чем излагать метод релаксации, рассмотрим вопросы терминологии. Слово «релаксация» (ослабление) часто употребляется для определения класса итерационных алгоритмов при решении систем линейных уравнений. Этот класс методов характеризуется последовательным сведением к нулю наихудшего из остатков, соответствующего какому-либо линейному уравнению. Существует несколько методов релаксации: координатная, блочная, групповая и сверхрелаксация. Последнее определение применяется к такому релаксационному процессу, когда вместо полной

ликвидации остатка в одном из уравнений осуществляется уменьшение абсолютного значения этого остатка.

В некоторых случаях под релаксацией понимают область искусства по решению систем линейных уравнений с привлечением различных вычислительных приемов.

В ряде работ по нелинейному программированию под релаксацией подразумеваются методы решения экстремальных задач, обеспечивающие максимализацию целевой функции.

В дальнейшем будем придерживаться следующего определения метода релаксации, имеющего наибольшее распространение при современном изложении нелинейного программирования: «метод, при котором следующая точка отличается от текущей значением только одной компоненты, называется релаксационным». Данное определение наиболее удачно отражает характерные черты тех релаксационных методов, которые успешно применялись при решении систем линейных уравнений еще со времен Гаусса.

На рис.1.23 показана схема пространственной засечки. Она будет линейной, когда измеренными величинами служат четыре наклонных дальности, и угловой, когда на определяемый пункт измерены четыре вертикальных угла.

Наземные пространственные засечки широко используются при решении ряда геодезических задач для создания основы при развитии пространственных геодезических сетей. Например, хорошо известны пространственные сети, созданные при выверке подкрановых путей, при гидрометрических работах, при разбивке и исследовании деформации инженерных сооружений и вантовых конструкций и др.

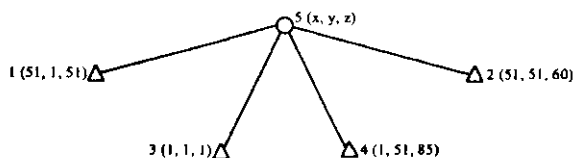


Рис.1.23. Пространственная засечка

Результаты минимизации целевых функций (1.13) и (1.14) по методу релаксации приведены в табл. 1.8 для линейной и угловой пространственных засечек. Расчеты выполнялись по программе OZVE при $\sigma_s = 0,1$ м, $\sigma_\alpha = 30,0''$.

Приведем основные рабочие формулы для указанных выше методов нелинейного программирования.

Метод Коши

$$\Delta x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \lambda; \Delta y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \lambda; \Delta z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \lambda;$$

$$\lambda = \frac{\Phi(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}; \quad (1.15)$$

Метод Якоби

$$\Delta x = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}}; \Delta y = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}}; \Delta z = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}; \quad (1.16)$$

Метод Ньютона

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \\ & & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Поскольку целевая функция Φ имеет сложный вид и аналитическое ее дифференцирование невозможно, то применим следующие формулы численного дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{2\delta} (\Phi_{\delta,0,0} - \Phi_{-\delta,0,0}); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{1}{2\delta} (\Phi_{0,\delta,0} - \Phi_{0,-\delta,0}); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{1}{2\delta} (\Phi_{0,0,\delta} - \Phi_{0,0,-\delta}); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta^2} (\Phi_{\delta,0,0} - 2\Phi_{0,0,0} + \Phi_{-\delta,0,0}); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{1}{\delta^2} (\Phi_{0,\delta,0} - 2\Phi_{0,0,0} + \Phi_{0,-\delta,0}); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \frac{1}{\delta^2} (\Phi_{0,0,\delta} - 2\Phi_{0,0,0} + \Phi_{0,0,-\delta}); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\delta^2} (\Phi_{\delta,\delta,0} - \Phi_{\delta,-\delta,0} - \Phi_{-\delta,\delta,0} + \Phi_{-\delta,-\delta,0}); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{4\delta^2} (\Phi_{\delta,0,\delta} - \Phi_{\delta,0,-\delta} - \Phi_{-\delta,0,\delta} + \Phi_{-\delta,0,-\delta}); \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{4\delta^2} (\Phi_{0,\delta,\delta} - \Phi_{0,\delta,-\delta} - \Phi_{0,-\delta,\delta} + \Phi_{0,-\delta,-\delta}). \end{aligned}$$

В таблицах 1.8 и 1.9 приведены результаты вычислений, по которым можно сделать следующие выводы:

- 1) метод Коши обладает малым шагом минимизации, который выражается величинами Δx , Δy и Δz ;
- 2) метод Якоби дал неудовлетворительное приближение при минимизации целевой функции (1.13) для линейной засечки;
- 3) метод Ньютона дал отрицательный результат для целевой функции (1.13) для вертикальной пространственной засечки;
- 4) самым надежным удобным и простым является метод релаксации, поскольку минимизация функции может осуществляться со сколь угодно малым шагом λ .

Таблица 1.8
Результаты проектирования линейной и угловой пространственных засечек методом релаксации

j	x	y	z	λ	Φ	$x+\lambda$	$x-\lambda$	$y+\lambda$	$y-\lambda$	$z+\lambda$	$z-\lambda$
Минимизация функции (1.13) для линейной пространственной засечки											
1	25	25	95	5	0,1706	0,1708	0,1708	0,1712	0,1714	0,1777	0,1654
9	45	30	80	2	0,1566	0,1574	0,1563	0,1561	0,1574	0,1580	0,1557
14	47	34	76	1	0,1542	0,1545	0,1541	0,1540	0,1545	0,1545	0,1541
22	48	38	73	1	0,1531	0,1531	0,1534	0,1531	0,1533	0,1532	0,1533
Минимизация функции (1.14) для линейной пространственной засечки											
1	25	25	95	10	0,871	0,888	0,889	0,933	0,914	1,166	0,737
6	45	35	75	5	0,603	0,614	0,657	0,623	0,624	0,631	0,646
9	47	37	75	2	0,594	0,598	0,604	0,598	0,598	0,606	0,593
12	47	37	73	1	0,591	0,593	0,593	0,588	0,596	0,591	0,595
Минимизация функции (1.13) для пространственной засечки по четырем вертикальным углам											
1	25	25	95	10	0,0141	0,0136	0,0156	0,0133	0,0158	0,0146	0,0155
3	25	35	95	5	0,0133	0,0134	0,0143	0,0141	0,0141	0,0136	0,0166
6	30	35	100	2	0,0130	0,0131	0,0131	0,0130	0,0131	0,0131	0,0130
Минимизация функции (1.14) для пространственной засечки по четырем вертикальным углам											
1	30	35	100	5	0,948	0,908	1,138	1,078	0,895	0,823	1,188
7	35	30	115	2	0,705	0,735	0,700	0,704	0,709	0,707	0,707
10	33	32	115	1	0,698	0,698	0,702	0,698	0,698	0,697	0,699

Таблица 1.9
Результаты вычислений по градиентным методам нелинейного программирования

Обозначения	Линейная засечка		Вертикальная засечка	
	Функция (1.13)	Функция (1.14)	Функция (1.13)	Функция (1.14)
1	2	3	4	5
Начальные координаты определяемого пункта				
x_0	47,01	47,01	30,01	35,01
y_0	34,01	34,01	35,01	30,01
z_0	76,01	76,01	100,01	115,01

Окончание табл. 1.9

Частные производные первого и второго порядка				
$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$	$1,7200 \cdot 10^{-4}$	0,0026	$-1,0000 \cdot 10^{-6}$	0,0084
$\frac{\partial \varphi}{\partial y}$	$-2,7650 \cdot 10^{-4}$	-0,0042	$-1,7500 \cdot 10^{-5}$	-0,0013
$\frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$2,2900 \cdot 10^{-4}$	0,0035	$3,0500 \cdot 10^{-5}$	$1,700 \cdot 10^{-4}$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$	$2,0000 \cdot 10^{-4}$	0,0027	0	0,0061
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$	$1,0000 \cdot 10^{-4}$	0,0013	$-1,0000 \cdot 10^{-4}$	$4,0000 \cdot 10^{-4}$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$2,0000 \cdot 10^{-4}$	0,0024	$-1,0000 \cdot 10^{-4}$	0,0010
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$	$-7,5000 \cdot 10^{-5}$	$-9,7500 \cdot 10^{-4}$	$2,5000 \cdot 10^{-5}$	-0,0148
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}$	$7,5000 \cdot 10^{-5}$	$7,5000 \cdot 10^{-4}$	$-2,5000 \cdot 10^{-5}$	$1,0000 \cdot 10^{-4}$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}$	$2,5000 \cdot 10^{-5}$	$7,0000 \cdot 10^{-4}$	$2,5000 \cdot 10^{-5}$	$-2,0000 \cdot 10^{-4}$
Метод Коши				
λ	387,4	99,90	370,2	82,96
Δx	-0,067	-0,260	0,0004	-0,696
Δy	0,107	0,420	0,0065	0,108
Δz	-0,089	-0,350	-0,0113	-0,014
x	46,943	46,750	30,0104	34,314
y	34,117	34,430	35,0165	30,118
z	75,923	75,66	99,999	114,996
M	0,15416	0,15401	0,0130242	0,01526
ψ	0,60392	0,60162	0,9479	0,7007
Метод Якоби				
Δx	-1,72	-0,96	0	-1,377
Δy	+1,38	3,23	-0,175	3,250
Δz	3,05	-1,46	-1,220	-0,170
x	45,29	46,05	30,01	33,632
y	35,39	37,24	34,835	33,260
z	79,06	74,55	98,79	114,84
M	0,1554	0,1539	0,01300	0,01498
ψ	0,6220	0,5968	0,98888	0,6980
Метод Ньютона				
Δx	1,82	3,59	1,06	-0,073
Δy	4,73	8,67	0,11	0,537
Δz	-2,42	-5,11	0,07	-0,055
x	48,83	50,60	31,07	34,937
y	38,74	42,68	35,12	30,547
z	73,59	70,90	100,08	114,955
M	0,15311	0,1528	0,01303	0,01529
ψ	0,5887	0,5832	0,9249	0,7040

1.2.3. Исследование эффекта сжатия сетей

Проектирование геодезических измерений предусматривает получение искомых величин с необходимой точностью. Особенно это важно для инженерных геодезических сетей и сетей специального назначения. Например, в зависимости от принятого способа разбивки опор и условий местности на мостовом переходе геодезическую сеть создают в виде триангуляции, линейно-угловых (базовых) треугольников и полигонометрии. Для повышения точности разбивочных работ рекомендуется определенная форма типовых фигур, которая не всегда может быть соблюдена, и для обеспечения требуемой точности в положении пунктов повышают точность измерений. При составлении проекта выполняют предварительный расчет точности для определения качества построения.

Критерии качества геодезических построений достаточно разнообразны. Рассмотрим лишь два из них: ошибку положения пунктов в слабом месте геодезических сетей (M) и показатель «относительная обусловленность» (Ψ). В нем используется отношение числа обусловленности матрицы нормальных уравнений при параметрическом способе уравнивания геодезических сетей к предрасчетному числу обусловленности, свойственному симметричным геодезическим построениям.

Показатель «относительная обусловленность» исследуется на протяжении ряда лет (с 1994 года), и в результате исследований установлены следующие его свойства:

- для одной и той же геодезической сети значение «относительной обусловленности» Ψ получается приблизительно одинаковым, если используются различные числа обусловленности;
- значение Ψ остается прежним при масштабном изменении геодезической сети;
- величина Ψ зависит:
 - ◆ от числа и расположения исходных и определяемых пунктов;
 - ◆ от геометрических фигур геодезической сети;
 - ◆ от измеряемых в сети элементов;
 - ◆ от соотношения точности измерений.

Кроме того, на величину «относительной обусловленности» сформировано допустимое значение в зависимости от класса построения.

В данном случае рассмотрим, как будет изменяться значение «относительной обусловленности» и ошибки положения пункта в слабом месте при продольном и поперечном сжатии звеньев.

Исследуем для этого звенья геодезических сетей (рис. 1.24, 1.25), содержащих 4 исходных и 14 определяемых пунктов.

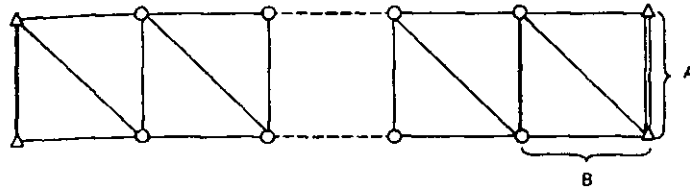


Рис. 1.24. Геодезическая сеть триангуляции, трилатерации и линейно-угловой триангуляции

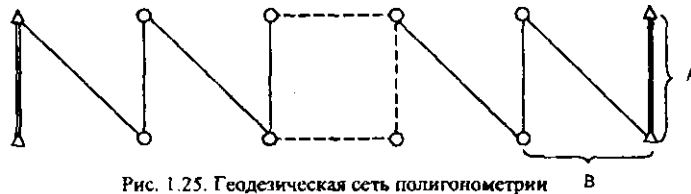


Рис. 1.25. Геодезическая сеть полигонометрии

Если $A = B$ (см. рис. 1.24, 1.25), то симметричные геодезические звенья будем считать начальными, если $A < B$, то получим поперечное сжатие, а если $A > B$, – продольное сжатие звена. Отметим также, что по отношению к начальному варианту ($A = B$) поперечное сжатие можно охарактеризовать как растяжение звена. Продольное сжатие звеньев будем осуществлять уменьшением значения B при неизменном A .

В таблицах 1.10, 1.11 приведены значения Ψ и M при различных величинах A и B и различных значениях средних квадратических ошибок измерений. По данным табл. 1.10, 1.11 можно сделать следующие выводы:

1. Во всех случаях продольное сжатие звеньев приводит к инвариантности M .
2. Неизменность «относительной обусловленности» Ψ по отношению к продольному сжатию наблюдается только для звеньев трилатерации и полигонометрии.
3. Во всех случаях растяжение звеньев ($A < B$) приводит к резкому увеличению Ψ и M .
4. При продольном сжатии звеньев триангуляции и линейно-угловой триангуляции происходит увеличение Ψ .

Отсюда следует, что звенья триангуляции и даже линейно-угловой триангуляции по качеству построения становятся плохими и при их сжатии, и при их растяжении.

Таким образом, при проектировании мостовой разбивочной основы и геодезических сетей для линейных сооружений следует отдавать предпочтение сетям трилатерации и полигонометрии с продольным сжатием, а именно сетям, у которых значения $A \geq B$.

Таблица 1.10

Звенья с исходными пунктами

A / B	Триангуляция					Трилатерация				
	10	100	1000	10 000	100 000	10	100	1000	10 000	100 000
100 000										
$\sigma_h = 0,2''$	∞	$0,6 \cdot 10^6$	6145	62,0	4,02	У	0,95	0,95	0,96	0,96
$\sigma_s = 0,099$	0,084	0,084	0,084	0,085	0,238	М	0,237	0,237	0,238	0,239
10 000										
$\sigma_h = 1,0''$	$0,6 \cdot 10^5$	6145	62,0	4,02	$1 \cdot 10^4$	У	0,95	0,95	0,96	0,96
$\sigma_s = 0,048$	0,042	0,042	0,042	0,144	8,00	М	0,115	0,115	0,115	0,115
1 000										
$\sigma_h = 2,0''$	6144	62,0	4,02	$1 \cdot 10^4$	∞	У	0,95	0,96	2,93	204
$\sigma_s = 0,010$	0,008	0,008	0,023	1,60	∞	М	0,024	0,024	0,036	0,284
100										
$\sigma_h = 10,0''$	62,0	4,02	$1 \cdot 10^3$	∞	∞	У	0,96	2,93	204	$2 \cdot 10^4$
$\sigma_s = 0,005$	0,004	0,011	0,800	80,0	∞	М	0,012	0,018	0,142	1,41
10										
$\sigma_h = 30,0''$	4,02	$1 \cdot 10^2$	∞	∞	∞	У	2,93	204	$2 \cdot 10^4$	∞
$\sigma_s = 0,001$	0,003	0,240	23,9	∞	∞	М	0,004	0,028	0,283	28,3
100 000										
Линейно-угловая триангуляция										
$\sigma_h = 0,2''$	$3,8 \cdot 10^7$	$3,8 \cdot 10^7$	3804	38,4	1,56	У	0,96	0,96	0,97	2,22
$\sigma_s = 0,099$	0,067	0,067	0,067	0,068	0,134	М	0,235	0,235	0,235	0,236
10 000										
$\sigma_h = 1,0''$	$3,7 \cdot 10^5$	3715	37,5	1,55	66,2	У	0,94	0,94	0,95	1,62
$\sigma_s = 0,048$	0,033	0,033	0,034	0,066	0,508	М	0,115	0,115	0,116	1,19
1 000										
$\sigma_h = 2,0''$	3833	62,0	1,56	65,1	6492	У	0,97	0,98	2,21	158
$\sigma_s = 0,010$	0,007	0,007	0,013	0,102	1,02	М	0,024	0,024	0,033	0,239
100										
$\sigma_h = 10,0''$	38,7	1,56	65,1	6492	$6,4 \cdot 10^3$	У	0,98	2,21	158	$1 \cdot 10^4$
$\sigma_s = 0,005$	0,003	0,007	0,051	0,508	5,08	М	0,012	0,016	0,119	11,9
10										
$\sigma_h = 30,0''$	1,49	80,6	8028	$8,5 \cdot 10^3$	$8,0 \cdot 10^7$	У	3,00	236	$2 \cdot 10^4$	∞
$\sigma_s = 0,001$	0,002	0,014	0,140	1,40	14,0	М	0,004	0,036	0,356	35,6

Таблица 1.11

Ряды без исходных пунктов

A/B	Триангуляция				Тригнострация				
	10	100	1 000	10 000	100 000	100	1 000	10 000	100 000
100 000									
$\sigma_8 = 0,2^*$	∞	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^4$	207	16,2	Ψ	2,86	2,91	8,58
$\sigma_5 = 0,099$	0,101	0,101	0,101	0,094	0,250	M	0,238	0,239	0,338
10 000									
$\sigma_8 = 1,0^*$	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^4$	207	16,2	$5 \cdot 10^4$	Ψ	2,86	3,20	8,58
$\sigma_5 = 0,048$	0,051	0,051	0,047	0,125	9,56	M	0,115	0,113	1,36
1 000									
$\sigma_8 = 2,0^*$	$2 \cdot 10^4$	207	16,2	$5 \cdot 10^4$	∞	Ψ	2,91	8,58	$4 \cdot 10^4$
$\sigma_5 = 0,010$	0,010	0,009	0,025	1,91	∞	M	0,024	0,034	2,15
100									
$\sigma_8 = 10,0^*$	208	16,2	$5 \cdot 10^4$	∞	∞	Ψ	3,20	698	$7 \cdot 10^4$
$\sigma_5 = 0,005$	0,005	0,012	0,952	95,0	∞	M	0,012	0,142	5,18
10									
$\sigma_8 = 30,0^*$	16,2	$5 \cdot 10^4$	∞	∞	∞	Ψ	8,58	7 $\cdot 10^4$	$1 \cdot 10^7$
$\sigma_5 = 0,001$	0,004	0,286	28,5	∞	∞	M	0,003	0,028	3,86
100 000									
$\sigma_8 = 0,2^*$	∞	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^4$	84,0	4,64	Ψ	2,90	2,95	7,88
$\sigma_5 = 0,099$	0,083	0,083	0,082	0,067	0,126	M	0,236	0,237	0,321
10 000									
$\sigma_8 = 1,0^*$	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^4$	82,2	4,64	208	Ψ	2,85	3,29	8,08
$\sigma_5 = 0,048$	0,041	0,041	0,033	0,062	0,500	M	0,116	0,115	1,32
1 000									
$\sigma_8 = 2,0^*$	$1 \cdot 10^4$	84,8	4,64	205	$2 \cdot 10^4$	Ψ	2,98	7,82	$6 \cdot 10^4$
$\sigma_5 = 0,010$	0,008	0,007	0,013	0,101	1,00	M	0,024	0,032	2,63
100									
$\sigma_8 = 10,0^*$	3022	4,70	205	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	Ψ	8,80	665	$7 \cdot 10^6$
$\sigma_5 = 0,005$	0,010	0,006	0,050	0,500	5,00	M	0,008	0,016	1,32
10									
$\sigma_8 = 30,0^*$	$2 \cdot 10^4$	346	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^6$	∞	Ψ	6656	$10 \cdot 10^4$	∞
$\sigma_5 = 0,001$	0,097	0,017	0,139	1,39	13,9	M	0,097	0,394	39,4

1.2.4. Проектирование космических засечек

В 2000 г. на кафедре прикладной геодезии и фотограмметрии УО «Полоцкий государственный университет» была разработана программа OZVE под руководством профессора В.И. Мицкевича, позволяющая выполнять проектирование любых космических или наземных пространственных сетей. Программа OZVE в 2007 г. впервые применена для анализа точности космических засечек при длинах сторон 1000, 100 и 1 км.

Цель исследований – определить наилучшее расположение пунктов вблизи экватора при передаче координат пунктов слежения с эллипсоида на спутник и наоборот.

В современных навигационных методах используются спутники с наклоном орбиты $40 - 60^\circ$ и наземные пункты, расположенные на суше в различных континентах. При этом решается задача по определению координат спутников на траекторию орбиты со станции слежения с использованием дальномерных расстояний. Если расположение наземных станций может быть выбрано оптимальным образом, то спутниковые измерения делаются для траектории полета орбиты спутников, лежащих в одной плоскости с пунктами.

Ниже исследуется вопрос о влиянии расположения спутников на точность положения наземных станций и наоборот.

Для анализа точности пространственных засечек с помощью программы OZVE рассмотрим экваториальные засечки, когда станции слежения расположены, как показано на рис. 1.26, в точках с номерами 1-5 и спутники на орбите в точках 6-8.

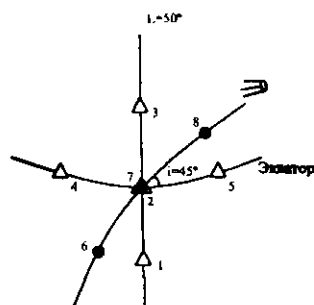


Рис. 1.26. Расположение исходных и определяемых пунктов

На рис. 1.26 показана схема пространственной засечки. Она будет линейной, когда измеренными величинами служат четыре наклонных дальности, и угловой, когда на определяемый пункт измерены четыре вертикальных угла.

При этом используются три варианта засечек с разными длинами сторон в группе 1-2, 2-3, 2-4, 2-5 и траектории в группах 6-7, 7-8 с точностью лазерных измерений σ_s (табл. 1.12).

Геодезические координаты всех пунктов В, L, Н необходимы для пересчета их в пространственную геоцентрическую систему по соответствующим известным формулам (табл. 1.13).

Таблица 1.12

Геодезические координаты пунктов

№ пп	Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3		
	В°'"	L°'"	H, м	В°'"	L°'"	H, м	В°'"	L°'"	H, м
1	9 02 00	50 00 00	0	-54 15 00	50 00 00	0	-0 00 36,56	50 00 00	0
2	0 00 00	50 00 00	0	0 00 00	50 00 00	0	0 00 00	50 00 00	0
3	9 02 00	50 00 00	0	54 17 00	50 00 00	0	0 00 33,56	50 00 00	0
4	0 00 00	58 59 00	0	0 00 00	49 06 00	0	0 00 00	49 59 27,7	0
5	0 00 00	41 01 00	0	0 00 00	50 54 00	0	0 00 00	50 00 32,3	0
6	-2 36 00	46 19 00	2·10 ⁶	-15 33 00	49 38 00	2·10 ⁶	-000 08,34	49 59 46,8	2·10 ⁶
7	0 00 00	50 00 00	2·10 ⁶	0 00 00	50 00 00	2·10 ⁶	0 00 00	50 00 00	2·10 ⁶
8	3 12 00	53 11 00	2·10 ⁶	19 12 00	50 19 00	2·10 ⁶	0 00 12,51	50 00 11,4	2·10 ⁶
$S_{4,7,8}, м$	500 000			50 000			500		
$S_{1,2,3}, м$	1 000 000			100 000			1000		
$\sigma_s, м$	1			0,1			0,001		

Таблица 1.13

Пространственные геоцентрические координаты пунктов

№ пп	Координаты, м	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1	X	4049217	4099350	4099857
	Y	4825669	4885415	4886019
	Z	-996035	-99975	-983
2	X	4099857	4099857	4099857
	Y	4886019	4886019	4886019
	Z	0	0	0
3	X	4049341	4099349	4099856
	Y	4825817	4885414	4886019
	Z	994821	100037	1044
4	X	3286629	4176097	4100614
	Y	5466267	4821019	4885383
	Z	0	0	0
5	X	4812505	4022605	4099099
	Y	4185905	4949814	4886655
	Z	0	0	0
6	X	18199832	5426339	4113026
	Y	19056131	6383448	4901077
	Z	-1199763	-37704	-257

Окончание табл. 1.1

7	X	16955609	5385432	4112713
	Y	20206908	6418108	4901340
	Z	0	0	0
8	X	15782727	5349795	4112442
	Y	21084417	6447674	4901567
	Z	1470094	46554	385

Именно эти координаты применяются в программе OZVE. Впрочем, возможно применение и топоцентрических, и условных пространственных координат.

В таблице 1.14 приведены результаты вычислений: ψ – относительная обусловленность [50, 67], характеризующая качество построения за-сечки, ошибка пространственного положения M в метрах.

Таблица 1.14

Результаты вычислений

№ ва-рианта	Исходные пункты	Определяемые пункты	ψ	M, м	$\sigma_{\psi, M}$	
1	1,2,3,4,5	6,7,8	115	20,3	1,0	
	1,2,3,4	6,7,8	186	27,6		
	1,2,3	6,7,8	∞	∞		
	4,2,5	6,7,8	∞	∞		
	1,2,4,5	6,7,8	186	27,6		
	1,3,4,5	6,7,8	92	20,3		
	1,4,5	6,7,8	155	28,7		
	Перенос координат со спутника на Землю					
		6,7,8	1	10'	136	1,0
		6,7,8	3	10'	141	
		6,7,8	4	10'	136	
		6,7,8	5	10'	140	
		6,7,8	2	10'	138	
	2	1,2,3,4,5	6,7,8	113	2,0	0,1
1,2,3,4		6,7,8	182	2,7		
1,2,3		6,7,8	∞	∞		
4,2,5		6,7,8	∞	∞		
1,2,4,5		6,7,8	182	2,7		
1,3,4,5		6,7,8	90	2,0		
1,4,5		6,7,8	152	2,8		
Перенос координат со спутника на Землю						
		6,7,8	1	10'	42,8	0,1
		6,7,8	3	10'	43,1	
		6,7,8	4	10'	43,0	
		6,7,8	5	10'	43,0	
		6,7,8	2	10'	43,0	
3		1,2,3,4,5	6,7,8	200	0,026	0,001
	1,2,3,4	6,7,8	185	0,027		
	1,2,3	6,7,8	∞	∞		
	4,2,5	6,7,8	∞	∞		
	1,2,4,5	6,7,8	259	0,034		
	1,3,4,5	6,7,8	165	0,026		
	1,4,5	6,7,8	242	0,037		

В процессе исследований были получены следующие результаты:

1. В космической и любой другой пространственной засечке исходные пункты не могут быть расположены либо на одном меридиане, либо на одной параллели, что приводит к $\psi = M = \infty$.

2. Независимо от длин сторон величина ψ во всех трех вариантах практически неизменна, и это верно, т. к. она зависит от геометрии построения засечки и инвариантна к длинам сторон засечки.

3. Ошибка пространственного положения может быть определена при любых длинах сторон и пересчитана пропорционально коэффициенту изменения размеров сторон. Например, в варианте 1 $M = 25$ м, в варианте 2 $M = 2,5$ м и в варианте 3 $M = 0,025$ м, при длинах сторон 20000, 2000 и 20 км соответственно.

4. Поскольку спутник в точках 6, 7, 8 (см. рис. 1.26) летит в одной траектории, то взяв эти пункты как исходные, мы получаем некачественную линейную засечку с $\psi \approx 10^4$, таким образом, для переноса координат со спутника на Землю необходимо использовать, как это бывает на практике, несколько спутников.

5. Наилучшее расположение исходных пунктов для космической засечки с необходимым количеством измерений:

1) два на меридиане, один на параллели;

2) два на параллели, один на меридиане (см. табл. 1.14).

Выводы:

1. Программа OZVE является универсальной и предназначена для проектирования различных космических и наземных сетей с количеством определяемых пунктов до 150, что занимает 60 с машинного времени на РЭМ.

2. С помощью программы можно оценивать качество построений и точность получения координат до 10 орбит спутников с 15 фиксированными положениями спутников на каждой орбите.

3. С помощью программы можно исследовать вопрос о количестве спутников при решении прямой задачи (Земля – спутник) и обратной задачи (спутник – Земля).

4. Целесообразно применять ψ при анализе качества построения пространственных засечек.

1.3. О дефектах конфигурации и дефектах построений

1.3.1. Анализ построений геодезических засечек на плоскости

Как отмечалось в [33], одной из проблем, стоящих на современном этапе перед геодезическим производством, является выбор наиболее устойчивого способа решения уравнений, возникающих при уравнивании геодезических построений. Это связано с проблемой обусловленности

получающихся нормальных уравнений. Плохая обусловленность является причиной существенных трудностей при их решении и приводит к значительному увеличению ошибок искомым параметров. Вопросы оценки обусловленности матрицы коэффициентов нормальных уравнений и точности решения системы не новы, и им посвящено немало работ в геодезической литературе. Но проблема выбора наиболее устойчивого способа решения уравнений все еще остается актуальной.

К ней можно отнести задачу уравнивания геодезических построений методом наименьших квадратов (МНК) для случая возмущенной системы с плохой обусловленной матрицей. Эта задача, как указал акад. А.Н. Тихонов [88], является некорректной. Предложенный им метод регуляризации позволяет построить устойчивое решение, близкое к истинному. Основная трудность практического использования этого метода заключается в выборе параметра регуляризации применительно к конкретной ситуации.

Математическим индикатором геодезических некорректных задач служит число обусловленности системы нормальных уравнений. Целью исследований является обобщение основных причин плохой обусловленности исходя из опыта математической обработки геодезических сетей.

На наш взгляд, основными причинами плохой обусловленности являются:

- 1) уравнивание геодезических сетей без исходных пунктов параметрическим способом;
- 2) дефект конфигурации, впервые обнаруженный д.т.н. Ю.И. Маркузе [44];
- 3) дефект построения геодезических сетей, если в них содержатся засечки плохого качества с вырожденной матрицей параметрических нормальных уравнений.

Обусловленность плохого качества для первой причины устраняется применением специальных математических методов, которые начали успешно развиваться в 70-х годах прошлого столетия и применяются не только для плановых, но и для нивелирных сетей.

Геодезические построения с дефектом конфигурации приведены на рис. 1.27 (первое построение предложено Ю.И. Маркузе, остальные – авторами).

Построения с дефектом конфигурации, присоединенные к геодезическим сетям, являются «ложкой дёгтя» и не устраняются никакими методами. При проектировании геодезических сетей на ЭВМ для разделения первой и второй причин плохой обусловленности берут исходные пункты и при плохой обусловленности отыскивают гены [27] с плохой конфигурацией.

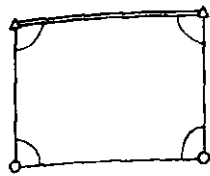


Рис. 1.27.1

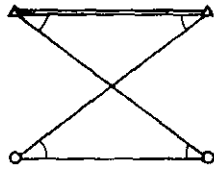


Рис. 1.27.2

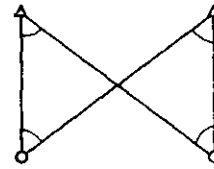


Рис. 1.27.3

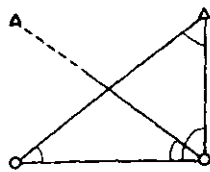


Рис. 1.27.4

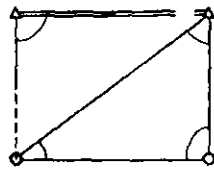


Рис. 1.27.5

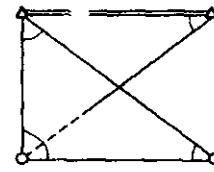


Рис. 1.27.6

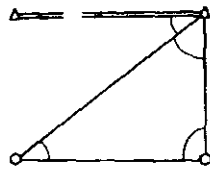


Рис. 1.27.7

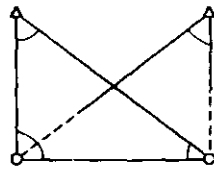


Рис. 1.27.8

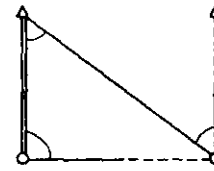


Рис. 1.27.9

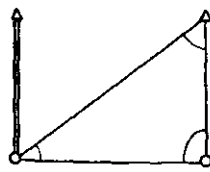


Рис. 1.27.10

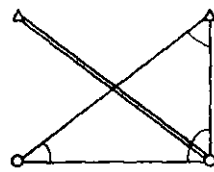


Рис. 1.27.11

Рис. 1.27. Сети с дефектом конфигурации

Основные затруднения при поиске построений, принадлежащих к третьей причине плохой обусловленности, связаны с большим объемом вычислений на ЭВМ, хотя два геодезических построения с плохой обусловленностью известны еще со времен Гаусса: прямая засечка с острым углом при определяемом пункте и обратная засечка, когда все исходные и

определяемый пункты лежат на одной окружности. Далее рассмотрим новые построения, принадлежащие к третьей группе причин, и обоснуем структуру и свойства плохой обусловленности. Интересно отметить, что в отличие от методов регуляризации решение данных построений может быть получено прямым поиском, методом релаксации [70], хотя оценка точности положения пункта будет грубой, по которой и различают плохие и качественные построения.

В работе [52] предложены два построения, принадлежащие к третьей группе причин (рис. 1.28 и 1.29).

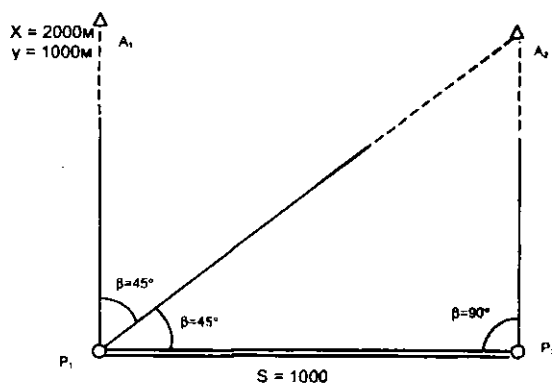


Рис. 1.28. Линейно-угловая засечка двух пунктов

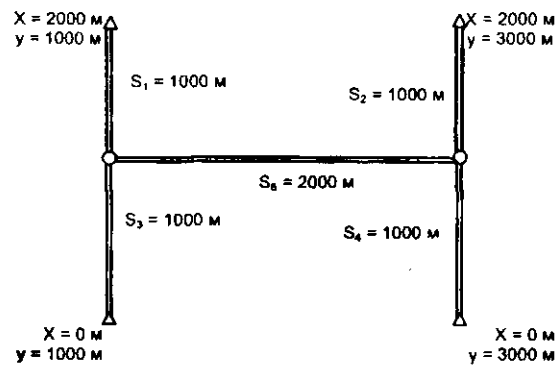


Рис. 1.29. Линейная засечка двух пунктов

В работе [24] предложено несколько таких построений, однако самой оригинальной и новой является линейно-угловая засечка, содержащая избыточные измерения (рис. 1.30)

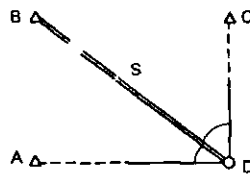


Рис. 1.30 Схема сети

Причина плохого построения, показанного на рис. 1.30, заключается в том, что в точке D соприкасаются две окружности, одна из которых проходит через точки A, B, C, D, а вторая имеет радиус S из точки B (рис. 1.31).

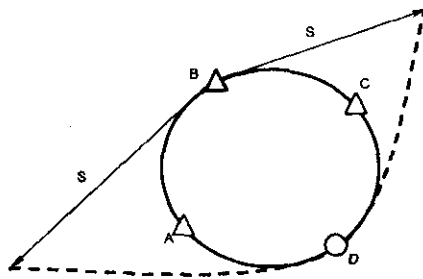


Рис. 1.31. Схема сети

На рис.1.32 показана другая засечка со свойствами построения засечки рис. 1.31, причем на пункте D измерено направление не DE, а DB. Если на рис. 1.31 заменить направление DB на DE, то засечка будет хорошего качества.

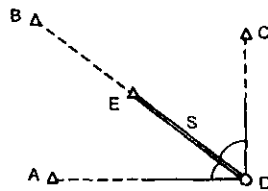


Рис. 1.32. Схема сети

Соприкасающиеся окружности приведут к плохой обусловленности и в других случаях, один из них показан на рис. 1.33.

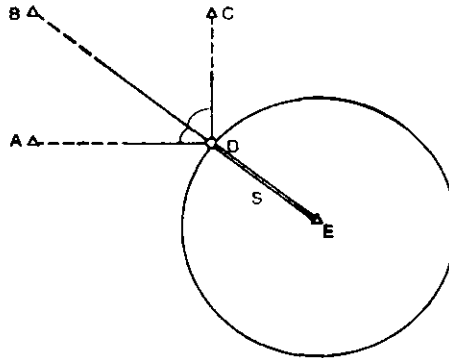


Рис. 1.33. Плохой ген

Отметим, что к третьей причине плохой обусловленности могут относиться построения не только одного, двух, но и трех и более определяемых пунктов даже при наличии избыточных измерений. При этом если к сплошной сети триангуляции присоединить любой плохой ген, то система нормальных параметрических уравнений будет вырожденной («ложка дёгтя»).

При построении геодезических сетей без исходных пунктов будем рассматривать ячейки (гены), не содержащие исходных пунктов. Алгоритм обработки таких сетей общеизвестен [18]

$$Q = (A^T P A)^+ \quad (1.18)$$

где A – матрица коэффициентов параметрических уравнений и поправок; P – диагональная матрица весов измерений. Знак «+» означает, что матрица псевдообратная, полученная по формуле

$$(A^T P A)^+ = (A^T P A + R^T R)^{-1} - R^T (R R^T R R^T)^{-1} R, \quad (1.19)$$

в которой используется вспомогательная матрица

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \dots & Y_i & -X_i \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_i & Y_i \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

и величины $X_i = x_{cp} - x_i$, $Y_i = y_{cp} - y_i$, содержащие координаты всех пунктов x_i, y_i .

Цель исследований: используя наилучшие гены (ячейки) с исходными пунктами (см. рис. 1.27), найти наилучшие из них при отсутствии исходных пунктов (рис. 1.34). Здесь двойной чертой показаны измеренные стороны.

Выполним обработку всех рядов, состоящих из генов по программе GENA3. Результаты вычислений приведены в табл. 1.15, где

$$c = \|N\|_E \|N^*\|_E; \quad (N = A^T P A); \quad \Psi = c/C^2; \quad M = \sigma_0 \sqrt{N_x^* + N_y^*}$$

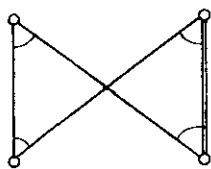


Рис. 1.34.1

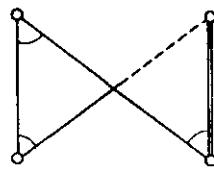


Рис. 1.34.2

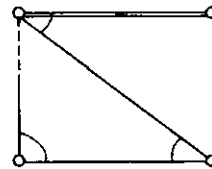


Рис. 1.34.3

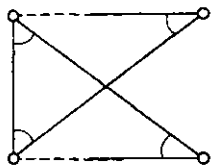


Рис. 1.34.4

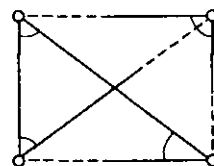


Рис. 1.34.5

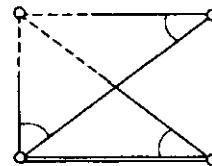


Рис. 1.34.6

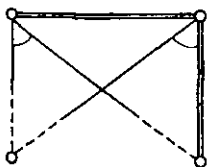


Рис. 1.34.7

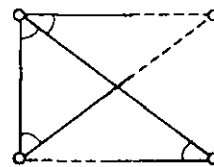


Рис. 1.34.8

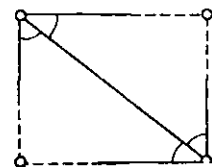


Рис. 1.34.9

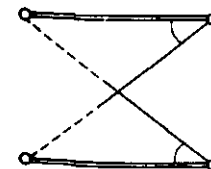


Рис. 1.34.10

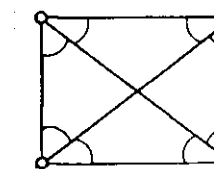


Рис. 1.34.11

Рис. 1.34. Наилучшие построения из геодезического генофонда

Таблица 1.15

Характеристики генов из геодезического генфонда для рядов

№ пос. генов в ряду	Рис. 1.34.1		Рис. 1.34.2		Рис. 1.34.3		Рис. 1.34.4		Рис. 1.34.5		Рис. 1.34.6		Рис. 1.34.7		Рис. 1.34.8		Рис. 1.34.9		Рис. 1.34.10		Рис. 1.34.11			
	С	У	М	С	У	М	С	У	М	С	У	М	С	У	М	С	У	М	С	У	М	С	У	М
1	18919	3984	15300	3264	20346	4289	2.5	10.3	2.2	15300	3264	20346	5428	2376	2376	5.0	6.7	1.4	25776	5428	5.39	1.13	0.003	0.003
2	20086	1364	15610	1060	16376	1112	2.3	30.5	2.1	11276	766	33182	2254	33182	42.8	2.9	23.7	1.7	6160	418.4	19.3	1.31	0.004	0.004
3	17101	729	12892	552	10674	446	2.9	71.1	3.0	6970	291	31887	1359	31887	83.8	3.6	72.0	3.1	3476	148.2	55.1	2.35	0.005	0.005
4	14392	341	10871	258	6508	154	1.1	148	3.5	4306	103	29009	650	29009	171	4.0	179	4.0	2116	50.2	134	3.18	0.007	0.007
5	12745	223	9757	171	4034	70.6	4.4	285	5.0	2688	47.1	27354	479	27354	337	5.9	354	6.2	1414	24.8	287	5.02	0.009	0.009
6	12231	168	9652	133	2484	34.4	6.1	513	7.1	1733	23.9	26662	367	26662	62.4	8.6	669	9.2	1247	17.2	554	7.63	0.012	0.012
7	22898	134	10614	111	1638	17.1	7.9	870.9	9.1	1376	14.3	27991	288	27991	108.7	11.3	1175	12.3	1691	17.8	946	10.3	0.014	0.014
8	14812	122	12720	105	1411	11.6	10.1	1407	11.6	1620	13.4	30442	251	30442	1793	14.8	1944	16.0	2677	22.1	1648	13.6	0.017	0.017
9	18061	145	16069	129	1706	13.7	15.3	1906	17.5	2287	18.4	35528	286	35528	2822	21.7	3065	24.7	4200	33.8	2618	21.1	0.021	0.021
10	22758	146	20799	133	2337	15.0	18.3	2857	20.9	3281	21.1	43181	277	43181	4272	27.4	4640	29.8	6365	40.8	3987	25.6	0.024	0.024

По данным табл. 1.15 можно сделать следующие выводы:

1. Линейно-угловые построения, состоящие из генов 1.34.1, 1.34.2, 1.34.7, неудовлетворительны по качеству построения при отсутствии исходных пунктов.

2. Построение рядов из генов 1.34.2, 1.34.3, 1.34.6, 1.34.10 улучшаются по мере возрастания ряда путем наращивания ячеек.

3. Угловые построения для генов 1.34.4, 1.34.5, 1.34.8, 1.34.9 и 1.34.11 можно рекомендовать к применению на производстве. При этом зная, что $\psi_{дон} = 10$ для сетей 4-го класса, $\psi_{дон} = 25$ для разрядных сетей и $\psi_{дон} = 40$ для съемочных сетей, легко выбрать предназначение таких построений в зависимости от класса.

Рассмотрим дефекты построений геодезических засечек одного определяемого пункта на плоскости.

С появлением универсальных программ решения засечек на ЭВМ стала актуальной задача поиска качественных и некачественных построений. Интерес вызывает поиск дефекта построения и анализ его происхождения. Известно, что дефект конфигурации, открытый Ю.И. Маркузе, влияет как на геодезические засечки двух определяемых пунктов, так и на геодезические сети.

Поиск дефекта следует вести в построениях самых простых геодезических засечек одного определяемого пункта. В данном исследовании поиск ведется с использованием программ SERP2 и SERP3.

SERP2 находит координаты пункта при наименьшем спектральном числе обусловленности

$$c = \|R\|_E \cdot \|Q\|_E. \quad (1.21)$$

SERP3 находит координаты пункта при минимуме наибольшей ошибки положения определяемого пункта

$$M = \sigma_0 \sqrt{Q_{11} + Q_{22}}, \quad (1.22)$$

где Q_{11} , Q_{22} – диагональные элементы матрицы обратных весов Q .

На рис. 1.35 – 1.44 показаны обратные, прямые, линейные и комбинированные засечки. Окружность черного цвета заливки обозначает найденный пункт при минимальном C либо M , которые указаны вместе с координатами определяемого пункта. Применяя обратную геодезическую задачу, можно определить величину угла γ при вычисленном пункте. Оценка точности выполнялась при $\sigma_\beta = 1,0''$; $\sigma_s = 0,05$ мм; $S_{cp} \approx 10000$ м.

На основании выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Обнаружены геодезические засечки с дефектом построения (рис. 1.40, 1.41, 1.42), для которых любое положение определяемого пункта не приводит к уменьшению числа обусловленности C или ошибки положения M .

2. Минимум числа обусловленности при наилучшем положении пункта равен 2,00, а наибольшая ошибка положения определяемого пункта не меньше 0,31 м.

3. Подтверждены известные значения величин для угла γ при наименьших C и M , т.е. для наилучших построений.

4. В засечках 1.43 и 1.44 при наличии избыточных измерений получим угол $\gamma_1 = 60^\circ$, $\gamma_2 = 100^\circ 42'$ для примера 1.43 и $57^\circ 13'$ для примера 1.44.

5. В засечке 1.35 угол $\gamma = 63^\circ 26'$, в примере 1.37 получим угол $\gamma = 109^\circ 29'$, а в остальных примерах преобладают углы $\gamma = 45^\circ - 90^\circ$.

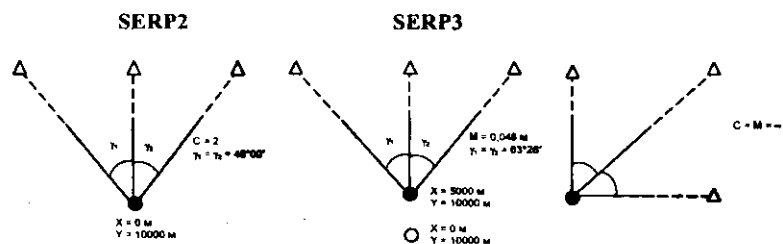


Рис. 1.35. Обратная засечка

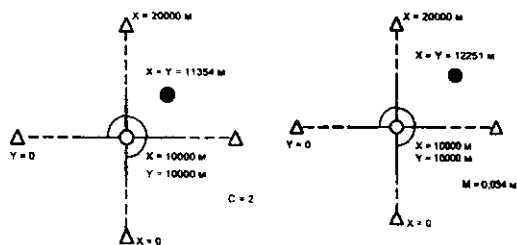


Рис. 1.36. Многократная обратная засечка

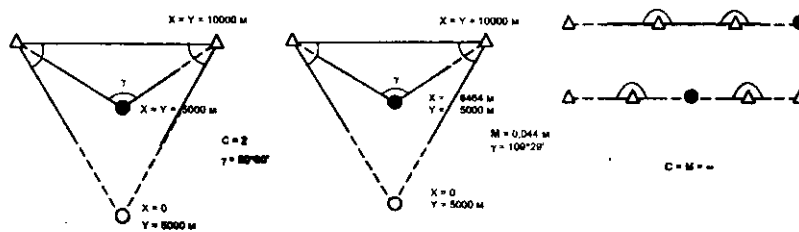


Рис. 1.37. Прямая засечка

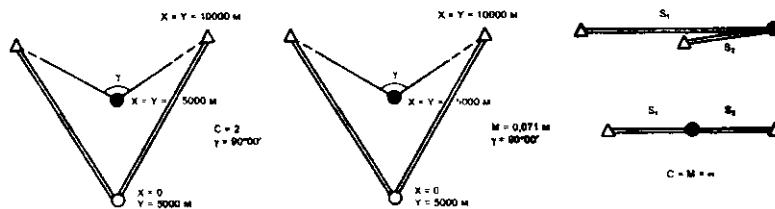


Рис. 1.38. Линейная засечка

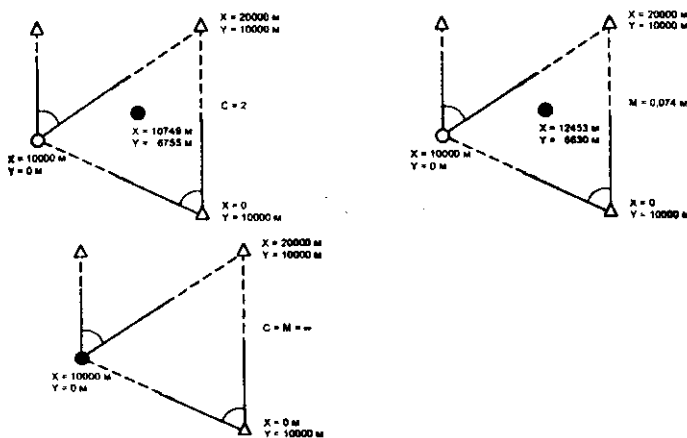


Рис. 1.39. Комбинированная засечка

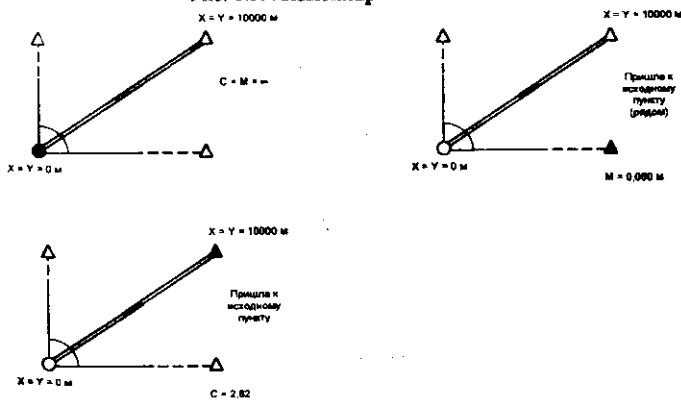


Рис. 1.40. Комбинированная засечка

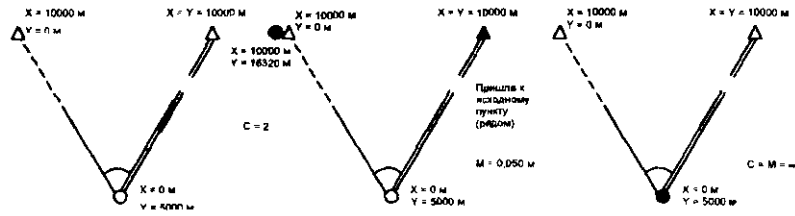


Рис. 1.41. Комбинированная засечка

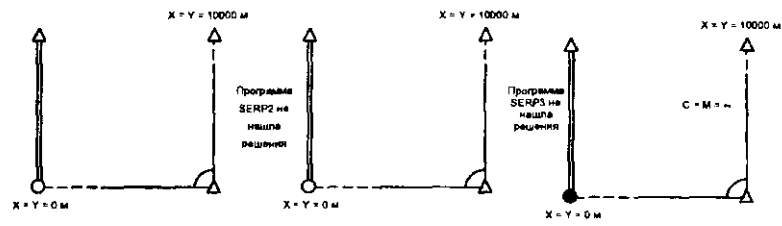


Рис. 1.42. Комбинированная засечка

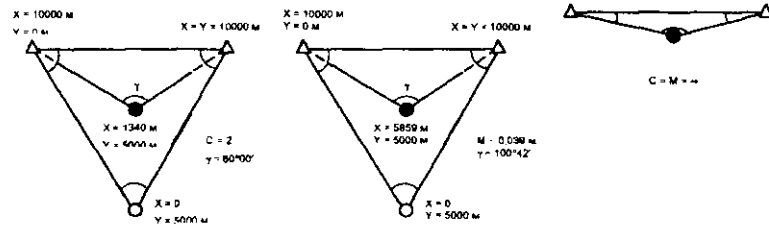


Рис. 1.43. Многократная угловая засечка

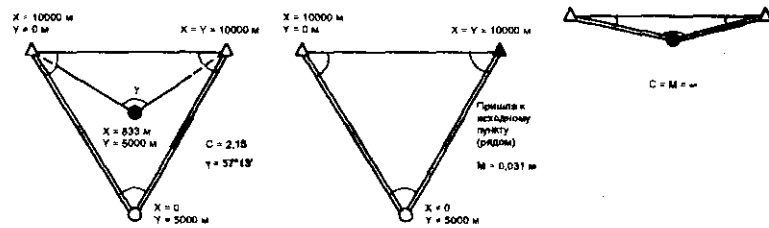


Рис. 1.44. Многократная линейно-угловая засечка

Рассмотрим диагностику плохого качества построения засечек с использованием программы МАХ.

С появлением универсальных программ решения засечек на ЭВМ стала актуальной задача поиска качественных и некачественных построений. Интерес вызывают поиск дефекта построения и анализ его происхождения.

Поиск дефекта следует вести в построениях самых простых геодезических засечек одного определяемого пункта.

В данном исследовании поиск ведется с использованием программы МАХ, которая находит координаты определяемого пункта при максимизации спектрального числа обусловленности (1.21)

На рис. 1.44.1 – 1.44.12 показаны обратные, прямые, линейные и комбинированные засечки. Окружность черного цвета заливки обозначает найденный пункт при максимальном S , которое вычислялось при $\sigma_p = 1,0''$; $\sigma_S = 0,05$ мм; $S_{cp} \approx 10000$ м.

На основании выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Поскольку вершин у изолиний для целевой функции много, то задача неоднозначная, следовательно, необходимы ограничения на область движения определяемого пункта при использовании программы МАХ.
2. В пяти случаях из двенадцати для максимального S определяемый пункт попадает в створ с исходными пунктами.
3. Еще больше неоднозначностей для максимума целевой функции будет в случаях двух, трех и более определяемых пунктов, поэтому такие засечки мы не рассматривали.
4. На рис. 1.44.12 найденная точка лежит не только на окружности, но и на касательной к ней, проходящей из крайнего левого исходного пункта, что соответствует вырожденному случаю.

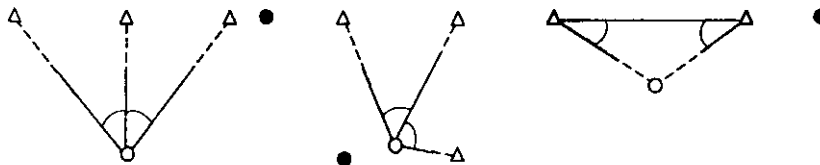


Рис. 1.44.1. Обратная засечка Рис. 1.44.2. Обратная засечка Рис. 1.44.3. Прямая засечка

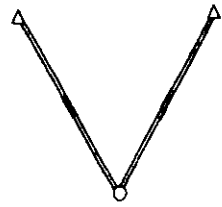


Рис. 1.44.4. Линейная засечка

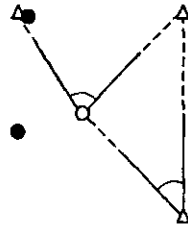


Рис. 1.44.5. Комбинированная засечка

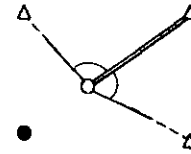


Рис. 1.44.6. Комбинированная засечка

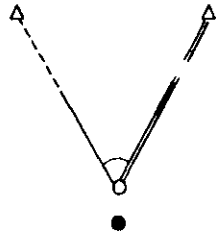


Рис. 1.44.7. Комбинированная засечка

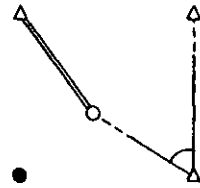


Рис. 1.44.8. Комбинированная засечка

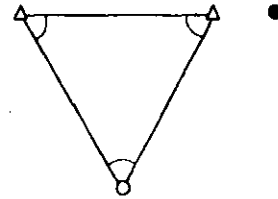


Рис. 1.44.9. Многократная угловая засечка

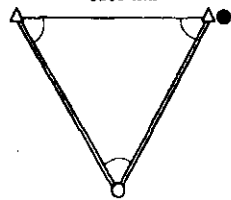


Рис. 1.44.10. Многократная линейно-угловая засечка

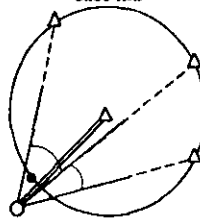


Рис. 1.44.11. Комбинированная линейно-угловая засечка

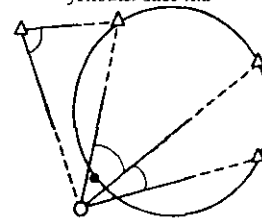


Рис. 1.44.12. Комбинированная угловая засечка

Рассмотрим вопрос о поиске необходимого количества дополнительных измерений для устранения дефекта конфигурации в геодезических сетях. Наиболее простое построение с дефектом конфигурации показано на рис. 1.45 [42]. Этот случай может появиться и в геодезической практике (рис. 1.46).

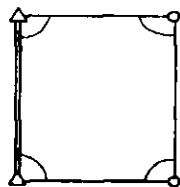


Рис. 1.45. Сеть с дефектом конфигурации

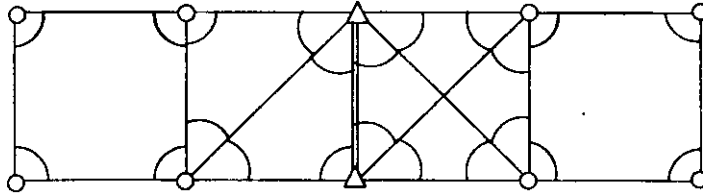


Рис. 1.46. Сеть с дефектом конфигурации

Избавиться от дефекта конфигурации можно с помощью дополнительных измерений углов или, чаще всего, сторон. В каком месте следует запроектировать дополнительное измерение, решает исполнитель. Например, если в геодезической сети на рис. 1.45 горизонтальные углы равны 90° , то дополнительная сторона между определяемыми пунктами не избавит от дефекта данных, поэтому необходимо измерить сторону между исходным и определяемым пунктами.

Для анализа геодезических сетей введём обозначения:

$r_{\text{реальное}}$ – количество независимых условных уравнений, определённых по схеме сети. Для рис. 1.45 оно равно одному условию фигур, а для рис. 1.46 получим 8 условий (7 условий фигур и 1 условие полюса);

$r_{\text{теоретическое}} = N - t$, где N – количество измерений; t – число необходимых измерений.

Для рис. 1.45 $r_{\text{теоретическое}}$ равно нулю, для рис. 1.46 $N = 22$; $t = 16$, $r_{\text{теоретическое}}$ равно 6.

Нетрудно доказать, что сеть содержит дефект конфигурации, если

$$r_{\text{реальное}} - r_{\text{теоретическое}} \geq 1. \quad (1.23)$$

С помощью неравенства (1.23) можно решить задачу, сколько необходимо запроектировать дополнительных измерений ($N^{\text{доп}}$), чтобы в сети отсутствовал дефект конфигурации при правильном назначении этих измерений

$$N^{\text{доп}} = r_{\text{реальное}} - r_{\text{теоретическое}}. \quad (1.24)$$

Для рис. 1.45 $N^{\text{доп}} = 1$, а для рис. 1.46 $N^{\text{доп}} = 2$.

Применим формулу (1.24) для геодезической сети (рис. 1.47), предложенной И.В. Зубрицким [32].

Для сети на рис. 1.47 найдём $N = 36$; $t = 28$; $r_{\text{теоретическое}} = 8$, а $r_{\text{реальное}} = 13$ (9 условий фигур и 4 условных уравнения горизонта). При этом $N^{\text{доп}} = 13 - 8 = 5$. Назначение дополнительных сторон (на рис. 1.47 знаком \perp изображена измеренная сторона) – задача сложная, посильная только человеку. Если измерить все стороны в сети, показанной на рис.

1.47, то получим обычную строительную сетку [38], не имеющую дефекта конфигурации:

$$r_{\text{регулярное}} = (9 \text{ условий фигур} + 4 \text{ условия горизонта} + 18 \text{ условий координат}) = 31,$$

$$r_{\text{нерегулярное}} = (N = 36 \text{ углов} + 23 \text{ стороны} = 59; t = 28) = 31.$$

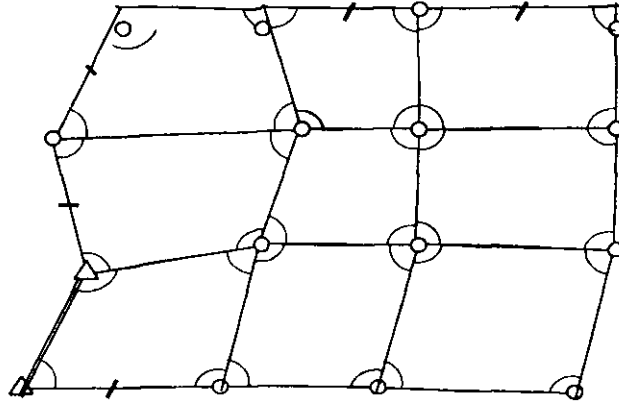


Рис. 1.47. Сеть четырёхугольников без диагоналей

На рис. 1.48, 1.49, 1.50 показаны сети с дефектами конфигурации для трех, четырех и шести определяемых пунктов, для которых $N^{\text{доп}} = 1$ (одна сторона между исходным и определяемым пунктами).

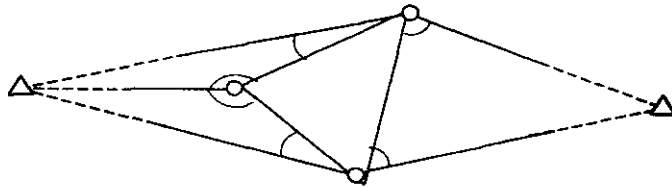


Рис. 1.48. Сеть с дефектом конфигурации

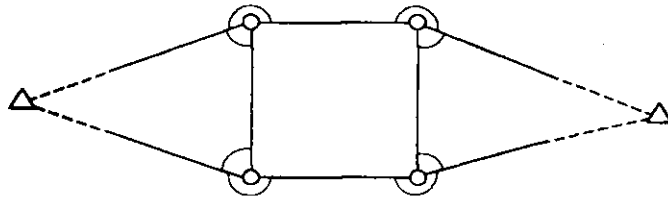


Рис. 1.49. Сеть с дефектом конфигурации

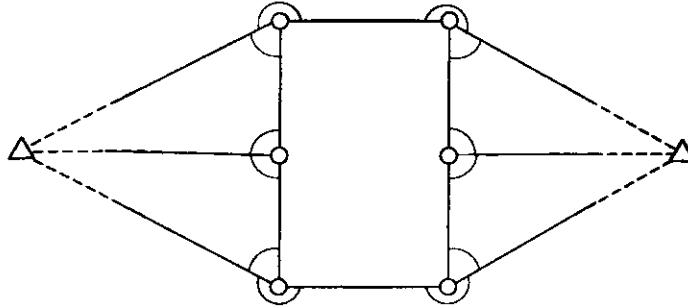


Рис. 1.50. Сеть с дефектом конфигурации

Выше даны геодезические построения, в которых возникает одно условие фигур и $N^{доп} = 1$.

Отметим, что дефект конфигурации может встречаться достаточно часто и в процессе проектирования геодезических сетей необходимо стремиться к тому, чтобы $N^{доп} = 0$. Для подсчёта $N^{доп}$ требуется находить $r_{\text{реализуемое}}$. Эта задача решается исполнителем по схеме геодезической сети и не поддается автоматизации.

1.3.2. Дефект конфигурации пространственных засечек

В книге [43] в разделе «Свободные геодезические сети и их уравнивание» впервые дано теоретическое обоснование по обнаружению дефекта конфигурации. Этот вопрос является актуальным при математической обработке результатов измерений, поскольку уравнивание геодезической сети с дефектом конфигурации приводит из-за вырожденности матриц нормальных уравнений к делению на ноль и остановке программы.

В статье [27] найдены причины, следствием которых являются геодезические построения с дефектом конфигурации. Суть их составляет ситуация, когда при наличии необходимых измерений возникает условное уравнение. Для случая геодезического построения, содержащего два определяемых пункта и два исходных, обнаружено 11 построений с дефектом конфигурации, в число которых входит геодезическая сеть, рассматриваемая Ю.И. Маркузе (см. рис. 1.14).

Ниже рассматриваются геодезические построения наземных пространственных засечек двух определяемых пунктов с целью не только обнаружения дефектов конфигурации, но и анализа качества их построения.

При оценке качества построения использовалась относительная обусловленность [67]

$$\psi = \frac{C}{C^0}, \quad (1.25)$$

где C – любое число обусловленности, для которого найдена C^0 при обработке симметричных геодезических сетей и наибольшая ошибка положения пункта $M_{\text{мнх}}$.

На рис. 1.51, 1.52 показаны пространственные засечки двух определяемых пунктов по двум исходным с применением следующих измеренных величин: горизонтальных углов (от 1 до 4), углов наклона ($v_{1-2}, v_{1-3}, v_{1-4}, v_{2-3}, v_{2-4}$) и наклонных дальностей ($S_{1-2}, S_{1-3}, S_{1-4}, S_{2-3}, S_{2-4}$).



Рис. 1.51. Схема сети (пример 1)

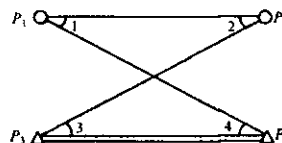


Рис. 1.52. Схема сети (пример 2)

Координаты исходных и определяемых пунктов:

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = (51, 1, 51); \quad P_2(x_2, y_2, z_2) = (51, 51, 60); \quad P_3(x_3, y_3, z_3) = (1, 1, 1); \quad P_4(x_4, y_4, z_4) = (1, 51, 85).$$

Приняты следующие стандарты измерений: для горизонтального угла $\sigma_\beta = 5,0''$; для вертикального угла $\sigma_v = 5,0''$; для наклонной дальности $\sigma_S = 0,0015$ м. Последний стандарт определялся по формуле

$$\sigma_S = \frac{\sigma_\beta S_\varphi}{\rho''}, \quad (1.26)$$

При $S_\varphi = 50$ м и $\rho = 206265''$.

Примеры 1 – 2 (см. рис. 1.51, 1.52) выбраны исходя из того, что в них наблюдается дефект построения в плане и по высоте, когда возникает пространственный треугольник, содержащий три вертикальных угла, т. е. имеется пространственное условное уравнение.

Например, при наличии трех горизонтальных углов ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$) и трех вертикальных углов ($v_{1-2}, v_{1-3}, v_{2-3}$) возникает дефект конфигурации пространственного построения по причине возникновения условного уравнения по вертикальным углам. Такие построения не рассматривались (табл. 1.16), а использовались в обработке варианты без дефектов конфигурации.

Таблица 1.16

Обработка вариантов для примера 1 (рис. 1.51)

№ вар.	Горизонтальные углы				Вертикальные углы					Наклонные дальности					M_{\max}	ψ
	1	2	3	4	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4		
1	+	+	+	+	+	+			+	*	*			*	0,008	12,7
															0,013	24,0
2	+	+	+	+	+	+			+	*	*	*		*	0,004	2,0
															0,006	4,3
3	+	+	+	+	+	+	+			*	*	*	*		0,004	1,7
															0,004	2,0
4	+	+	+	+	+		+	+	+	*		*	*	*	0,004	2,0
															0,006	3,7
5	+	+	+	+		+	+	+	+		*	*	*	*	0,004	1,5
															0,004	1,7
6	+	+	+		+	+	+	+	+	*	*	*	*	*	0,005	3,0
															0,005	3,5
7	+	+			+	+	+	+	+	*	*	*	*	*	0,021	70,3
															0,007	10,7
8	+				+	+	+	+	+	*	*	*	*	*	0,022	49,7
															0,009	9,5
9	+	+	+		+		+	+		*		*	*		0,018	58,9
															0,014	25,7
10	+	+	+		+	+		+		*	*		*		0,005	3,4
															0,155	4610
11	+	+	+		+	+		+		*	*		*		0,009	13,0
															0,013	23,8
12	+		+		+	+	+	+	+	*	*	*	*	*	0,008	5,5
															0,005	2,6
13	+			+	+	+	+	+	+	*	*	*	*	*	0,013	13,4
															0,004	1,2
14	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0,002	0,6
15	+	+	+	+	+	+				+					0,013	32,6
16	+	+	+	+	+	+				+					0,004	1,8
17	+	+	+	+						+	+				0,012	31,0
18	+	+	+	+	+					+	+	+			0,004	3,2
19					+	+	+	+	+	+					0,018	40,2
20					+	+	+	+		+	+				0,011	10,2
21					+	+				+	+	+	+		0,007	3,7
22					+					+	+	+	+	+	0,009	9,5
23					+	+				+		+	+	+	0,005	1,6
24					+		+	+	+	+	+	+	+	+	0,005	1,8
25					+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0,003	0,7

Поясним табл. 1.16, в которой знаком «+» обозначаются взятые в обработку измерения для пространственных построений с точностными характеристиками M_{\max} и ψ , указанными в числителе. В знаменателе даны характеристики для измерений помеченных знаком «*». Например, в варианте 1 рассматривались два построения, состоящие из следующих измерений:

первое построение – горизонтальные углы ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$) и вертикальные углы ($\nu_{1,2}, \nu_{1,3}, \nu_{2,4}$) с точностными характеристиками $M_{\max} = 0,008$ м и $\psi = 12,7$;

второе построение – горизонтальные углы ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$) и наклонные дальности ($S_{1-2}, S_{1-3}, S_{2-4}$) с точностными характеристиками $M_{\max} = 0,013$ м и $\psi = 24,0$.

Таких построений будет 26 – 13 вариантов по два построения. С 14 варианта по 25 знаком «+» обозначаются все взятые в обработку измеренные величины. Например, в вариантах 19 – 25 горизонтальные углы в обработке не участвовали, а использовались вертикальные углы и наклонные дальности совместно. По данным табл. 1.16 можно сделать следующие выводы:

1. В вариантах 1 – 6 вертикальные углы приводят к более точным построениям, чем наклонные дальности.

2. При отсутствии одного или двух горизонтальных углов (варианты 6 – 13) характеристики точности ухудшаются при любых комбинациях пространственных измерений.

3. Вариант 14 содержит наименьшие M_{\max} и ψ из-за большого количества избыточных измерений, равного 8.

4. При отсутствии горизонтальных углов наилучшим вариантом является 25, содержащий 4 избыточных измерения, не уступающий по точности варианту 14.

Таблица 1.17

Обработка вариантов для примера 2 (рис. 1.52)

№ вар.	Горизонтальные углы				Вертикальные углы					Наклонные дальности					M_{\max}	ψ
	1	2	3	4	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4		
1	+	+	+	+	+	+			+		*	*			0,011	16,7
															0,007	3,0
2	+	+	+	+	+	+	+		+		*	*	*		0,005	2,2
															0,005	2,0
3	+	+	+	+	+	+	+	+			*	*	*	*	0,005	1,8
															0,005	1,9
4	+	+	+	+	+		+	+	+		*		*	*	0,005	1,9
															0,007	4,3
5	+	+	+	+		+	+	+	+		*	*	*	*	0,004	1,3
															0,005	1,8
6	+	+	+		+	+	+	+	+		*	*	*	*	0,006	3,7
															0,005	2,9
7	+	+			+	+	+	+	+		*	*	*	*	0,012	18,4
															0,007	5,5
8	+				+	+	+	+	+		*	*	*	*	0,022	44,4
															0,013	17,4
9	+	+	+		+		+	+			*		*	*	0,016	28,7
															0,013	12,5
10	+	+	+		+	+		+			*	*		*	0,007	4,1
															0,008	5,0
11	+	+	+		+	+		+			*	*		*	0,012	16,9
															0,008	4,4

Окончание табл. 1.17

12	+		+		+	+	+	+	+	*	*	*	*	*	0,012	9,3
															0,007	4,4
13	+			+						*	*	*	*	*	0,008	4,3
															0,004	1,5
14	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0,002	0,6
15	+	+	+	+	+	+				+					0,006	4,5
16	+	+	+	+	+	+				+					0,004	1,6
17	+	+	+	+	+					+	+				0,005	2,3
18	+	+	+	+	+					+	+	+			0,004	1,6

В таблице 1.17 приведены сведения для построения, показанного на рис. 1.52. Варианты 19 – 25 из табл. 1.16 дадут тот же результат при обработке примера 2 из-за отсутствия горизонтальных углов.

По данным табл. 1.17 можно сделать следующие выводы:

1. Практически во всех случаях для примера 2 наклонные дальности приводят к более высокой точности, чем вертикальные углы.
2. Характеристики точности в вариантах 14 – 18 лучше для данного примера, чем для примера 1.
3. Из всех обработанных вариантов видно, что построение, показанное на рис. 1.52, лучше по качеству, чем построение на рис. 1.51.

В таблице 1.18 приведены примеры пространственных построений с дефектом конфигурации.

Таблица 1.18

Пространственные построения с дефектом конфигурации для примера 1

№ вар.	Горизонтальные углы				Вертикальные углы					Наклонные дальности					M_{\max}	Ψ
	1	2	3	4	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4		
1	+	+	+	+	+	+				*	*				∞	∞
2	+	+	+	+	+			+		*		*			∞	∞
3	+	+	+	+	+				+	*			*		∞	∞
4	+	+	+	+	+					*				*	∞	∞
5	+	+	+						+	+			+		0,155	4610
6	+	+	+							+		+		+	0,066	730
7		+	+	+						+	+		+		0,243	8500
8		+	+	+						+		+		+	0,088	920

В заключение отметим, что при проектировании пространственных геодезических сетей не следует брать в обработку горизонтальные углы, поскольку их присутствие не намного улучшает качество построения сетей.

2. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПОСТРОЕНИЙ ЗАСЕЧКИ ГРУППЫ ПУНКТОВ

2.1. Засечки двух определяемых пунктов

2.1.1. Засечки двух пунктов по двум исходным

На топографо-геодезическом производстве засечки широко используются при развитии съемочного обоснования, при создании инженерно-геодезических сетей на строительных площадках и в других случаях. В [80] рассматриваются засечки типа задачи Ганзена, которые предусматривают совместное определение двух пунктов по двум, трем или четырем исходным пунктам.

Целью исследований является анализ качества построения засечек двух пунктов по двум исходным при следующих видах измеренных величин:

О – обратный угол с определяемого пункта на два исходных;

П – прямой угол с исходного пункта на определяемый;

S – измеренное расстояние между исходным и определяемым пунктом;

Δ – горизонтальный угол с одного исходного на два определяемых пункта;

b – базисное расстояние между двумя определяемыми пунктами.

В случае однократных засечек одного определяемого пункта возникают следующие сочетания измеренных величин [80]:

ОО – обратная засечка;

ПП – прямая засечка;

SS – линейная засечка;

ПО, PS, OS – однократные комбинированные угловые и линейно-угловые засечки.

Анализируя все шесть вариантов засечек, приходим к выводу, что в засечках одного пункта встречаются измерения О, П, S и отсутствуют Δ , b, присущие засечкам двух и более определяемых пунктов.

Заметим, что код ОООО (четыре обратных угла) свойственен классической задаче Ганзена.

В таблице 2.1 приведены все возможные комбинации наилучших по построению засечек типа задачи Ганзена. Здесь даны $c = \sqrt{R_{11} \cdot Q_{11}}$ – спектральное число обусловленности; $M = \sigma_0 \sqrt{Q_{11} + Q_{22}}$ – наибольшая ошибка положения определяемого пункта, где Q_{11} , Q_{22} – диагональные элементы матрицы обратных весов Q.

Пункты засечки расположены в углах квадрата при S = 50 м. оценка точности выполнялась при $\sigma_B = 30''$; $\sigma_S = 15$ мм.

Таблица 2.1

Результаты для анализа качества построения засечек типа задачи Ганзена
при наилучшей комбинации измерений

№ пп	Код	c	M _м	№ пп	Код	c	M _м
1	OOOO	86,7	0,019	18	ОПΔS	26,6	0,016
2	ОООП	25,6	0,015	19	ОПΔb	80,7	0,035
3	ОООΔ	64,3	0,021	20	ОПSb	16,3	0,022
4	ООOS	63,2	0,024	21	ОΔΔS	44,8	0,023
5	ООOb	108	0,032	22	ОΔΔb	130	0,039
6	ООПП	16,7	0,014	23	ОΔSS	54,2	0,028
7	ООПΔ	18,7	0,012	24	ОΔSb	122	0,038
8	ООПS	31,2	0,017	25	ОSSb	83,0	0,031
9	ООПb	40,6	0,020	26	ППΔΔ	22,7	0,015
10	ООΔΔ	48,0	0,025	27	ППΔb	33,9	0,024
11	ООΔS	40,4	0,023	28	ПΔΔS	27,7	0,018
12	ООΔb	104	0,039	29	ПΔΔb	112	0,034
13	ООSS	64,2	0,028	30	ПΔSb	30,7	0,024
14	ООSb	47,0	0,035	31	ΔΔSS	31,6	0,022
15	ОППΔ	30,7	0,017	32	ΔΔSb	255	0,058
16	ОППb	15,8	0,019	33	ΔSSb	74,2	0,040
17	ОПΔΔ	31,1	0,019				

В книге Ю.И. Маркузе [44] дана засечка с дефектом конфигурации (рис. 2.1), т. е. такое построение, которое при любом расположении исходных и определяемых пунктов соответствует вырожденному случаю матрицы нормальных уравнений R при параметрическом способе уравнивания. В результате анализа таких засечек нами обнаружено еще десять (рис. 2.2 – 2.11).

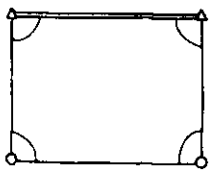


Рис. 2.1. Код ООПП

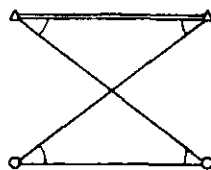


Рис. 2.2. Код ООПП

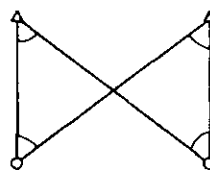


Рис. 2.3. Код ООΔΔ

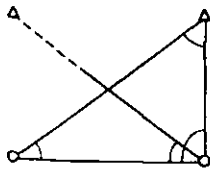


Рис. 2.4. Код ООΔΔ

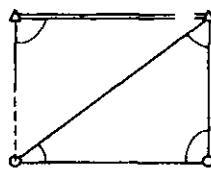


Рис. 2.5. Код ООПΔ

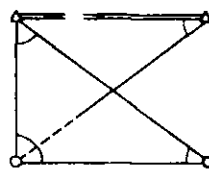


Рис. 2.6. Код ООПΔ

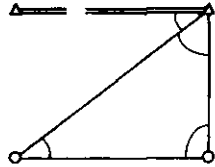


Рис. 2.7. Код ООПА

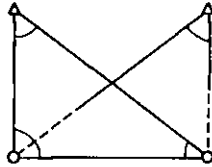


Рис. 2.8. Код ООАА

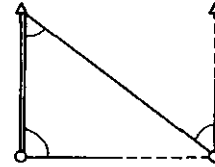


Рис. 2.9. Код ООСА

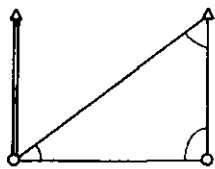


Рис. 2.10. Код ООСА

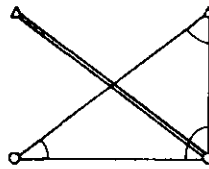


Рис. 2.11. Код ООСА

На рис. 2.12 показаны засечки типа задачи Ганзена, вырожденные в случае расположения исходных и определяемых пунктов в углах квадрата и поддающиеся улучшению числа обусловленности C при изменении местоположения определяемых пунктов в пределах квадрата ограничений со стороной 35 м и начальным шагом 25 м с помощью программы SERP2.

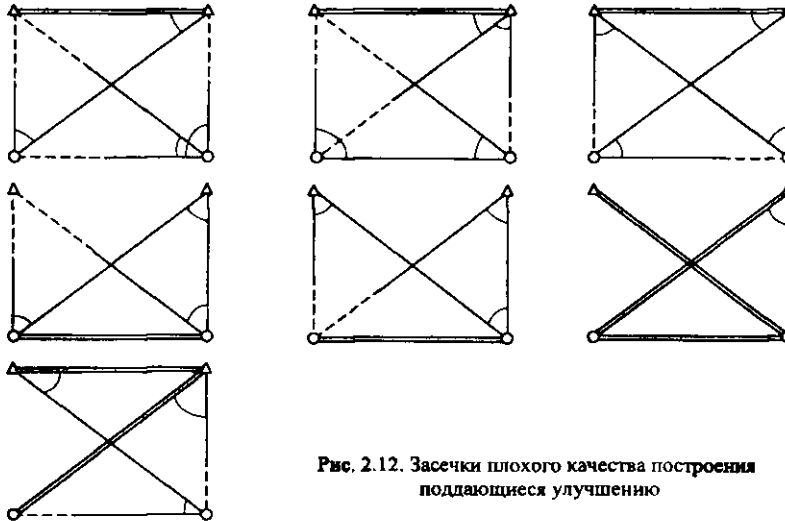


Рис. 2.12. Засечки плохого качества построения поддающиеся улучшению

На рис. 2.13 показаны засечки типа задачи Ганзена, вырожденные в случае расположения исходных и определяемых пунктов в углах квадрата и не поддающиеся улучшению числа обусловленности C при изменении местоположения определяемых пунктов с помощью программы SERP2, при $C_{\min} \geq 100$.

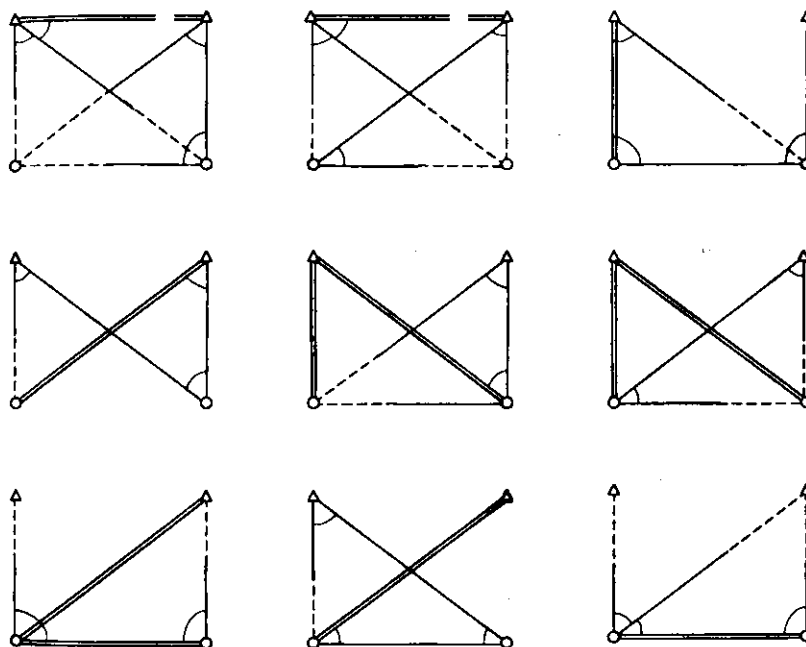


Рис. 2.13. Засечки плохого качества, не поддающиеся улучшению, но не имеющие дефекта конфигурации

На основании выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Расчеты показали, что количество разнообразных засечек типа задачи Ганзена не превосходит 33 при двух исходных пунктах.
2. Качество построения засечек, указанных в табл. 2.1, хорошее.
3. Выявлены десять новых случаев засечек с дефектом конфигурации (в книге Маркузе [44, с. 206] указана только одна засечка с дефектом конфигурации, см. рис. 2.1.).

4. Если определяемые и исходные пункты находятся в углах квадрата, то почти для каждого типа засечки, указанного с кодом в табл. 2.1, существует, по крайней мере, одна засечка с вырожденной матрицей нормальных уравнений.

5. Найдены засечки типа задачи Ганзена с плохим качеством построения в случае расположения пунктов в углах неравностороннего четырехугольника, как поддающиеся, так и не поддающиеся улучшению (см. рис. 2.12, 2.13).

2.1.2. О дополнительных измерениях при устранении дефектов конфигурации и дефектов данных

На рис.2.1 – 2.11, а также 2.14 – 2.28 показаны засечки типа задачи Ганзена с вырожденной матрицей параметрических нормальных уравнений. На рис. 2.29 – 2.55 показаны те же самые засечки с добавлением пятого измерения, которые излечиваются наилучшим образом, т. е. с наименьшими значениями S и M , приведенными и выделенными в табл. 2.2.

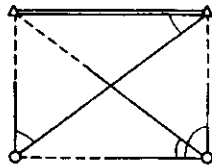


Рис. 2.14. Код ООП

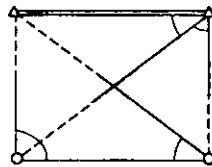


Рис. 2.15. Код ООПД

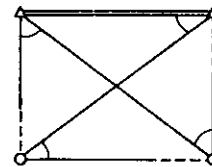


Рис. 2.16. Код ООПД

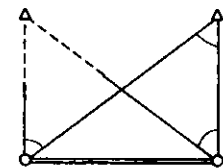


Рис. 2.17. Код ООДб

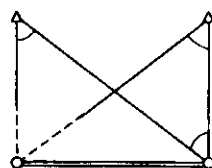


Рис. 2.18. Код ОДДб

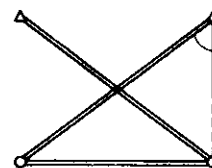


Рис. 2.19. Код SSAb

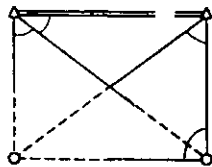


Рис. 2.20. Код ОПДД



Рис. 2.21. Код ОПДД

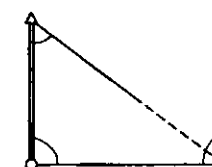


Рис. 2.22. Код OOSA

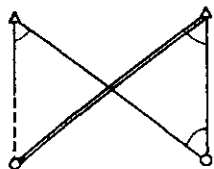


Рис. 2.23. Код OSΔΔ

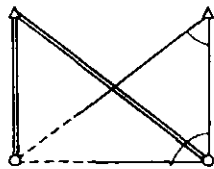


Рис. 2.24. Код OSSΔ

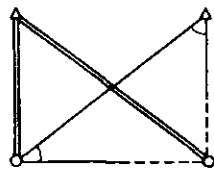


Рис. 2.25. Код OSSA

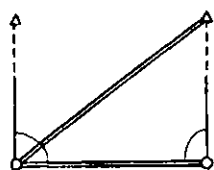


Рис. 2.26. Код OOSb

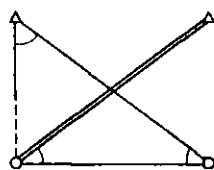


Рис. 2.27. Код OOSA

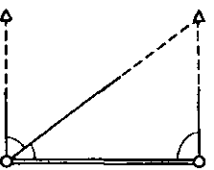


Рис. 2.28. Код OOOб

РИСУНКИ ЗАСЕЧЕК С ДОБАВЛЕННЫМ ПЯТЫМ ИЗМЕРЕНИЕМ

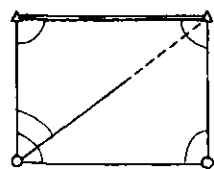


Рис. 2.29. Код OОППО

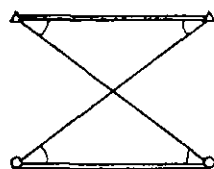


Рис. 2.30. Код OОППЬ

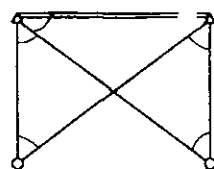


Рис. 2.31. Код OОΔΔП

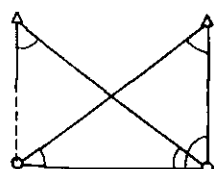


Рис. 2.32. Код OOOΔП

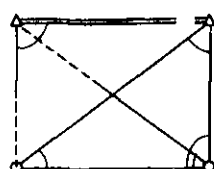


Рис. 2.33. Код OОПΔO

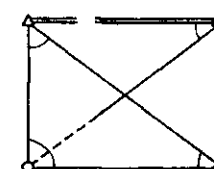


Рис. 2.34. Код OОПΔS

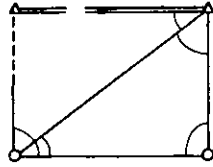


Рис. 2.35. Код ООПАО

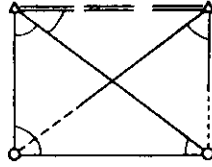


Рис. 2.36. Код ООДАП

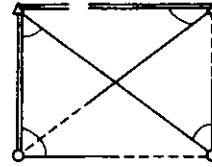


Рис. 2.37. Код ООSΔП

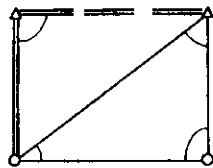


Рис. 2.38. Код ООSΔП

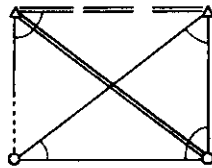


Рис. 2.39. Код ООSΔП

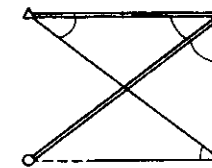


Рис. 2.40. Код ОПSΔП

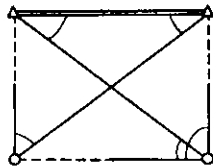


Рис. 2.41. Код ОООПП

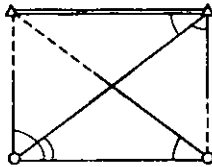


Рис. 2.42. Код ООПАО

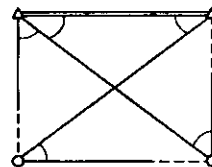


Рис. 2.43. Код ООПΔП

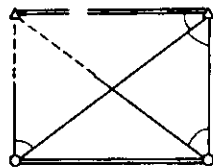


Рис. 2.44. Код ООΔбП

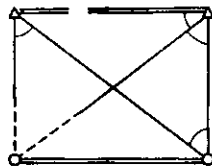


Рис. 2.45. Код ОΔΔбП

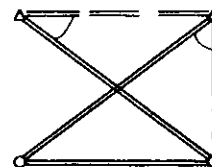


Рис. 2.46. Код SΔΔбП

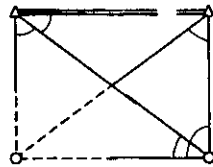


Рис. 2.47. Код ОПΔАО

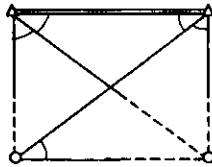


Рис. 2.48. Код ОПΔΔП

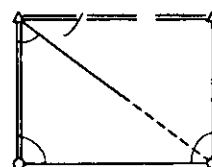


Рис. 2.49. Код ООSΔП

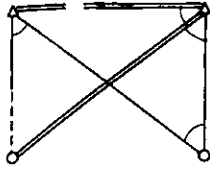


Рис. 2.50. Код OSΔΠΠ

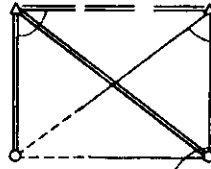


Рис. 2.51. Код OSSΔΠΠ

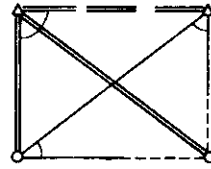


Рис. 2.52. Код OSSΔΠΠ

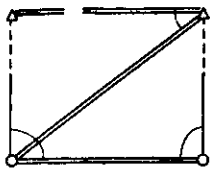


Рис. 2.53. Код OOSbΠΠ

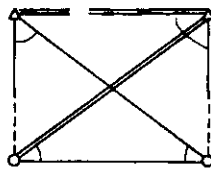


Рис. 2.54. Код OOSΔΠΠ

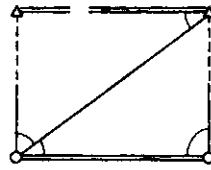


Рис. 2.55. Код OObΠΠ

Результаты вычислений

Таблица 2.2

Код избыточно-измерения	O		Π		S		Δ		b	
	C	M _M	C	M _M	C	M _M	C	M _M	C	M _M
2.1; 2.29	34.0	0.014	44.6	0.016	52.7	0.018	44.6	0.016	∞	∞
2.2; 2.30	31.9	0.017	34.1	0.018	29.6	0.020	34.1	0.018	18.1	0.016
2.3; 2.31	56.1	0.018	15.5	0.014	68.5	0.029	-	-	∞	∞
2.4; 2.32	81.1	0.019	24.2	0.013	109	0.026	82.5	0.021	230	0.035
2.5; 2.33	24.2	0.013	34.3	0.015	34.3	0.017	∞	∞	159	0.034
2.6; 2.34	52.3	0.021	85.4	0.025	49.1	0.023	∞	∞	238	0.043
2.7; 2.35	23.4	0.011	34.3	0.015	36.8	0.017	142	0.028	84.6	0.024
2.8; 2.36	82.5	0.021	24.9	0.011	72.5	0.023	-	-	144	0.025
2.9; 2.37	55.7	0.020	15.3	0.013	67.5	0.025	154	0.033	∞	∞
2.10; 2.38	114	0.024	34.3	0.017	110	0.030	72.5	0.023	201	0.039
2.11; 2.39	218	0.034	68.2	0.023	176	0.038	96.9	0.028	250	0.044
2.40	36.8	0.019	18.5	0.015	30.8	0.022	47.7	0.021	∞	∞
2.14; 2.41	37.0	0.014	16.3	0.013	49.3	0.023	19.8	0.012	72.2	0.027
2.15; 2.42	21.7	0.012	38.2	0.017	33.7	0.016	∞	∞	156	0.033
2.16; 2.43	31.9	0.017	15.5	0.014	29.6	0.020	34.1	0.018	∞	∞
2.17; 2.44	64.3	0.020	16.5	0.017	53.4	0.030	∞	∞	-	-

Окончание табл. 2.1

2.18; 2.45	48.3	0.024	27.7	0.017	88.7	0.034	-	-	-	-
2.19; 2.46	53.1	0.026	26.1	0.024	61.0	0.035	∞	∞	-	-
2.20; 2.47	21.7	0.012	28.9	0.014	68.4	0.023	-	-	152	0.033
2.21; 2.48	32.0	0.019	23.1	0.014	28.3	0.016	-	-	130	0.034
2.22; 2.49	93.5	0.021	31.5	0.013	110	0.026	134	0.027	∞	∞
2.23; 2.50	37.6	0.021	18.5	0.015	70.2	0.030	-	-	∞	∞
2.24; 2.51	47.2	0.028	20.3	0.020	56.7	0.030	114	0.037	116	0.040
2.25; 2.52	63.4	0.022	12.9	0.015	45.6	0.028	42.3	0.022	96.6	0.037
2.26; 2.53	204	0.033	89.4	0.027	186	0.035	287	0.040	-	-
2.27; 2.54	70.1	0.021	20.0	0.015	66.8	0.027	53.6	0.022	143	0.038
2.28; 2.55	87.9	0.019	34.6	0.015	116	0.024	175	0.027	-	-

По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы.

Добавление измерения «О» дало улучшение в 5 случаях. Добавление «П» – в 19 случаях. Добавление измерений «S» и «b» дало улучшение только в одном случае.

Установлено, что при добавлении пятого избыточного измерения с кодами ОП чаще встречается улучшение результата для С и М.

Впервые обнаружено, что добавление пятого избыточного измерения не излечивает засечку, оставляя $C = \infty$ и $M = \infty$, что не подтверждает правило Ансермета.

Ниже анализируется 21 засечка типа задачи Ганзена (два определяемых пункта по двум исходным, расположенным в углах квадрата), для которых $C = \infty$ и $M = \infty$. Здесь даны $c = \|R\|_E \cdot \|Q\|_E$ – спектральное число обусловленности; $M = \sigma_0 \sqrt{Q_{11} + Q_{22}}$ – наибольшая ошибка положения определяемого пункта, где Q_{11} , Q_{22} – диагональные элементы матрицы обратных весов Q .

Из курса ТМОГИ [12] известно правило Ансермета, которое выполняется в среднем и записывается так

$$\left(\frac{P}{p}\right)_{cp} = \frac{N}{t},$$

где P – вес функции после уравнивания; p – вес функции до уравнивания; N – количество всех измерений; t – количество необходимых измерений.

В нашем случае $t = 4$, $N = 4$. Исследуем случаи, когда при $N = 5$ остается без изменения $C = \infty$ и $M = \infty$.

Номера рисунков к.1 дополняются к.2, к.3 по числу вариантов засечек при $N = 5$, где k изменяется от 2.56 до 2.76. Например, для рис. 2.62.1 найдено 4 варианта с номерами 2.62.2 – 2.62.5.

ОБРАБОТКА ВАРИАНТОВ ЗАСЕЧЕК ПРИ $N = 4$ СЛЕВА И $N = 5$ СПРАВА

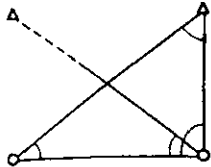


Рис. 2.56.1. Код ОО Δ

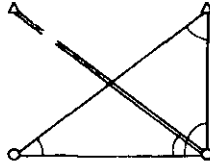


Рис. 2.56.2. Код ОО Δ S

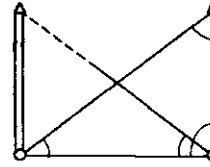


Рис. 2.56.3. Код ОО Δ S

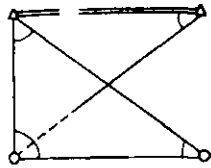


Рис. 2.57.1. Код ООП Δ

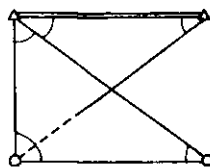


Рис. 2.57.2. Код ООП Δ П

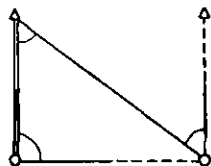


Рис. 2.58.1. Код ООS Δ

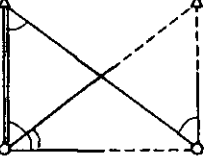


Рис. 2.58.2. Код ООS Δ O

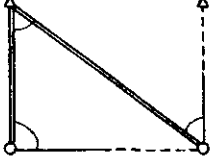


Рис. 2.58.3. Код ООS Δ S

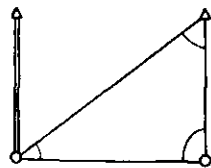


Рис. 2.59.1. Код ООS Δ

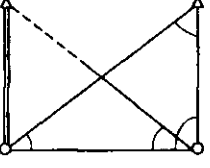


Рис. 2.59.2. Код ООS Δ O

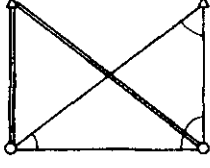


Рис. 2.59.3. Код ООS Δ S

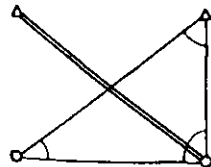


Рис. 2.60.1. Код ООS Δ

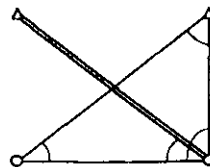


Рис. 2.60.2. Код ООS Δ O

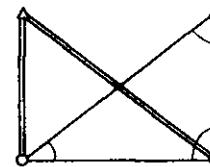


Рис. 2.60.3. Код ООS Δ S

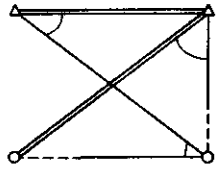


Рис. 2.61.1. Код ОПСА

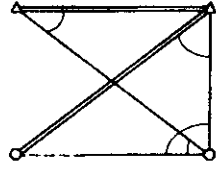


Рис. 2.61.2. Код ОПСАО

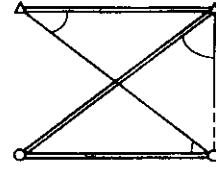


Рис. 2.61.3. Код ОПСАб

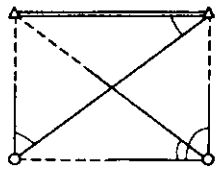


Рис. 2.62.1. Код ООП

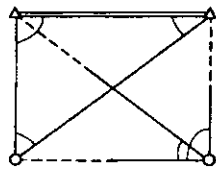


Рис. 2.62.2. Код ООПШ

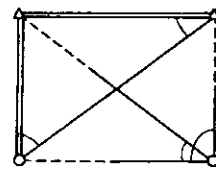


Рис. 2.62.3. Код ООПБ

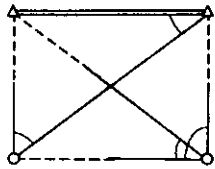


Рис. 2.62.1. Код ООП

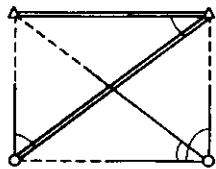


Рис. 2.62.4. Код ООПБ

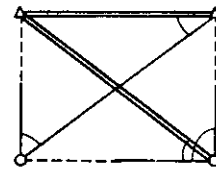


Рис. 2.62.5. Код ООПБ

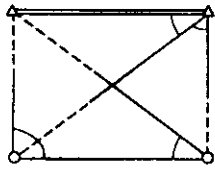


Рис. 2.63.1. Код ООПА

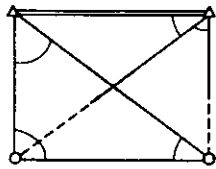


Рис. 2.63.2. Код ООПАД

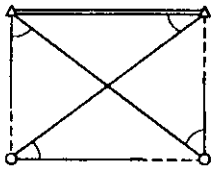


Рис. 2.64.1. Код ООПА

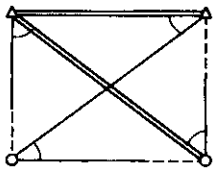


Рис. 2.64.2. Код ООПАС

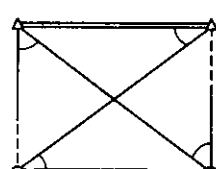


Рис. 2.64.3. Код ООПАб

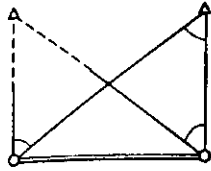


Рис. 2.65.1. Код $OO\Delta b$

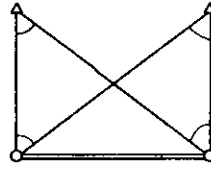


Рис. 2.65.2. Код $OO\Delta b\Delta$

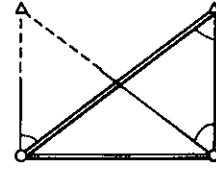


Рис. 2.65.3. Код $OO\Delta bS$

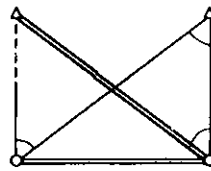


Рис. 2.65.4. Код $OO\Delta bS$

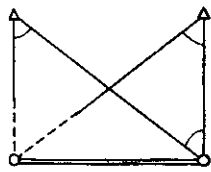


Рис. 2.66.1. Код $O\Delta\Delta b$

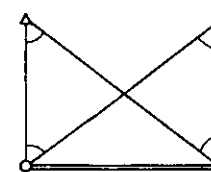


Рис. 2.66.2. Код $O\Delta\Delta bO$

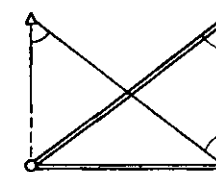


Рис. 2.66.3. Код $O\Delta\Delta bS$

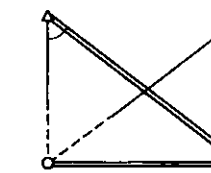


Рис. 2.66.4. Код $O\Delta\Delta bS$

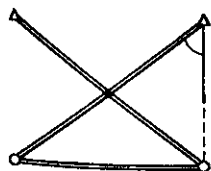


Рис. 2.67.1. Код $SS\Delta b$

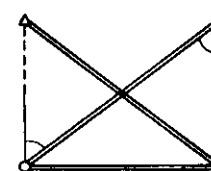


Рис. 2.67.2. Код $SS\Delta bO$

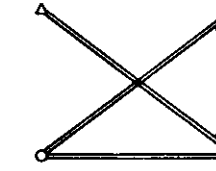


Рис. 2.67.3. Код $SS\Delta bO$

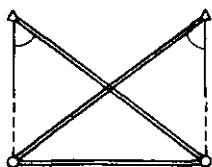


Рис. 2.67.4. Код $SS\Delta b\Delta$

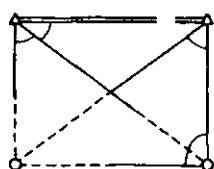


Рис. 2.68.1. Код $OP\Delta\Delta$

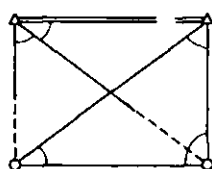


Рис. 2.68.2. Код $OP\Delta\Delta O$

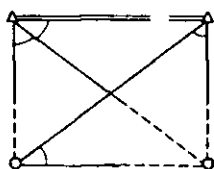


Рис. 2.69.1. Код $OP\Delta\Delta$

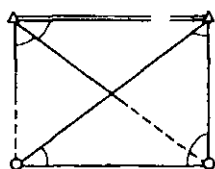


Рис. 2.69.2. Код $OP\Delta\Delta O$

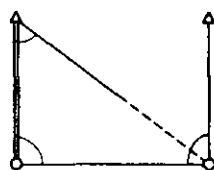


Рис. 2.70.1. Код $OOS\Delta$

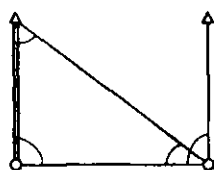


Рис. 2.70.2. Код $OOS\Delta O$

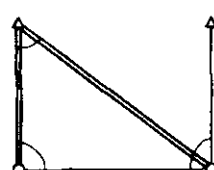


Рис. 2.70.3. Код $OOS\Delta S$

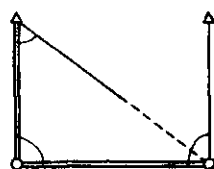


Рис. 2.70.4. Код $OOS\Delta b$

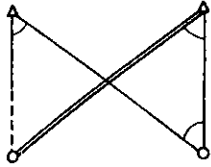


Рис. 2.71.1. Код OSΔΔ

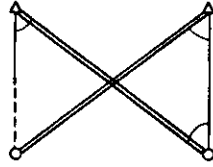


Рис. 2.71.2. Код OSΔΔS

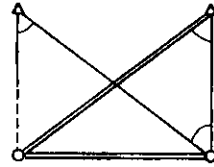


Рис. 2.71.3. Код OSΔΔb

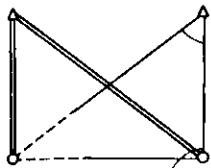


Рис. 2.72.1. Код OSSΔ

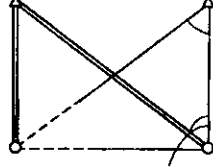


Рис. 2.72.2. Код OSSΔO

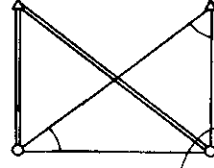


Рис. 2.72.3. Код OSSΔO

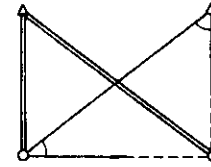


Рис. 2.73.1. Код OSSΔ

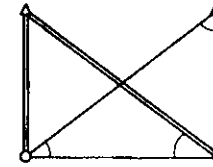


Рис. 2.73.2. Код OSSΔO

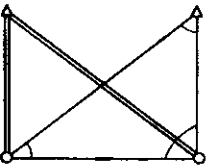


Рис. 2.73.3. Код OSSΔO

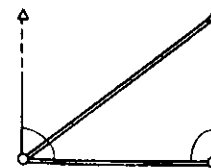


Рис. 2.74.1. Код OOSb

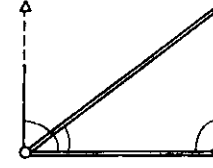


Рис. 2.74.2. Код OOSbO

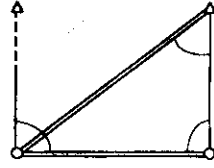


Рис. 2.74.3. Код OOSbΔ

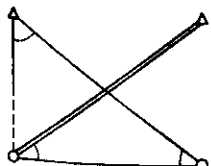


Рис. 2.75.1. Код OOSΔ

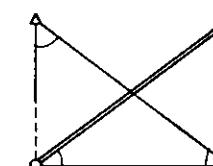


Рис. 2.75.2. Код OOSΔS

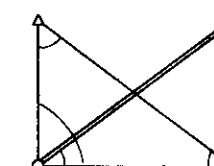


Рис. 2.75.3. Код OOSΔO

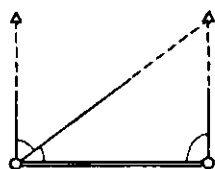


Рис. 2.76.1. Код 000b

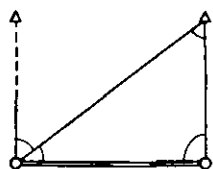


Рис. 2.76.2. Код 000bΔ

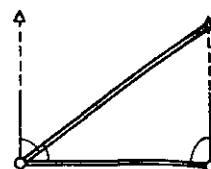


Рис. 2.76.3. Код 000bS

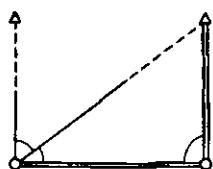
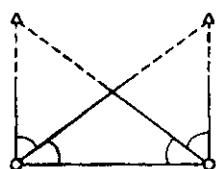


Рис. 2.76.4. Код 000bS

2.1.3. Противоположные по качеству засечки

На рис. 2.77 – 2.131 показаны засечки-«антиподы», когда с одинаковым кодом измерений слева расположены качественные засечки (С – число обусловленности; М – наибольшая ошибка положения), а справа – дефектная засечка.



C = 86,7
M = 0,019 м

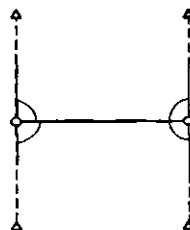
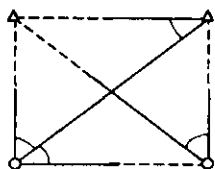


Рис. 2.77. Код 0000



C = 38,1
M = 0,021 м

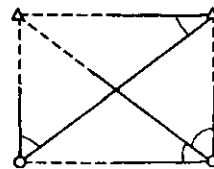
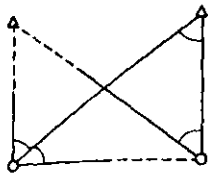


Рис. 2.78. Код 000П



C = 104,7
M = 0,028 м

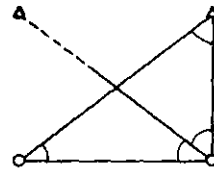
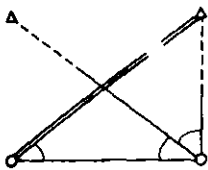


Рис. 2.79. Код 000Δ



C = 99,2
M = 0,026 м

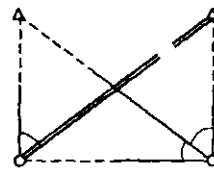
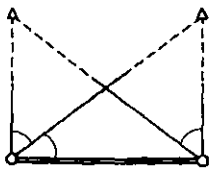


Рис. 2.80. Код 000S



C = 106
M = 0,032 м

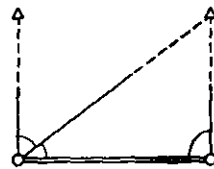
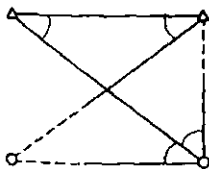


Рис. 2.81. Код 000b



C = 38,1
M = 0,021 м

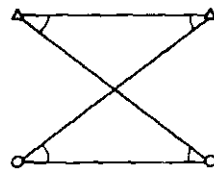
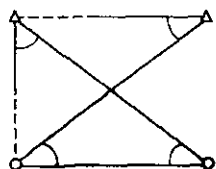


Рис. 2.82. Код 00ПШ



C = 48,0
M = 0,025 м

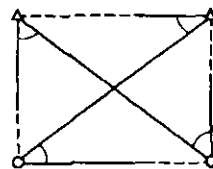
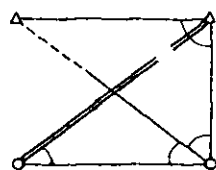


Рис. 2.83. Код ООПА



C = 25,3
M = 0,021 м

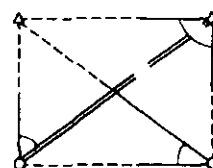
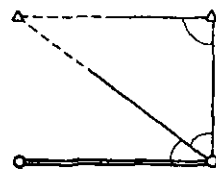


Рис. 2.84. Код ООПС



C = 40,8
M = 0,020 м

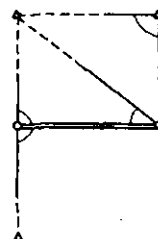
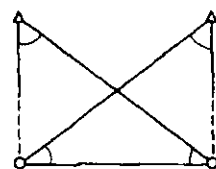


Рис. 2.85. Код ООПЪ



C = 68,0
M = 0,025 м

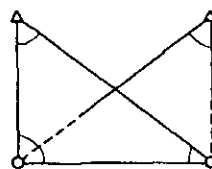
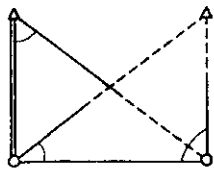


Рис. 2.86. Код ООДА



$C = 96,2$
 $M = 0,028 \text{ м}$

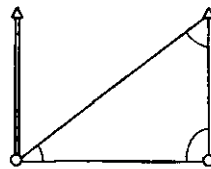
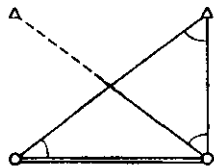


Рис. 2.87. Код ООΔБ



$C = 104,2$
 $M = 0,038 \text{ м}$

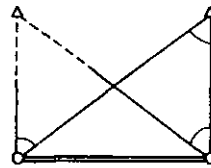
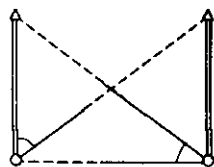


Рис. 2.88. Код ООΔв



$C = 64,9$
 $M = 0,040 \text{ м}$

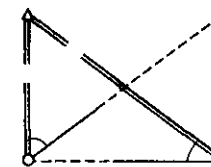
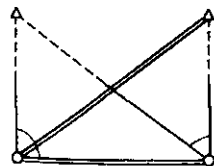


Рис. 2.89. Код ООSS



$C = 137$
 $M = 0,038 \text{ м}$

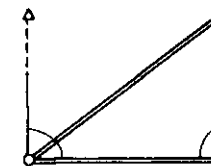
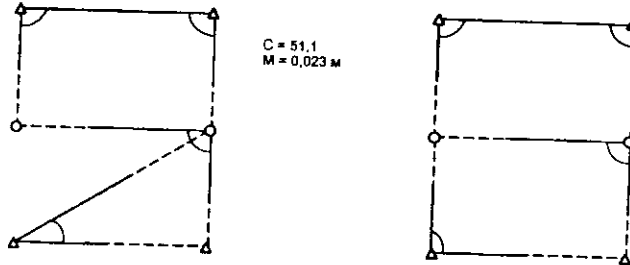
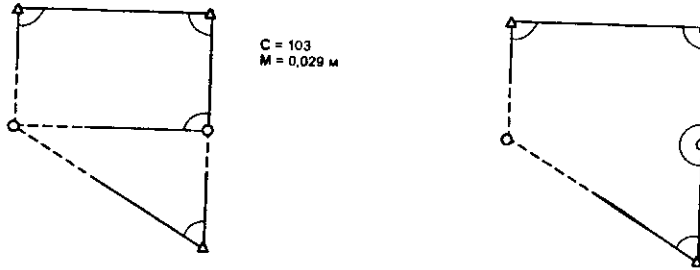


Рис. 2.90. Код ООСв



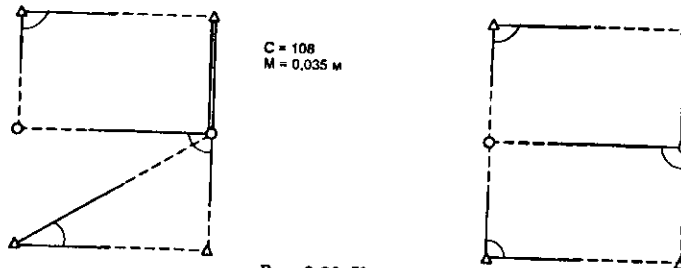
C = 51,1
M = 0,023 м

Рис. 2.91. Код ОПШП



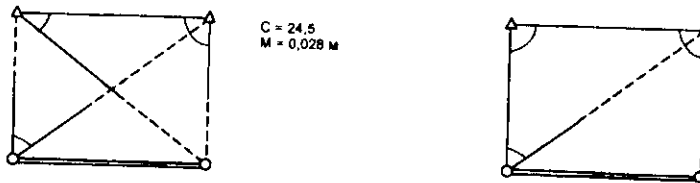
C = 103
M = 0,029 м

Рис. 2.92. Код ОПША



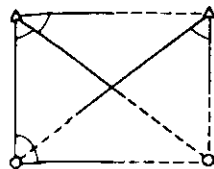
C = 108
M = 0,035 м

Рис. 2.93. Код ОПШС



C = 24,5
M = 0,028 м

Рис. 2.94. Код ОПШЬ



C = 187
M = 0.035 м

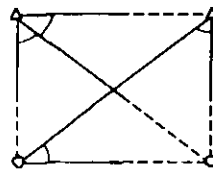
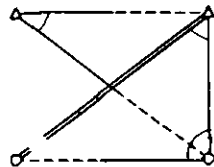


Рис. 2.95. Код ОПΔΔ



C = 138
M = 0.037 м

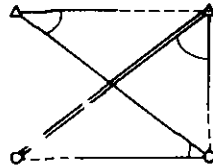
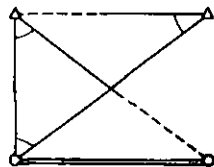


Рис. 2.96. Код ОПΔΣ



C = 30.8
M = 0.030 м

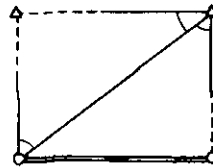
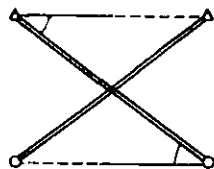


Рис. 2.97. Код ОПΔβ



C = 28.2
M = 0.028 м

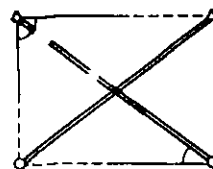


Рис. 2.98. Код ОПΣΣ

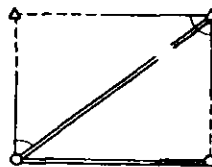
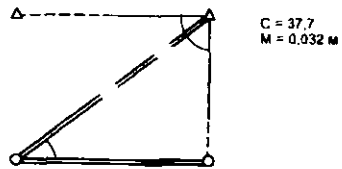


Рис. 2.99. Код ОПСб

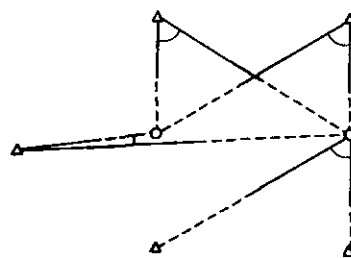
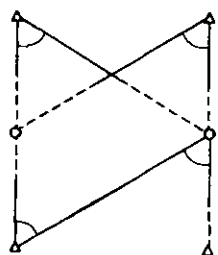


Рис. 2.100. Код ОДДА

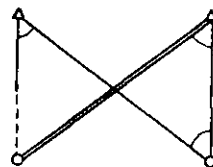
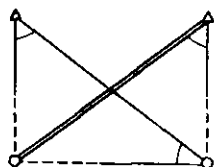


Рис. 2.101. Код ОДДС

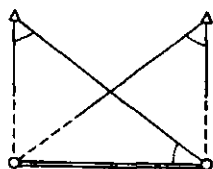
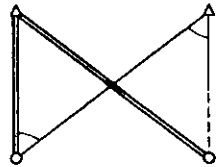


Рис. 2.102. Код ОДДб



$C = 46,0$
 $M = 0,033 \text{ м}$

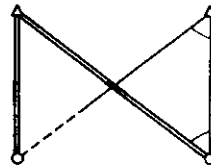
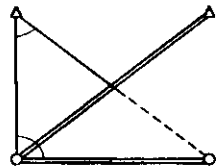


Рис. 2.103. Код OΔSS



$C = 249$
 $M = 0,046 \text{ м}$

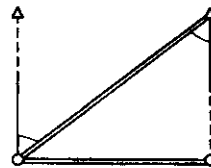
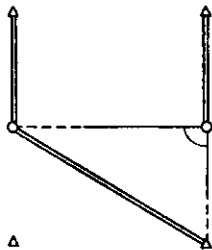


Рис. 2.104. Код OΔSb



$C = 67,2$
 $M = 0,030 \text{ м}$

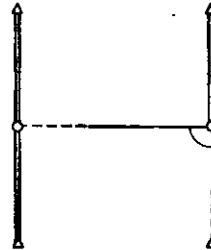
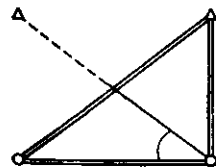


Рис. 2.105. Код OSSb



$C = 218$
 $M = 0,080 \text{ м}$

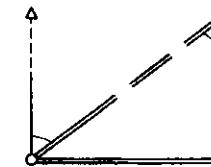
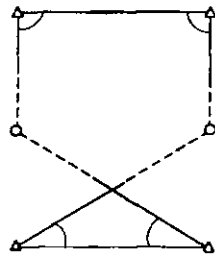


Рис. 2.106. Код OSSb



$C = 14,0$
 $M = 0,019 \text{ м}$

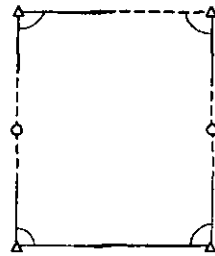
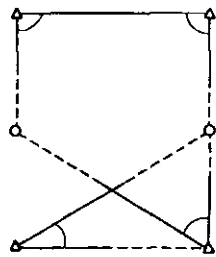


Рис. 2.107. Код ПППП



$C = 32,0$
 $M = 0,023 \text{ м}$

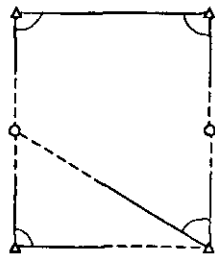
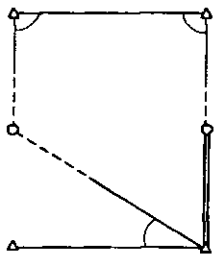


Рис. 2.108. Код ПППД



$C = 11,5$
 $M = 0,018 \text{ м}$

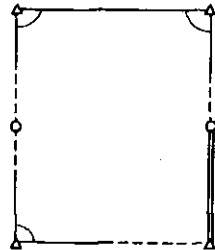
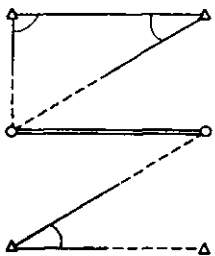


Рис. 2.109. Код ПППС



$C = 24,5$
 $M = 0,028 \text{ м}$

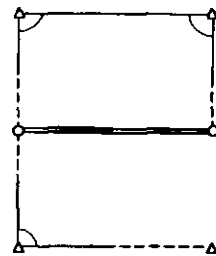


Рис. 2.110. Код ПППБ

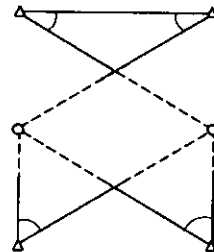
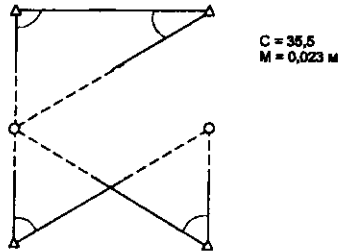


Рис. 2.111. Код ПП1ΔΔ

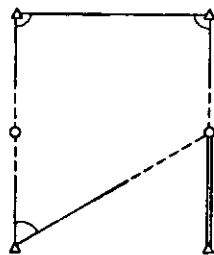
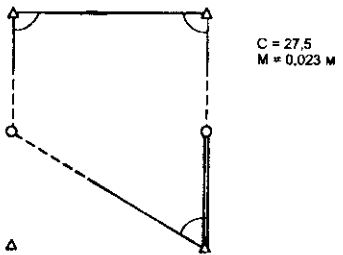


Рис. 2.112. Код ПП1ΔΣ

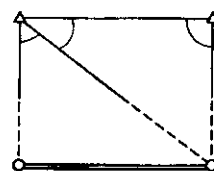
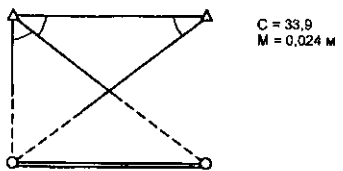


Рис. 2.113. Код ПП1Δβ

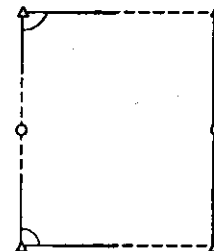
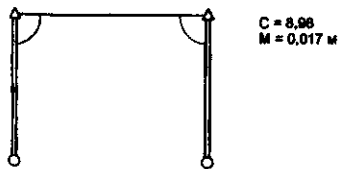
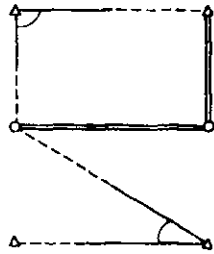


Рис. 2.114. Код ПП1ΣΣ



$C = 14,2$
 $M = 0,022 \text{ м}$

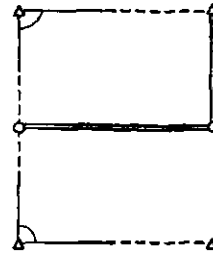
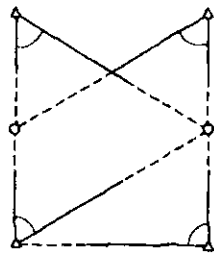


Рис. 2.115. Код ППСб



$C = 30,7$
 $M = 0,020 \text{ м}$

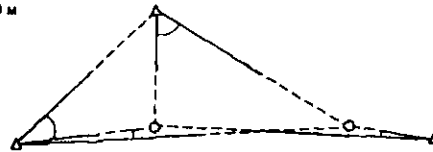
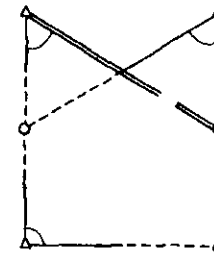


Рис. 2.116. Код ПДДД



$C = 68,5$
 $M = 0,031 \text{ м}$

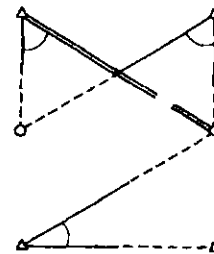
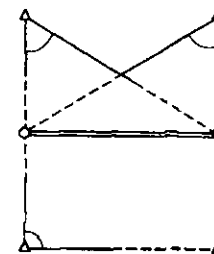


Рис. 2.117. Код ПДДС



$C = 108$
 $M = 0,035 \text{ м}$

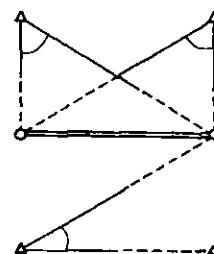
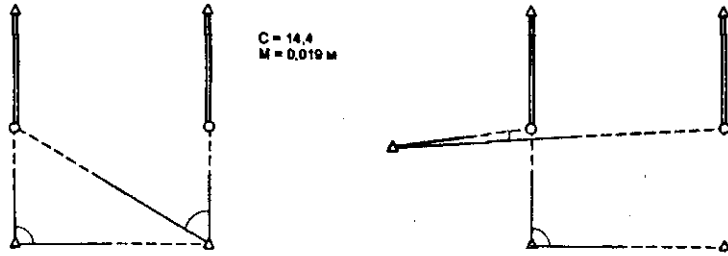
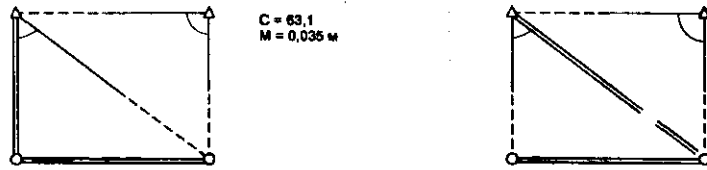


Рис. 2.118. Код ПДДб



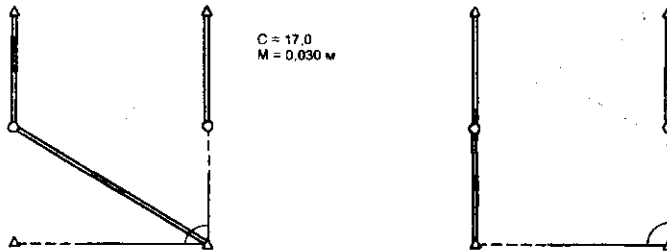
$C = 14,4$
 $M = 0,019 \text{ м}$

Рис. 2.119. Код ПДSS



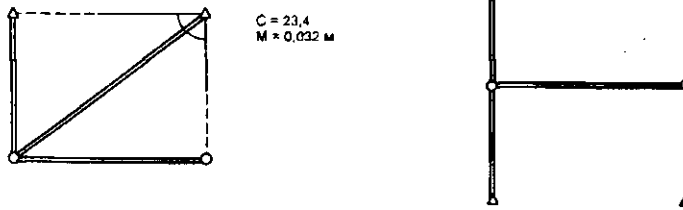
$C = 63,1$
 $M = 0,035 \text{ м}$

Рис. 2.120. Код ПДSS



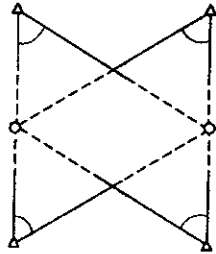
$C = 17,0$
 $M = 0,030 \text{ м}$

Рис. 2.121. Код ПDSS



$C = 23,4$
 $M = 0,032 \text{ м}$

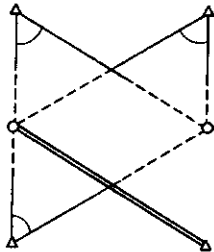
Рис. 2.122. Код ПDSS



$C = 15,9$
 $M = 0,013 \text{ м}$

Нет
 вырожденного
 случая

Рис. 2.123. Код $\Delta\Delta\Delta\Delta$



$C = 30,0$
 $M = 0,019 \text{ м}$

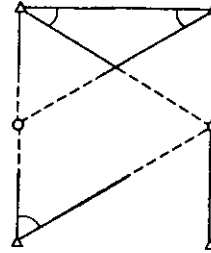
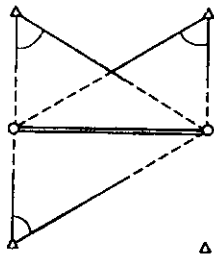


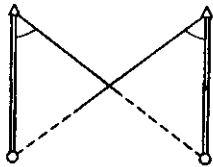
Рис. 2.124. Код $\Delta\Delta\Delta S$



$C = 271$
 $M = 0,052 \text{ м}$

Нет
 вырожденного
 случая

Рис. 2.125. Код $\Delta\Delta\Delta b$



$C = 31,5$
 $M = 0,022 \text{ м}$

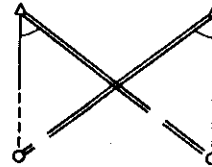
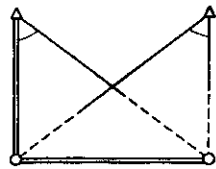


Рис. 2.126. Код $\Delta\Delta S S$



C = 255
M = 0,058 м

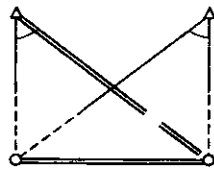
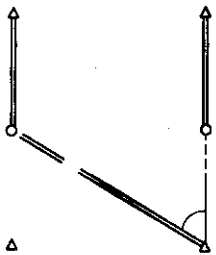


Рис. 2.127. Код $\Delta\Delta S_b$



C = 34,90
M = 0,030 м

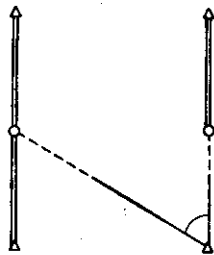


Рис. 2.128. Код $\Delta S S S$



C = 74,2
M = 0,040 м

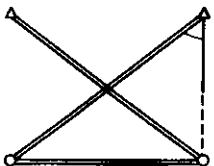
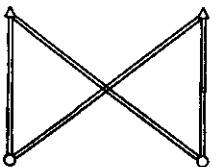


Рис. 2.129. Код $\Delta S S_b$



C = 12,0
M = 0,030 м

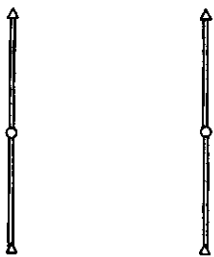


Рис. 2.130. Код $S S S S$

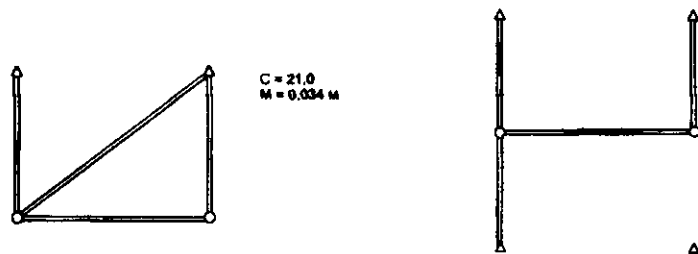


Рис. 2.131. Код SSSb

2.2. Засечки трёх определяемых пунктов по трём исходным

Засечкам группы пунктов уделялось мало внимания, так как не было универсальных методов их решения. С разработкой программы UNIVER проблема решения засечек двух и более определяемых пунктов снята благодаря методам нелинейного программирования (слепому поиску и методу релаксации). Теперь актуальным вопросом является выбор засечек группы пунктов с хорошим и плохим качеством построения с помощью чисел обусловленности. Для спектрального числа обусловленности

$$c = \|R\|_2 \cdot \|Q\|_2 \quad (2.1)$$

можно получить относительную обусловленность [57]

$$\Psi = \frac{c}{0,6K^{2,5}}, \quad (2.2)$$

где K – количество определяемых пунктов. Известно [63, 67], что для съемочных сетей $\Psi_{доп.} = 40$. Следовательно, пользуясь равенством (2.2) при $K = 3$, получим $C_{доп.} = \Psi_{доп.} \cdot 0,6K^{2,5} = 624$. Если $C > 625$, то засечка будет плохого качества построения.

Чтобы упорядочить поиск засечек, расчленим засечку трех пунктов по трем исходным на левое и правое построение с количеством измерений, равным трем. Целью исследований является поиск наилучших и наихудших засечек трех пунктов по трем исходным при следующих видах измеренных величин:

- О – обратный угол с определяемого пункта на два исходных;
- П – прямой угол с исходного пункта на определяемый;
- S – измеренное расстояние между исходным и определяемым пунктами;
- Δ – горизонтальный угол с одного исходного на два определяемых пункта;
- b – базисное расстояние между двумя определяемыми пунктами.

На рис. 2.132.1 – 2.132.24 показаны построения для всех возможных 24 сочетаний измеренных величин по 3. В табл. 2.3 для каждого кода указано количество вариантов сочетаний измерений.

Таблица 2.3

Количество вариантов для сочетаний измеренных величин
левого или правого построения

№ пп	Код	Число вариантов	№ пп	Код	Число вариантов	№ пп	Код	Число вариантов
1	ООО	6	2	ООП	44	3	ООΔ	20
4	ОOS	32	5	ООЬ	17	6	ОПП	12
7	ОПА	36	8	ОПС	40	9	ОПЬ	20
10	ОΔΔ	6	11	ОΔS	40	12	ОΔЬ	12
13	ОSS	16	14	Оsb	20	15	ППА	2
16	ППЬ	2	17	ПΔΔ	2	18	ПΔS	8
19	ПΔЬ	6	20	ΔΔS	4	21	ΔΔЬ	1
22	SΔЬ	8	23	SSb	4	24	ПСb	8

Из табл. 2.3 видно, что общее число вариантов для левого построения 366. Учитывая правые построения для засечек трех пунктов по трем исходным, имеем около 98000 вариантов. Вместо этого мы выбрали $24^2 = 576$ вариантов. Конфигурация построения в каждом из 24 вариантов не во всех случаях является оптимальной. Построения содержат всего три измерения, которые не являются необходимыми для получения координат двух пунктов. Наилучшее построение мы выбрали исходя из оптимальных построений двух пунктов по двум исходным, удаляя случайным образом четвертое измерение.

На рис. 2.133 показано, как совмещаются левые и правые построения в одну засечку трех пунктов по трем исходным.

На рис. 2.134 пояснен рис. 2.133 для конкретного левого и правого построения.

На рис. 2.135 и 2.136 приведены примеры двух наилучших построений.

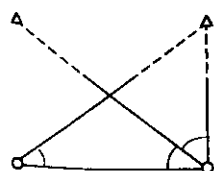


Рис. 2.132.1. Код ООО

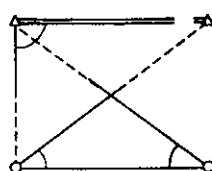


Рис. 2.132.2. Код ООП

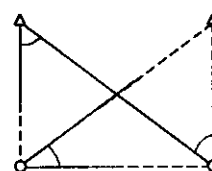


Рис. 2.132.3. Код ООΔ

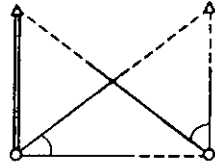


Рис. 2.132.4. Код OOS

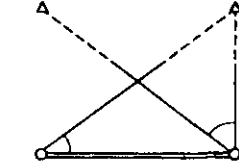


Рис. 2.132.5. Код OOb

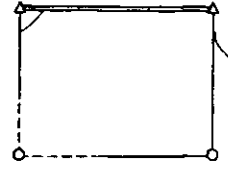


Рис. 2.132.6. Код OПП

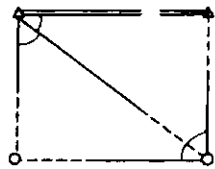


Рис. 2.132.7. Код ОПΔ

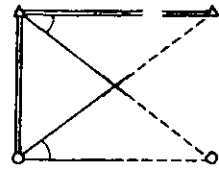


Рис. 2.132.8. Код ОПS

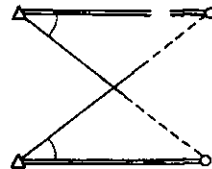


Рис. 2.132.9. Код ОПЬ

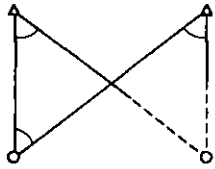


Рис. 2.132.10. Код OΔΔ

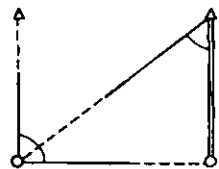


Рис. 2.132.11. Код OΔS

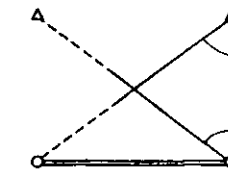


Рис. 2.132.12. Код OΔЬ

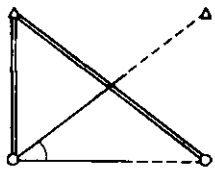


Рис. 2.132.13. Код OSS

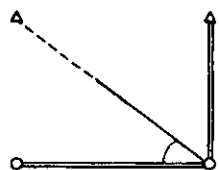


Рис. 2.132.14. Код OSЬ

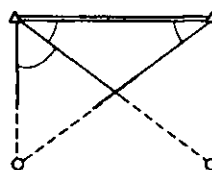


Рис. 2.132.15. Код ПШΔ

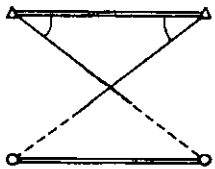


Рис. 2.132.16. Код ППЬ

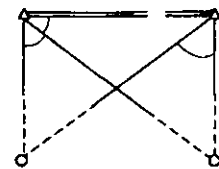


Рис. 2.132.17. Код ПΔΔ

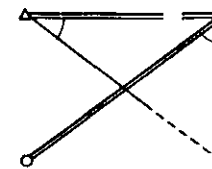


Рис. 2.132.18. Код ПΔS

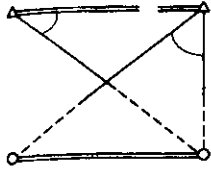


Рис. 2.132.19. Код ПДб

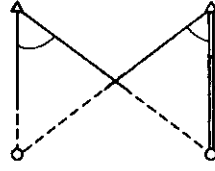


Рис. 2.132.20. Код ΔΔS

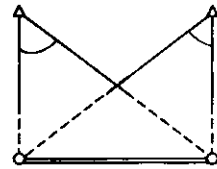


Рис. 2.132.21. Код ΔΔб

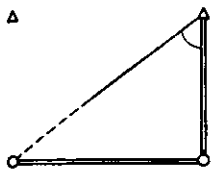


Рис. 2.132.22. Код ΔSб

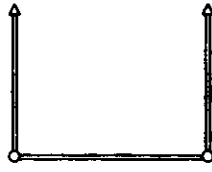


Рис. 2.132.23. Код SSб

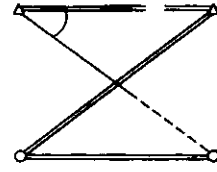


Рис. 2.132.24. Код ПSб

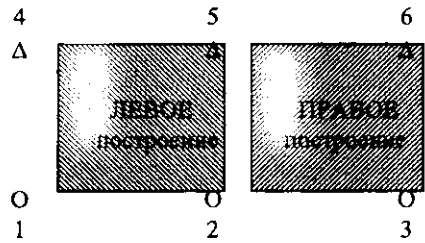


Рис. 2.133. Номера пунктов для левого и правого построения

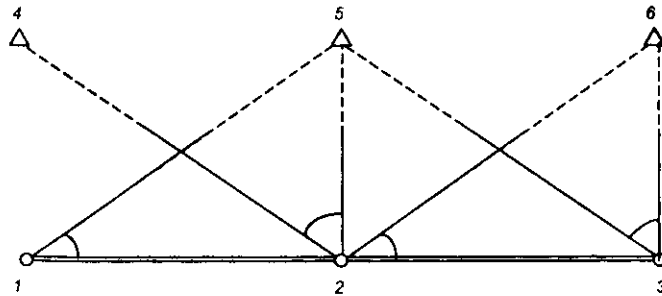


Рис. 2.134. Построение: левое 2.132.5 и правое 2.132.5

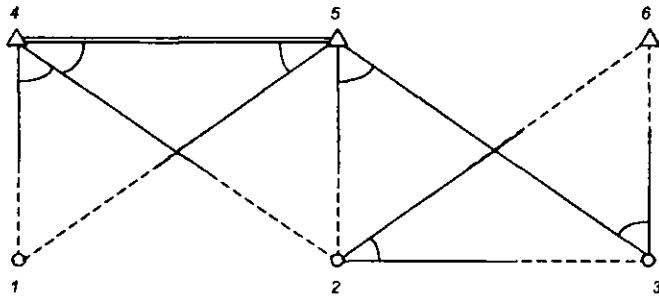


Рис. 2.135. Наилучшее построение: левое 2.132.15 и правое 2.132.3
($C = 29,5$; $M_{\max} = 0,015$ м)

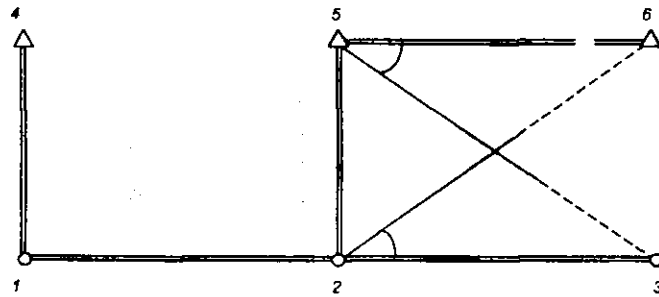


Рис. 2.136. Наилучшее построение: левое 2.132.23 и правое 2.132.9
($C = 30,4$; $M_{\max} = 0,026$ м)

В табл. 2.4 приведены номера левого и правого построений для наилучших 108 из 576 вариантов построений. Из этой таблицы следуют варианты, совпадающие при замене левого на правое построение с номерами 10, 14, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 71, 72, 73, 79, 80, 81, 86, 92, 101, 104.

В табл. 2.5 приведены номера левого и правого построений для худших 120 из 576 вариантов построений. По аналогии с табл. 2.4 укажем симметричные построения плохого качества: 10, 47, 49, 61 – 67, 84, 90, 104, 111, 115, 120.

Таблица 2.4

Засечки трёх пунктов по трём исходным наилучшего качества построения

№ пп	№ левого построения	№ правого построения	№ пп	№ левого построения	№ правого построения	№ пп	№ левого построения	№ правого построения
1	2	6	2	2	7	3	2	9
4	2	11	5	2	17	6	3	14
7	3	18	8	4	14	9	6	14
10	6	23	11	8	16	12	10	8
13	10	9	14	10	16	15	10	18
16	10	19	17	10	24	18	11	7
19	11	8	20	11	9	21	11	16
22	11	17	23	11	18	24	11	19
25	11	24	26	12	7	27	12	14
28	12	16	29	12	17	30	12	18
31	12	19	32	12	24	33	14	6
34	14	7	35	14	17	36	15	3
37	15	4	38	15	6	39	15	7
40	15	8	41	15	10	42	15	13
43	15	16	44	15	17	45	15	20
46	15	21	47	15	23	48	16	3
49	16	7	50	16	10	51	16	16
52	16	17	53	16	20	54	16	21
55	16	23	56	17	6	57	17	7
58	17	8	59	17	9	60	17	16
61	17	17	62	17	18	63	17	19
64	17	24	65	18	4	66	18	6
67	18	7	68	18	8	69	18	9
70	18	16	71	18	17	72	18	18
73	18	19	74	18	24	75	19	7
76	19	8	77	19	9	78	19	16
79	19	17	80	19	18	81	19	19
82	19	24	83	20	7	84	20	8
85	20	9	86	20	16	87	20	17
88	20	18	89	20	19	90	20	24
91	21	8	92	21	16	93	22	7
94	22	8	95	22	9	96	22	16
97	22	17	98	22	18	99	22	19
100	22	24	101	23	6	102	23	7
103	23	9	104	23	16	105	23	17
106	23	20	107	24	16	108	24	23

Таблица 2.5

Засечки трёх пунктов по трём исходным шлохого качества построения

№ п/п	№ лево-го построения	№ пра-вого построения	№ п/п	№ лево-го построения	№ пра-вого построения	№ п/п	№ лево-го построения	№ пра-вого построения
1	1	15	2	1	16	3	2	15
4	3	15	5	3	16	6	4	15
7	4	16	8	5	15	9	5	16
10	6	6	11	6	7	12	6	15
13	6	17	14	7	10	15	7	11
16	7	12	17	7	15	18	7	18
19	7	19	20	7	21	21	7	22
22	7	24	23	8	10	24	8	11
25	8	12	26	8	15	27	8	18
28	8	19	29	8	21	30	8	22
31	8	24	32	9	10	33	9	11
34	9	12	35	9	15	36	9	18
37	9	19	38	9	21	39	9	22
40	9	24	41	10	3	42	10	5
43	10	15	44	11	1	45	11	4
46	11	13	47	11	15	48	11	23
49	12	15	50	13	3	51	13	5
52	13	15	53	13	16	54	14	1
55	14	4	56	14	8	57	14	13
58	14	15	59	14	22	60	14	23
61	15	11	62	15	12	63	15	15
64	15	18	65	15	19	66	15	22
67	15	24	68	16	11	69	16	12
70	16	15	71	16	18	72	16	19
73	16	22	74	16	24	75	17	10
76	17	11	77	17	12	78	17	15
79	17	21	80	17	22	81	18	10
82	18	11	83	18	12	84	18	15
85	18	21	86	18	22	87	19	10
88	19	11	89	19	12	90	19	15
91	19	21	92	19	22	93	20	1
94	20	4	95	20	13	96	20	15
97	20	23	98	21	3	99	21	5
100	21	15	101	22	1	102	22	4
103	22	13	104	22	15	105	22	23
106	23	1	107	23	4	108	23	8
109	23	13	110	23	15	111	23	23
112	24	10	113	24	11	114	24	12
115	24	15	116	24	18	117	24	19
118	24	21	119	24	22	120	24	24

На основании выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Расчеты показали, что количество всех возможных вариантов засечек трёх пунктов по трём исходным не превосходит 98000. Из них выбраны наиболее подходящие варианты $24 \times 24 = 576$.

2. Из 576 засечек наихудшими ($C = \infty, M = \infty$) являются 120, а также плохого качества построения ($C > 625$) – 11.

3. Наилучших по качеству засечек ($C \leq 60$), которые можно рекомендовать для производства, – 108, следовательно, число засечек среднего качества построения из 576 составляет 337.

2.3. Засечки четырёх определяемых пунктов по четырём исходным

С появлением универсальных программ решения засечек на ЭВМ стала актуальной задача поиска качественных и некачественных построений. В случае четырех определяемых пунктов качественными засечками будут такие, для которых спектральное число обусловленности не будет превосходить $C \leq 800$. Указанный допуск получен по величине $\Psi_{\text{доп.}} \leq 40$ для съемочных сетей и $C^3 = 0,62K2,5 = 20$ при $K = 4$ [57, 63, 67].

Для упорядоченного поиска засечек четырех определяемых пунктов по четырем исходным разделим засечку четырех пунктов на три построения: левое, среднее и правое (рис. 2.137).

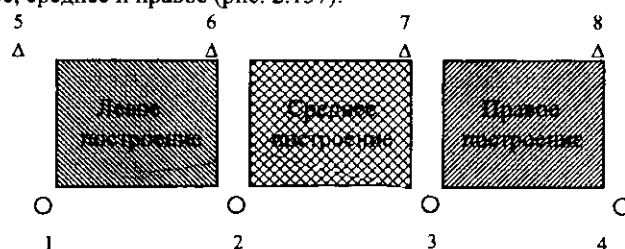


Рис. 2.137. Размещение построений, из которых состоит засечка четырех определяемых пунктов

Количество вариантов левых и правых построений по 24 (см. рис. 2.138.1-2.138.24), а средних 14 (см. рис. 2.139.1-2.139.14), по количеству сочетаний из следующих измеренных величин:

- О – обратный угол с исходного пункта на два определяемых;
- П – прямой угол с исходного пункта на определяемый;
- S – измеренное расстояние между исходным и определяемым пунктом;
- Δ – горизонтальный угол с одного исходного на два определяемых пункта;
- b – базисное расстояние между двумя определяемыми пунктами.

ЛЕВЫЕ И ПРАВЫЕ ПОСТРОЕНИЯ:

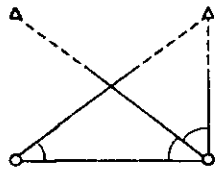


Рис. 2.138.1. Код ООО

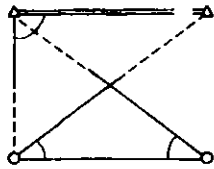


Рис. 2.138.2. Код ООП

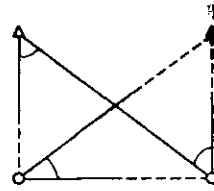


Рис. 2.138.3. Код ООΔ

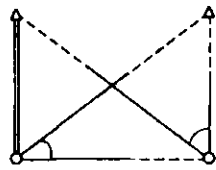


Рис. 2.138.4. Код ООS

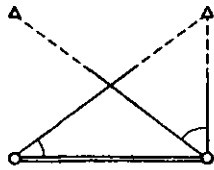


Рис. 2.138.5. Код ООб

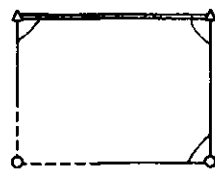


Рис. 2.138.6. Код ОИП

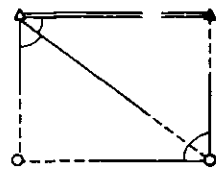


Рис. 2.138.7. Код ОIΔ

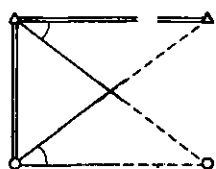


Рис. 2.138.8. Код ОIС

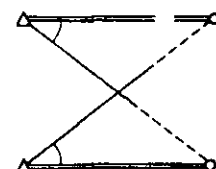


Рис. 2.138.9. Код ОIЬ

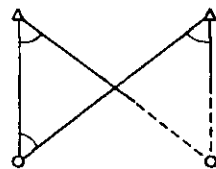


Рис. 2.138.10. Код ОΔΔ

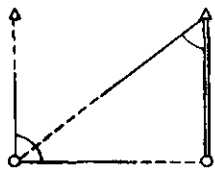


Рис. 2.138.11. Код ОΔS

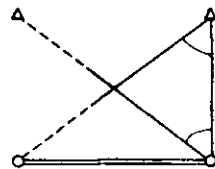


Рис. 2.138.12. Код ОΔЬ

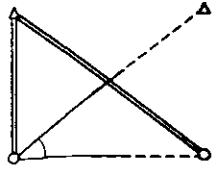


Рис. 2.138.13. Код OSS

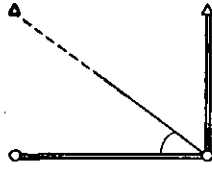


Рис. 2.138.14. Код OSb

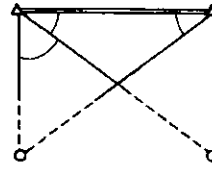


Рис. 2.138.15. Код ППΔ

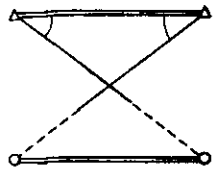


Рис. 2.138.16. Код ППb

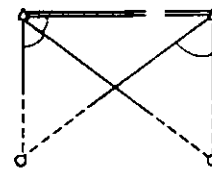


Рис. 2.138.17. Код ПΔΔ

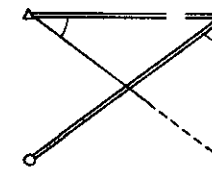


Рис. 2.138.18. Код ПΔS

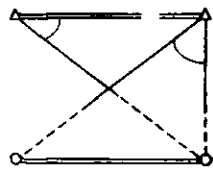


Рис. 2.138.19. Код ПΔb

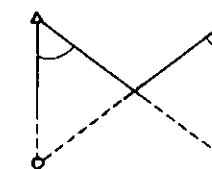


Рис. 2.138.20. Код ΔΔS

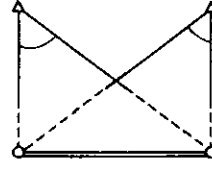


Рис. 2.138.21. Код ΔΔb

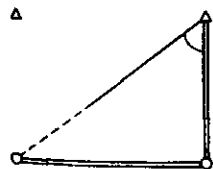


Рис. 2.138.22. Код ΔSb

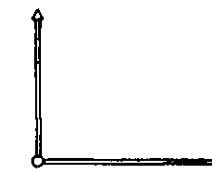


Рис. 2.138.23. Код SSb

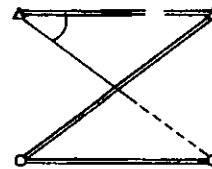


Рис. 2.138.24. Код ПSb

СРЕДНИЕ ПОСТРОЕНИЯ:

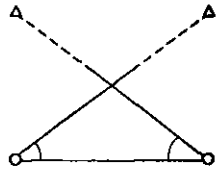


Рис. 2.139.1. Код ОО

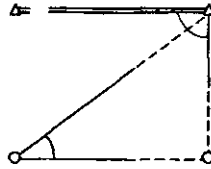


Рис. 2.139.2. Код ОП

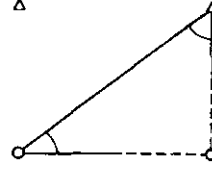


Рис. 2.139.3. Код ОА

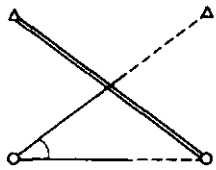


Рис. 2.139.4. Код ОС

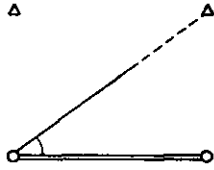


Рис. 2.139.5. Код Об

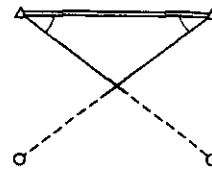


Рис. 2.139.6. Код ПП

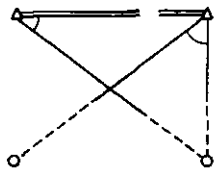


Рис. 2.139.7. Код ПА

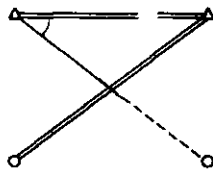


Рис. 2.139.8. Код ПС

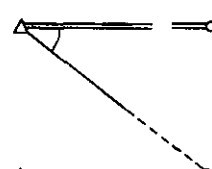


Рис. 2.139.9. Код Пб

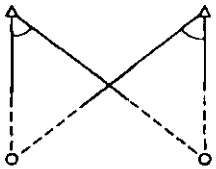


Рис. 2.139.10. Код ΔΔ

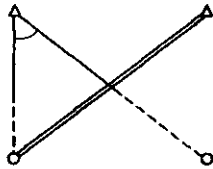


Рис. 2.139.11. Код ΔS

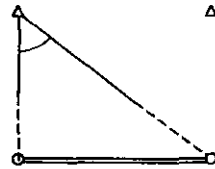


Рис. 2.139.12. Код Δб

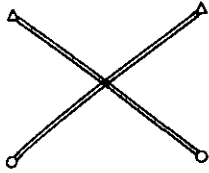


Рис. 2.139.13. Код SS

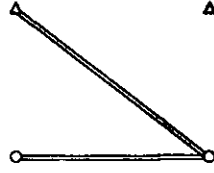


Рис. 2.139.14. Код Sb

Таблица 2.6

Засечки четырех пунктов по четырем исходным

Построения хорошего качества			Построения хорошего качества с любым средним номером		Построения плохого качества		
№ левого построения	№ среднего построения	№ правого построения	№ левого построения	№ правого построения	№ левого построения	№ среднего построения	№ правого построения
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1-24			1	6	1-24
1	2	1-24			1	7	1-24
1	3	1-24					
1	4	1-24					
1	5	1-24					
2	1	1-24	2	15			
2	2	1-24					
2	3	1-24					
2	4	1-24					
2	5	1-24					
3	1	1-24			3	6	1-24
3	2	1-24			3	7	1-24
3	3	1-24					
3	4	1-24					
3	5	1-24					
4	1	1-24			4	6	1-24
4	2	1-24			4	7	1-24
4	3	1-24			4	9	1-24
4	4	1-24			4	12	1-24
4	5	1-24			4	14	1-24
5	1	1-24			5	6	1-24
5	2	1-24			5	7	1-24
5	3	1-24			5	9	1-24
5	4	1-24			5	12	1-24
5	5	1-24			5	14	1-24

Продолжение табл. 2.6

6	1	1-24			6	9	1-24
6	2	1-24			6	12	1-24
6	3	1-24			6	14	1-24
6	4	1-24					
6	5	1-24					
					7	2	1-24
					7	4	1-24
					7	8	1-24
					7	11	1-24
					7	13	1-24
					8	2	1-24
					8	4	1-24
					8	5	1-24
					8	8	1-24
					8	11	1-24
					8	13	1-24
					8	14	1-24
					9	2	1-24
					9	4	1-24
					9★	5	1-24
					9	8	1-24
					9★	9	1-24
					9	11	1-24
					9★	12	1-24
					9	13	1-24
					9★	14	1-24
10	7	1-24	10	4			
			10	8			
11	9	1-24	11	1	11★	2	1-24
					11★	4	1-24
12	1	1-24	12	1			
12	2	1-24	12	4			
12	3	1-24	12	8			
12	4	1-24	12	9			
12	5	1-24	12	13			
12	7	1-24	12	15			
12	9	1-24	12	20			
					13★	4	1-24
					13★	5	1-24
					13	6	1-24
					13	7	1-24
					13★	9	1-24
					13★	12	1-24
					13★	14	1-24
14	1	1-24	14	1	14★	11	1-24
			14	8			
			14	13			
			14	15			
			14	23			

Окончание табл. 2.6

15	10	1-24			15	2	1-24
15	12	1-24			15	4	1-24
					15	8	1-24
					15	13	1-24
16	10	1-24			16	2	1-24
16	12	1-24			16	4	1-24
					16	8	1-24
					16	13	1-24
17	7	1-24			17	2	1-24
17	9	1-24			17	4	1-24
					17	11	1-24
					17	13	1-24
18	7	1-24			18	2	1-24
18	9	1-24			18	4	1-24
					18	11	1-24
					18	13	1-24
19	7	1-24			19	2	1-24
19	9	1-24			19	4	1-24
					19	11	1-24
					19	13	1-24
20	7	1-24			20★	11	1-24
20	9	1-24			20★	13	1-24
21	7	1-24					
21	9	1-24					
22	7	1-24			22★	2	1-24
22	9	1-24			22★	4	1-24
					22★	11	1-24
					22★	13	1-24
			23	8	23★	11	1-24
			23	13			
			23	15			
					24	2	1-24
					24	4	1-24
					24	8	1-24
					24	11	1-24
					24	13	1-24

В табл. 2.6. знаком ★ помечены засечки, для которых C больше 800, но не $C = \infty$, как это было для остальных засечек.

Нетрудно подсчитать, что общее количество вариантов засечек $24 \times 14 \times 24 = 8064$, которые были все обработаны и наиболее закономерные из них показаны в табл. 2.6, по ней легко выделить качественные и некачественные построения. На рис. 2.140 показана наилучшая засечка ($C = 30,6$; $M = 0,014$ м).

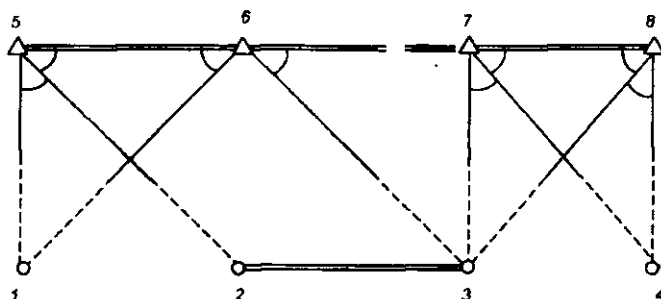


Рис. 2.140. Засечка: левое $N = 15$; среднее $N = 6$; правое $N = 15$

Из рис. 2.140 видно, что в правом построении добавлен угол Δ , без которого нельзя определить пункт 4.

На рис. 2.141 показана засечка ($C = 35, 1$; $M = 0,014$)

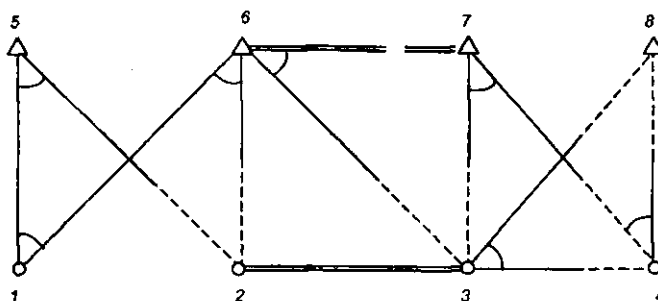


Рис. 2.141. Засечка: левое $N = 10$; среднее $N = 6$; правое $N = 3$

По результатам исследований можно сделать следующие выводы:

1. Поскольку общее число засечек для левого или правого построения 366, а для среднего 104, то общее число вариантов засечек 4 пункта по 4 исходным не превосходит 10 млн вариантов. Нами обработан 8064 варианта.

2. По данным табл. 2.6 видно, что засечек хорошего качества 1561 для случая симметричного построения, а плохого качества – 960. Для остальных 5536 несимметричных построений встречаются как вырожденные так и некачественные построения.

3. Наилучшие построения показаны на рис. 2.140, 2.141.

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК

3.1. Об области сходимости итераций, выполняемых нелинейными методами

Опыт применения итеративного способа уравнивания показывает, что для обеспечения сходимости итераций начальные координаты должны быть известны с ошибкой, не превосходящей $1/3$ наименьшей стороны сети. Иногда в зависимости от конструкции геодезической сети, расположения и количества исходных пунктов возникает необходимость в определении начальных координат с еще более высокой точностью, обеспечивающей сходимость итераций за небольшой промежуток времени. То обстоятельство, что начальные координаты определяемых пунктов должны быть получены заранее с достаточно высокой точностью и введены в ЭВМ в качестве дополнительной информации вместе с данными об измеренных величинах и координатах исходных пунктов, является препятствием к широкому практическому использованию итеративного метода уравнивания для вычисления координат. Поэтому во многих программах, применяемых в настоящее время на производстве, начальные координаты находят по формулам решения засечек и лишь затем уточняют методом уравнивания. В непредусмотренных алгоритмом случаях начальные координаты могут быть включены в исходную информацию или вычислены методами нелинейного программирования. Ниже раскрыты основные причины, влияющие на размеры области сходимости итераций.

Применение ЭВМ в топографо-геодезическом производстве позволяет успешно решать задачу автоматизации трудоемких процессов математической обработки геодезических построений при предварительных, уравнивательных и окончательных вычислениях.

На первом этапе обработки сложной в логическом отношении задачей является вычисление предварительных координат пунктов с использованием минимума исходной информации. В настоящее время известно несколько алгоритмов, решающих данную задачу на различном уровне автоматизации обработки измерений.

Объединяют эти алгоритмы общая стратегия вычислений, согласно которой координаты находят методом последовательной вставки одного или нескольких пунктов геодезической сети с применением специальных

подпрограмм решения многократных или однократных засечек. Методы решения засечек различны. Их можно разделить на три группы:

1) вычисление координат пунктов по формулам, рассчитанным на определенные виды засечек;

2) решение засечек путем многократного уравнивания измерений по методу наименьших квадратов параметрическим способом с использованием дополнительной информации о начальных значениях координат определяемых пунктов, полученных заранее по карте или схеме с необходимой точностью;

3) методы, основанные на нелинейном программировании [80].

В настоящее время в геодезии используются различные методы решения геодезических засечек. Предпочтение отдается тем, которые обладают универсальностью, простотой и надежностью решения. Немаловажным фактором является то, что с целью сокращения исходной информации о результатах измерений и координатах исходных пунктов начальные координаты не должны задаваться в качестве исходных. Это возможно только при большой области сходимости итераций. На рис. 3.1 дана схема зависимости области сходимости итераций от различных факторов. Здесь указано, что эта область зависит от методов минимизации целевой функции. Исследования показали, что надежными в этом смысле являются методы прямого поиска, включая метод релаксации, являющийся самым простым, надежным, точным [70].

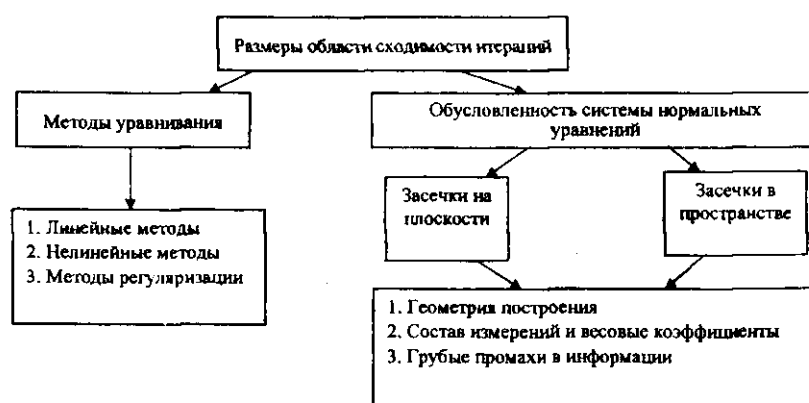


Рис. 3.1. Схема зависимости области сходимости итераций от различных факторов

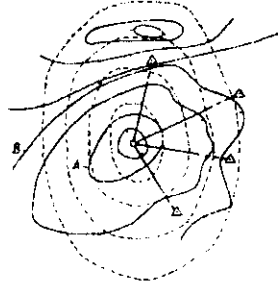


Рис. 3.2. Изолинии целевой функции для обратной засечки на плоскости

На рис. 3.2 показаны сплошной чертой изолинии целевой функции

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i L_i^2(X), \quad (3.1)$$

где $X = (x_1, x_2)^T$; P – веса измерений; L – свободный член нелинейных параметрических уравнений.

Пунктиром показаны изолинии целевой функции:

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^N c_i^2 L_i^2(X); \quad (3.2)$$

где $L(X) = \varphi(X) - T$, (3.3)
 c_i – нормирующие множители, устанавливаемые в зависимости от вида измеренных величин, ускоряющие процесс минимизации критериальной функции и увеличивающие область сходимости итераций; $\varphi(X)$ – нелинейная функция для любого измерения T .

Нормирующие множители c_i , входящие в (3.2), находят с учетом модулей градиентов функций $\varphi(X)$ под условием [75]

$$c_i S_{cp} \|\nabla \varphi_i(X_j)\| = 1,$$

где S_{cp} – среднее или известное (измеренное) расстояние между пунктами геодезической сети; j – номер приближения. Формулы для вычисления c_i приведены ниже.

Виды измерений	Нормирующие множители
Прямое направление	1
Горизонтальный угол	$S_{cp} / S_{i,i+1}$
Дирекционный угол	1
Расстояние	$1/S$
Разность расстояний	$(2S_{cp} \sin \frac{\beta}{2})^{-1}$
Сумма расстояний	$(2S_{cp} \cos \frac{\beta}{2})^{-1}$
Угол наклона	$2 / \sin 2\nu_i$

Стороны $S_i, S_{i+1}, S_{i,i+1}$ и угол β показаны на рис. 3.3, причем

$$S_{cp} = (S_i + S_{i+1}) / 2.$$

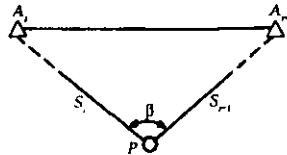


Рис. 3.3. Схема определения нормирующих множителей углов и расстояний

С применением функции (3.1) область сходимости имеет радиус S_{cp} , а с применением целевой функции (3.2), – $6 S_{cp}$, по методу релаксации.

Что касается геометрии построений, то область сходимости в этом случае оценивают с помощью чисел обусловленности. Чем больше число обусловленности, тем хуже геометрия построения. На практике известны построения с плохой обусловленностью – обратная засечка на опасном круге и прямая засечка с острым углом при определяемом пункте.

Интересным и малоисследованным является вопрос о влиянии грубых промахов в информации на величину числа обусловленности. Например, для прямой засечки с непересекающимися направлениями число обусловленности будет стремиться к бесконечности и никакими методами нелинейного программирования не будет локализован минимум целевой функции.

Если на третьем этапе обработки не применять линеаризацию нелинейных параметрических уравнений и минимизировать целевую функцию методами поиска, то область сходимости итераций настолько велика, что практически во всех случаях не требуется задавать начальные координаты определяемых пунктов. Исключения составляют лишь неоднозначные линейные и угловые засечки, для решения которых следует применять метод штрафных функций.

Вычисляя предварительные координаты определяемых пунктов по алгоритму Ньютона – Гаусса, практически не уделяют внимания области сходимости в этих методах. В статье И. Станеева [85] утверждается, что область сходимости итераций по методу Ньютона мала даже при хорошем геометрическом качестве засечек.

Для выявления области сходимости применяют метод статистических испытаний. При этом используют регулярную сетку размером $40 \times 40 = 1600$ узлов, располагая ее так, чтобы и исходные, и определяе-

мый пункты накрывались этой сеткой. В каждый узел сетки помещают определяемый пункт и по формуле $x^{(j+1)} = x^{(j)} - R^{-1}b$ уточняют его координаты.

На рис. 3.4 – 3.6 показаны области сходимости для алгоритма линеаризованных итераций (метод Гаусса) слева, а метода релаксации – справа. По данным заштрихованных областей сходимости можно сделать следующие выводы:

1. Метод Гаусса охватывает все поле линейной засечки, включая локальный минимум L_1 , что недопустимо. Метод релаксации не захватывает область локального минимума.

2. Для обратной засечки на плоскости (см. рис. 3.5) область сходимости итераций на чертеже слева гораздо меньше, чем на рисунке справа.

3. Еще меньше область сходимости для метода Гаусса для прямой засечки, что теоретически в свое время было доказано З.М. Юршанским. Для метода релаксации (см. рис. 3.6, справа) область сходимости такова, что можно брать начальное приближение как среднеарифметическое из координат исходных пунктов.

Метод Гаусса

Метод релаксации

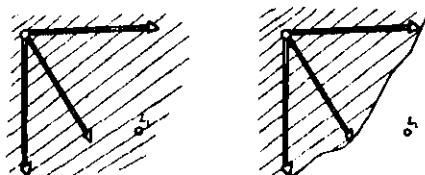


Рис. 3.4. Линейная засечка

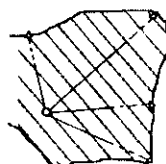
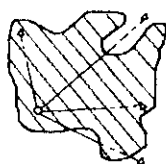


Рис. 3.5. Обратная засечка

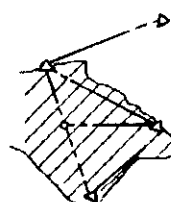
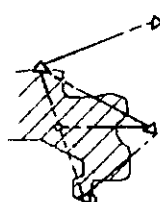


Рис. 3.6. Прямая засечка

Исследования показали, что для некоторых прямых засечек область сходимости итераций настолько велика, что при любом качестве засечки начальные координаты определяемого пункта можно задавать вблизи любого исходного пункта. Такой же результат получим для обратных и линейных засечек, если исходные пункты расположены на одной окружности, а определяемый пункт находится в центре этой окружности. В этих случаях среднее арифметическое из координат исходных пунктов всегда попадает в область сходимости итераций.

Отметим, что в большинстве случаев область сходимости линеаризованных итераций достаточно велика, и это противоречит исследованиям, опубликованным И. Станевым в работе [85]. Таким образом, предлагаем на производстве применять только методы прямого поиска, например, метод релаксации [70].

Методы нелинейного программирования в отличие от линейных методов обладают большой областью сходимости итераций, достигающей $6S$, где S – среднее расстояние между пунктами. Однако это достижение становится возможным благодаря соответствующему выбору целевой функции. В предлагаемой работе анализируется область сходимости для различных целевых функций с последующим применением одного из самых надежных и простых – метода релаксации.

Известно, что любую засечку можно решить методами нелинейного программирования путем минимизации целевых функций.

В процессе исследований будем применять следующие две целевые функции. Одна из них

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N C_i^2 L_i^2(x_1, x_2) \quad (3.4)$$

где N – количество измерений; C – нормирующие множители; $L(x_1, x_2) = T^{\text{выч}} - T^{\text{ум}}$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения. Величины C и L – в квадратах, так как обработка ведется по методу наименьших квадратов (МНК). В дальнейшем $L(x_1, x_2)$ для углов будет в радианах, а для сторон – в метрах.

Вторая целевая функция [80]

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N P_i L_i^2(x_1, x_2) \quad (3.5)$$

где $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$, для углов принята $\sigma_0 = \sigma_\beta$, следовательно $\lambda_\beta = 1$, для сторон $\sigma_0 = \sigma_S$ в метрах, таким образом $P_S = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_S^2}$. Величины свободного члена для углов брались в секундах, а для сторон – в метрах.

В дальнейшем будет выполняться обработка задач по трем вариантам.

Вариант 1 – целевая функция (3.4)

$$C_S = \frac{1}{S_i}; \quad C_\beta = 1$$

Вариант 2 – целевая функция (3.4)

$$C_S = \frac{1}{S_i}; \quad C_\beta = \frac{S_{cp}}{S_{j,j+1}} \quad (\text{величины } S_{cp} = \frac{S_1 + S_2}{2}, \text{ а } S_{cp} \text{ и } S_{j,j+1} \text{ показаны на рис. 3.7})$$

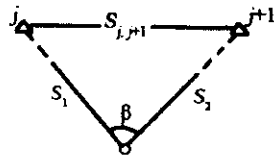


Рис. 3.7. Вспомогательный треугольник

Вариант 3 – целевая функция (3.5).

Технология построения изолиний:

1. Сначала решалась геодезическая засечка методом релаксации, и ее координаты \hat{x}_1, \hat{x}_2 соответствуют центральной точке рисунка.

2. Слепым поиском для 100 узлов (10×10) вычислялись значения целевой функции для одной засечки по трем вариантам, указанным выше.

3. Значения целевой функции нормировались программой следующим образом:

- наибольшее значение целевой функции приравнялось 10,0 (чтобы при построении изолиний через 0,5 было 20 изолиний между точками минимума и наибольшей вершиной);

- в точке минимума значение целевой функции близко к нулю;

- значения целевой функции задавались для программы рисовки рельефа CREDO с точностью до двух значащих цифр.

Обработка информации и анализ изолиний выполнены для четырех реальных примеров, указанных ниже.

На рис. 3.8 (пример 1) дана схема решаемой линейно-угловой засечки с измеренными углами $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ($\sigma_\beta = 5''$) и сторонами S_1, S_2, S_3 ($\sigma_S = 0,01$ м).

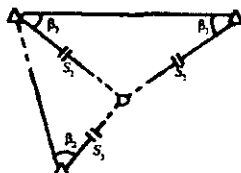


Рис. 3.8. Схема засечки для примера 1

На рис. 3.9 (пример 2) дана схема решаемой линейно-угловой засечки с измеренными углами $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ($\sigma_\beta = 5''$) и одной стороной S_2 ($\sigma_S = 0,01$ м).

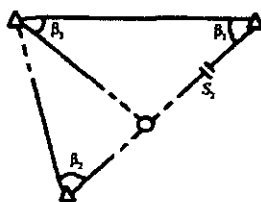


Рис. 3.9. Схема засечки для примера 2

На рис. 3.10 (пример 3) показана обратная засечка, для которой определяемый пункт находится вблизи окружности, проходящей через исходные пункты.

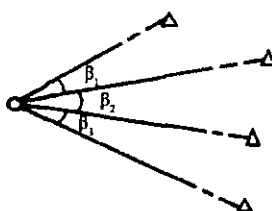


Рис. 3.10. Схема засечки для примера 3

Засечка (рис. 3.11, пример 4) хороша тем, что ее можно решить только методами нелинейного программирования, так как в ней используются одно прямое, два обратных направления ($\sigma_B = 5''$) и сторона ($\sigma_S = 0,05$ м). Формулы для ее замкнутого решения еще не найдены, однако методами нелинейного программирования она решается так же, как примеры 1 – 3.

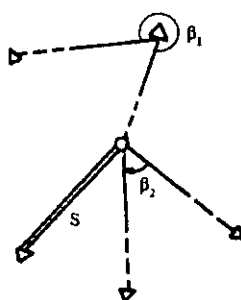


Рис. 3.11. Схема засечки для примера 4

На рис. 3.12, 3.13, 3.14 приведены изолинии целевых функций по трем вариантам соответственно. По графикам изолиний можно сделать следующие выводы:

А – выделенная изолиния на рис. 3.12 ограничивает центральную область сходимости итераций для нелинейных методов, откуда видно, что начальные координаты для итераций можно брать как среднее арифметическое из координат исходных пунктов;

В – наибольшая область сходимости на рис. 3.13, так как здесь использовались нормирующие множители (вариант 3);

С – для этого же варианта (см. рис. 3.14) изолиния в центральной точке близка к окружности, а это ускоряет итерации.

На рис. 3.15, 3.16, 3.17 приведены изолинии целевых функций по трем вариантам соответственно. По графикам изолиний можно сделать следующие выводы:

А – на рис. 3.16 наилучшим оказался вариант 2. Область сходимости обширна и в несколько раз больше, чем на рис. 3.15;

В – вариант 3 (см. рис. 3.17) для целевой функции (3.5) из-за большого веса стороны $P_5 = 250000$, что привело к вырожденному случаю (определитель системы нормальных уравнений равен нулю).

Так как одна сторона используется с большим весом, то изолинии превратились в концентрические окружности для линии S_2 . На рис. 3.14 также использовался большой вес, но сторон было три и фактически там указаны изолинии для линейной засечки, так как свободные члены углов были с малыми весами $P_\beta = 1$.

При выборе точности дальномеров нужно пользоваться правильным соотношением

$$\frac{\sigma_S}{S} = \frac{\sigma_\beta}{S^2}, \quad (3.6)$$

что при $S = 10000$ м, $\sigma_\beta = 5''$ и $S = 206265''$ σ_S должно быть равным 0,24 м;

С – на рис. 3.14 видно, что в окрестности минимума получены на ЭВМ две изолинии, так как в центре значения функции Φ близки к нулю.

На рис. 3.18, 3.19 приведены изолинии целевых функции Φ . Для вариантов 1, 3 на рис. 3.18, варианта 2 – на рис. 3.19.

По графикам изолиний можно сделать следующие выводы:

А – несмотря на то, что для горизонтальных углов в варианте 1 $l(x_1, x_2)$ в радианах, а в варианте 3 $l(x_1, x_2)$ в секундах, а веса $C_\beta = P_\beta = 1$, графики изолиний получились одинаковыми, так как наибольшие значения целевой функции в виде изолиний равно 10,0 (об этом говорилось выше при нормировании значений целевой функции для изолиний);

В – опять оказалось, что в варианте 2 нормирующий множитель C_β обеспечил не только большую область сходимости итераций, но и ускорил эти итерации благодаря концентричности окружностей в окрестности минимума.

На рис. 3.20 – 3.23 приведены изолинии Φ для вариантов 1, 2, 3 соответственно и для окрестности минимума в варианте 2 (см. рис. 3.23).

По графикам изолиний можно сделать следующие выводы:

А – для вариантов 1 и 3 (рис. 3.20 – 3.22 соответственно) область сходимости итераций практически одинакова, но в несколько раз меньше, чем в варианте 2 (см. рис. 3.21);

В – из-за неточности значений Φ в окрестности минимума программа CREDO дала локальные минимумы, которых нет, так как более крупный чертеж изолиний в окрестности минимума показывает, что локальных минимумов нет.

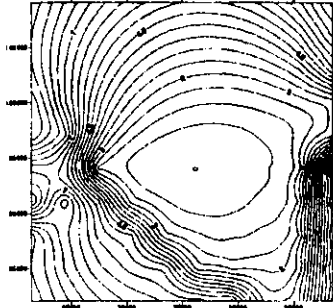


Рис. 3.12. Пример 1

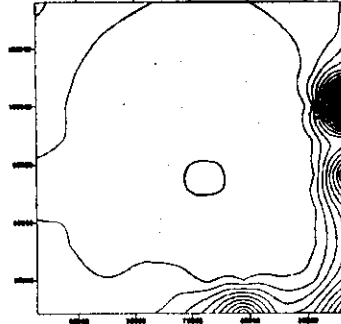


Рис. 3.13. Пример 1

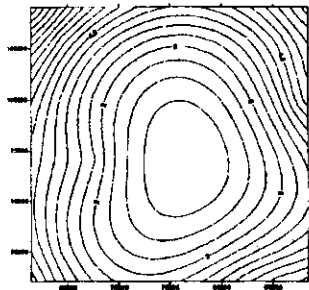


Рис. 3.14. Пример 1

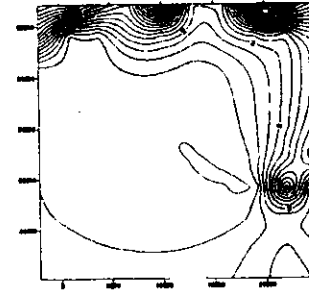


Рис. 3.15. Пример 2

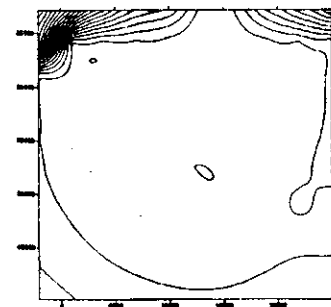


Рис. 3.16. Пример 2

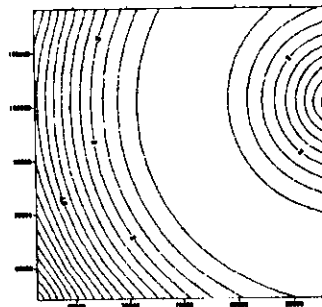


Рис. 3.17. Пример 2

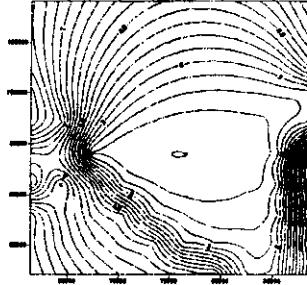


Рис. 3.18. Пример 3

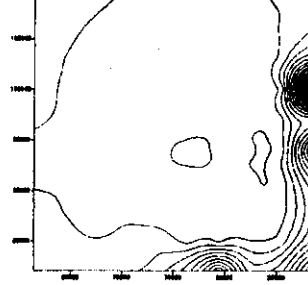


Рис. 3.19. Пример 3

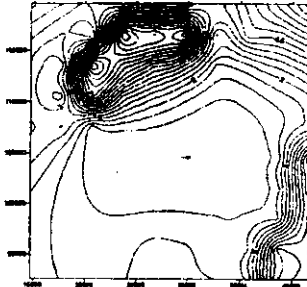


Рис. 3.20. Пример 4

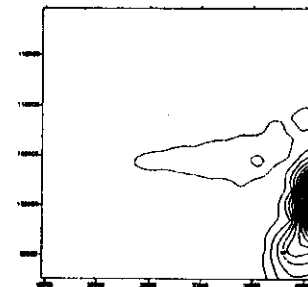


Рис. 3.21. Пример 4

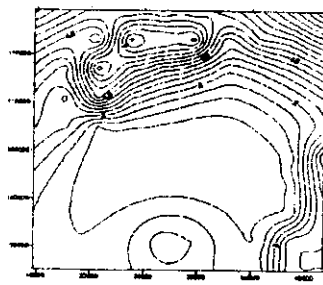


Рис. 3.22. Пример 4

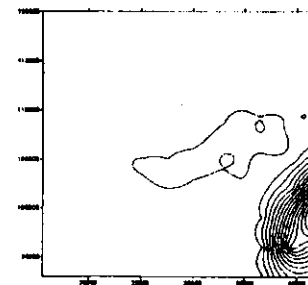


Рис. 3.23. Пример 4

Отметим, что для вычисления координат пунктов методами нелинейного программирования следует применять целевую функцию (3.5).

Для успешного решения задач предварительной обработки измерений нужно знать координаты определяемых пунктов с необходимой для уравнивания точностью. Алгоритм вычисления начальных координат рассмотрим на применении методов нелинейного программирования, рассчитанных на те случаи, когда критерий эффективности решения и (или) ограничения выражаются нелинейными зависимостями от параметров. На необходимость корректного подхода при выборе начального приближения в процессе решения геодезических экстремальных задач по методу Ньютона – Гаусса указано в большом числе публикаций. Чтобы поставить заслон воздействию грубых промахов в информации на результаты вычислений, в производственных программах следует изучить вопрос о влиянии грубых промахов в исходных данных на размеры области сходимости итераций.

При решении любых систем нелинейных уравнений требуется искать ответ на три основных вопроса:

- выбор алгоритма при минимизации целевой функции с большим числом неизвестных;
- выбор начальных значений неизвестных с тем, чтобы они попали в область сходимости к глобальному минимуму;
- локализация влияния на результаты грубых ошибок информации.

При обработке геодезических сетей можно решить эти вопросы следующим путем. Систему уравнений (3.3) предлагается решать по группам неизвестных, расчленив любую по сложности геодезическую сеть на отдельные многократные или однократные засечки, применяя метод последовательной вставки пунктов. Это приводит к необходимости решения частных систем (3.3) при числе неизвестных не более шести (до трех определяемых без контроля пунктов). Так как будут решаться системы с малым числом неизвестных X , то для минимизации функции (3.2) можно применять трудоемкие в вычислительном отношении, но удобные для программирования методы минимизации, обладающие большой областью сходимости итераций. В результате в большинстве случаев возможно вычисление начальных компонент вектора X , как среднего арифметического из координат окружающих пунктов. Следовательно, начальные координаты определяемых пунктов можно не задавать в исходной информации, а иметь лишь сведения об S_{φ} для всей геодезической сети.

В дальнейшем будем находить не грубые ошибки измерений, а грубые промахи в исходной информации, возникающие при ее наборе или

в процессе измерений при неверном отождествлении названий окружающих пунктов. Если минимум целевой функции найден, то проверяется выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^N c_i |L_i(\hat{x})| \leq 3 \sum_{i=1}^N c_i \sigma_i, \quad (3.7)$$

где σ_i – стандарт измерения.

Данное неравенство используется только после введения в вектор T редуцированных поправок. Если это неравенство не выполняется, а $N-t=1$, то полученные координаты не запоминаются. Если число избыточных измерений $N-t=2$, то при несоблюдении неравенства (3.7) грубые промахи определяются методом последовательного исключения одного уравнения (3.3) из решаемой системы с очередной минимизацией функции (3.2). Если $N-t>2$, то во всех возможных комбинациях исключаются по два уравнения. Цель таких вычислений – решить систему (3.3) при $N-t \geq 1$ с соблюдением неравенства (3.7) и запомнить координаты, полученные с контролем.

Исследуем вопрос о влиянии грубых промахов в исходной информации (координаты исходных пунктов, промахи в измерениях и др.) при наличии одного избыточного измерения для линейной, обратной и прямой засечки на плоскости. Технология поиска области сходимости проста: в узлах регулярной сетки (40×40) помещается определяемый пункт и делается анализ о сходимости итераций для двух методов решения:

- алгоритм Гаусса (метод линеаризованных итераций);
- метод релаксации (один из наилучших способов нелинейного программирования, относящийся к методам прямого поиска).

На рис. 3.24 – 3.26 показаны засечки и области сходимости итераций для метода Гаусса (слева) и метода релаксации (справа). Исходная информация искажена грубыми ошибками для нижнего исходного пункта путем его перемещения в верхний левый угол.

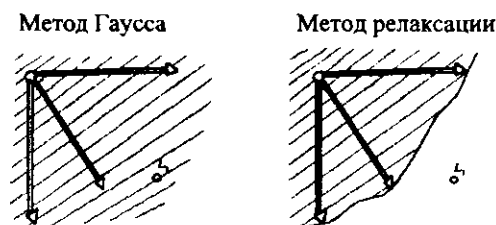


Рис. 3.24. Линейная засечка

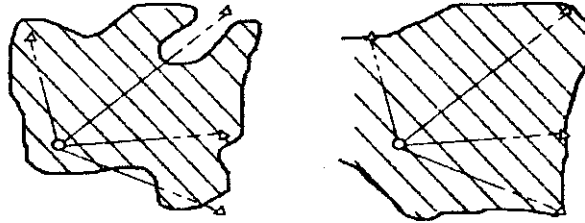


Рис. 3.25. Обратная засечка

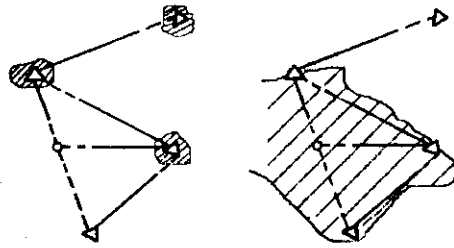


Рис. 3.26. Прямая засечка

По результатам исследований можно сделать следующие выводы:

– линейная засечка (см. рис. 3.24):

а) координаты определяемого пункта изменились на 5 – 6 км, при $s_{cp} = 15$ км;

б) область сходимости осталась такой же, как и при отсутствии грубой ошибки измерений;

– обратная засечка (см. рис. 3.25):

а) координаты определяемого пункта после уравнивания изменились под воздействием грубого промаха на 3 – 5 км при $s_{cp} = 15$ км;

б) область сходимости осталась такой же, как и при отсутствии грубой ошибки измерений;

– прямая засечка на плоскости (см. рис. 3.26):

а) координаты определяемого пункта после уравнивания изменились под воздействием грубого промаха на 10 км при $s_{cp} = 15$ км;

б) метод Гаусса неприменим для вычисления координат, так как при любой грубой ошибке в информации можно получить вырожденный случай (деление на ноль).

Выводы:

1. Геодезические засечки необходимо обрабатывать не по замкнутым формулам, а методами нелинейного программирования с привлечением избыточных измерений.

2. Именно избыточные измерения оставили неизменной область сходимости итераций при грубых промахах в исходной информации.

3. Самыми надежными являются методы прямого поиска и, в частности, примененный нами метод релаксации.

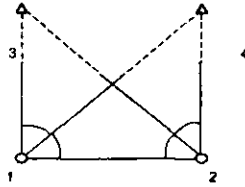
4. Обнаружено, что грубые промахи для избыточных измерений практически не искажают числа обусловленности.

3.2. О вычислении координат пунктов методом релаксации и другими методами нелинейного программирования

При вычислении координат одного определяемого пункта из обработки засечек методом релаксации не требуются значения начальных координат этих пунктов. При совместном поиске двух и более определяемых пунктов, когда не удастся найти координаты по отдельности, применяют новую методику, заключающуюся в том, что используют сначала слепой поиск, а затем метод релаксации. Недостатком слепого поиска является, как утверждают математики, «проклятие размерности», когда невозможно получить координаты за ограниченное машинное время, например, при решении засечки пяти пунктов требуется около 200 с при тактовой частоте процессора 600 МГц. При использовании современных тахеометров ошибочно полагают, что с помощью этих приборов можно найти координаты из обработки любых геодезических построений. Однако при отсутствии видимости на два исходных пункта с одного определяемого и при одновременном отсутствии видимости между исходными пунктами координаты можно получить только благодаря предлагаемой методике.

На рис. 3.27 и 3.28 показаны геодезические засечки, рассмотренные Ганзеном. Заслуга Ганзена состоит в том, что он дал замкнутые аналитические формулы для их решения. Наиболее общая засечка показана на рис. 3.29. Для этой засечки профессор Ю.И. Маркузе [45] дал замкнутое аналитическое решение, общее для всех засечек, показанных на рис. 3.27 – 3.29. Рядом со всеми рисунками приводятся значения относительной обусловленности Ψ , первое число Тюринга S и наибольшее значение ошибки положения пункта M .

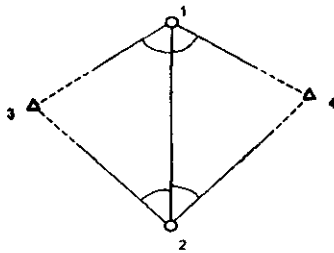
$\psi = 9.18$



$C = 86.7$
 $M = 0.038$

Рис. 3.27. Задача Ганзена

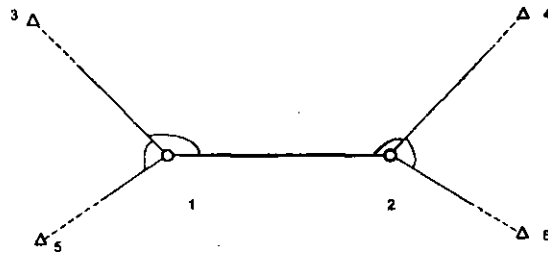
$\psi = 0.71$



$C = 6.67$
 $M = 0.012$

Рис. 3.28. Задача Ганзена

$\psi = 1.18$



$C = 11.1$
 $M = 0.010$

Рис. 3.29. Засечка двух пунктов по четырем исходным

Засечка двух пунктов по четырем исходным (рис. 3.30) предложена В.И. Мицкевичем в 1975 г. Найдено только численное решение, и без доказательства соответствующей теоремы утверждается, что для этого построения невозможно найти замкнутое аналитическое решение без приближений.

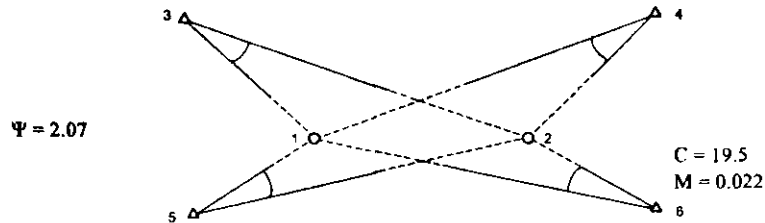


Рис. 3.30. Засечка В.И. Мицкевича

Интересно отметить, что при построении засечек, показанных на рис. 3.27 – 3.29, с одного определяемого пункта имеются направления на два исходных пункта. Следовательно, при использовании тахеометров благодаря измерениям линий и углов координаты определяемых пунктов могут быть найдены автоматически, без использования методов нелинейного программирования.

Решение засечек слепым поиском с точностью шага регулярной сетки λ , который выбирается в зависимости от числа определяемых пунктов, по формуле

$$\lambda = \frac{S_{cp}}{2,5}, \quad (3.8)$$

где S_{cp} – средняя длина стороны засечки.

Центр регулярной сетки, состоящий из 25 узлов, помещается в точки x_{cp}, y_{cp} , найденные по координатам исходных пунктов. Цель расчетов – найти такие два узла регулярной сетки, для которых целевая функция

$$\Phi(X) = \sum_{m=1}^N L^1(X) \quad (3.9)$$

минимальна, где $L(X)$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения.

Далее процесс приближения выполняется методом релаксации.

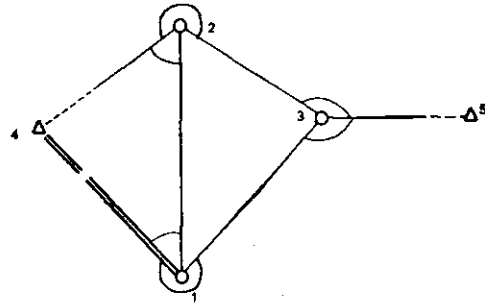
На рис. 3.31 – 3.34 показаны засечки трех определяемых пунктов, которые также решаются слепым поиском при

$$\lambda = \frac{S_{cp}}{2}. \quad (3.10)$$

Для решения любых засечек группы на ПК с тактовой частотой 600 МГц потребовалась 1 с машинного времени.

Из четырех засечек только одна засечка группы пунктов (см. рис. 3.32) может быть автоматизированно вычислена с помощью тахеометра, т.к. здесь встречаются два направления с определяемого пункта на исходные.

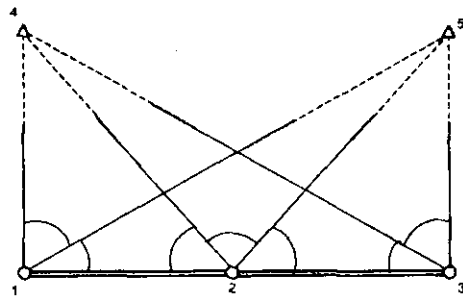
$\Psi = 9.58$



$C = 132$
 $M = 0.023$

Рис. 3.31. Засечка трех определяемых пунктов

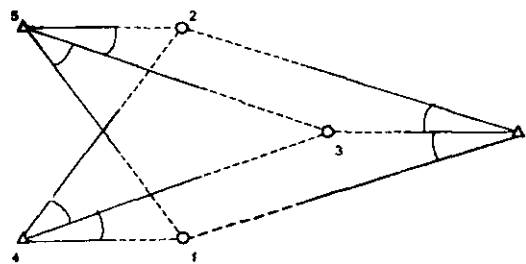
$\Psi = 6.39$



$C = 87.9$
 $M = 0.025$

Рис. 3.32. Засечка трех определяемых пунктов

$\Psi = 5.67$



$C = 77.9$
 $M = 0.047$

Рис. 3.33. Засечка Е.В. Грищенкова – В.И. Мицкевича

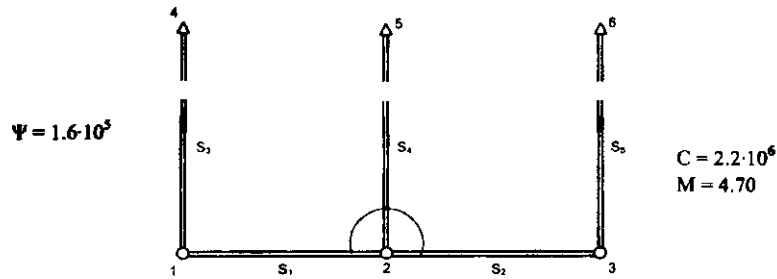


Рис. 3.34. Засечка Лёбеля

На рис. 3.35 показана засечка четырех определяемых пунктов по двум исходным. Замкнутое аналитическое решение этой засечки еще не получено. Автоматические решения возможны только методами нелинейного программирования. Поскольку с одного определяемого пункта нет видимости на два исходных, то решить эту засечку с помощью тахеометра в настоящий момент невозможно.

Шаг регулярной сетки выбирается по формуле

$$\lambda = \frac{S_{sp}}{1,5}. \quad (3.5)$$

Время счета программы UNIWER – 10 с.

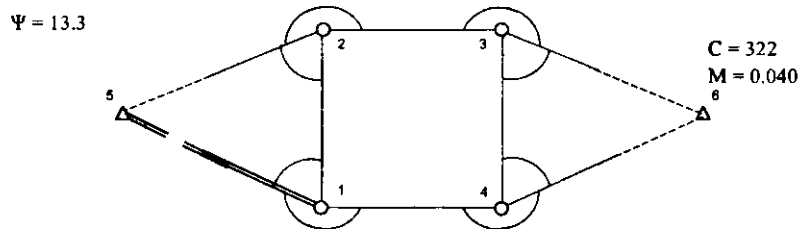


Рис. 3.35. Засечка четырех определяемых пунктов по двум исходным

На рис. 3.36 показана засечка пяти определяемых пунктов по двум исходным. Замкнутое аналитическое решение этой засечки еще не получено, однако слепым поиском и методом релаксации потребовалось 210 с и 3 с на ПК соответственно. Шаг регулярной сетки выбирался автоматически по формуле

$$\lambda = S_{sp}. \quad (3.12)$$

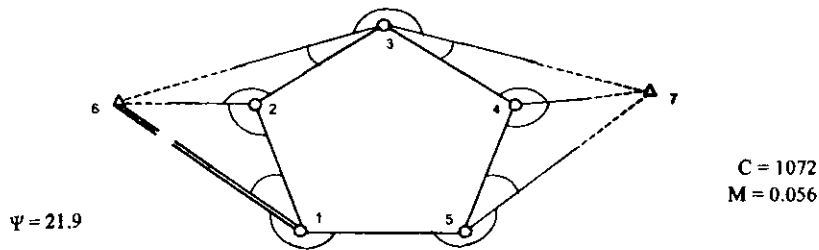


Рис. 3.36. Засечка пяти определяемых пунктов по двум исходным

На основании выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Программа UNIVER позволяет решать любые засечки при вычислении координат от 1 до 5 пунктов, зная только координаты исходных пунктов и результаты измерений;

2. Засечки, показанные на рис. 3.27, 3.28, 3.29, 3.32 и 3.36, тахеометр может решить, т.к. существует видимость с одного определяемого пункта на два исходных, до которых тахеометр определяет дальность.

Большой класс геодезических задач, связанных с оптимальным планированием работ, проектированием геодезических сетей, разработкой рациональных методов обработки измерений и др., решается одним из математических аппаратов теории исследования операций методом математического программирования. Этот метод включает линейное, нелинейное, динамическое программирование и отличается от непосредственного программирования на ЭВМ, но, как правило, без ЭВМ не используется.

Если показатель эффективности является линейной функцией независимых переменных и ограничения, определяющие область допустимых значений переменных, представляют собой линейные зависимости, то такие задачи решаются методами линейного программирования. Область его применения в геодезии разнообразна: создание проектов полевых геодезических работ; поиск оптимальных высот геодезических знаков; уравнивательные вычисления и др.

Математический аппарат линейного программирования для уравнивательных вычислений используется в основном при реализации метода наименьших модулей.

Широкий класс экстремальных задач решается с помощью нелинейного программирования, рассчитанного на тот случай, когда критерии

эффективности и ограничения выражаются нелинейными зависимостями от параметров. При этом, исходя из типа задачи, используют следующие методы: выпуклое, квадратичное, сепарабельное, стохастическое и целочисленное программирование.

Ниже рассматриваются методы нелинейного программирования, рассчитанные на решение наземных и пространственных геодезических засечек.

В настоящее время известно большое количество численных методов решения нелинейных экстремальных задач. Большое разнообразие методов объясняется тем, что попытка найти наилучший метод, который позволил бы решать широкий круг задач, встречающихся на практике, сталкивается со значительными трудностями.

Согласно литературным источникам, методы нелинейного программирования разделяют на три основные группы: прямого поиска; методы, использующие первые частные производные целевой функции; а также методы, требующие знания вторых производных. При разработке методов даются экспериментальные либо теоретические характеристики эффективности применения (например, скорости сходимости). Теоретические оценки получены не для всех методов. Если они известны, то, как правило, их определяют на основе жестких требований к целевой функции, которые нелегко проверить на практике. Поэтому наиболее часто выполняют экспериментальную оценку алгоритмов на основе сравнительного анализа различных методов, используя реально существующие (не теоретические) объекты исследования.

Важную роль при экспериментальном сравнении алгоритмов играет выбор критериев сравнения. Обычно таковыми служат точность решения, определяющаяся локализацией достаточно малой окрестности экстремума, т. е. близость вектора переменных к истинным экстремальным значениям; количество вычисленных значений целевой функции и время счета на ЭВМ. При сравнении методов необходимо также учитывать широту области применения алгоритма, простоту его реализации и надежность работы в трудных ситуациях. Результаты экспериментального сравнения зависят от того, как запрограммированы алгоритмы для ЭВМ и какие тестовые примеры выбраны для сравнения.

Для выполнения сравнительного анализа применим следующие известные методы нелинейного программирования: наискорейшего спуска; Хука – Дживса; Нелдера – Мида; Пауэлла; релаксации и метод Ньютона [89].

Для сравнения методов выберем семь тестовых примеров, информация о которых помещена на рис. 3.37 – 3.43.

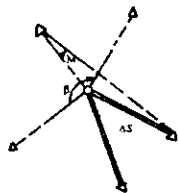


Рис. 3.37. Комбинированная засечка:
 M – прямой угол; β – обратный угол;
 ΔS – разность расстояний

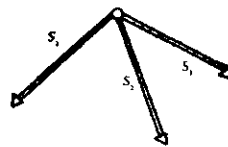


Рис. 3.38. Линейная засечка:
 S_i – измеренные дальности

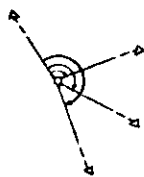


Рис. 3.39. Обратная засечка

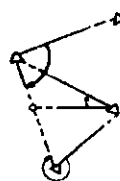


Рис. 3.40. Прямая засечка

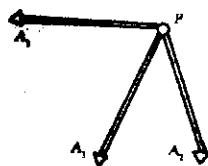


Рис. 3.41. Гиперболическая засечка
 с разностями расстояний:
 $\Delta S_1 = S_{PA1} - S_{PA2}$; $\Delta S_2 = S_{PA1} - S_{PA3}$; $\Delta S_3 = S_{PA3} - S_{PA2}$

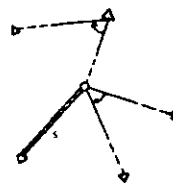


Рис. 3.42. Линейно-угловая
 засечка

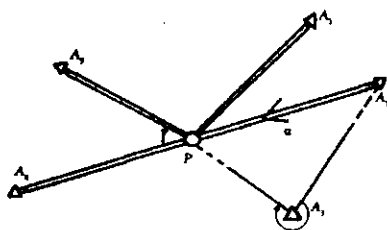


Рис. 3.43. Комбинированная засечка. Два горизонтальных угла, дирекционный угол α ,
 расстояния S_{PAi} ; разность расстояний $\Delta S = S_{PA2} - S_{PA3}$; сумма расстояний $\sum S = S_{PA1} + S_{PA2}$

Во всех случаях применялась минимизация целевой функции

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i L_i^2(X)$$

где $X = (x_1, x_2)^T$; P – веса измерений; L – свободный член нелинейных параметрических уравнений

В таблице 3.1 указаны виды засечек и дано отношение малой к большой полуоси эллипса ошибок. Чем меньше это отношение, тем труднее выполняется поиск минимума. Для вычисления весов измерений принято $\sigma_B = 1,0'$; $\sigma_S = 0,02$ м; для разности и суммы расстояний $\sigma_{\Delta S}$, $\sigma_{\Sigma S} = 0,10$ м при среднем расстоянии между исходным и определяемым пунктами 15000 м.

Таблица 3.1

Дополнительные сведения о тестовых примерах

Номер тестового примера	Название засечки	a/a
1	Линейно-угловая	0,65
2	Линейная	0,70
3	Обратная	0,14
4	Прямая	0,70
5	Гиперболическая	0,56
6	Линейно-угловая	0,28
7	Комбинированная	0,60

Все вычисления выполнялись по специально составленным программам для IBM PC/AT-286 на алгоритмическом языке Фортран-4. Результаты вычислений (j – количество итераций и T – время счета в секундах) представлены в табл. 3.2. Проведем сравнительный анализ методов нелинейного программирования, давая последовательную характеристику каждому из них.

Метод наискорейшего спуска (I) быстро сходится к минимуму, но для тестовых примеров на рис. 3.39 и 3.42 не найдено решение из-за малой области сходимости.

Метод Хука – Дживса (II) имеет большую область сходимости, легко программируется, но затрачивает много машинного времени.

Метод Нелдера – Мида (III) имеет наилучшие характеристики из всех примененных методов.

Метод Пауэла (IV) быстро сходится к минимуму для всех выпуклых функций, но обладает самой маленькой областью сходимости. Вот почему им не решены тестовые примеры на рис. 3.39 – 3.42.

Метод релаксации [76] (V) прост в программировании и надежен в работе. Особенно характерно для него то, что им может быть локализована сколь угодно малая область минимума.

Метод Ньютона – Гаусса [66] (VI) быстрее всех методов приводит к решению, но не для всех примеров характеризуется большой областью сходимости.

Таблица 3.2

Результаты минимизации целевой функции

Номер тестового примера	Номер метода нелинейного программирования											
	I		II		III		IV		V		VI	
	<i>j</i>	<i>T</i>	<i>j</i>	<i>T</i>	<i>j</i>	<i>T</i>	<i>j</i>	<i>T</i>	<i>j</i>	<i>T</i>	<i>j</i>	<i>T</i>
1	17	2	12	6	27	2	4	1	21	3	4	0-1
2	20	1	9	2	34	1	8	2	25	2	5	0-1
3	-	-	5	4	59	4	-	-	92	11	5	1
4	20	2	10	5	41	3	-	-	28	4	4	0-1
5	20	2	11	3	25	1	-	-	20	2	4	0-1
6	-	-	10	6	86	6	-	-	62	9	-	-
7	19	1	10	7	23	3	4	2	36	5	4	0-1

Отметим, что сейчас широко используются персональные ЭВМ, которые в десятки раз быстрее выполняют арифметические операции по сравнению с ЕС ЭВМ. С увеличением быстродействия ЭВМ сокращаются различия во времени, проиллюстрированные в табл. 3.2. Поэтому при разработке алгоритмизации необходимо отдать предпочтение тому методу, который имеет простую стратегию поиска экстремума, удобен для программирования и надежен в работе. Этими характеристиками обладают многие методы нелинейного программирования и, в частности, метод релаксации, примененный В.И. Мицкевичем при разработке технологического алгоритма [66].

4. РАЗРАБОТКА ОБОБЩЁННЫХ МЕТОДОВ L_p -ОЦЕНОК И МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

4.1. Обоснование обобщённого метода наименьших квадратов, выполненное Ю.В. Кемницем

В 1819 – 1826 гг. Гаусс создал знаменитый «Большой мемуар», под названием «Теория такой комбинации наблюдений, при которой вычисленные значения искомым неизвестных были бы возможно менее искажены ошибками измерений». В этом выдающемся труде, продолжая дальнейшую разработку своего метода уравнивания и оценку точности результатов измерений, Гаусс дал новое обоснование метода наименьших квадратов (МНК), поставив требование такого сочетания измеренных данных, чтобы мера точности результата была наибольшей.

В методе МНК предполагается, что измеренные величины являются независимыми, и такой подход к уравниванию называется классическим МНК. В середине XX века стали появляться исследования по обобщённому методу наименьших квадратов. В 1946 г. выдающийся советский математик академик А.Н. Колмогоров опубликовал работу, в которой дал новое изложение метода наименьших квадратов, применяя общие понятия линейной алгебры и её геометрической интерпретации.

В 1967 г. академик Ю.В. Линник опубликовал свой фундаментальный труд «Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений», в котором широко использовал математический аппарат линейной алгебры. Именно линейная алгебра легла в основу обоснования обобщённого метода наименьших квадратов для случая обработки зависимых результатов измерений.

4.1.1. Основная теорема обобщённого метода наименьших квадратов

Если: 1) N -мерный вектор $T^{(n)}$ результатов измерений, вводимых в уравнивание параметрическим методом, имеет как угодно зависимые составляющие, свободные от систематических ошибок, т.е.

$$M(T^{(n)}) = T^*, \quad (4.1)$$

где T^* – постоянный N -мерный вектор неизвестных измеренных величин;

2) известны матрица R_L коэффициентов корреляции этого вектора и его p – диагональная матрица весов; 3) заданы начальные уравнения

$$AX + T^{*m} = T^{*p}, \quad (4.2)$$

где A – постоянная матрица коэффициентов параметрических уравнений размера $N \times t$ и ранга $t < N$; X – постоянный t -мерный вектор искомого величин; T^{*m} – постоянный N -мерный вектор исходных данных, то оценка x вектора X , удовлетворяющая принципу наибольшего веса, может быть найдена из уравнения [56]

$$A^T p^{\frac{1}{2}} R_L^{-1} p^{\frac{1}{2}} Ax + A^T p^{\frac{1}{2}} R_L^{-1} p^{\frac{1}{2}} L = 0, \quad (4.3)$$

где

$$L = T^{*m} - T^{*p}. \quad (4.4)$$

Корреляционная матрица оценки x имеет вид

$$K_x = \mu^2 \left(A^T p^{\frac{1}{2}} R_L^{-1} p^{\frac{1}{2}} A \right)^{-1} \quad (4.5)$$

где

$$\mu^2 = \frac{v^T p^{\frac{1}{2}} R_L^{-1} p^{\frac{1}{2}} v}{n-1} \quad (4.6)$$

– оценка дисперсии σ^2 единицы веса, причем

$$v = Ax + L \quad (4.7)$$

– вектор поправок к составляющим вектора T^{*m} .

Доказательство. Учитывая, что матрица R_L симметрична, разложим ее на произведение двух треугольных матриц, транспонированных относительно друг друга

$$R_L = \Omega^T \Omega, \quad (4.8)$$

где Ω – правотреугольная матрица, и введем неособенное линейное преобразование

$$I = GL, \quad (4.9)$$

матрица преобразования которого имеет вид

$$G = (\Omega^{-1})^T p^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Тогда корреляционная матрица K_l вектора l выразится через корреляционную матрицу K_L вектора L равенством

$$K_l = GK_L G^T. \quad (4.11)$$

Поскольку корреляционная матрица K_L связана с матрицей коэффициентов корреляции R_L равенством

$$K_L = \sigma^2 P^{-\frac{1}{2}} R_L P^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.12)$$

где R_L – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, а недиагональные элементы равны коэффициентам корреляции.

Подставляя значение K_L в (4.11) и учитывая разложение (4.8), приходим к выражению

$$K_l = \sigma^2 E, \quad (4.13)$$

из которого заключаем, что линейное преобразование (4.9) переводит вектор L в вектор l с некоррелированными и равноточными составляющими.

Теперь подвергнем тому же линейному преобразованию, что и с матрицей G , матрицу A и векторы T^{*m} , T^{*p} :

$$A_1 = GA; \quad T_1^{*m} = GT^{*m}; \quad T_1^{*p} = GT^{*p}. \quad (4.14)$$

Тогда, умножив слева обе части равенства (4.2) на матрицу G , придем к новым начальным уравнениям

$$A_1 X + T_1^{*m} = T_1^{*p}, \quad (4.15)$$

в которых вектору T_1^{*p} можно противопоставить вектор l , определяемый равенством (4.9) как вектор равноточных и некоррелированных результатов измерений.

В таком случае, приняв $P = E$, согласно начальным уравнениям (4.15) можем написать нормальные уравнения

$$A_1^T A_1 x + A_1^T l = 0, \quad (4.16)$$

где x – оценка вектора X , удовлетворяющая принципу наибольшего веса.

Подставив в (4.16) матрицу A_1 из первого равенства (4.14), вектор l из (4.9), а после этого матрицу преобразования G из (4.10) и учитывая разложение (4.8), придем к нормальным уравнениям (4.3), что и доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства формулы (4.5), приняв $P = E$, формуле для μ придадим вид

$$K_x = \sigma^2 (A_1^T A_1)^{-1}.$$

Подставив сюда значение матрицы A_1 из (4.14) и (4.8), придем к формуле (4.5), заменив σ^2 на оценку μ^2 .

Проведем доказательство выражения (4.6). Для этого, приняв $P = E$, по формуле для μ придадим вид

$$\mu^2 = \frac{v^T v}{n-1}. \quad (4.17)$$

Ясно, что вектору i соответствует вектор поправок

$$v_i = Gv, \quad (4.18)$$

подставляя который в (4.17) и учитывая (4.10), (4.8), приведем к формуле (4.6), что и доказывает теорему полностью.

Можно показать, что если, кроме того, задана некоторая функция

$$\Phi_x = f_0 + f^T x,$$

где число f_0 – постоянная, а f – постоянный t -мерный вектор, то удовлетворяющая принципу наибольшего веса ее оценка имеет вид

$$\Phi_x = f_0 + f^T x, \quad (4.19)$$

где вектор x находят из уравнения (4.3) [36].

Оценку дисперсии оценки (4.19) производят при этом по формуле

$$m_0^2 = \mu^2 f^T \left(A^T p^{\frac{1}{2}} R_1^{-1} p^{\frac{1}{2}} A \right)^{-1} f,$$

где μ^2 по-прежнему определяют из выражения (4.6).

Для оценки надежности эмпирической средней квадратической ошибки единицы веса μ можно, как и ранее, воспользоваться формулой [35]

$$\sigma_v \approx \frac{\mu}{\sqrt{2r}}$$

Обзор формул (4.3) – (4.7) обнаруживает, что при вычислениях по ним наибольшая затрата труда падает на обращение матрицы коэффициентов корреляции R_L . Чтобы по возможности избежать этого затруднения, надо вести уравнивание не по параметрическому методу, а по корреляционному, где необходимость такого обращения отпадает [36].

4.1.2. Обобщённый коррелятный способ уравнивания

Рассмотрим этот вопрос с позиции принципа наибольшего веса.

Из теории метода наименьших квадратов с позиции принципа наибольшего веса известно, что начальные уравнения (4.2) можно преобразовывать к условным уравнениям

$$BT^p + b = 0, \quad (4.20)$$

число которых будет $r = N - t$, причем здесь B – постоянная матрица размера $r \times N$ и ранга $r < N$, b – вспомогательный вектор.

Если вместо T^p в условные уравнения (4.20) подставить вектор результатов измерений T^m , то в правой части равенства (4.20) вместо нулевого вектора появится так называемый r -мерный вектор w невязок условных уравнений

$$BT^m + b = w. \quad (4.21)$$

Чтобы его устранить, вектору результатов измерений T^m придаем вектор поправок v

$$\hat{T} = T^m + v, \quad (4.22)$$

и поэтому, заменив T^m на \hat{T} в (4.21), написать

$$B\hat{T} + b = 0.$$

Учитывая здесь (4.21) и (4.22), приходим к условным уравнениям поправок

$$Bv + w = 0. \quad (4.23)$$

Если на основании (4.18) написать

$$v = G^{-1}v_1. \quad (4.24)$$

и в (4.23) произвести соответствующую подстановку вектора v , то получим новые условные уравнения поправок

$$Uv_1 + w = 0, \quad (4.25)$$

$$U^T = (G^{-1})^T B. \quad (4.26)$$

В этих условных уравнениях поправок участвует вектор v_1 поправок к равноточным и некоррелированным результатам измерений (4.9). Но в этом случае, как известно из теории метода наименьших квадратов, для нахождения поправок, соответствующих принципу наибольшего веса, надо решить нормальные уравнения коррелят

$$UU^T v_1 + w = 0, \quad (4.27)$$

где k есть r -мерный вектор коррелат, и тогда поправки будут получены из уравнения

$$v_i = U^T k. \quad (4.28)$$

Учитывая теперь (4.8), (4.10) и (4.26), уравнению (4.27) придаем вид

$$B p^{-\frac{1}{2}} R_L p^{-\frac{1}{2}} B^T k + w = 0. \quad (4.29)$$

Теперь на основании (4.8), (4.10), (4.24), (4.26) и (4.28) получаем

$$v = p^{-\frac{1}{2}} R_L p^{-\frac{1}{2}} B^T k. \quad (4.30)$$

Уравнения (4.22), (4.28) и (4.30) позволяют найти оценку x вектора T'' , соответствующую принципу наибольшего веса.

Можно показать [35], что оценка

$$\Phi_x = f_0 + f^T x, \quad (4.31)$$

где f_0 – постоянное число, а f – постоянный n -мерный вектор любой постоянной Φ_x , связанной с вектором X уравнением

$$\Phi_x = f_0 + f^T X, \quad (4.32)$$

также будет удовлетворять принципу наибольшего веса, т.е. обладать минимальной дисперсией.

На этом заканчивается решение задачи уравнивания по методу условных уравнений. Для решения задачи апостериорной оценки точности напомним линейное преобразование

$$\xi = Gx, \quad (4.33)$$

соответствующее (4.9) и (4.18), где ξ – N -мерный вектор уравниваемых значений равнозначных некоррелированных результатов измерений, являющихся составляющими вектора l .

Согласно (4.33), можем написать

$$x = G^{-1} \xi$$

и преобразовать оценку (4.19) к виду

$$\Phi_x = f_0 + \varphi^T \xi, \quad (4.34)$$

где

$$\varphi = (G^{-1})^T f. \quad (4.35)$$

Оценка (4.33) соответствует случаю уравнивания равноточных и некоррелированных результатов измерений. Поэтому, как известно из теории метода наименьших квадратов, для ее эмпирической дисперсии согласно нормальным уравнениям (4.27) можем написать выражение

$$m_{\phi}^2 = \mu^2 (U^T q + \phi)^T (U^T q + \phi), \quad (4.36)$$

где q – n -мерный вектор переходных множителей, который находится из решения уравнения

$$UU^T q + U\phi = 0, \quad (4.37)$$

а оценка эмпирической дисперсии единицы веса получается по формуле

$$\mu^2 = \frac{v_1^T v_1}{r}. \quad (4.38)$$

Учитывая (4.8), (4.10), (4.26) и (4.35), можем преобразовать равенства (4.36) – (4.38) следующим образом:

$$m_{\phi}^2 = \mu^2 (B^T q + f)^T p^{-\frac{1}{2}} R_L p^{-\frac{1}{2}} (B^T q + f), \quad (4.39)$$

$$B p^{-\frac{1}{2}} R_L p^{-\frac{1}{2}} B^T q + B p^{-\frac{1}{2}} R_L p^{-\frac{1}{2}} f = 0, \quad (4.40)$$

$$\mu^2 = \frac{v_1^T p^{-\frac{1}{2}} R_L^{-1} p^{-\frac{1}{2}} v_1}{r}. \quad (4.41)$$

Ясно, что формулой (4.41) можно воспользоваться лишь в случае, когда матрица R_L обращена. Чтобы избежать этого неудобства, преобразуем формулу.

Умножив обе части равенства (4.28) слева на v_1^T и учитывая (4.25), приходим к равенству

$$v_1^T v_1 = -w^T k,$$

с помощью которого формуле (4.38) придаем вид

$$\mu^2 = -\frac{w^T k}{r}, \quad (4.42)$$

который и будет желаемым представлением формулы (4.41), так как вектор невязок легко вычисляется по формуле (4.21).

В результате всего сказанного можем сформулировать следующую теорему.

4.1.3. Вспомогательная теорема обобщенного метода наименьших квадратов

Если: 1) N -мерный вектор T^m результатов измерений, вводимых в уравнение коррелятным методом условных измерений, имеет как угодно зависимые составляющие, свободные от систематических ошибок, т.е. соблюдается условие (4.1); 2) известна матрица R_L коэффициентов корреляции этого вектора и его p – диагональная матрица весов; 3) заданы условные уравнения (4.20) и функция (4.32), то удовлетворяющая принципу наибольшего веса оценка последней будет (4.31), где вектор x находится последовательным применением формул (4.22), (4.29), (4.30).

При этом несмещенная оценка дисперсии оценки (4.31) может быть найдена последовательным применением формул (4.42), (4.40) и (4.39).

В этом методе уравнения может быть предложен следующий порядок вычислений, который изложим применительно к уравнению опорных геодезических сетей [36].

1. На основании схемы опорной сети, на которой указаны, какие элементы ее измерены, составляются условные уравнения (4.20).

2. Подсчитываются невязки условных уравнений (4.21).

3. По заданным матрицам p и R_L вычисляется вспомогательная матрица

$$R_p = p^{-\frac{1}{2}} R_L p^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Составляются и решаются нормальные уравнения коррелат (4.29), которые с помощью матрицы R_p представляют в виде $BR_p V^T k + w = 0$.

При этом, как промежуточный результат, отдельно фиксируется матрица $R_p V^T$.

5. Вычисляются в соответствии с (4.30) поправки и уравненные значения (4.22) результатов измерений.

6. По уравненным значениям результатов измерений обычным порядком вычисляются необходимые элементы уравняемой опорной сети: дирекционные углы сторон, координаты пунктов и т.п. На этом решение задачи уравнения заканчивается.

7. Для решения задачи апостериорной оценки точности одновременно с составлением условных уравнений выбираются элементы сети, подлежащие оценке точности, и для них составляются функции типа (4.32). Если выбранные элементы сети выражаются через составляющие вектора T^m нелинейно, то предварительно производится известным образом линеаризация соответствующих функций.

8. Попутно с составлением нормальных уравнений коррелят составляются и решаются уравнения (4.40)

$$BR, B^1q + BR_p f = 0.$$

Число таких систем уравнений равно числу элементов сети, подлежащих оценке точности.

9. По формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{w^1 k}{r}}$$

вычисляется эмпирическая средняя квадратическая оценка единицы веса. Оценка ее надежности может быть осуществлена по приближенной формуле

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2r}}.$$

10. Наконец, по формуле

$$m_r = \mu \sqrt{(B^1 q + f)^T R_p (B^1 q + f)}$$

производится оценка точности уравновешенных значений выбранных элементов сети.

Числовой пример на уравновешивание зависимых результатов измерений методом условных измерений можно найти в [20].

Основная и вспомогательная теоремы обобщенного метода наименьших квадратов касаются лишь уравнивания классическими методами. Однако не составляет существенного труда получить соответствующие теоретические факты и для других методов уравнивания, например, параметрический способ с дополнительными условиями, связанный условиями, и т.д. Однако принципиально новых научных положений при этом получено не будет, так как все эти методы уравнивания путем чисто алгебраических преобразований могут быть сведены к двум методам, разобранным выше.

Таково обоснование обобщенного метода наименьших квадратов на принципе наибольшего веса. Можно получить обоснование обобщенного метода наименьших квадратов на принципе максимального правдоподобия, считая результаты измерений нормально распределенными. Для этого может быть использован прием, предложенный в [40].

Исследования показали, что изложенные выше теоремы позволяют дать теоретический фундамент к обобщенному методу L_p -оценок, в котором используются степени n (при $n = 2.0$, – обобщенный МНК; при $n = 1.0$, – обобщенный метод наименьших модулей, который ещё не рассматривался в научной литературе).

Практические приложения обобщенного метода Лр-оценок не могут быть применены без доказательств соответствующих теорем. Эти теоремы будут логическим продолжением сделанных выше доказательств по их практическому применению. Последнее наиболее эффективно при обработке зависимых результатов измерений в относительном методе спутниковых GPS / ГЛОНАСС-технологий.

4.2. Вывод формул для обобщенного уравнивания по методу Лр-оценок

Метод Лр-оценок принадлежит к группе методов уравнивания. Различают коррелятный и параметрический способы уравнивания. В данном разделе мы уделим внимание параметрическому способу уравнивания. Если уравнивание выполняется средствами линейной алгебры, то методы называются линейными. В противном случае – нелинейные, использующие алгоритмы решения систем нелинейных уравнений методами нелинейного программирования.

Для раскрытия цели работы обратимся к основному критерию метода наименьших квадратов

$$V^T P V \rightarrow \min, \quad (4.43)$$

где $V_{N \times 1}$ – вектор поправок в результаты измерений; $P_{N \times N}$ – диагональная матрица весов измерений, число которых равно N .

Компоненты вектора V являются числами, не подлежащими дифференцированию, т.к. производная скаляра равна 0. Поэтому при решении задач уравнивания методом итерации переходят от условия (4.43) к критериальной функции

$$\Phi(X) = L^T(X) \cdot P \cdot L(X), \quad (4.44)$$

где $X_{m \times 1}$ – вектор координат определяемых пунктов при числе параметров t ; $L(X)$ – вектор свободных членов в общем случае нелинейных параметрических уравнений, записываемых в виде

$$L(X) = \varphi(X) - T = T^{\text{ном}} - T^{\text{зам}}, \quad (4.45)$$

в котором $\varphi(X)$ – функция координат, а $T_{N \times 1}$ – вектор результатов измерений. Если достигнут минимум целевой функции (4.44), то вектор X обозначают \hat{X} – оценки параметров, для которых справедливо равенство

$$V = L(\hat{X}) = \varphi(\hat{X}) - T = T^{\text{ном}} - T^{\text{зам}}, \quad (4.46)$$

Минимизацию функции (4.44) выгодно осуществлять методами нелинейного программирования, записывая её следующим образом

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i L_i^2(X). \quad (4.47)$$

Здесь свободный член берётся в квадрате, поэтому метод назван методом наименьших квадратов (МНК). Если вместо цифры 2 подставить n , получим

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_w |L_i(X)|^n, \quad (4.48)$$

где при $n = 2$ – МНК; $n = 1$ – метод наименьших модулей (МНМ); $n = 3$ – метод наименьших кубов и т.д.

Минимизация функции (4.48) соответствует методу L_p-оценок (метод наименьших степеней), сохраняющих робастные ($1 \leq n \leq 2$) и обеспечивающие в определённом смысле оптимальные свойства оценок. Этот метод основан на минимизации n -ных степеней остаточных уклонений $\sum_{i=1}^N P_w |L_i(X)|^n = \sum_{i=1}^N P_w |v_i|^n$ и обладает свойствами робастного уравнивания [47]. Полученные же оценки совпадают с оценками методами максимального правдоподобия при распределении с плотностью

$$f = \frac{c_n}{2\Delta_n} \exp\left(-\frac{1}{n} \left|\frac{T - T_0}{\Delta_n}\right|^n\right), \quad n \geq 1,$$

параметры T_0 , c_n , Δ_n и n устанавливаются из предварительного анализа результатов измерения

По аналогии перехода от целевой функции (4.47) к критериальной (4.44) для функции (4.48) запишем

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|_{\vec{L}}^n \right)^T \cdot P_n \cdot |L(X)|_{\vec{L}}^n, \quad (4.49)$$

где P_n – диагональная матрица весов измерений для различных n .

Формула (4.49) реализует необобщённый метод L_p-оценок, т.к. P_n – диагональная неполная матрица. Для полной корреляционной матрицы K вместо (4.49) имеем

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|_{\vec{L}}^n \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |L(X)|_{\vec{L}}^n. \quad (4.50)$$

Цель исследования – перейти от нелинейного варианта L_p-оценок к линейному для целевых функций (4.49) и (4.50), реализующих необобщённый (классический) и обобщённый методы уравнивания.

4.2.1. Минимизация целевых функций по методу Ньютона

Алгоритм минимизации целевых функций по методу Ньютона предусматривает итерационный процесс [89].

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - H^{-1}(X^{(j)}) \nabla \Phi(X^{(j)}), \quad (4.51)$$

где $X^{(j)}$ – вектор неизвестных в j -том приближении;

$$H(X^{(j)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

– матрица Гессе вторых частных производных, взятых в точках $X^{(j)}$, а градиент целевой функции имеет вид

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Если частные производные, входящие в (4.52) и (4.53), вычислять численно, то метод называется нелинейным, а если вторые производные целевой функции брать аналитически, то метод будет линейризованный, т.е. такой, когда используются методы линейной алгебры.

4.2.2. Аналитический контроль формул классического (необобщённого) метода Лр-оценок

Авторы R. Fletcher, J.A. Grant, M.D. Hebden [95] на основе метода Ньютона для целевой функции (4.49) получили следующие замкнутые аналитические формулы для матриц H и $\nabla \Phi(X)$ в случае неравноточных измерений:

$$\nabla \Phi(X) = n \cdot A^T \cdot C \cdot L(X); \quad (4.54)$$

$$H(X) = n(n-1)A^T C A, \quad (4.55)$$

что привело к равенствам [48, 65]

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - \frac{1}{n-1} (A^T C A)^{-1} A^T C L(X^{(j)}), \quad (4.56)$$

где

$$C = P \left(\text{diag} \left\{ L(X^{(i)})^{n-2} \right\} \right). \quad (4.57)$$

Методом дифференцирования целевой функции (4.49) для матрицы $\nabla \Phi(X)$ получим

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} & |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} & |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} \\ |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} \\ |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P_1 |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} & P_2 |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} & P_3 |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} \\ |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} \\ |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{т.о. } \Phi(X) = P_1 |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} + P_2 |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} + P_3 |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}}$$

Первая частная производная целевой функции (4.49) будет такой

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_i} &= \frac{n}{2} \cdot a_{i1} \cdot P_1 \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ \frac{n}{2} \cdot a_{i1} \cdot P_1 \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} + \\ &+ \frac{n}{2} \cdot a_{i2} \cdot P_2 \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ \frac{n}{2} \cdot a_{i2} \cdot P_2 \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} + \\ &+ \frac{n}{2} \cdot a_{i3} \cdot P_3 \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ \frac{n}{2} \cdot a_{i3} \cdot P_3 \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} = \\ &= n \cdot a_{i1} \cdot P_1 \cdot S_1 \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{i2} \cdot P_2 \cdot S_2 \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{i3} \cdot P_3 \cdot S_3 \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} &= \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot P_1 \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} + \\
 &+ \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot P_1 \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
 &+ \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot P_2 \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} + \\
 &+ \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot P_2 \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
 &+ \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot P_3 \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} + \\
 &+ \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot P_3 \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} = \\
 &= n \cdot a_{12} \cdot P_1 \cdot S_1 \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{22} \cdot P_2 \cdot S_2 \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} + \\
 &+ n \cdot a_{32} \cdot P_3 \cdot S_3 \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}}
 \end{aligned}$$

Градиент целевой функции будет таким

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} n \cdot a_{11} \cdot P_1 \cdot S_1 \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot P_2 \cdot S_2 \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{31} \cdot P_3 \cdot S_3 \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} \\ n \cdot a_{12} \cdot P_1 \cdot S_1 \cdot |L_1(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{22} \cdot P_2 \cdot S_2 \cdot |L_2(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{32} \cdot P_3 \cdot S_3 \cdot |L_3(X)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

или

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} n \cdot a_{11} \cdot P_1 \cdot S_1 \cdot |L_1(X)|^{n-1} + n \cdot a_{21} \cdot P_2 \cdot S_2 \cdot |L_2(X)|^{n-1} + n \cdot a_{31} \cdot P_3 \cdot S_3 \cdot |L_3(X)|^{n-1} \\ n \cdot a_{12} \cdot P_1 \cdot S_1 \cdot |L_1(X)|^{n-1} + n \cdot a_{22} \cdot P_2 \cdot S_2 \cdot |L_2(X)|^{n-1} + n \cdot a_{32} \cdot P_3 \cdot S_3 \cdot |L_3(X)|^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{но } |L_1(X)|^{n-1} \cdot L_1(X) \cdot L_1^{-1}(X) = |L_1(X)|^{n-2} \cdot L_1(X)$$

Окончательно имеем

$$\nabla \Phi(X) = n \begin{pmatrix} a_{11} \cdot P_1 \cdot |L_1(X)|^{n-2} L_1(X) + a_{21} \cdot P_2 \cdot |L_2(X)|^{n-2} L_2(X) + a_{31} \cdot P_3 \cdot |L_3(X)|^{n-2} L_3(X) \\ a_{12} \cdot P_1 \cdot |L_1(X)|^{n-2} L_1(X) + a_{22} \cdot P_2 \cdot |L_2(X)|^{n-2} L_2(X) + a_{32} \cdot P_3 \cdot |L_3(X)|^{n-2} L_3(X) \end{pmatrix}$$

Продифференцировав $\nabla \Phi(X)$, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1^2} = n \cdot (n-1) \cdot (a_{11} \cdot a_{11} \cdot P_1 \cdot |L_1(X)|^{n-2} + a_{21} \cdot a_{21} \cdot P_2 \cdot |L_2(X)|^{n-2} + a_{31} \cdot a_{31} \cdot P_3 \cdot |L_3(X)|^{n-2})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = n \cdot (n-1) \cdot (a_{11} \cdot a_{12} \cdot P_1 \cdot |L_1(X)|^{n-2} + a_{21} \cdot a_{22} \cdot P_2 \cdot |L_2(X)|^{n-2} + a_{31} \cdot a_{32} \cdot P_3 \cdot |L_3(X)|^{n-2})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_2^2} = n \cdot (n-1) \cdot (a_{12} \cdot a_{12} \cdot P_1 \cdot |L_1(X)|^{n-2} + a_{22} \cdot a_{22} \cdot P_2 \cdot |L_2(X)|^{n-2} + a_{32} \cdot a_{32} \cdot P_3 \cdot |L_3(X)|^{n-2})$$

4.2.3. Анализ формул обобщённого метода Лр-оценок

Для обобщённого метода Лр-оценок можно записать как

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^2 \right)^T \cdot D \cdot |L(X)|^2, \text{ где } D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1N} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NN} \end{pmatrix}.$$

Для $N = 3$ имеем

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} |L_1(x_1, x_2)|^2 & |L_2(x_1, x_2)|^2 & |L_3(x_1, x_2)|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |L_1(x_1, x_2)|^2 \\ |L_2(x_1, x_2)|^2 \\ |L_3(x_1, x_2)|^2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} |L_1(x_1, x_2)|^2 & |L_2(x_1, x_2)|^2 & |L_3(x_1, x_2)|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_{11}|L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{12}|L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{13}|L_3(x_1, x_2)|^2 \\ D_{12}|L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{22}|L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{23}|L_3(x_1, x_2)|^2 \\ D_{13}|L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{23}|L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{33}|L_3(x_1, x_2)|^2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x_1, x_2) = |L_1(x_1, x_2)|^2 \left(D_{11}|L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{12}|L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{13}|L_3(x_1, x_2)|^2 \right) +$$

$$+ |L_2(x_1, x_2)|^2 \left(D_{12}|L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{22}|L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{23}|L_3(x_1, x_2)|^2 \right) +$$

$$+ |L_3(x_1, x_2)|^2 \left(D_{13}|L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{23}|L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{33}|L_3(x_1, x_2)|^2 \right)$$

$$\Phi(x_1, x_2) = D_{11}|L_1(x_1, x_2)|^2 |L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{12}|L_2(x_1, x_2)|^2 |L_1(x_1, x_2)|^2 + D_{13}|L_3(x_1, x_2)|^2 |L_1(x_1, x_2)|^2 +$$

$$+ D_{12}|L_1(x_1, x_2)|^2 |L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{22}|L_2(x_1, x_2)|^2 |L_2(x_1, x_2)|^2 + D_{23}|L_3(x_1, x_2)|^2 |L_2(x_1, x_2)|^2 +$$

$$+ D_{13}|L_1(x_1, x_2)|^2 |L_3(x_1, x_2)|^2 + D_{23}|L_2(x_1, x_2)|^2 |L_3(x_1, x_2)|^2 + D_{33}|L_3(x_1, x_2)|^2 |L_3(x_1, x_2)|^2$$

Найдём производные $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2}$ по правилу: $(uv)' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned}
\partial\Phi(X)/\partial x_1 &= & \partial\Phi(X)/\partial x_2 &= \\
&= n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &= n \cdot a_{12} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
&+ n \cdot a_{21} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{22} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + &+ n \cdot a_{12} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
&+ n \cdot a_{31} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + &+ n \cdot a_{12} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
&+ n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{22} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{31} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + &+ n \cdot a_{22} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} + \\
&+ n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} \\
\partial\Phi(X)/\partial x_1 &= & \partial\Phi(X)/\partial x_2 &= \\
&= n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &= n \cdot a_{12} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{12} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{12} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{21} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{22} \cdot D_{12} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{21} \cdot D_{13} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{22} \cdot D_{13} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{22} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{31} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{13} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{31} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{23} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\
&+ n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}-1} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\nabla\Phi(X) = n \cdot A_{n \times N}^T \cdot D_{N \times N} \cdot S_{N \times N} \cdot \left\{ \left[L(X) \right]_{N \times 1}^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left[L(X) \right]_{N \times N}^T \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

Продифференцировав градиент, найдём вторые частные производные для матрицы Гессе

$$\begin{aligned}
\partial\Phi^2(X)/\partial x_2^2 = & \\
= n \cdot a_{12} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\
+ n \cdot a_{12} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_2 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\
+ n \cdot a_{12} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_3 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\
+ n \cdot a_{22} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\
+ n \cdot a_{22} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_3 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\
+ n \cdot a_{12} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\
+ n \cdot a_{12} \cdot D_{23} \cdot S_1 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\
+ n \cdot a_{22} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot & \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

При участии доц. А.М. Дегтярёва были получены следующие формулы для целевой функции (4.50), в которой принято обозначение $D = K_n^{-1}$

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}, \quad (4.58)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[S \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (4.59)$$

где $S_{n \times n}$ – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали, умноженная на знак числа $L(X)$);

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}, \quad (4.60)$$

где знак \cdot означает поэлементное умножение матриц. Например, $A \times B = (a_{i,j} \cdot b_{i,j})$;

$$x = -H^{-1}G, \quad (4.61)$$

где H_{nn} – матрица Гессе (вторых частных производных от функции (4.49))

$$H = \frac{n(n-2)}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_1 A, \quad (4.62)$$

где Z_{nn} – матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и C_1 по формуле

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^N a_{k,i} \cdot a_{k,j} \cdot (C_1)_{k,r}. \quad (4.63)$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (4.61), вычисляется по формуле

$$G = n \cdot A^T \cdot C_1 \cdot I, \quad (4.64)$$

где

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times n};$$

Формулы (4.58) – (4.64) решают новую задачу обобщенного метода Лр-оценок.

4.3. Основные формулы для обобщенного многокритериального способа уравнивания

При разработке метода многокритериальной оптимизации применялись следующие целевые функции:

основная (4.50)

$$\Phi_i(X) = \left(|L_i(X)|^{\frac{1}{n_i}} \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |L_i(X)|^{\frac{1}{n_i}},$$

X – вектор координат определяемых пунктов;

$K_n = P_n^{-\frac{1}{2}} R P_n^{-\frac{1}{2}}$ – корреляционная матрица результатов измерений;

R – корреляционная матрица измерений;

$P_n = \frac{c}{\sigma_i^2}$ – веса результатов измерений;

n_i – показатель степени для каждого измерения;

$L(X)$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения;

дополнительные

$$\Phi_1(X, n) = \min(\max(M)), \quad (4.65)$$

где M – ошибка положения пункта;

$$\Phi_1(X, n) = \min(q \max M), \quad (4.66)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min\left(\sum_{j=1}^k q_j \max M_j\right), \quad (4.67)$$

где $q = 1 - p$ (уровень значимости), p – вероятность попадания в круг ошибок; K – количество определяемых пунктов;

$$\Phi_1(X, n) = \min\left(\max \frac{M}{p}\right), \quad (4.68)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min \sum_{j=1}^k \frac{M_j}{p_j}, \quad (4.69)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min(V_n^T P_n V_n), \quad (4.70)$$

где $P_n = \frac{c}{\sigma_i^2}$ – диагональная матрица с весами для МНК, V_n – вектор поправок в результаты измерений из уравнения; $\Phi_2(X, n) = \min(\max \sqrt{P_n} |V_n|)$.

Дополнительные целевые функции предназначены для определения показателей степени n , для каждого измерения методом проб и ошибок. Одно приближение предусматривает $3N(n, -0.1; n; n, +0.1)$ уравнительных вычислений, для которых $\Phi_2(X, n)$ будет минимальна. Количество приближений не превосходит 20. Приближения начинаются со всех значений $n_i = 2$.

Выведем формулы обобщенного многостепенного способа для случая $N = 3; t = 2$. В этом случае целевая функция (4.50) будет иметь вид

$$\Phi_{N=3}(X) = \begin{pmatrix} |L_1(X)|^{\frac{2}{t}} & |L_2(X)|^{\frac{2}{t}} & |L_3(X)|^{\frac{2}{t}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |L_1(X)|^{\frac{2}{t}} \\ |L_2(X)|^{\frac{2}{t}} \\ |L_3(X)|^{\frac{2}{t}} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

т.о.

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} K_{11}|L_1(X)|^{\frac{2}{t}} + K_{21}|L_2(X)|^{\frac{2}{t}} + K_{31}|L_3(X)|^{\frac{2}{t}} \\ K_{12}|L_1(X)|^{\frac{2}{t}} + K_{22}|L_2(X)|^{\frac{2}{t}} + K_{32}|L_3(X)|^{\frac{2}{t}} \\ K_{13}|L_1(X)|^{\frac{2}{t}} + K_{23}|L_2(X)|^{\frac{2}{t}} + K_{33}|L_3(X)|^{\frac{2}{t}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} |L_1(X)|^{\frac{2}{t}} \\ |L_2(X)|^{\frac{2}{t}} \\ |L_3(X)|^{\frac{2}{t}} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(X) = \left(\begin{aligned} &K_{11}|L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}}|L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + K_{21}|L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}}|L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + K_{31}|L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}}|L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \\ &+ K_{12}|L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}}|L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + K_{22}|L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}}|L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + K_{32}|L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}}|L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + \\ &+ K_{13}|L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}}|L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} + K_{23}|L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}}|L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} + K_{33}|L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}}|L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} \end{aligned} \right) \quad (4.72)$$

Продифференцировав функцию (4.71), найдём первые частные производные для градиента

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1} = &\frac{n_1}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \frac{n_1}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_2}{2} \cdot a_{21} \cdot K_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_3}{2} \cdot a_{31} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_2}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{12} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{21} \cdot K_{12} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_2}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{21} \cdot K_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_3}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{32} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{21} \cdot K_{32} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_3}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{13} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{31} \cdot K_{13} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_3}{2} \cdot a_{21} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{31} \cdot K_{21} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} + \\ &+ \frac{n_3}{2} \cdot a_{11} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{31} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} \end{aligned}$$

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1} = &n_1 \cdot a_{11} \cdot K_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \\ &+ n_2 \cdot a_{11} \cdot K_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} + \\ &+ n_3 \cdot a_{11} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}-1} + \\ &+ n_2 \cdot a_{21} \cdot K_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \\ &+ n_2 \cdot a_{21} \cdot K_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + \\ &+ n_2 \cdot a_{21} \cdot K_{32} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}-1} + \\ &+ n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \\ &+ n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{32} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} + \\ &+ n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}-1} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} = & n_1 \cdot a_{12} \cdot K_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-2}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} + \\
 & + n_1 \cdot a_{12} \cdot K_{21} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_1}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1-2}{2}} + \\
 & + n_1 \cdot a_{12} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_1}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_1-2}{2}} + \\
 & + n_2 \cdot a_{22} \cdot K_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-2}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_2}{2}} + \\
 & + n_2 \cdot a_{22} \cdot K_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-2}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n_2}{2}} + \\
 & + n_2 \cdot a_{22} \cdot K_{32} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_2}{2}} |L_2(X)|^{\frac{n_2-2}{2}} + \\
 & + n_3 \cdot a_{32} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3-2}{2}} |L_1(X)|^{\frac{n_3}{2}} + \\
 & + n_3 \cdot a_{32} \cdot K_{23} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_3}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n_3-2}{2}} + \\
 & + n_3 \cdot a_{32} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_3-2}{2}} |L_3(X)|^{\frac{n_3}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Градиент целевой функции будет таким

$$\nabla \Phi(X) = A^T K_n^{-1} \cdot \text{diag}(S_i, n_i) \cdot \left\{ |L_1(X)|^{\frac{n_1-2}{2}} \cdot \left[|L_1(X)|^{\frac{n_1}{2}} \right]^T \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}. \tag{4.75}$$

Найдём вторые частные производные, продифференцировав формулы (4.73) и (4.74) по правилу $(uv)' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi^2(X)}{\partial x^2} = & n_1 \cdot a_{11} \cdot K_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot \left[\frac{n_1 - 2}{2} \cdot a_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \right] + \\
& + n_1 \cdot a_{11} \cdot K_{12} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot \left[\frac{n_1 - 2}{2} \cdot a_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \cdot |L_2(X)|^{n_2} + \frac{n_1}{2} \cdot a_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{n_2} \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \right] + \\
& + n_1 \cdot a_{11} \cdot K_{13} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot \left[\frac{n_1 - 2}{2} \cdot a_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \cdot |L_3(X)|^{n_3} + \frac{n_1}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3} \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \right] + \\
& + n_2 \cdot a_{21} \cdot K_{12} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot \left[\frac{n_2 - 2}{2} \cdot a_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{n_2 - 2} \cdot |L_1(X)|^{n_1} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \cdot |L_2(X)|^{n_2 - 2} \right] + \\
& + n_2 \cdot a_{21} \cdot K_{23} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot \left[\frac{n_2 - 2}{2} \cdot a_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{n_2 - 2} \cdot |L_3(X)|^{n_3} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3} \cdot |L_2(X)|^{n_2 - 2} \right] + \\
& + n_2 \cdot a_{21} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot \left[\frac{n_2 - 2}{2} \cdot a_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{n_2 - 2} \cdot |L_3(X)|^{n_3} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3} \cdot |L_2(X)|^{n_2 - 2} \right] + \\
& + n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{13} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot \left[\frac{n_3 - 2}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \cdot |L_1(X)|^{n_1} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{n_1 - 2} \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \right] + \\
& + n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot \left[\frac{n_3 - 2}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \cdot |L_3(X)|^{n_3} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3} \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \right] + \\
& + n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot \left[\frac{n_3 - 2}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \cdot |L_2(X)|^{n_2} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{n_2} \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \right] + \\
& + n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{33} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot \left[\frac{n_3 - 2}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \cdot |L_2(X)|^{n_2} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{21} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{n_2} \cdot |L_3(X)|^{n_3 - 2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^2(X)}{\partial x_1^2} = & n_1 \cdot a_{11} \cdot K_{11} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot \left[\frac{n_1 - 2}{2} \cdot a_{12} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-2}{2}} + \frac{n_1}{2} \cdot a_{12} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-1}{2}} \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-1}{2}} \right] + \\
& + n_1 \cdot a_{12} \cdot K_{12} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot \left[\frac{n_1 - 2}{2} \cdot a_{12} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-2}{2}} + \frac{n_1}{2} \cdot a_{12} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-1}{2}} \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-1}{2}} \right] + \\
& + n_1 \cdot a_{13} \cdot K_{13} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot \left[\frac{n_1 - 2}{2} \cdot a_{13} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-2}{2}} + \frac{n_1}{2} \cdot a_{13} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-1}{2}} \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_1-1}{2}} \right] + \\
& + n_1 \cdot a_{22} \cdot K_{12} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot \left[\frac{n_2 - 2}{2} \cdot a_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-2}{2}} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \right] + \\
& + n_1 \cdot a_{23} \cdot K_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot \left[\frac{n_2 - 2}{2} \cdot a_{23} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-2}{2}} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{23} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \right] + \\
& + n_2 \cdot a_{22} \cdot K_{23} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot \left[\frac{n_2 - 2}{2} \cdot a_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-2}{2}} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{22} \cdot \text{Sign}(L_2(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \right] + \\
& + n_2 \cdot a_{23} \cdot K_{13} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot \left[\frac{n_2 - 2}{2} \cdot a_{23} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_2-2}{2}} + \frac{n_2}{2} \cdot a_{23} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \cdot |L_3(X)|^{\frac{n_2-1}{2}} \right] + \\
& + n_3 \cdot a_{31} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot \left[\frac{n_3 - 2}{2} \cdot a_{32} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_3-2}{2}} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{32} \cdot \text{Sign}(L_1(X)) \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_3-1}{2}} \cdot |L_2(X)|^{\frac{n_3-1}{2}} \right] + \\
& + n_3 \cdot a_{32} \cdot K_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot \left[\frac{n_3 - 2}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_3-2}{2}} + \frac{n_3}{2} \cdot a_{31} \cdot \text{Sign}(L_3(X)) \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_3-1}{2}} \cdot |L_1(X)|^{\frac{n_3-1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

Ориентируясь на формулы для частного примера, в общем случае будем иметь

$$H = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ki} a_{ij} \cdot (C_1)_{ij} + A^T C_2 A; \quad (4.76)$$

$$G = A^T C_1 I; \quad (4.77)$$

$$F = H^{-1} A^T C_2, \quad (4.78)$$

где

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \times \text{diag} \left(\frac{n_i |n_i - 2|}{2} \right) \cdot \left\{ \left[L_i(X) \right]^{\frac{n_i-4}{2}} \cdot \left[L_i(X) \right]^{\frac{n_i}{2}} \right\}^T; \quad (4.79)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot \times \text{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ \left[L_i(X) \right]^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[\text{diag}(S_i \cdot \frac{n_i}{2}) \cdot \left[L_i(X) \right]^{\frac{n_i-2}{2}} \right]^T \right\}; \quad (4.80)$$

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot \times \text{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ \left[L_i(X) \right]^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[L_i(X) \right]^{\frac{n_i}{2}} \right\}^T, \quad (4.81)$$

где $i = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$ $\cdot \times$ – знак поэлементного умножения матриц.

Формулы (4.76) – (4.81) позволяют выполнять уравнивание линейным и обобщенным многокритериальным методом.

Ниже приведем результаты уравнивания двух геодезических сетей:

- геодезический четырехугольник с исходными данными, приведенными в [53];
- линейно-угловая триангуляция из [79].

Обработка первой сети:

Таблица 4.1

Уравнивание по МНК по направлениям

№ измерения	P_i	n_i	V_i'
1	0,04	2,0	4,22
2	0,04	2,0	1,16
3	0,04	2,0	-1,85
4	0,04	2,0	14,50
5	0,04	2,0	-14,71
6	0,04	2,0	23,14
7	0,04	2,0	-12,88
8	0,04	2,0	16,43

$\mu = 5,140$

$M_1 = 0,065 \text{ м}$

$M_2 = 0,137 \text{ м}$

Таблица 4.2

Минимизация целевых функций (4.50) и (4.65) по направлениям

№ измерения	P_i	n_i	V_i'
1	0,0053	3,26	-0,24
2	0,0394	2,01	1,50
3	0,1676	1,11	0,50
4	0,0239	2,32	20,60
5	0,0019	3,90	-9,35
6	0,0096	2,89	19,14
7	0,0162	2,56	-14,86
8	0,0324	2,13	12,71

 $\mu = 3,081$ $M_1 = 0,0052 \text{ м}$ $M_2 = 0,0057 \text{ м}$

Таблица 4.3

Минимизация целевых функций (4.50) и (4.70) по направлениям

№ измерения	P_i	n_i	V_i'
1	0,007	3,10	-1,02
2	0,040	2,00	-0,01
3	0,007	3,10	0,51
4	0,040	2,00	21,78
5	0,007	3,10	-8,95
6	0,040	2,00	18,72
7	0,007	3,10	-13,76
8	0,040	2,00	12,71

 $\mu = 3,960$ $M_1 = 0,056 \text{ м}$ $M_2 = 0,149 \text{ м}$

Таблица 4.4

Минимизация целевых функций (4.50) и (4.71) по направлениям

№ измерения	P_i	n_i	V_i'
1	0,011	2,80	2,02
2	0,008	3,00	0,67
3	0,034	2,10	1,10
4	0,011	2,80	19,25
5	0,029	2,20	-11,69
6	0,013	2,70	17,62
7	0,009	2,90	-14,94
8	0,018	2,50	15,97

 $\mu = 2,890$ $M_1 = 0,048 \text{ м}$ $M_2 = 0,058 \text{ м}$

По данным табл. 4.1 – 4.4 можно сделать следующие выводы:

1. Результаты табл. 4.1 и 4.3 близки между собой, что подтверждает соответствие результатов теореме Гаусса – Маркова.
2. Целевые функции (4.50) и (4.65) дают наилучший результат при сравнении M_1 и M_2 с другими таблицами.
3. Векторы V_i в табл. 4.2 и 4.4 практически идентичны, что говорит в пользу минимизации целевых функций (4.50) и (4.65).

Обработка второй сети:

Сравнивая 21 поправку в измерения убеждаемся в том, что целевые функции (4.50) и (4.70) дают одинаковый результат с МНК, отвечающий теореме Гаусса – Маркова, величины V_i для целевых функций (4.50) и (4.71) минимальны. Остальные результаты приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Результаты многокритериальной оптимизации

Целевая функция	μ	$M_1, м$	$M_2, м$	$M_3, м$
МНК	1,470	0,0053	0,0086	0,0067
(4.50) и (4.65)	1,744	0,0018	0,0024	0,0024
(4.50) и (4.70)	1,931	0,0029	0,0047	0,0032
(4.50) и (4.71)	1,640	0,0220	0,0386	0,0238

По данным табл. 4.5 видно, что наилучший результат дают целевые функции (4.50) и (4.71), а наихудший – функции (4.50) и (4.71). Поэтому для многокритериальной оптимизации следует брать дополнительную целевую функцию (4.65).

Решим пример по уравниванию геодезического четырёхугольника методом многостепенной (многокритериальной) оптимизации, добавляя к целевой функции (4.50) целевую функцию (4.65).

Для исходных данных, опубликованных в [69], получим результаты уравнивания, сведенные в табл. 4.6, в которой каждая из 7 колонок отражает следующие алгоритмы многокритериальной оптимизации:

- 1) нелинейное уравнивание четырёхугольника по углам без применения корреляционной матрицы;
- 2) линеаризованное уравнивание четырёхугольника по углам без применения корреляционной матрицы;
- 3) нелинейное уравнивание по направлениям с использованием замыкания горизонта;
- 4) линейное уравнивание по направлениям с использованием замыкания горизонта;

5) нелинейное уравнивание по направлениям с использованием корреляционной матрицы K_p путём минимизации функции (4.50) с привлечением функции (4.65);

6) линейное уравнивание по направлениям с использованием формул (4.76) – (4.81);

7) линейное коррелятное уравнивание с замыканием горизонта.

Таблица 4.6

Результаты многокритериальной оптимизации

Обозн.	1	2	3	4	5	6	7							
x_c	1249,900	1249,907	1249,901	1249,919	1249,864	1249,890	1249,925							
y_c	1230,093	1230,079	1230,085	1230,077	1230,096	1230,078	1230,065							
x_0	99,963	99,958	99,934	99,931	99,977	99,968	99,938							
y_0	499,962	499,967	499,989	499,988	499,930	499,959	499,991							
μ	4,44	4,64	3,78	3,97	3,39	3,08	3,68							
M_c	0,109	0,098	0,072	0,068	0,03	0,005	0,066							
M_0	0,145	0,123	0,101	0,105	0,03	0,006	0,066							
$n_1; V_1$	2,23	-10,6	2,10	-12,2	2,21	-11,1	2,00	-14,5	1,66	-4,1	3,90	-9,4	2,39	-15,9
$n_2; V_2$	2,14	13,1	2,08	13,9	2,12	17,1	2,00	17,0	2,02	8,8	2,13	12,7	2,37	17,4
$n_3; V_3$	2,50	-10,7	2,22	-12,1	2,10	-15,6	2,20	-12,4	2,02	-14,6	2,56	-14,9	2,59	-13,4
$n_4; V_4$	1,70	-1,8	1,53	0,5	1,20	-0,4	1,20	0,0	1,15	-0,1	2,01	1,5	1,11	2,0
$n_5; V_5$	1,40	-1,9	1,58	0	2,00	4,6	1,80	3,8	1,74	-3,8	3,26	-0,2	1,17	4,4
$n_6; V_6$	2,20	21,4	2,22	18,7	2,20	18,3	2,20	15,7	2,02	25,5	2,32	20,6	2,82	14,1
$n_7; V_7$	1,30	0,2	1,20	0,1	1,20	-1,0	1,60	-1,3	1,55	-0,1	1,11	0,5	1,11	-0,5
$n_8; V_8$	2,17	20,2	2,10	21,3	2,30	18,0	2,10	21,8	2,06	18,4	2,89	19,1	2,45	22,2

По результатам вычислений можно сделать следующие выводы:

1. Данные колонки 5 расходятся с результатами вычислений в других колонках, потому что нелинейный метод с использованием корреляционной матрицы неустойчив и, как показали расчёты, даёт разные результаты при неодинаковых значениях шага численного дифференцирования.

2. Данные колонок 1 и 2 близки по значениям.

3. Данные колонок 3, 4 и 7 с применением углов, замыкающих горизонт, и коррелятного способа уравнивания при $P = K^{-1} = E$ так же мало отличаются друг от друга.

5. ПРАКТИЧЕСКАЯ АПРОБАЦИЯ НОВОГО МЕТОДА Lp-ОЦЕНОК

5.1. Нелинейный обобщённый метод Ньютона

Для реализации нелинейных методов уравнивания применяют алгоритмы нелинейного программирования для минимизации целевой функции [36, 69]

$$\Phi(X) = \left(\|L(X)\|_1^2 \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot \|L(X)\|_1^2, \quad (5.1)$$

где $K_n = P_n^{-1} R P_n^{-1}$, R – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, а внедиагональные числа равны коэффициентам корреляции.

Алгоритм минимизации этой целевой функции по методу Ньютона предусматривает итерационный процесс [89]

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - H^{-1}(X^{(j)}) \nabla \Phi(X^{(j)}), \quad (5.2)$$

где $X^{(j)}$ – вектор неизвестных в j -том приближении;

$$H(X^{(j)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

– матрица Гессе вторых частных производных, взятых в точке $X^{(j)}$, а градиент целевой функции выражается вектором

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Квадратичные и смешанные вторые, а также первые частные производные находятся по следующим наилучшим из 16 формул выражениям:

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1} = \frac{1}{128^2} (-\Phi_{25,0} + 16\Phi_{8,0} - 30\Phi_{0,0} + 16\Phi_{-8,0} - \Phi_{-28,0}), \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{48^2} (\Phi_{8,8} - \Phi_{8,-8} - \Phi_{-8,8} + \Phi_{-8,-8}), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_i} = \frac{1}{12\delta} (-\Phi_{2\delta,0} + 8\Phi_{\delta,0} - 8\Phi_{-\delta,0} + \Phi_{-2\delta,0}), \quad (5.7)$$

где $\Phi_{a,b\delta} = \Phi(x_i + a\delta, x_j + b\delta)$ – значения целевой функции, возмущённые малым приращением координат. Причём $\Phi_{0,0} = \Phi(X^{(j)})$. Специальные исследования на различных объектах показали, что малый шаг δ будет оптимальным, если использовать выражение

$$\delta = 10^{\left(\frac{\sqrt{|4+10^{-\frac{2}{3}} \cdot n}}{3} \right)}, \quad (5.8)$$

где m – количество знаков в разрядной сетке представления координат x (в расчётах брали двойную точность, $m = 16$). Формулы (5.5) и (5.7) замечательны тем, что с их применением в вычислениях участвуют одни и те же значения целевой функции $\Phi_{a\delta,0}$.

Исследования показали, что начальные координаты определяемых пунктов $X^{(0)}$ при использовании метода Ньютона должны быть близки к вектору \hat{X} . Разность $|X^{(0)} - \hat{X}|$ не должна превышать 10 м для геодезических сетей II класса и 2 м – для сетей I – 2 разряда.

Обычно нелинейные методы применяют в тех случаях, когда при сложных целевых функциях не удаётся свести задачу к линейному виду. Для зависимых результатов измерений формулы обобщённого метода Лр-оценок в линейном случае разработаны и опубликованы в [36]. Для этого используются следующие формулы

$$x = X^{(j+1)} - X^{(j)} = -H^{-1}G \quad (5.9)$$

где $H_{n \times n}$ – матрица Гессе (вторых частных производных), для которой

$$H = \frac{n(n-2)}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_2 A, \quad (5.10)$$

где n – показатель степени; $Z_{n \times n}$ – матрица, элементы которой вычисляются с использованием $A_{N \times n}$ – матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок.

Матрица для градиента, входящего в (5.9), вычисляется по формуле

$$G = n \cdot A^T \cdot C_3 \cdot l, \quad (5.11)$$

где $l_{N \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N \times 1}$;

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K_n^{-1} V}{N-l}}, \quad (5.12)$$

где

$$V = Ax + L(X). \quad (5.13)$$

Матрицу обратных весов вычисляют по формуле

$$Q = FK_n F^T, \quad (5.14)$$

где расширенная псевдообратная матрица

$$F = H^{-1} A^T C_2. \quad (5.15)$$

В формулах (5.11) – (5.15) в общем случае недиагональные матрицы размером $n \times n$ будут такими

$$C_1 = K_n^{-1} \times \left\{ \left[L(X) \right]^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[L(X) \right]^n \right\}^T, \quad (5.16)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \times S \cdot \left\{ \left[L(X) \right]^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[S \cdot \left[L(X) \right]^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (5.17)$$

где $S_{n \times n}$ – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали со знаком числа $L(X)$);

$$C_3 = K_n^{-1} \times S \cdot \left\{ \left[L(X) \right]^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[L(X) \right]^n \right\}^T, \quad (5.18)$$

В формулах (5.11) – (5.13) знак \cdot означает поэлементное умножение матриц. Например, $A \cdot B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$.

Приведём пример уравнивания геодезического четырехугольника с результатами измерений, представленными в табл. 5.1 [53].

В табл. 5.2. приведены результаты уравнивания по направлениям, при составлении уравнения поправок для углов и использовании матрицы K_n . При этом в колонках 1, 3, 5 даны результаты уравнивания по нелинейному методу Ньютона, а в колонках 2, 4, 6 – с использованием формул (5.13) – (5.18).

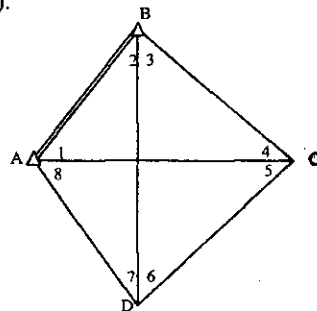


Рис.5.1. Геодезический четырёхугольник

Таблица 5.1
Измеренные углы

Номер угла	Величина угла
1	37°58'22"
2	39 18 30
3	61 01 37
4	41 41 41
5	50 01 55
6	27 14 40
7	26 57 40
8	75 45 05

Координаты исходных пунктов: $x_A = 1100,00$ м; $y_A = 100,00$ м;
 $x_B = 1650,00$ м; $y_B = 640,00$ м; предварительные координаты определяемых
пунктов: $x_C = 1250$ м; $y_C = 1230$ м; $x_D = 100$ м; $y_D = 500$ м.

Таблица 5.2

Уравнивание геодезического четырёхугольника при $n = 1,5$, $n = 2,0$, $n = 2,5$

Обозн.	$n = 1,5$		$n = 2,0$		$n = 2,5$	
	1	2	3	4	5	6
x_C	1249,932	1249,843	1249,849	1249,919	1249,876	1249,918
y_C	1230,103	1230,103	1230,104	1230,071	1230,090	1230,058
x_D	99,929	99,973	100,003	99,926	99,972	99,958
y_D	500,005	499,930	499,914	499,983	499,941	499,982
μ	8,38	6,88	3,83	5,17	2,16	3,42
M_C	1,088	0,042	0,116	0,065	0,142	0,027
M_D	0,161	0,093	0,173	0,137	0,194	0,041
V_1	-18,9	-0,3	0,7	-14,7	-6,5	-14,7
V_2	12,1	8,8	6,7	16,4	10,3	15,8
V_3	-8,6	-18,3	-14,7	-12,8	-14,1	-15,0
V_4	5,5	-0,2	-2,7	1,1	0,3	3,7
V_5	-2,0	-2,3	1,6	4,2	-2,6	3,1
V_6	30,2	27,8	22,8	14,5	23,4	15,1
V_7	23,2	-0,4	-10	-1,8	0	0,7
V_8	6,7	14,9	25,6	23,2	19,2	21,0
δ	0,01 м		0,01 м		0,01 м	

По данным табл. 5.2 можно сделать следующие выводы:

1. Нелинейные методы уравнивания в случае применения зависимых величин оказались неустойчивыми к выбору шага численного дифференцирования (см. колонки 1, 3, 5 табл. 5.2).

2. Расхождение координат в нелинейных методах по сравнению с линейными составило более 7 см.

Методы решения систем нелинейных параметрических уравнений широко используются при решении различных геодезических засечек на плоскости, эллипсоиде и в пространстве. Преимущества этих методов в том, что они позволяют обрабатывать любые геодезические сети, используя только результаты измерений и координаты исходных пунктов. Начальные координаты определяемых пунктов для метода релаксации можно находить как средние арифметические из известных координат исходных пунктов [70]. При обработке геодезических сетей координаты пунктов находят методом последовательной вставки точек, используя избыточные измерения для поиска грубых промахов в информации и в измерениях. В отличие от метода Ньютона, обладающего малой областью сходимости, метод релаксации за ограниченный промежуток времени может находить

координаты пунктов с любой точностью, не опасаясь того, что в окрестности минимума градиентные методы (Коши, Ньютона) могут привести к расходящемуся процессу, что осложняет алгоритм программы уравнивания, продолжая итерации до тех пор, пока уменьшается значение целевой функции. Обычно для этого требуется выполнить 5 – 6 приближений нелинейным методом Ньютона.

В книге [46] Ю.И. Маркузе пишет: «Важным условием, на котором базируется обоснование метода наименьших квадратов, является условие несмещенности оценок \hat{X} , которое всегда выполняется при исходных уравнениях линейного вида. Не так обстоит дело, если эти уравнения нелинейные». Основываясь на этом утверждении, как правило, в производственных программах начальные координаты определяемых пунктов вычисляют нелинейным методом, а уравнивание геодезической сети осуществляют линейным алгоритмом Гаусса. В научных исследованиях [51] и вычисление координат, и уравнивание, и оценка точности выполнялись нелинейным методом Ньютона, что приводило к близким результатам линейного и нелинейного алгоритмов уравнивания. Так продолжалось до тех пор, пока был реализован нелинейный обобщенный метод наименьших квадратов, приводящий к смещенным оценкам параметров (неверным уравненным координатам определяемых пунктов).

Чтобы выявить отклонение результатов уравнивания от их эталонного значения, необходимо реализовать программный продукт, дающий несмещенные оценки параметров. Не менее важно найти задачу, сравнивая результаты уравнивания с эталоном. Такая задача существует при уравнивании триангуляции по углам и направлениям. Последнее можно реализовать несколькими программными продуктами, взяв за эталон результаты уравнивания по программе «Credo» (табл. 5.3), программа 1. Дадим краткие сведения об остальных программах.

Программа 2. «Комплексная программа», разработанная К.Л. Проворовым, В.И. Мицкевичем.

Программа 3. Разработана С.В. Маковским.

Программа 4. Нелинейный необобщенный метод Ньютона, название программы 000.bat.

Программы 2, 3, 4 выполняют уравнивание по углам, включая угол, замыкающий горизонт, при числе направлений на пункте больше двух. Такая обработка дает результаты, близкие к уравниванию по направлениям. Программы 5, 6, 7, 8 реализуют обобщенный метод наименьших квадратов, используя корреляционную матрицу R , найденную по алгоритму Ю.И. Маркузе [46, с. 65]. Программа 5 (kemni000). Обобщенный линейный

метод уравнивания с использованием алгоритма при $n = 2,0$, опубликованного в [69]. Программа 6 (kempirel). Уравнивание нелинейным методом релаксации путем минимизации целевой функции [69]

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^2 \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |L(X)|^2, \quad (5.19)$$

где $L(X) = T^{m \times n} - T^{n \times m}$ – вектор свободных членов нелинейных параметрических уравнений; n – показатель степени; $K_n = P_n^{-1} \cdot R \cdot P_n^{-1}$; R – корреляционная матрица; $P_n = \left(\sqrt{\sigma_n} \right)^T$. Оценка точности осуществляется по формулам

$$Q = F P_n^{-1} F^T; \quad (5.20)$$

$$F = (A^T K_n^{-1} A)^{-1} A^T K_n^{-1}; \quad (5.21)$$

где A – матрица коэффициентов линейных параметрических уравнений поправок; Q – обратная весовая матрица.

Программа 7 (kkkrel.bat). Уравнивание выполняется нелинейным методом релаксации, а оценка точности осуществляется также нелинейным методом по формуле

$$F_{\text{от}} = \frac{(\hat{X}_\delta)_i - \hat{X}_i}{\delta_i}, \quad (5.22)$$

где \hat{X}_i – вектор урвненных координат, найденный при уравнивании геодезической сети; \hat{X}_δ – вектор урвненных координат, полученный методом Ньютона после изменения i -того измерения на малую величину δ_i .

Программа 8 (kkk.bat). Выполняет уравнивание и оценку точности нелинейным методом Ньютона путем минимизации целевой функции (5.19) при $n = 2,0$ с дальнейшим применением для оценки точности равенства (5.22).

Результаты вычислений приведены в табл. 5.3, в которой даны разности координат относительно эталона, указанного в колонке 1, СКО единицы веса (μ), ошибки положения пунктов (M) в метрах, координаты и их разности в метрах. Дополнительные исследования показали, что программы 5, 6, 7, 8 дают совпадающие результаты уравнивания и оценки точности при $R = E$, что подтверждает и надежную отладку. Однако, если $R \neq E$, то программы 7 и 8 дают большие флуктуации относительно эталона, полученного программой 1.

Отметим, что обобщенный метод наименьших квадратов нельзя реализовывать нелинейным методом Ньютона, дающим смещенные оценки параметров.

Таблица 5.3

Результаты уравнивания триангуляции по направлениям
с помощью различных программ

Номер программы	1	2	3	4	5	6	7	8
Пример 1. Геоземезический четырехугольник из [53]								
μ	11,79	14,44	9,12	4,07	5,17	4,49	4,49	5,03
M_1	0,097	0,068	0,043	0,068	0,065	0,076	0,069	0,088
M_2	0,143	0,101	0,064	0,101	0,137	0,130	0,072	0,145
X_1	1249,907	0,000	0,000	0,000	0,012	-0,045	-0,046	-0,058
Y_1	1230,083	0,000	0,000	0,000	-0,012	0,013	0,013	0,021
X_2	99,923	0,000	0,000	0,000	0,003	0,057	0,038	0,080
Y_2	499,979	0,000	0,000	0,000	-0,004	-0,053	-0,055	-0,065
Пример 2. Триангуляция из [79, с. 93]								
μ	0,44	0,52	0,50	0,85	1,86	1,46	1,45	1,47
M_1	0,040	0,029	0,028	0,029	0,025	0,032	0,016	0,018
M_2	0,041	0,029	0,028	0,029	0,026	0,030	0,011	0,012
M_3	0,021	0,015	0,015	0,015	0,014	0,012	0,004	0,001
X_1	74014,164	0,001	0,000	0,001	-0,008	0,012	0,032	0,025
Y_1	26533,249	-0,001	-0,002	-0,001	-0,020	-0,012	-0,020	-0,014
X_2	66008,118	-0,004	-0,004	-0,004	0,004	0,002	0,024	0,015
Y_2	25624,114	-0,005	-0,006	-0,005	-0,023	-0,011	-0,007	-0,006
X_3	68403,814	0,001	0,001	0,001	-0,002	0,014	0,025	0,019
Y_3	18238,860	-0,005	-0,005	-0,005	-0,012	-0,002	0,001	0,000
Пример 3. Триангуляция из [79, с. 129]								
μ	0,71	0,97	0,73	0,86	2,66	2,08	2,08	2,48
M_1	0,035	0,028	0,021	0,028	0,051	0,034	0,029	0,042
M_2	0,024	0,023	0,017	0,023	0,022	0,015	0,010	0,052
M_3	0,033	0,026	0,020	0,026	0,034	0,019	0,023	0,133
X_1	61040,812	0,004	-0,004	-0,004	-0,009	-0,011	-0,033	-0,028
Y_1	28940,854	0,003	0,002	0,003	0,035	0,002	-0,051	-0,060
X_2	67944,934	0,000	-0,001	0,000	-0,032	-0,001	-0,021	-0,031
Y_2	23036,585	0,004	0,003	0,004	0,043	-0,002	-0,025	-0,037
X_3	74996,251	-0,002	-0,003	-0,002	-0,017	-0,005	-0,004	0,008
Y_3	27896,751	-0,004	-0,005	-0,004	0,014	-0,010	-0,032	-0,049
Пример 4. Триангуляция из [79, с. 153]								
μ	0,64	0,86	0,83	1,06	2,00	1,56	1,56	1,58
M_1	0,040	0,032	0,031	0,032	0,044	0,033	0,013	0,012
M_2	0,037	0,029	0,029	0,029	0,047	0,033	0,018	0,015
M_3	0,022	0,019	0,018	0,019	0,018	0,018	0,003	0,003
X_1	20662,141	0,002	0,001	0,002	-0,002	-0,002	0,005	-0,004
Y_1	109240,112	-0,001	-0,001	-0,001	0,012	0,012	0,030	0,020

Окончание табл. 5.3

X_2	10999,801	-0,008	-0,008	-0,008	-0,020	-0,020	-0,036	-0,030
Y_2	107008,835	0,000	-0,002	0,000	0,006	0,006	0,025	0,011
X_3	16684,233	0,006	0,005	0,006	-0,001	-0,001	-0,014	-0,012
Y_3	102249,779	0,003	0,005	0,003	0,006	0,006	0,012	0,009
Пример 5. Триангуляция из [84, с. 145]								
ρ	0,88	1,06	1,05	1,05	1,60	1,41	1,42	2,31
M_1	0,189	0,132	0,132	0,132	0,140	0,121	0,074	0,170
M_2	0,191	0,129	0,139	0,129	0,163	0,152	0,066	0,190
M_3	0,201	0,136	0,136	0,136	0,187	0,168	0,065	0,250
M_4	0,223	0,150	0,150	0,150	0,207	0,178	0,118	0,186
M_5	0,164	0,119	0,119	0,119	0,164	0,144	0,273	0,896
X_1	720294,249	0,010	0,010	0,010	0,018	0,024	0,023	0,100
Y_1	506219,946	0,023	0,023	0,023	0,003	-0,035	-0,035	-0,112
X_2	699195,066	-0,012	-0,012	-0,012	0,042	0,041	0,043	-0,058
Y_2	511018,410	0,016	0,015	0,016	0,057	-0,015	-0,016	0,116
X_3	711404,389	0,003	0,003	0,003	0,018	0,041	0,041	-0,027
Y_3	527384,840	0,000	0,000	0,000	-0,005	0,072	-0,075	0,089
X_4	691444,471	-0,009	-0,009	-0,009	0,035	0,082	0,084	-0,036
Y_4	525520,742	0,004	0,004	0,004	-0,032	0,120	-0,123	0,070
X_5	682606,852	-0,003	-0,003	-0,003	0,008	-0,020	-0,020	-0,033
Y_5	544980,665	-0,022	-0,022	-0,022	-0,044	-0,068	-0,073	0,054
Пример 6. Триангуляция из [84, с. 160]								
ρ	1,30	1,58	1,19	0,85	1,58	1,46	1,46	1,56
M_1	0,082	0,063	0,047	0,063	0,046	0,046	0,046	0,060
M_2	0,099	0,071	0,053	0,071	0,051	0,058	0,104	0,081
X_1	83182,664	0,008	0,008	0,008	-0,003	0,014	0,012	-0,002
Y_1	51400,591	0,003	0,001	0,003	0,024	-0,009	-0,010	0,086
X_2	75890,367	0,009	0,007	0,009	0,000	-0,073	-0,073	-0,030
Y_2	55930,414	-0,003	-0,003	-0,003	0,000	-0,011	-0,011	0,039

5.2. О методике правильного выбора начальных координат определяемых пунктов

При уравнивании геодезических сетей параметрическим способом задают начальные координаты определяемых пунктов разными путями:

а) снятые с карты с точностью $1/3$ наименьшей стороны сети с последующим многократным уравниванием сети по уточнённым координатам [15];

б) с помощью последовательной вставки пунктов с решением многократных засечек (с избыточными измерениями) методами нелинейного программирования [70].

Общеизвестно, что начальные координаты, полученные для триангуляции 2 класса с точностью 10 м, уточняются сразу без итераций за одно приближение. Вопросами необходимой точности начальных координат для применения одного приближения занимались многие учёные [21, 83, 93]. Но неизменно было известно, что какие бы ошибки ни были в приближённых координатах, уравненные значения координат при сходящихся итерациях приводили к однозначному значению уравненных координат определяемых пунктов. Этот эффект распространялся и на метод Lp-оценок, для которого доказана сходимост ь итераций в работе [95].

В работе [69] получены формулы обобщённого метода Lp-оценок (OMLp), которые имеют вид

$$x = -H^{-1}G,$$

где H_{nn} – матрица Гессе, равная

$$H = Z + A^T C_3 A,$$

Z_{nn} – матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и s , по формуле

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n a_{k,i} \cdot a_{k,j} \cdot (C_1)_{k,r}.$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (5.11), вычисляется по формуле

$$G = A^T \cdot C_3 \cdot l,$$

где

$$l_{n \times 1} = [l_1, \dots, l_n]^T;$$

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \times \left\{ \frac{n \cdot |n-2|}{2} |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \cdot [L(X)^{\frac{n-2}{2}}]^T \right\},$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot \times s \cdot n \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[s \cdot \frac{n}{2} \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\},$$

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot \times s \cdot \left\{ n \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot [L(X)^{\frac{n-2}{2}}]^T \right\},$$

где $S_{n \times n}$ – диагональная матрица сигналов (единиц на диагонали со знаком числа $L(X)$); знак $\cdot \times$ означает поэлементное умножение матриц. Например, $A \cdot \times B = (a_{i,j} \cdot b_{i,j})$;

В этом методе отмечено, что результаты уравнивания зависят от значений начальных координат пунктов, т.е. данный метод при различных начальных координатах приводит к разным значениям уравненных координат. Для получения однозначного решения в этом методе необходимо решить задачу о выборе начальных координат определяемых пунктов. Обратимся к табл. 5.4.

Таблица 5.4

Влияние значений начальных координат на результаты уравнивания
для геодезического четырёхугольника при $n = 2,0$

№ вар.	Начальные координаты				Уравненные координаты			
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_1	y_1	x_2	y_2
1	1249,888	1230,086	99,969	499,953	1249,920	1230,071	99,926	499,983
2	1250,888	1230,086	99,969	499,953	1249,967	1230,007	100,036	499,945
3	1249,888	1231,086	99,969	499,953	1249,884	1230,093	99,959	499,961
4	1249,888	1230,086	100,969	499,953	1250,000	1229,938	100,128	499,923
5	1249,888	1230,086	99,969	500,955	1250,022	1229,895	100,189	499,963
6	1249,988	1230,086	99,969	499,953	1249,925	1230,047	99,949	499,967
7	1249,888	1230,186	99,969	499,953	1249,895	1230,086	99,961	499,961
8	1249,888	1230,086	100,069	499,953	1249,892	1230,086	99,963	499,960
9	1249,888	1230,086	99,969	500,055	1249,890	1230,088	99,962	499,962

По данным табл. 5.4 сделаем вывод о нелинейности изменений уравненных координат в обобщённом методе L_p -оценок при линейном малом изменении начальных координат. Например, в вариантах 2 и 6 уравненные координаты отличаются нелинейно, хотя x_2 в варианте 2 было изменено на 1 м, а в варианте 6 на 0,1 м. Но бывают исключения (см. варианты 2, 6 для x_1).

Многочисленные расчёты показали, что начальными координатами для OML $_p$ могут быть координаты, полученные из уравнивания необобщённым методом L_p -оценок при том же n , т.е. в том случае, когда корреляция измерений не учитывается.

На рис. 5.2 приведена блок-схема программы для OML $_p$.

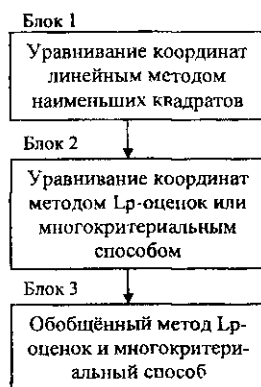


Рис. 5.2. Блок-схема программного комплекса

Согласно рис. 5.2. начальные координаты определяемых пунктов могут быть сняты с карты или схемы с точностью 1/3 наименьшей стороны сети с дальнейшим уточнением их методом уравнивания (блок 1).

Второй блок так же, как и первый реализуется по формулам OMLp при данном n для независимых величин. В результате использования одних и тех же формул для уравнивания во всех трёх блоках начальные координаты будут удовлетворять требованиям метода OMLp.

После выхода статьи [73] были обнаружены ошибки в программе, приведшие к следующим новым результатам (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Обработка независимых GPS-измерений

№	V _{1,2}	V _{1,5}	V _{2,0}	V _{2,5}	V _{3,0}
1	2,0	2,1	2,1	2,1	2,1
2	0	0	0	-0,1	-0,1
3	2,8	3,1	3,2	3,2	3,2
4	0	0	0,3	0,4	0,5
5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,4
6	5,5	4,9	4,4	4,1	4,0
7	-2,8	-2,6	-2,4	-2,4	-2,3
8	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5
9	-0,3	-0,7	-1,1	-1,4	-1,5

По данным этой таблицы можно сделать вывод, что поправки из уравнивания отличаются на небольшую величину по сравнению с табл. 5.5 из статьи [73]. Уравнивание независимых величин по методу Lp-оценок необходимо для получения начальных координат определяемых пунктов при различных n .

5.3. О свойствах обобщённого метода Lp-оценок

В необобщённом методе Lp-оценок используется следующая целевая функция [69]

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^2 \right)^t \cdot P_n \cdot |L(X)|^2, \quad (5.23)$$

где $X_{\text{ок}}$ – вектор координат для k ($k = t/2$, t – число параметров) определяемых пунктов; $L(X)_{N \times 1} = T^{N \times k} \cdot T^{k \times 1}$ – вектор свободных членов в общем случае нелинейных параметрических уравнений для каждого результата измере-

ния $T_{N \times 1}^{u_{nm}}$; n – показатель степени на отрезке $1, 0 \leq n \leq 3, 0$; $P_{n \times n \times n}$ – матрица весов измерений с диагональными элементами $P_i = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^n$.

В обобщённом методе Lp-оценок применяют целевую функцию (5.19).

По формулам из [69] разработан алгоритм и создана программа KEMNIOOO, реализующая обобщённый метод Lp-оценок. Матрица R вместе с координатами исходных пунктов и результатами измерений задаётся в исходной информации. Названная выше программа универсальна, так как с её помощью легко перейти к обычному методу Lp-оценок, задавая в исходной информации $R = E$. Тогда $K_n^{-1} = P_n$ и автоматически будет минимизирована целевая функция (5.23).

При тестировании программы KEMNIOOO была осуществлена минимизация целевой функции (5.19) при $P_n = E$.

Результаты тестирования приведены в табл. 5.6, 5.7, 5.8 для примера триангуляции из статьи [53]. В табл. 5.6 приведены: Δx ; Δy – разности уравниваемых координат, полученные по формуле $\Delta x_i = X_n - X_{n+2,0}$; $\Delta y_i = Y_n - Y_{n+2,0}$; $\mu = \sqrt{\frac{V_n^T V_n}{N-t}}$; $M_i = \mu \sqrt{Q_{li} + Q_{i+1,i+1}}$; $Q_{lxi} = F \cdot F^T$; $F = nN^{-1} A^T C_i$ [69]; V_i^* – поправка в углы при фактическом уравнивании по направлениям благодаря использованию корреляционной матрицы R [46]. Устойчивой закономерностью в табл. 5.6 является уменьшение μ .

В табл. 5.7 приведены значения целевой функции

$$\Phi(\hat{X}) = \left(|V|_2^{\frac{n}{2}} \right)^T \cdot R^{-1} \cdot |V|_2^{\frac{n}{2}}, \quad (5.24)$$

где $v = L(\hat{X}) = T^{u_{nm}} - T^{nm}$. При этом вектор V выбирался из соответствующего столбца табл. 5.5, и для каждого V применялась формула (5.24) при различных степенях, указанных в первой колонке табл. 5.7. Закономерность в числах $\Phi(\hat{X})$ заключается в их возрастании по столбцам $V_n = 1.0$; $V_n = 1.2$; $V_n = 1.4$, ... , $V_n = 3.0$. Увеличиваются также и диагональные элементы $\Phi(\hat{X})$ в квадратной матрице табл. 5.7.

В табл. 5.8 тестировалась формула (5.24) при $R = E$ (вектор V взят из табл. 5.6).

Таблица 5.6

Результаты тестирования нового алгоритма

Обознач.	n=1,0	n=1,2	n=1,4	n=1,6	n=1,8	n=2,0	n=2,2	n=2,4	n=2,6	n=2,8	n=3,0
Δx_1	-77 мм	-54 мм	-76 мм	-74 мм	-64 мм	0 мм	-1 мм	-1 мм	-1 мм	-1 мм	-4 мм
Δy_1	31	24	32	34	34	0	-9	-12	-14	-16	-22
Δx_2	45	41	43	49	47	0	27	30	34	39	61
Δy_2	-39	-42	-45	-54	-45	0	-7	-2	1	3	-3
μ	10,59	15,38	7,50	6,33	5,35	5,17	4,16	3,70	3,17	2,70	2,29
M_1	0,055м	0,236м	0,057м	0,050м	0,051м	0,065м	0,036м	0,030м	0,024м	0,019м	0,016м
M_2	0,360	0,902	0,131	0,081	0,074	0,137	0,043	0,044	0,037	0,030	0,025
V_1	-0,050"	-36,20"	-0,81"	-2,86"	-2,52"	4,22"	2,34"	2,96"	3,20"	3,23"	1,59"
V_2	0,00	0,00	-0,15	-0,67	-1,22	1,16	2,99	3,54	3,92	4,26	5,47
V_3	0,00	0,27	-0,41	-0,35	-0,06	-1,86	0,00	0,45	1,01	1,50	3,08
V_4	27,73	38,36	27,46	28,00	27,09	14,50	15,24	15,11	15,18	15,24	16,25
V_5	0,00	4,61	1,31	-0,52	-2,31	-14,71	-14,62	-14,66	-14,74	-14,85	-14,50
V_6	12,32	37,57	13,76	15,21	15,49	23,14	22,41	21,48	20,61	20,03	19,08
V_7	-20,68	4,84	-19,50	-17,47	-16,36	-12,88	-13,58	-14,61	-15,30	-15,74	-16,31
V_8	10,68	-19,45	9,96	8,66	9,89	16,43	15,20	15,74	16,12	16,33	15,34

Таблица 5.7

Дополнительное тестирование целевой функции (5.24)

N	$V_n=1,0$	$V_n=1,2$	$V_n=1,4$	$V_n=1,6$	$V_n=1,8$	$V_n=2,0$	$V_n=2,2$	$V_n=2,4$	$V_n=2,6$	$V_n=2,8$	$V_n=3,0$
1,0	114,2	117,0	124,2	133,5	135,8	150,8	161,0	168,6	174,6	179,4	183,3
1,2	202,7	205,3	213,8	224,3	228,2	251,1	268,3	281,5	292,1	300,6	307,7
1,4	363,0	364,6	373,7	384,4	389,8	424,0	451,9	474,3	492,4	507,2	519,8
1,6	654,4	654,0	660,9	669,6	674,7	724,1	768,1	805,0	835,6	860,9	882,7
1,8	1187	1182	1180	1181	1180	1248	1316	1375	1426	1468	1506
2,0	2166	2154	2123	2105	2083	2168	2268	2362	2444	2515	2578
2,2	2972	2938	2846	2781	2703	2792	2932	3075	3208	3324	3430
2,4	7318	7247	7009	6836	6620	6669	6850	7061	7269	7458	7633
2,6	13545	13399	12840	12428	11896	11786	11984	12298	12598	12899	13186
2,8	25175	24881	23629	22693	21466	20918	21044	21425	21895	22366	22829
3,0	46970	46387	43669	41591	38873	37262	37075	37489	38150	38867	39607

Таблица 5.8
Тестирование целевой функции (5.24) при R=E (независимые измерения)

n	$V_n=1,0$	$V_n=1,2$	$V_n=1,4$	$V_n=1,6$	$V_n=1,8$	$V_n=2,0$	$V_n=2,2$	$V_n=2,4$	$V_n=2,6$	$V_n=2,8$	$V_n=3,0$
1,0	72,04	72,25	73,48	76,73	77,89	81,56	84,97	87,84	90,22	92,19	93,88
1,2	129,1	129,2	130,0	133,7	134,6	139,2	144,1	148,7	152,6	155,9	158,8
1,4	233,6	233,2	232,8	236,7	236,0	240,6	247,3	254,0	260,2	265,6	270,4
1,6	425,7	424,5	420,8	424,2	418,0	420,2	428,0	437,4	446,7	455,2	463,1
1,8	780,7	777,8	766,2	766,7	746,8	739,9	746,4	758,1	771,4	784,3	796,7
2,0	1440	1433	1403	1395	1343	1311	1309	1321	1338	1357	1376
2,2	2668	2653	2583	2550	2428	2337	2308	2312	2332	2357	2385
2,4	4964	4933	4773	4681	4406	4181	4086	4063	4077	4107	4146
2,6	9275	9210	8852	8618	8024	7508	7258	7162	7149	7175	7226
2,8	17392	17256	16470	15907	14653	13520	12932	12661	12569	12567	12623
3,0	32718	32438	30731	29422	26819	24406	23098	22437	22150	22059	22094

В табл. 5.8 диагональные элементы квадратной матрицы должны быть наименьшими по строкам.

Закономерность по увеличению чисел $\Phi(X)$ в табл. 5.7 и 5.8 по столбцам является новым свойством обобщенного и необобщенного метода Lp-оценок.

В работе [69] выведена формула для матрицы Гессе в обобщенном методе Lp-оценок, которая имеет вид

$$H = \frac{n(p-2)}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_2 A, \quad (5.25)$$

где $H_{n \times n}$ – матрица Гессе (вторых частных производных); $A_{n \times N}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; n – показатель степени; N – количество результатов измерений; t – число параметров; C_2 – симметричная и в общем случае недиагональная матрица; $Z_{n \times n}$ – вспомогательная матрица.

В этой же работе получено

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ [L(X)]^{\frac{n-2}{2}} \cdot [S \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}}]^T \right\}, \quad (5.26)$$

где $K_n = P_n^{-1} R P_n^{-1}$, R – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, а внедиагональные числа равны коэффициентам корреляции; $L(X)_{n \times N}$ – вектор свободных членов нелинейных параметрических уравнений; $S_{N \times N}$ – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали, умноженная на знак числа $L(X)$);

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{k,l} \cdot a_{i,j} \cdot (C_1)_{k,l}, \quad (5.27)$$

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \left\{ [L(X)]^{\frac{n-2}{2}} \cdot [L(X)]^{\frac{n-2}{2}} \right\}^T, \quad (5.28)$$

Докажем, что дополнительная матрица Z является симметричной. Для нахождения искомого свойства докажем, что $\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Для этого воспользуемся первыми частными производными целевой функции $\Phi(X)$, представленными в [69]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1} &= n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{11} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} \\ \Gamma \in D &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix} = K_n^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} &= n \cdot a_{12} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{12} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{12} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{22} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{22} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{22} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + n \cdot a_{32} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \\ &+ n \cdot a_{32} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Раскрыв скобки в предыдущих равенствах, можно записать вторые частные производные, продифференцировав $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1}$ по ∂x_1 , а $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2}$ по ∂x_1 , и

в результате найдём вторые частные производные для матрицы Гессе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 \partial x_2} &= n \cdot a_{11} \cdot D_{11} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\ &+ n \cdot a_{11} \cdot D_{12} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\ &+ n \cdot a_{11} \cdot D_{13} \cdot S_1 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\ &+ n \cdot a_{21} \cdot D_{22} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\ &+ n \cdot a_{21} \cdot D_{23} \cdot S_2 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\ &+ n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{12} \cdot S_1 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_1(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\ &+ n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{22} \cdot S_2 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_2(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] + \\ &+ n \cdot a_{31} \cdot D_{33} \cdot S_3 \cdot \left[\frac{n-2}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-2}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \cdot a_{32} \cdot S_3 \cdot |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} |L_3(x_1, x_2)|^{\frac{n-1}{2}} \right] \end{aligned}$$

симметрична потому, что её значения в $\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_j \partial x_i}$ одинаковы. Интересно, что формулу (5.27) не удаётся записать в матричном виде.

Отметим важность выполненного исследования. Если бы матрица Z в выражениях вторых частных производных была бы несимметричной, то несимметричной оказалась бы матрица H и, следовательно, при её обращении потребовались бы специальные программы. Теперь видно, что матрица Z симметрична при несимметричности матрицы C .

5.4. Примеры математической обработки

Уравнение выполним по направлениям, используя матрицу $A_{8 \times 4}$, составленную для восьми углов

$$A = \begin{bmatrix} -179.37 & 23.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11.92 & 132.0 \\ 239.51 & 162.38 & 11.92 & -132.0 \\ -60.14 & -186.19 & 0 & 0 \\ -98.22 & -104.03 & -81.15 & 127.84 \\ -81.15 & 127.84 & 69.22 & 4.16 \\ 0 & 0 & 83.04 & 45.81 \\ 179.37 & -23.81 & -71.12 & -177.81 \end{bmatrix};$$

При $P_n = E$ корреляционная матрица $K_{8 \times 8}$ будет такой

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -0.5 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

При $n = 2,0$ уравнение по углам и направлениям даёт

$$V_m = \begin{bmatrix} -8.67 \\ 12.25 \\ -13.80 \\ 0.219 \\ -1.31 \\ 21.89 \\ 0.450 \\ 18.97 \end{bmatrix}; \quad (V_m)_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} -12.26 \\ 15.92 \\ -13.40 \\ -0.260 \\ 3.92 \\ 16.75 \\ -2.29 \\ 21.63 \end{bmatrix} = L(X),$$

$$S = \text{diag}[-1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1].$$

При $n = 2,5$, когда $k_1 = 1.3333$; $k_2 = 0.6667$, имеем

$$K_0^{-1} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \\ & k_1 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_1 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & & k_1 & k_2 & 0 \\ & & & & & & k_1 & 0 \\ & & & & & & & k_1 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 4.6685 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.7466 \\ 0 & 5.3199 & 2.1446 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0271 & 4.8807 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6799 & 10.0997 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0444 & 2.6398 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4568 & 0.2268 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.1359 & 2.0176 & 0 \\ 1.5249 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.2009 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 4.6685 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.6904 \\ & 5.3189 & -2.5480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5480 & 4.8807 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.6799 & -0.6699 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -0.6699 & 2.6398 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & & 5.4568 & -1.6592 & 0 \\ & & & & & -1.6592 & 2.0176 & 0 \\ & & & & & & & 6.2009 \end{bmatrix};$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} -57.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -58.19 \\ 0 & 84.69 & 34.14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40.56 & -65.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1768 & -2.6254 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1742 & 10.350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 91.40 & 3.7995 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27.79 & -4.6204 & 0 \\ 32.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 134.13 \end{bmatrix};$$

$$Z = \begin{bmatrix} 395064 & -233802 & 92598 & -255045 \\ & 1244949 & -662300 & -56851 \\ & & 590536 & -301221 \\ \text{sim} & & & 827263 \end{bmatrix};$$

$$H = 10^4 \begin{bmatrix} 2.9305 & 0.1100 & -0.2356 & -1.8535 \\ & 1.5696 & -0.1881 & -0.4967 \\ & & 0.5938 & -0.0933 \\ \text{sim} & & & 2.1090 \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 41775 \\ -30840 \\ -28800 \\ 538 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} -0.0132 \\ 0.0253 \\ 0.0504 \\ -0.0042 \end{pmatrix}; \quad V_{n=2.5} = \begin{pmatrix} -9.1800 \\ 14.7655 \\ -11.4405 \\ -4.1449 \\ -1.9836 \\ 24.5784 \\ 1.7017 \\ 15.7130 \end{pmatrix};$$

Применяя формулу (5.19) при $n = 2$, $\Phi(x) = 10052$; а при $n = 2,5$ $\Phi(x) = 9044$.

Отметим, что приближения при минимизации целевой функции (5.19) выполняют до тех пор, пока значение этой функции не начнёт возрастать при числе приближений не более 6. Например, во втором приближении

$$V_{n=2.5} = \begin{pmatrix} -4.1706 \\ 9.1408 \\ -15.4843 \\ 0.5141 \\ -0.6450 \\ 22.6250 \\ -3.0640 \\ 21.0938 \end{pmatrix}; \quad \Phi(x) = 8913;$$

в третьем приближении

$$V_{n=2.5} = [-9.2991 \ 13.3948 \ -10.0175 \ -4.0781 \ -4.2282 \ 25.3332 \ 2.3736 \ 16.5307]^T,$$

а $\Phi(x) = 9145$, следовательно, эти результаты в обработку не берём.

Результаты уравнивания по МНМ приведены в табл. 5.9.

Таблица 5.9

Результаты уравнивания по МНМ из 5 приближений

№ углов	V_2	V_3	V_4	V_5
1	-6.1023	3.8753	-5.1686	0.2691
2	10.3578	2.4574	4.3766	-0.3191
3	-13.6071	-16.9168	-7.9353	-12.1018
4	-0.6484	0.5840	-1.2728	2.1516
5	-5.1172	-4.7731	-9.9233	-13.8961
6	26.3819	28.1155	26.1406	30.8549
7	2.7223	-4.7861	-0.6567	1.9320
8	16.0222	21.4534	24.4487	21.1180
Φ	150.6870	149.0626	139.6720	133.5738

В табл. 5.10 даны примеры обобщённого робастного уравнивания геодезического четырёхугольника при различных степенях n .

Таблица 5.10

Результаты уравнивания

	$V_n=1.0$	$V_n=1.2$	$V_n=1.4$	$V_n=1.6$	$V_n=1.8$	$V_n=2.0$
μ	9,75	7,99	6,53	5,32	4,38	3,51
M_C	0,0885	0,0905	0,0925	0,0944	0,0965	0,1128
M_D	0,1486	0,1430	0,1374	0,1325	0,1300	0,1719
V_1	-5,34	-5,71	-5,83	-6,16	-6,86	-8,66
V_2	25,60	25,86	26,10	26,19	26,57	21,40
V_3	-4,78	-5,20	-5,85	-6,72	-6,56	-13,84
V_4	25,29	24,32	23,08	21,68	20,40	19,62
V_5	-6,34	-6,16	-5,87	-5,45	-5,58	-0,92
V_6	7,90	8,41	9,07	9,90	10,85	12,15
V_7	-4,54	-4,02	-3,32	-2,42	-1,38	-0,10
V_8	-7,47	-7,50	-7,39	-7,02	-7,43	0,35

Рассмотрим коррелятный способ, распространённый на случай нового обобщённого метода Lp-оценок.

При уравнивании коррелированных результатов измерений по МНК коррелятным способом применяют следующие известные формулы:

– для вектора поправок в результаты измерений

$$v = -KB'(BKB')^{-1}w; \quad (5.29)$$

– для СКП единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K^{-1} V}{N-t}}, \quad (5.30)$$

где $v_{n \times n}$ – матрица коэффициентов условных уравнений, ($r = N - t$ – число избыточных измерений); $K_{n \times n}$ – недиагональная корреляционная матрица результатов измерений; w_n – вектор свободных членов условных уравнений; N – количество результатов измерений; t – число необходимых измерений.

В случае робастного уравнивания используют следующую корреляционную матрицу $K_n = P_n^{-1} R P_n^{-1}$, где R – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, а внедиагональные числа равны коэффициентам корреляции, показатель степени n находится в пределах $1 \leq n < 2$. Вектор поправок в результаты измерений $v_{n \times 1}$ вычисляют, минимизируя целевую функцию

$$\Phi(X) = \left(|V|^n \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |V|^n, \quad (5.31)$$

при этом формулы (5.29), (5.30) будут иметь вид

$$V = -C^{-1}B^T(BC^{-1}B^T)^{-1}W, \quad (5.32)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K^{-1} V}{r}}, \quad (5.33)$$

где весовая матрица

$$C = K_n^{-1} \times S \cdot \left\{ |V|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[S \cdot |V|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (5.34)$$

в которой знак \times означает поэлементное умножение матриц. Например, $A \times B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$; S_{NN} – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали со знаком поправки v).

При вычислении C в первом приближении берут V , найденное по формуле (5.29), когда $n = 2$ (МНК).

Недостатком коррелятного способа является трудность составления матрицы коэффициентов условных уравнений B . Автоматизированный поиск матрицы B можно выполнить по формуле

$$B_{NN}^* = E_{NN} - A_{NN} \cdot F_{NN}, \quad (5.35)$$

где E – единичная матрица; A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $F = (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1}$ – расширенная на случай зависимых величин псевдообратная матрица.

Чтобы перейти от B^* к B , на ЭВМ устанавливают в геодезической сети в произвольном порядке необходимые измерения, а коэффициенты уравнений для оставшихся r избыточных измерений выделяют по строкам из B_{NN}^* и записывают их в B_{rN} . Идемпотентная матрица B^* имеет свойство $B^* = B^* \cdot B^* \cdot \dots \cdot B^*$ и характеризуется тем, что нужно с особой тщательностью находить её строки и записывать их в B так, чтобы эти строки были независимыми. Это составляет определённые трудности, которых можно избежать, опираясь на рекуррентный способ уравнивания параметрическим способом [45]. Оказывается в этом способе коэффициент

$$q_i = \frac{1}{p_i} + a_i z_i^T; \quad z_i^T = Q_{i-1} \cdot a_i^T \quad (5.36)$$

принимает максимальные значения для необходимых измерений. Поэтому выстраиваем значения q_i вместе с номерами измерений i в порядке убывания q_i . Последние r строк из номеров измерений будут соответствовать номерам избыточных измерений.

Но согласно формуле (5.29) должен быть известен вектор W . В автоматизированном способе он будет таким

$$W_{rN} = (-V_{N \times r})_{\text{выделенное}}, \quad (5.37)$$

записанным для r избыточных измерений.

При этом

$$V_{NM} = (E - AF) \cdot L_{NM} = B_{NM}^* \cdot L_{NM}, \quad (5.38)$$

где L – вектор свободных членов параметрических уравнений поправок, соответствующий произвольному по точности вектору x^0 .

Решим примеры по уравниванию геодезического четырёхугольника коррелятным способом в трёх вариантах: $n = 1,5$; $n = 2,0$; $n = 2,5$ при уравнивании по углам и направлениям. В первом случае для геодезического четырёхугольника измеренные углы, матрицы A и K приведены выше.

Для избыточных измерений 1, 4, 5, 7 имеем согласно формуле (5.35)

$$B_{n=2,0} = \begin{pmatrix} 0.4584 & 0.2449 & 0.2198 & 0.0768 & -0.0297 & -0.2669 & 0.2430 & 0.0536 \\ 0.0768 & 0.2001 & 0.3202 & 0.4028 & 0.0700 & 0.2070 & -0.1931 & -0.0838 \\ -0.0297 & -0.2735 & 0.2333 & 0.0700 & 0.4838 & 0.2129 & 0.2598 & 0.0435 \\ 0.2430 & -0.0590 & 0.0091 & -0.1931 & 0.2598 & -0.0757 & 0.5419 & 0.2741 \end{pmatrix},$$

вектор W принимает значения

$$\text{при } n = 2,0 \quad w_{\mu 1} = \begin{pmatrix} 8.67 \\ -0.22 \\ 1.34 \\ -0.43 \end{pmatrix}; \quad w_{\mu 4} = \begin{pmatrix} 5.8 \\ -4.5 \\ 1.8 \\ -1.2 \end{pmatrix};$$

$$\text{при } n = 1,5 \quad w_{\mu 1} = \begin{pmatrix} 8.67 \\ -0.12 \\ 1.34 \\ -0.43 \end{pmatrix}; \quad w_{\mu 4} = \begin{pmatrix} 6.3 \\ 1.5 \\ 6.9 \\ 4.0 \end{pmatrix};$$

$$\text{при } n = 2,5 \quad w_{\mu 1} = \begin{pmatrix} 8.67 \\ -0.22 \\ 1.34 \\ -0.43 \end{pmatrix}; \quad w_{\mu 4} = \begin{pmatrix} 10.1 \\ -6.2 \\ 1.6 \\ -3.9 \end{pmatrix};$$

Результаты вычислений приведены в табл. 5.11.

Таблица 5.11

Результаты вычислений поправок в углы при уравнивании по направлениям, полученным обобщённым параметрическим способом

Обозн	$n = 1,5$	$n = 2,0$	$n = 2,5$
x_c	1249,876	1249,870	1249,891
y_c	1230,099	1230,069	1230,053
x_D	100,018	99,989	100,011
y_D	499,945	499,937	499,955
μ	18,4	3,54	2,33
M_c	0,126	0,173	0,132
M_D	1,191	0,235	0,194
V_1	-6,3	-5,8	-10,1
V_2	10,2	9,6	11,7
V_3	-12,4	-18,2	-17,9
V_4	-1,5	4,5	6,2
V_5	-6,9	-1,8	-1,6
V_6	27,8	22,5	20,2
V_7	4,0	1,2	3,9
V_8	15,0	18,0	17,5

Теперь уравнием этот же геодезический четырёхугольник, составляя уравнения поправок матрицы А для направлений (рис. 5.3).
 Значения измеренных направлений помещены в табл. 5.12.

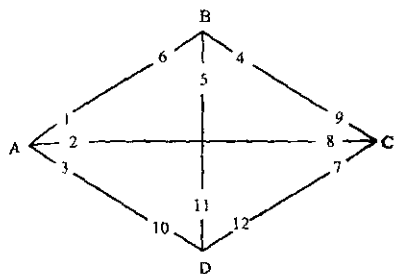


Таблица 5.12
 Результаты измерений

№	направл.	№	направл.
A-1	0° 00' 00"	C-7	0° 00' 00"
A-2	37 58 22	C-8	50 01 55
A-3	113 43 27	C-9	91 43 56
B-4	0 00 00	D-10	0 00 00
B-5	61 01 37	D-11	26 57 40
B-6	100 20 07	D-12	54 12 20

Рис. 5.3. Геодезический четырёхугольник

Матрица А имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -179.37 & 23.81 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -71.13 & -177.81 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -239.51 & -162.38 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.92 & -132.01 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -81.15 & 127.84 & 81.15 & -127.84 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -179.87 & 23.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -239.51 & -162.38 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -71.13 & -177.81 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 11.92 & -132.01 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -81.15 & 127.84 & 81.15 & -227.84 \end{pmatrix}$$

Вектор свободных членов параметрических уравнений будет таким

$$L = [10.20 \quad -20.60 \quad 10.4 \quad -1.63 \quad -8.04 \quad 9.67 \quad -3.10 \quad -3.20 \quad 6.30 \quad -4.73 \quad 0.37 \quad 4.36]^T$$

Поскольку матрица А составлена для направлений, то применим алгоритм для независимых измерений с использованием формулы (5.35) для v' . Запишем данные в табл. 5.13 для строк 8, 9, 11, 12.

Таблица 5.13

Матрица коэффициентов условных уравнений

№ пп	$(B_1^*)^T$	$(B_2^*)^T$	$(B_{11}^*)^T$	$(B_{12}^*)^T$
1	0,0788	-0,1107	-0,2043	0,0430
2	-0,1595	0,0970	0,1553	-0,2092
3	0,0807	0,0137	0,0490	0,1662
4	0,0668	-0,2320	0,0251	-0,0708
5	0,1391	0,0820	-0,0112	-0,0044
6	-0,2059	0,1500	-0,0138	0,0752
7	-0,1852	-0,1064	0,0217	-0,1940
8	0,3371	-0,1519	0,1495	0,0440
9	-0,1519	0,2583	-0,1712	0,1500
10	-0,1935	0,0212	-0,2426	-0,0613
11	0,1495	-0,1712	0,5067	-0,2641
12	0,0440	0,1500	-0,2641	0,3254

Применяя рекуррентный способ при $Q_0 = E \cdot 10^6$, найдём

$$q = [10^6 \ 3.3 \cdot 10^{10} \ 3.7 \cdot 10^{10} \ 3.7 \cdot 10^9 \ 3.6 \cdot 10^9 \ 10^6 \ 10^6 \ 9.61 \ 5.53 \ 10^6 \ 3.42 \ 3.07]^T,$$

откуда видно, что избыточными измерениями являются направления 8, 9, 11, 12. Именно для этих строк записана матрица В (см. табл. 5.13), полученная выделением строк из матрицы B^* согласно формуле (5.35).

Результаты вычислений приведены в табл. 5.14.

Таблица 5.14

Результаты вычислений для поправок в углы при уравнивании по направлениям, полученным классическим коррелятно-параметрическим способом

Обозн.	$n = 1,5$	$n = 2,0$	$n = 2,5$
x_C	1249,910	1249,871	1249,907
y_C	1230,081	1230,093	1230,080
x_D	99,928	99,966	99,924
y_D	499,969	499,942	499,981
μ	11,9	11,8	11,9
M_C	0,107	0,096	0,100
M_D	0,15	0,142	0,147
V_1	-12,7	-12,2	-12,3
V_2	14,5	15,8	16,9
V_3	-11,6	-13,3	-14,8
V_4	-0,2	-0,3	0,2
V_5	2,2	3,9	5,2
V_6	16,5	16,7	16,4
V_7	-2,3	-2,2	-1,8
V_8	23,5	21,6	20,2

6. ПРАКТИЧЕСКАЯ АПРОБАЦИЯ ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

6.1. Теорема Гаусса – Маркова и многокритериальная оптимизация

Как известно, в методе многокритериальной оптимизации (МК) используются две целевых функции [49]

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i^{n_i}} |L_i(X)|^{n_i}, \quad (6.1)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min \max M_K, \quad (6.2)$$

в которых N – число измеренных величин; m – СКО измерения, полученная по МНК; n – показатель степени, отыскиваемый в процессе итераций; $L(X) = T^{\text{выч}} - T^{\text{изм}}$ – свободный член измерения; $M_K = \mu \sqrt{Q_{K,K} + Q_{K+1,K+1}}$ – ошибка положения пункта;

$$\mu_{MK} = \sqrt{\frac{V_{MK}^T \text{diag} \left(\frac{1}{m_i} \right)^n V_{MK}}{r}}, \quad (6.3)$$

$$V_{MK} = T_{MK}^{\text{урав}} - T^{\text{изм}},$$

r – количество избыточных измерений.

Минимум функции (6.1) находят как **нелинейным, так и линейным** методом [69].

Ниже приводятся значения μ для МНК

$$\mu_{MНК} = \sqrt{\frac{V_{MНК}^T \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^2 V_{MНК}}{r}}, \quad (6.4)$$

Согласно теореме Гаусса – Маркова [47] среди класса **оценок** параметров x вектора X , которые являются несмещёнными и **представляют** собой линейные комбинации y , а оценка

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P y, \quad (6.5)$$

где A – матрица коэффициентов параметрических уравнений **поправок**;

$P = \text{diag} \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \right)$ – матрица весов измерений будет такой, что

$$\sigma_x^2 \leq \sigma_z^2 \quad (6.6)$$

Иначе говоря, оценка (6.5) наиболее точная из всех возможных оценок x в указанном смысле.

Теорему Гаусса – Маркова для зависимых величин [36] можно сформулировать так

$$\hat{X} = (A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1} y, \quad (6.7)$$

где $K = P^2 R^{-1} P^2$ – корреляционная матрица; $R_{N \times N}$ – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, а недиагональные элементы равны коэффициентам корреляции.

На примерах покажем, что теорема Гаусса – Маркова для зависимых величин в одно- и многостепенной оптимизации не выполняется.

В случае МК в формуле (6.7) используется выражение

$$K_n = P_n^2 R^{-1} P_n^2, \quad (6.8)$$

где $P_n = \text{diag}(m_i^{n_i})^{-1}$.

Если обратиться к примерам (табл. 6.1 – 6.6), то видно

$$\max(\sigma_x^2)_{МК} \leq \max(\sigma_x^2)_{МК}, \quad (6.9)$$

что противоречит теореме Гаусса – Маркова.

На самом деле противоречий нет, т.к. в МК используется одна целевая функция

$$\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} L_i^2(x) \quad (6.10)$$

при показателе степени $n = 2, 0$, а в многокритериальном случае – две целевые функции и n_i ($1 \leq i \leq N$).

Покажем на шести примерах (рис. 6.1 – 6.6 и табл. 6.1 – 6.6), что

$$V_2^T P_2 V_2 \leq V_n^T P_n V_n, \quad (6.11)$$

для любых $1 \leq n \leq 3$ при независимых измерениях, что соответствует теореме Гаусса – Маркова.

$$V_1^T K_2^{-1} V_2 \leq V_n^T K_2^{-1} V_n, \quad (6.12)$$

(для примеров 2, 5, 6)

$$V_1^T K_2^{-1} V_2 > V_n^T K_2^{-1} V_n, \quad (6.13)$$

(для примеров 1, 3, и 4), а это противоречит теореме Гаусса – Маркова при зависимых измерениях.

При этом также возможно как $\mu_{МК} \leq \mu_{МК}$, так и $\mu_{МК} \geq \mu_{МК}$. И всегда для МК ошибка положения пункта

$$(\max M)_{МК} \leq (\max M)_{МК}. \quad (6.14)$$

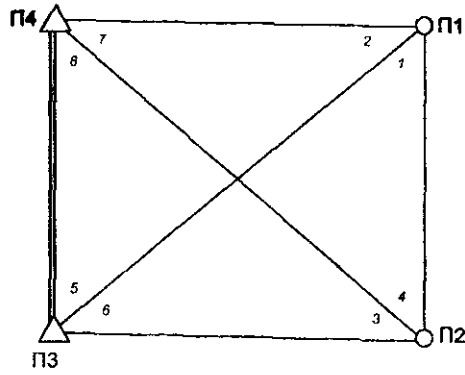


Рис. 6.1. Геодезический четырехугольник из [53]

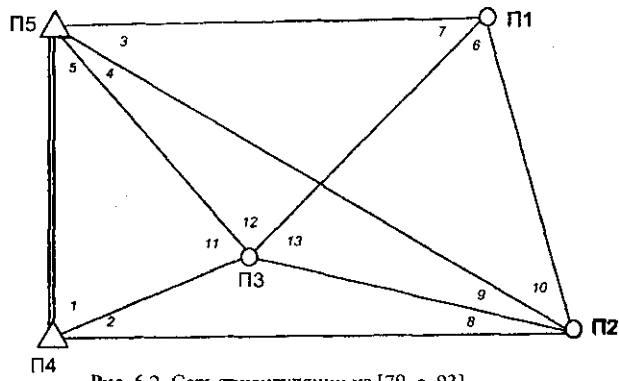


Рис. 6.2. Сеть триангуляции из [79, с. 93]

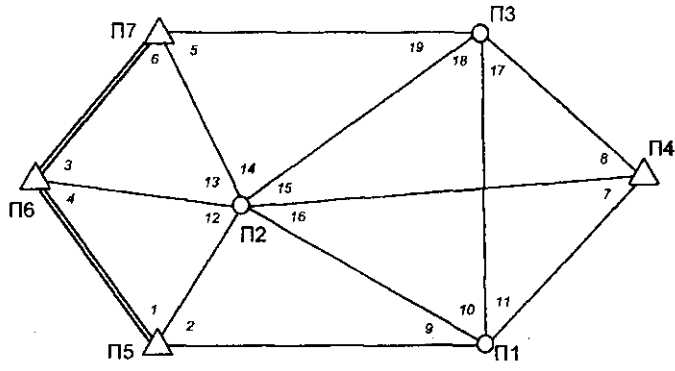


Рис. 6.3. Сеть триангуляции из [79, с. 129]

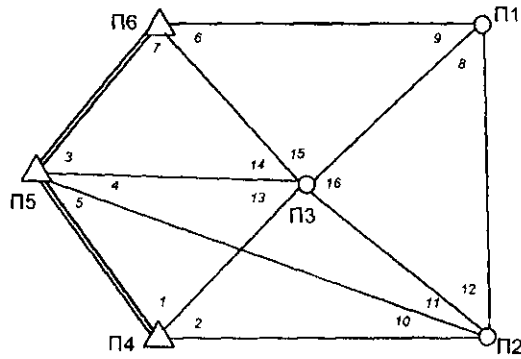


Рис. 6.4. Сеть триангуляции из [79, с. 153]

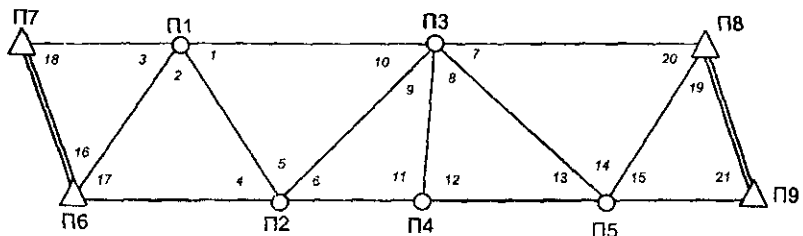


Рис. 6.5. Сеть триангуляции из [84, с. 145]

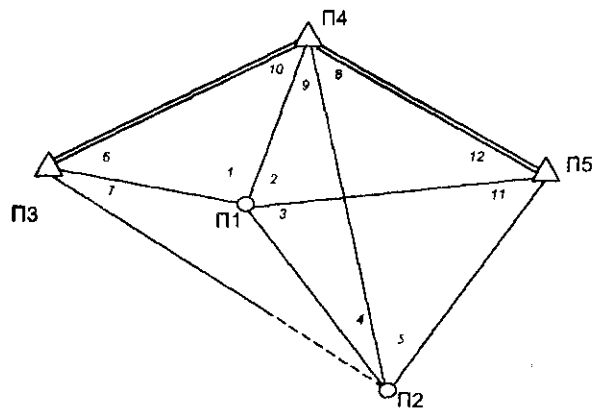


Рис. 6.6. Сеть триангуляции из [84, с. 160]

Геодезический четырехугольник из [53], (рис. 6.1)

Таблица 6.1

Обозначения	Независимые величины			Зависимые величины		
	МНК	многокритериальная		МНК	многокритериальная	
	$n = 2,0$	n	V	$n = 2,0$	n	V
	2	3	4	5	6	7
μ	5,000		4,644	5,170		3,048
M_1	0,103 м		0,098 м	0,0651 м		0,02477 м
M_2	0,163		0,123	0,1368		0,0254
V_1	-1,31"	1,58	-0,03"	4,21"	2,23	-0,58"
V_2	0,22	1,53	0,49	1,14	2,07	1,13
V_3	0,45	1,20	0,07	-1,87	1,40	1,20
V_4	21,89	2,22	18,69	14,49	2,09	20,44
V_5	-8,67	2,10	12,24	-14,73	3,20	-10,54
V_6	18,97	2,10	21,28	23,17	2,90	18,94
V_7	-13,80	2,22	-12,14	-12,84	2,90	-13,99
V_8	12,25	2,08	13,89	16,43	2,70	13,40
$v_s^T p_s v_s$	1257		1293	1128	однокрит	12,04
					1,5	16,48
					2,5	11,53

Триангуляция из [79, с. 93], (рис. 6.2)

Таблица 6.2

Обозначения	Независимые величины			Зависимые величины		
	МНК	Многокритериальная		МНК	Многокритериальная	
	$n = 2,0$	n	V	$n = 2,0$	n	V
	2	3	4	5	6	7
μ	1,003		0,975	0,943		0,969
M_1	0,052 м		0,046 м	0,028 м		0,005 м
M_2	0,054		0,046	0,034		0,006
M_3	0,024		0,020	0,015		0,002
V_1	0,14"	2,83	0,11"	0,13"	2,72	0,08"
V_2	-0,58	1,81	-0,52	-0,57	4,00	-0,61
V_3	0,95	1,46	1,14	0,95	4,00	0,90
V_4	0,24	2,86	0,22	0,26	4,00	0,24
V_5	-0,48	3,00	-0,30	-0,50	4,00	-0,54
V_6	0,05	2,73	0,04	0,06	2,41	0,02
V_7	0,09	2,99	-0,15	0,08	2,85	0,20
V_8	0,21	3,00	0,23	0,21	3,53	0,28
V_9	0,09	2,82	-0,11	0,10	4,00	0,18
V_{10}	-0,50	1,57	-0,45	-0,50	1,75	-0,54
V_{11}	0,02	2,97	-0,13	0,04	3,28	0,14
V_{12}	0,82	1,52	0,89	0,81	3,76	0,75
V_{13}	-0,22	2,86	-0,07	-0,23	1,18	-0,25
$v_s^T p_s v_s$	2,581		2,826	3,375	однокрит	3,376
					1,5	3,712
					2,5	3,300

Триангуляция из [79, с. 129], (рис. 6.3)

Таблица 6.3

Обозначения	Независимые величины			Зависимые величины		
	МНК	многокритериальная		МНК	многокритериальная	
	$n = 2,0$	n	V	$n = 2,0$	n	V
1	2	3	4	5	6	7
μ	1,017		1,020	2,973		2,662
M_1	0,048 м		0,046 м	0,0508 м		0,0041 м
M_2	0,029		0,030	0,0224		0,0030
M_3	0,039		0,040	0,0342		0,0041
V_1	-0,24"	1,66	-0,26"	1,04"	2,13	-0,07"
V_2	0,40	1,48	0,41	-0,84	2,49	0,16
V_3	-0,15	1,58	-0,18	0,63	1,96	-0,18
V_4	-0,08	1,11	-0,05	-0,86	1,80	-0,05
V_5	0,70	1,75	0,63	-0,10	2,70	0,53
V_6	0,27	1,78	0,28	0,89	2,59	0,47
V_7	-0,64	1,59	-0,60	-0,80	2,80	-0,74
V_8	0,17	2,12	0,05	1,02	1,31	0,27
V_9	-0,11	1,14	-0,10	-0,42	2,05	0,22
V_{10}	-0,98	1,67	-1,04	-0,86	1,74	-1,06
V_{11}	0,54	1,61	0,59	0,14	1,82	0,47
V_{12}	1,75	2,28	1,74	1,25	2,48	1,55
V_{13}	-2,71	1,98	-2,70	-4,11	2,60	-2,89
V_{14}	0,94	2,37	0,94	0,89	2,12	1,15
V_{15}	0,95	2,35	0,99	0,92	2,28	0,97
V_{16}	-0,75	1,62	-0,78	-0,32	2,78	-0,51
V_{17}	0,75	1,67	0,78	0,46	2,08	0,82
V_{18}	0,68	1,62	0,74	0,16	1,98	0,50
V_{19}	-0,71	1,76	-0,64	0,15	1,90	-0,75
v_n^T, p_n, y_n	16,80		16,90	28,28	однокрит	14,20
					1,5	19,14
					2,5	21,16

Таблица 6.4

Триангуляция из [79, с. 153], (рис. 6.4)

Обозначения	Независимые величины			Зависимые величины		
	МНК	многокритериальная		МНК	многокритериальная	
	$n = 2,0$	n	V	$n = 2,0$	n	V
1	2	3	4	5	6	7
μ	1,028		1,011	1,352		1,357
M_1	0,042 м		0,040 м	0,0349 м		0,0027 м
M_2	0,044		0,043	0,0350		0,0026
M_3	0,021		0,020	0,0196		0,0024
V_1	0,10"	2,40	0,06"	0,07"	4,00	-0,05"
V_2	0,74	1,80	0,79	0,78	3,80	0,82
V_3	0,98	1,67	0,94	0,98	3,90	0,98

Окончание табл. 6.4

V ₄	0,26	2,97	0,23	0,26	4,00	0,27
V ₅	0,69	1,81	0,76	0,68	4,00	0,67
V ₆	-0,36	3,00	-0,28	-0,32	2,87	-0,28
V ₇	-0,11	2,69	-0,14	-0,15	4,00	-0,28
V ₈	-0,52	3,00	-0,36	-0,50	4,00	-0,51
V ₉	0,04	2,21	0,03	0,02	4,00	0,06
V ₁₀	0,92	1,77	0,84	0,92	4,00	1,01
V ₁₁	-1,07	1,77	-1,20	-1,10	4,00	-1,12
V ₁₂	-0,13	2,33	-0,14	-0,09	1,63	-0,04
V ₁₃	1,46	1,76	-1,44	-1,42	2,86	-1,30
V ₁₄	0,51	1,55	0,57	0,55	1,79	0,67
V ₁₅	0,22	2,54	0,14	0,20	1,76	0,12
V ₁₆	0,14	1,98	-0,01	0,09	2,71	0,04
r_{μ}^2, r_{μ}	6,943		6,954	9,167	однокрит	8,85
					1,5	9,50
					2,5	9,10

Таблица 6.5

Триангуляция из [84, с. 145], (рис. 6.5)

Обо- знача- ния	Независимые величины			Зависимые величины		
	МНК	многокритериальная		МНК	многокритериальная	
	n = 2,0	n	V	n = 2,0	n	V
1	2	3	4	5	6	7
μ	0,978		0,979	1,596		1,601
M ₁	0,141 м		0,141 м	0,1346 м		0,0487 м
M ₂	0,140		0,140	0,1691		0,0542
M ₃	0,147		0,147	0,1877		0,0537
M ₄	0,161		0,161	0,1988		0,0431
M ₅	0,129		0,129	0,1607		0,0400
V ₁	-0,96"	2,00	-0,96"	-0,96"	3,57	-0,99"
V ₂	-1,39	2,00	-1,37	-1,39	3,49	-1,30
V ₃	-0,58	2,00	-0,59	-0,58	2,70	-0,59
V ₄	-0,46	2,00	-0,46	-0,46	3,04	-0,53
V ₅	-0,05	2,00	-0,04	-0,04	2,91	0,00
V ₆	0,81	2,00	0,81	0,81	2,69	0,79
V ₇	-0,70	2,00	-0,70	-0,68	3,41	-0,67
V ₈	-0,60	2,00	-0,64	-0,62	2,84	-0,64
V ₉	0,44	2,00	0,43	0,44	2,51	0,47
V ₁₀	-0,54	2,00	-0,54	-0,53	3,29	-0,56
V ₁₁	0,66	2,00	0,68	0,66	3,68	0,66
V ₁₂	-0,40	2,00	-0,39	-0,39	2,55	-0,41
V ₁₃	-0,58	2,00	-0,55	-0,57	3,51	-0,53
V ₁₄	-0,75	2,00	-0,72	-0,75	3,19	-0,76
V ₁₅	-0,66	2,00	-0,61	-0,66	3,11	-0,61
V ₁₆	0,04	2,00	0,04	0,04	2,49	0,09

Окончание табл. 6.3

V ₁₇	-0,11	2,00	-0,13	-0,11	2,82	-0,13
V ₁₈	-1,43	2,00	-1,42	-1,43	2,21	-1,47
V ₁₉	-0,50	2,00	-0,43	-0,48	2,46	-0,50
V ₂₀	-0,03	2,00	-0,06	-0,05	1,98	-0,04
V ₂₁	10,76			-1,08	1,11	-1,11
$V_n^T P_n V_n$	9,6351		9,4229	22,50	однокрит	21,89
					1,5	22,48
					2,5	22,47

Таблица 6.6

Триангуляция из [84, с. 160], (рис. 6.6)

Обозначения	Независимые величины			Зависимые величины		
	МНК n = 2,0	многокритериальная n	V	МНК n = 2,0	многокритериальная n	V
l	2	3	4	5	6	7
μ	0,980		0,957	2,959		2,802
M ₁	0,080 м		0,075 м	0,0461 м		0,0079 м
M ₂	0,102		0,090	0,0508		0,0078
V ₁	1,14"	2,08	1,30"	0,40"	3,67	1,28"
V ₂	0,94	1,95	0,92	0,90	4,00	0,94
V ₃	-0,70	1,84	-0,72	-0,65	1,41	-0,57
V ₄	1,31	2,28	1,29	1,62	3,70	1,12
V ₅	-3,13	2,06	-3,15	-2,96	2,29	-3,25
V ₆	0,15	1,26	0,10	0,37	2,72	0,00
V ₇	-0,55	2,15	-0,62	-0,15	3,79	-0,62
V ₈	1,23	1,81	1,25	1,19	2,89	1,24
V ₉	-3,29	2,15	-3,22	-3,59	2,91	-3,23
V ₁₀	0,22	1,40	0,13	0,56	1,67	0,15
V ₁₁	0,05	1,27	0,12	-0,46	3,05	0,23
V ₁₂	0,48	1,59	0,41	0,86	2,57	0,40
$V_n^T P_n V_n$	27,13		27,17	28,03	однокрит	31,55
					1,5	34,42
					2,5	27,27

6.2. Тестирование нового метода МК

Согласно фундаментальной теореме Гаусса – Маркова [47]

$$\sigma_{\text{МНК}}^2 \leq \sigma_x^2 \quad (6.15)$$

для любых методов нахождения \hat{x} . Это означает, что среди класса линейных несмещённых оценок \hat{x} вектора X оценки метода наименьших квадратов (МНК) будут наиболее точными.

В [49] опубликован многокритериальный линейный способ уравнивания (МК), основанный на поиске \hat{X} под условием минимума двух целевых функций

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^N P_n |L_i(X)|^n, \quad (6.16)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min(\max M), \quad (6.17)$$

где X – вектор координат определяемых пунктов; N – количество результатов измерений; n – показатель степени ($1.0 \leq n \leq 3.0$); $L(X) = T^{\text{выт}} - T^{\text{вм}}$, – свободный член нелинейного параметрического уравнения; $M = \mu \sqrt{Q_{ij} + Q_{j+1, j+1}}$ – ошибка положения пункта;

$$\mu = \sqrt{\frac{V_n^T P_n V_n}{N-t}}, \quad (6.18)$$

t – число параметров; $V_n = L(\hat{X})$;

$$Q = F P_n^{-1} F^T, \quad (6.19)$$

F – расширенная псевдообратная матрица

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C, \quad (6.20)$$

где

$$C = \text{diag}\{n_i(n_i - 1)P_n |L_i(X)|^{n-2}\} \quad (6.21)$$

Экспериментальные исследования показали, что, для МК, как правило,

$$\max M_{\text{МК}} \geq \max M_{\text{МК}}. \quad (6.22)$$

Это говорит о том, что согласно выражениям (6.16) – (6.22) получен новый метод, который эффективнее МК. В дополнение к этому, как будет показано ниже, компонент вектора $\hat{X}_{\text{МК}}$ будет ближе, чем для вектора $\hat{X}_{\text{МК}}$ к истинным значениям координат. Методика эксперимента заключается в следующем:

1. Для определяемых пунктов исследуемой геодезической сети выбираем начальный вектор $X^{\text{вст}}$ и по координатам всех пунктов вычисляем, решая обратные геодезические задачи, вектор $T^{\text{вст}}$ для истинных значений измеренных величин.

2. Используя датчик псевдослучайных чисел, генерируем согласно стандарту σ_p поправки $V \in N(0,1)$ и находим вектор $T^{\text{вм}} = T^{\text{вст}} + V$.

3. Применяя два метода уравнивания, найдём $\hat{X}_{\text{МК}}$ и $\hat{X}_{\text{МК}}$. Зная $X^{\text{вст}}$, вычислим векторы $\delta S_{\text{МК}} = \hat{X}_{\text{МК}} - X^{\text{вст}}$ и $\delta S_{\text{МК}} = \hat{X}_{\text{МК}} - X^{\text{вст}}$. Сравнивая $\max(\delta S)_{\text{МК}}$ и $\max(\delta S)_{\text{МК}}$, получим коэффициенты

$$d_1 = \frac{1}{j} \sum_{j=1}^{10} \frac{\max M_{\text{МНК}}}{\max M_{\text{МК}}}; \quad d_2 = \frac{1}{j} \sum_{j=1}^{10} \frac{\max(\delta S_j)_{\text{МНК}}}{\max(\delta S_j)_{\text{МК}}} \quad (6.23)$$

Если $d_2 \leq 1,0$, то уравненные координаты ближе к истинным значениям для МНК и наоборот.

В табл. 6.7 приведены результаты вычислений для трёх значений $\sigma_p = 1,0''$; $\sigma_p = 1,5''$ и $\sigma_p = 2,0''$ по десять вариантов для V при каждом σ_p и $P = E$ для МНК. В табл. 6.8 приведены d_1 и d_2 для трёх значений σ_p .

Таблица 6.7

Результаты многокритериального уравнивания по углам

Вариант	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$	Вариант	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$
Звено триангуляции из книги [84, с. 145] $\sigma_p = 1,0''$									
	d_1	d_2	3,00	1,14					
1	МНК	1,298	0,1057	0,2676	2	МНК	1,612	0,1312	0,2429
	МК	1,371	0,0403	0,2593		МК	1,698	0,0436	0,2353
	МНК/МК		2,62	1,03		МНК/МК		3,01	1,03
3	МНК	1,187	0,0967	0,1542	4	МНК	1,301	0,0968	0,3313
	МК	1,208	0,0317	0,1586		МК	1,335	0,0390	0,3013
	МНК/МК		3,05	0,97		МНК/МК		2,48	1,10
5	МНК	1,736	0,1414	0,3189	6	МНК	1,307	0,1064	0,1541
	МК	1,850	0,0510	0,3578		МК	1,372	0,0396	0,1594
	МНК/МК		2,77	0,89		МНК/МК		2,69	0,97
7	МНК	1,587	0,1293	0,2971	8	МНК	1,453	0,1184	0,1008
	МК	1,717	0,0383	0,1907		МК	1,520	0,0335	0,1059
	МНК/МК		3,38	1,56		МНК/МК		3,53	0,95
9	МНК	1,543	0,1256	0,3311	10	МНК	1,168	0,0951	0,2971
	МК	1,678	0,0409	0,2024		МК	1,224	0,0278	0,2378
	МНК/МК		3,07	1,64		МНК/МК		3,42	1,25
Звено триангуляции из книги [84, с. 145] $\sigma_p = 1,5''$									
	d_1	d_2	3,02	1,09					
1	МНК	1,297	0,1585	0,3988	2	МНК	1,612	0,1969	0,3644
	МК	1,095	0,0568	0,3434		МК	1,416	0,0672	0,3858
	МНК/МК		2,79	1,16		МНК/МК		2,93	0,94
3	МНК	1,187	0,1450	0,1392	4	МНК	1,301	0,1589	0,4969
	МК	9,55	0,0570	0,2256		МК	9,950	0,0578	0,4809
	МНК/МК		2,54	0,62		МНК/МК		2,75	1,03
5	МНК	1,736	0,2120	0,4784	6	МНК	1,307	0,1596	0,2312
	МК	1,416	0,0675	0,5587		МК	1,031	0,0510	0,2563
	МНК/МК		3,14	0,86		МНК/МК		3,13	0,90

Окончание табл. 6.7

7	МНК	1,587	0,1939	0,4456	8	МНК	1,453	0,1775	0,1512
	МК	1,364	0,0615	0,3095		МК	1,128	0,0551	0,1567
	МНК/МК		3,15	1,44		МНК/МК		3,22	0,96
9	МНК	1,543	0,1884	0,4967	10	МНК	1,168	0,1427	0,4456
	МК	1,241	0,0607	0,2721		МК	0,089	0,0421	0,3753
	МНК/МК		3,10	1,83		МНК/МК		3,39	1,19
Звено триангуляции из книги [84, с. 145] $\sigma_B=2,0''$									
	d_1	d_2	2,95	1,14					
1	МНК	1,297	0,2113	0,5317	2	МНК	1,612	0,2625	0,4858
	МК	0,908	0,0725	0,5849		МК	1,194	0,0963	0,4635
	МНК/МК		2,91	0,91		МНК/МК		2,73	1,05
3	МНК	1,187	0,1934	0,3083	4	МНК	1,301	0,2119	0,6625
	МК	0,788	0,0698	0,2775		МК	0,802	0,0719	0,6287
	МНК/МК		2,77	1,11		МНК/МК		2,95	1,05
5	МНК	1,736	0,2827	0,6379	6	МНК	1,307	0,2128	0,3083
	МК	1,153	0,1007	0,7166		МК	0,827	0,0694	0,3455
	МНК/МК		2,81	0,89		МНК/МК		3,07	0,89
7	МНК	1,587	0,2585	0,5942	8	МНК	1,453	0,2367	0,2016
	МК	1,128	0,0831	0,4283		МК	0,871	0,0748	0,1976
	МНК/МК		3,11	1,39		МНК/МК		3,16	1,02
9	МНК	1,543	0,2512	0,6622	10	МНК	1,168	0,1903	0,5942
	МК	1,076	0,0869	0,3409		МК	0,756	0,0615	0,5326
	МНК/МК		2,89	1,94		МНК/МК		3,09	1,12

Таблица 6.8

Результаты многокритериального уравнивания по направлениям

Вариант	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$	Вариант	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$
Звено триангуляции из книги [84, с. 145] $\sigma_B=1,0''$									
	d_1	d_2	5,20	1,18					
1	МНК	3,312	0,2306	0,4298	2	МНК	3,192	0,3172	0,4374
	МК	2,332	0,0352	0,4327		МК	3,512	0,0351	0,3300
	МНК/МК		6,55	0,99		МНК/МК		9,04	1,33
3	МНК	2,542	0,1724	0,1977	4	МНК	2,754	0,1363	0,4088
	МК	2,101	0,0607	0,1602		МК	2,349	0,0525	0,3478
	МНК/МК		2,84	1,23		МНК/МК		2,60	1,18
5	МНК	2,977	0,1387	0,2626	6	МНК	2,701	0,2122	0,1849
	МК	3,250	0,0359	0,2865		МК	7,869	0,1862	0,7122
	МНК/МК		3,86	0,92		МНК/МК		1,14	0,26
7	МНК	3,107	0,2138	0,1915	8	МНК	2,395	0,1698	0,2825
	МК	3,010	0,0466	0,2022		МК	2,340	0,0201	0,1731

Окончание табл. 6.8

	МНК/МК		4,59	0,95		МНК/МК		8,45	1,63
9	МНК	3,053	0,2765	0,2089	10	МНК	2,589	0,2366	0,4261
	МК	2,541	0,0427	0,1379		МК	2,263	0,0366	0,2322
	МНК/МК		6,48	1,51		МНК/МК		6,46	1,84
Звено триангуляции из книги [84, с. 145] $\sigma_B=1,5''$									
	d_1	d_2	5,68	1,19					
1	МНК	3,312	0,3459	0,6447	2	МНК	3,192	0,4758	0,6561
	МК	1,797	0,0733	0,3995		МК	2,926	0,0567	0,5935
	МНК/МК		4,72	1,61		МНК/МК		8,39	1,11
3	МНК	2,542	0,2585	0,2965	4	МНК	2,754	0,2045	0,6132
	МК	1,891	0,1596	0,6061		МК	2,093	0,0433	0,4526
	МНК/МК		1,62	0,49		МНК/МК		4,72	1,35
5	МНК	2,977	0,3256	0,3939	6	МНК	2,701	0,3183	0,2774
	МК	2,703	0,0512	0,5408		МК	2,827	0,0844	0,2662
	МНК/МК		6,36	0,73		МНК/МК		3,77	1,04
7	МНК	3,107	0,3207	0,2873	8	МНК	2,395	0,2547	0,4238
	МК	2,606	0,0896	0,3716		МК	1,858	0,0285	0,2496
	МНК/МК		3,58	0,77		МНК/МК		8,94	1,70
9	МНК	3,053	0,4147	0,3133	10	МНК	2,589	0,3549	0,6391
	МК	1,949	0,0583	0,2380		МК	2,025	0,0467	0,3592
	МНК/МК		7,11	1,32		МНК/МК		7,60	1,78
Звено триангуляции из книги [84, с. 145] $\sigma_B=2,0''$									
	d_1	d_2	4,77	1,13					
1	МНК	3,312	0,4612	0,8596	2	МНК	3,192	0,6344	0,8748
	МК	1,548	0,0999	0,7287		МК	2,590	0,1409	0,6987
	МНК/МК		4,62	1,18		МНК/МК		4,50	1,25
3	МНК	2,542	0,3447	0,3953	4	МНК	2,754	0,2727	0,8176
	МК	1,628	0,1535	0,3332		МК	1,539	0,0599	0,7818
	МНК/МК		2,25	1,19		МНК/МК		4,55	1,05
5	МНК	2,977	0,4342	0,5252	6	МНК	2,701	0,4244	0,3699
	МК	2,297	0,0664	0,5634		МК	7,940	0,5759	1,7555
	МНК/МК		6,54	0,93		МНК/МК		0,74	0,21
7	МНК	3,107	0,4276	0,3830	8	МНК	2,395	0,3396	0,5650
	МК	2,316	0,0955	0,4183		МК	1,924	0,0860	0,2862
	МНК/МК		4,48	0,92		МНК/МК		3,95	1,97
9	МНК	3,053	0,5530	0,4177	10	МНК	2,589	0,4732	0,8522
	МК	1,683	0,0668	0,3719		МК	1,826	0,0604	0,5749
	МНК/МК		8,28	1,12		МНК/МК		7,83	1,48

По данным табл. 6.7 и 6.8 можно сделать следующие выводы:

1. При $\sigma_B = 1,0''$ $R_{\text{МК}} = P_{\text{МК}} = E$, и поэтому во всех десяти вариантах $d_1 = 1,00$. Одновременно с этим $\mu_{\text{МК}} = \mu_{\text{МК}}$.

2. По величинам d_2 видно, что метод МК даёт координаты $\hat{X}_{\text{МК}}$ по сравнению с $\hat{X}_{\text{МК}}$ ближе к истинным значениям при любых σ_B .

Продолжим эти исследования для случая зависимых измеренных величин.

В табл. 6.9 приведены результаты вычислений для тех же трёх значений σ_B , что и в табл. 6.7, только в случае зависимых величин, когда вместо (6.16) используется целевая функция [69]

$$\Phi(X) = \left([L(X)]^a \right)^T K_s^{-1} [L(X)]^a, \quad (6.24)$$

где K_s — корреляционная матрица, содержащая недиагональные элементы по сравнению с матрицей P .

Таблица 6.9

Сводка значений d_1 и d_2 для трёх случаев

№ пп	σ_B	d_1	d_2
1	1,0''	3,00	1,14
2	1,5	3,02	1,09
3	2,0	2,95	1,14

В табл. 6.10 приведены d_1 и d_2 для различных σ_B в случае обобщённого метода многокритериальной оптимизации.

Таблица 6.10

Значения d_1 и d_2 для случая зависимых величин

№ пп	σ_B	d_1	d_2
1	1,0''	5,20	1,18
2	1,5	5,68	1,19
3	2,0	4,77	1,13

По данным табл. 6.10 видно, что при уравнивании по направлениям звена триангуляции из [84, с. 145], содержащего 5 определяемых пунктов, величина $\max M_{\text{МК}}$ в 3,5 раза меньше по сравнению с $\max M_{\text{МК}}$ при одновременном малом отклонении уравненных координат от их истинных значений для МК.

Ниже апробирован новый метод уравнивания, разработанный под руководством В.И. Мицкевича, решающий на основе единого алгоритма

следующие задачи: обработка независимых и зависимых результатов измерений по единой методике в рамках метода наименьших квадратов (МНК); метода Lp-оценок, включающего в себя МНК как частный случай и многокритериальный способ уравнивания. Начальным способом, из которого вытекали все другие, был алгоритм обобщенного метода Lp-оценок на основе метода Ньютона [69]. Формулы для нового метода были получены как аналитически, так и логически в [71]. Обобщение нового метода на обработку спутниковых GPS-сетей осуществлено в [73]. Теоретическое обоснование нового метода на основе исследований Ю.В. Кемница дано в [72].

Отметим, что формулы нового метода в процессе его разработки не претерпели значительных изменений. Основные проблемы в постановке нового алгоритма возникли при компьютеризации этого способа. Например, если при применении МНК и классического способа Lp-оценок начальные координаты пунктов должны быть близки к точке минимума и удалены от неё на расстояние не более 1/3 наименьшей стороны сети, то, как выяснилось позже, в новых обобщенных методах уравнивания начальные координаты должны быть найдены из обработки методами для независимых результатов измерений.

Обработка некоррелированных измерений

Результаты вычислений сведены в табл. 6.11.

Таблица 6.11

При необобщенном методе уравнивания $(P_a)_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$; $\sigma_b = 5''$

Обозн.	n=1,0 (МНМ)	n=2,0 (МНК)	n=3,0	Многокрит.			
				формула (6.17)		равенство (6.25)	
x _c	1249,842	1249,888	1249,905	1249,900		1249,902	
y _c	1230,102	1230,086	1230,064	1230,083		1230,092	
x _D	99,970	99,969	99,998	99,959		99,971	
y _D	499,944	499,955	499,971	499,965		499,972	
μ	8,554	3,545	1,612	2,554		3,700	
M _c , м	0,073	0,103	0,089	0,063		0,124	
M _D , м	0,127	0,163	0,164	0,061		0,171	
				степень и	попр. V	степень и	попр. V
V ₁ ''	0,00	-1,33	-1,04	1,12	-0,18	2,39	-1,39
V ₂ ''	0,00	0,22	3,31	1,20	0,00	2,40	-1,71
V ₃ ''	0,00	0,44	3,50	1,13	0,06	1,90	1,31
V ₄ ''	27,72	21,89	19,63	2,43	19,89	2,12	21,60
V ₅ ''	0,00	-8,67	-12,37	2,95	-10,94	1,30	-11,14
V ₆ ''	12,28	18,99	17,91	2,36	20,23	1,80	18,48
V ₇ ''	-27,72	-13,78	-14,90	2,45	-12,71	2,50	-11,51
V ₈ ''	10,72	12,24	13,96	2,27	13,65	2,50	14,36

По данным табл. 6.11 видно, что при многокритериальной оптимизации неудачно применена целевая функция (6.25), что приводит к большим значениям M_C, M_D .

$$\Phi_1(X, n) = \sum_{i=1}^N \left| \min_{1 \leq j \leq N} (K_{ij}) \right|; \quad (6.25)$$

$$K_{ij} = AFK_{ij}; \quad (6.26)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min(\text{cond}). \quad (6.27)$$

Обработка коррелированных измерений

Использование корреляционной матрицы

$$K_r = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ & & \text{sim} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -0.5 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

приводит к уравниванию геодезического четырёхугольника по направлениям при составлении матрицы A для углов.

Результаты вычислений сведены в табл. 6.12

Таблица 6.12

Обобщенный метод уравнивания

Обозн	$n=1,0$ (МНМ)	$n=2,0$ (МНК)	$n=3,0$	Многокрит.			
				формула (6.17)		равенство (6.25)	
x_C	1249,842	1249,919	1249,915	1249,890		1249,901	
y_C	1230,102	1230,071	1230,049	1230,078		1230,092	
x_D	99,971	99,926	99,987	99,968		99,969	
y_D	499,944	499,983	499,980	499,959		499,961	
μ	10,593	5,169	2,290	3,081		4,986	
$M_C, м$	0,055	0,065	0,016	0,005		0,044	
$M_D, м$	0,360	0,137	0,025	0,006		0,069	
				степень n	попр. V	степень n	попр. V
V_1''	-0,05	4,22	1,59	3,26	-0,24	2,20	-2,51
V_2''	0,00	1,16	5,47	2,01	1,50	1,90	-1,72
V_3''	0,00	-1,86	3,08	1,11	0,50	1,30	0,72
V_4''	27,73	14,50	16,25	2,32	20,60	1,78	21,57
V_5''	0,00	-14,71	-14,50	3,90	-9,35	3,00	-10,98
V_6''	12,32	23,14	19,08	2,89	19,14	2,00	20,22
V_7''	-20,67	-12,88	-16,31	2,56	-14,86	2,20	-10,35
V_8''	10,68	16,43	15,34	2,13	12,71	1,45	13,04

Метод статистических испытаний нового алгоритма

Статистические испытания проведены по методике, опубликованной в [8, 9, 10, 30]. В таблицах 6.15 и 6.16 приведены статистические испытания для обратной засечки, у которой 7 исходных пунктов лежат на окружности R = 1000 м, а определяемый пункт находится в центре этой окружности.

Таблица 6.13

Статистические испытания геодезического четырехугольника при некоррелированных измерениях

Вариант	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$	Вариант	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$
1	d_1	d_2	2,45	0,87	2	МНК МК МНК/МК	$M_{\max}(6,33)$		
	МНК	0,924	0,0426	0,0370			0,884	0,0407	0,0524
	МК	0,459	0,0116	0,0565			0,790	0,0251	0,0593
3	МНК/МК		3,67	0,65	4	МНК/МК МНК МК МНК/МК	1,62		0,88
	МНК	1,152	0,0531	0,0310			1,393	0,0642	0,0952
	МК	0,744	0,0243	0,0217			0,509	0,0160	0,1003
5	МНК/МК		2,19	1,43	6	МНК/МК МНК МК МНК/МК	4,01		0,95
	МНК	2,108	0,0972	0,0442			1,359	0,0626	0,0312
	МК	1,931	0,0594	0,0470			0,641	0,0380	0,0466
7	МНК/МК		1,64	0,94	8	МНК МК МНК/МК	1,65		0,67
	МНК	0,979	0,0451	0,0272			1,455	0,0671	0,0701
	МК	0,869	0,0221	0,0585			0,788	0,0296	0,0833
9	МНК/МК		2,04	0,46	10	МНК/МК МНК МК МНК/МК	2,27		0,84
	МНК	1,040	0,0479	0,0810			1,125	0,0518	0,0274
	МК	0,484	0,0166	0,0896			0,596	0,0202	0,0275
1	МНК/МК		2,89	0,90	2	МНК/МК МНК МК МНК/МК	2,56		1,00
	d_1	d_2	1,93	0,85			cond(6,27)		
	МНК	0,924	0,0426	0,0370			0,884	0,0407	0,0524
1	МК	0,466	0,0138	0,0371	МК	0,614	0,0205	0,0643	
	МНК/МК		3,09	1,00	МНК/МК	1,99	0,81		

3	МНК	1,152	0,0531	0,0310	4	МНК	1,393	0,0642	0,0952
	МК	0,582	0,0349	0,0381		МК	0,752	0,0211	0,1018
5	МНК/МК		1,52	0,81	6	МНК/МК		3,04	0,94
	МНК	2,108	0,0972	0,0442		МНК	1,359	0,0626	0,0312
	МК	1,829	0,0922	0,0466		МК	0,648	0,0412	0,0509
	МНК/МК		1,05	0,95		МНК/МК		1,52	0,61
7	МНК	0,979	0,0451	0,0272	8	МНК	1,455	0,0671	0,0701
	МК	0,443	0,0315	0,0247		МК	0,728	0,0414	0,0816
	МНК/МК		1,43	1,10		МНК/МК		1,62	0,86
9	МНК	1,040	0,0479	0,0810	10	МНК	1,125	0,0518	0,0274
	МК	0,837	0,0330	0,0942		МК	0,593	0,0197	0,0482
	МНК/МК		1,45	0,86		МНК/МК		2,63	0,57
1	d ₁	d ₂	0,95	0,89	2	кор (6,26)			
	МНК	0,924	0,0426	0,0370		МНК	0,884	0,0407	0,0524
3	МК	0,984	0,0353	0,0407	4	МК	1,329	0,0513	0,0593
	МНК/МК		1,21	0,91		МНК/МК		0,79	0,88
	МНК	1,152	0,0531	0,0310		МНК	1,393	0,0642	0,0952
5	МК	1,493	0,0661	0,0364	6	МК	1,816	0,0775	0,0965
	МНК/МК		0,80	0,85		МНК/МК		0,83	0,99
	МНК	2,108	0,0972	0,0442		МНК	1,359	0,0626	0,0312
7	МК	2,101	0,0963	0,0498	8	МК	1,540	0,0674	0,0288
	МНК/МК		1,01	0,89		МНК/МК		0,93	1,08
9	МНК	0,979	0,0451	0,0272	10	МНК	1,455	0,0671	0,0701
	МК	1,573	0,0574	0,0453		МК	1,658	0,0594	0,0775
	МНК/МК		0,79	0,60		МНК/МК		1,13	0,90
9	МНК	1,040	0,0479	0,0810	10	МНК	1,125	0,0518	0,0274
	МК	1,137	0,0477	0,0921		МК	1,165	0,0517	0,0296
	МНК/МК		1,00	0,88		МНК/МК		1,00	0,93

Таблица 6.14

Уравнение четырёхугольника по направлениям с применением корреляционной матрицы K_r .

Вариант	Метод	μ	$M(\max)$	$\delta S(\max)$	Вариант	Метод	μ	$M(\max)$	$\delta S(\max)$
	d_1	3,88	0,80				$M_{\max}(6,33)$		
1	МНК	1,256	0,0347	0,0447	2	МНК	1,200	0,0365	0,0524
	МК	2,902	0,0095	0,0671		МК	0,858	0,0113	0,0635
	МНК/МК	3,65	0,67			МНК/МК	3,23	0,83	
3	МНК	1,555	0,0412	0,0137	4	МНК	1,933	0,0534	0,1055
	МК	2,194	0,0339	0,0673		МК	3,102	0,0166	0,0813
	МНК/МК	1,22	0,20			МНК/МК	3,22	1,30	
5	МНК	2,828	0,0283	0,0442	6	МНК	2,105	0,0590	0,0112
	МК	1,561	0,0096	0,0438		МК	1,179	0,0115	0,0204
	МНК/МК	2,95	1,01			МНК/МК	5,13	0,55	
7	МНК	1,475	0,0220	0,0236	8	МНК	2,050	0,0542	0,0740
	МК	1,844	0,0214	0,0314		МК	1,342	1,6160	0,0802
	МНК/МК	1,03	0,75			МНК/МК	0,03	0,92	
9	МНК	1,466	0,0405	0,0834	10	МНК	1,521	0,0402	0,0255
	МК	0,576	0,0028	0,0786		МК	1,080	0,0103	0,0368
	МНК/МК	14,46	1,06			МНК/МК	3,90	0,69	
	d_2	5,39	0,78				cond(6,27)		
1	МНК	1,256	0,0347	0,0447	2	МНК	1,200	0,0365	0,0524
	МК	0,652	0,0094	0,0544		МК	0,876	0,0112	0,0638
	МНК/МК	3,69	0,82			МНК/МК	3,26	0,82	
3	МНК	1,555	0,0412	0,0137	4	МНК	1,933	0,0534	0,1055
	МК	1,416	0,0135	0,0289		МК	1,429	0,0211	0,0904
	МНК/МК	3,05	0,47			МНК/МК	2,53	1,17	
5	МНК	2,828	0,0283	0,0442	6	МНК	2,105	0,0590	0,0112
	МК	1,567	0,0105	0,0406		МК	1,037	0,0143	0,0343
	МНК/МК	2,70	1,09			МНК/МК	4,13	0,33	

7	МНК	1,475	0,0220	0,0236	8	МНК	2,050	0,0542	0,0740
	МК	1,795	0,0237	0,0336		МК	1,808	0,0378	0,0780
	МНК/МК		0,93	0,70		МНК/МК		1,43	0,95
9	МНК	1,466	0,0405	0,0834	10	МНК	1,521	0,0402	0,0255
	МК	0,982	0,0116	0,0922		МК	1,118	0,0014	0,0513
	МНК/МК		3,49	0,90		МНК/МК		28,71	0,50
	d ₁	d ₂	1,77	0,93		kor (6,26)			
1	МНК	1,256	0,0347	0,0447	2	МНК	1,200	0,0365	0,0524
	МК	1,215	0,0214	0,0504		МК	1,151	0,0363	0,0475
	МНК/МК		1,62	0,89		МНК/МК		1,01	1,10
3	МНК	1,555	0,0412	0,0137	4	МНК	1,933	0,0534	0,1055
	МК	1,977	0,0087	0,0306		МК	1,875	0,0547	0,0977
	МНК/МК		4,74	0,45		МНК/МК		0,98	1,08
5	МНК	2,828	0,0283	0,0442	6	МНК	2,105	0,0590	0,0112
	МК	2,462	0,0287	0,0477		МК	3,090	0,0427	0,0133
	МНК/МК		0,99	0,93		МНК/МК		1,38	0,84
7	МНК	1,475	0,0220	0,0236	8	МНК	2,050	0,0542	0,0740
	МК	1,780	0,0382	0,0230		МК	1,714	0,0246	0,0720
	МНК/МК		0,58	1,03		МНК/МК		2,20	1,03
9	МНК	1,466	0,0405	0,0834	10	МНК	1,521	0,0402	0,0255
	МК	1,385	0,0362	0,0700		МК	1,282	0,0128	0,0349
	МНК/МК		1,12	1,19		МНК/МК		3,14	0,73

Таблица 6.15

Обработка обратной засечки на плоскости по углам

Вариант	Метод	μ	$M(\max)$	$\delta S(\max)$	Вариант	Метод	μ	$M(\max)$	$\delta S(\max)$
1	d_1	d_2	2,63	0,90	2	МНК	$M_{\max}(6,33)$	0,298	0,355
	МНК	1,733	0,0462	0,0254		МК	1,117	0,0086	0,0531
	МК	1,603	0,0436	0,0284		МНК/МК	0,487	3,47	0,67
3	МНК/МК		1,06	0,89	4	МНК	1,445	0,0385	0,0435
	МНК	0,993	0,0265	0,0141		МК	0,710	0,0117	0,0501
	МК	0,623	0,0143	0,0255		МНК/МК		3,29	0,87
5	МНК/МК		1,85	0,55	6	МНК	0,505	0,0135	0,0100
	МНК	2,513	0,0669	0,0369		МК	0,148	0,0023	0,0169
	МК	1,952	0,0433	0,0265		МНК/МК		5,87	0,59
7	МНК/МК		1,55	1,39	8	МНК	1,323	0,0352	0,0120
	МНК	1,614	0,0430	0,0310		МК	0,795	0,0225	0,0091
	МК	1,129	0,0201	0,0200		МНК/МК		1,56	1,32
9	МНК/МК		2,14	1,55	10	МНК	0,803	0,0214	0,0088
	МНК	2,113	0,0563	0,0131		МК	0,297	0,0053	0,0142
	МК	2,419	0,0394	0,0222		МНК/МК		4,04	0,62
1	МНК/МК		1,43	0,59	2	cond(6,27)			
	d_1	d_2	1,95	1,00		МНК	1,117	0,0298	0,0355
	МНК	1,733	0,0462	0,0540		МК	0,470	0,0084	0,0526
3	МНК/МК		1,16	1,78	4	МНК/МК		3,55	0,67
	МНК	0,993	0,0265	0,0141		МНК	1,445	0,0385	0,0435
	МК	0,767	0,0141	0,0264		МК	1,087	0,0249	0,0419
5	МНК/МК		1,88	0,53	6	МНК/МК		1,55	1,04
	МНК	2,513	0,0669	0,0369		МНК	0,505	0,0135	0,0100
	МК	2,585	0,0471	0,0222		МК	0,224	0,0045	0,0177
	МНК/МК		1,42	1,66		МНК/МК		3,00	0,56

7	МНК	1,614	0,0430	0,0310	МНК	1,323	0,0352	0,0120
	МК	1,255	0,0339	0,0295	МК	1,021	0,0223	0,0141
	МНК/МК		1,27	1,05	МНК/МК		1,58	0,85
9	МНК	2,113	0,0563	0,0131	МНК	0,803	0,0214	0,0088
	МК	2,022	0,0517	0,0117	МК	0,515	0,0071	0,0116
	МНК/МК		1,09	1,12	МНК/МК		3,01	0,76
1	d1	d2	0,98	1,13	kor (6,26)			
	МНК	1,733	0,0462	0,0254	МНК	1,117	0,0298	0,0355
	МК	1,970	0,0595	0,0075	МК	1,303	0,0281	0,0393
3	МНК/МК		0,78	3,39	МНК/МК		1,06	0,90
	МНК	0,993	0,0265	0,0141	МНК	1,445	0,0385	0,0435
	МК	1,252	0,0293	0,0162	МК	1,275	0,0342	0,0470
5	МНК/МК		0,90	0,87	МНК/МК		1,13	0,93
	МНК	2,513	0,0669	0,0369	МНК	0,505	0,0135	0,0100
	МК	2,592	0,0674	0,0491	МК	0,490	0,0115	0,0114
7	МНК/МК		0,99	0,75	МНК/МК		1,17	0,88
	МНК	1,614	0,0430	0,0310	МНК	1,323	0,0352	0,0120
	МК	1,982	0,0436	0,0282	МК	1,582	0,0432	0,0236
9	МНК/МК		0,99	1,10	МНК/МК		0,81	0,51
	МНК	2,113	0,0563	0,0131	МНК	0,803	0,0214	0,0088
	МК	2,131	0,0585	0,0146	МК	0,776	0,0208	0,0084
	МНК/МК		0,96	0,90	МНК/МК		1,03	1,05

Таблица 6.16
Статистические испытания обратной засечки с применением корреляционной матрицы для уравнения по направлениям

Вариант	Метод	μ	$M(\max)$	$\delta S(\max)$	Вариант	Метод	μ	$M(\max)$	$\delta S(\max)$	
1	d_1	d_2	139,62	1,83	2		$M_{\max}(6,33)$		$\delta S(\max)$	
	МНК	6,788	0,0645	0,0704		МНК	4,069	0,1912	0,0182	
	МК	2,851	0,0002	0,0250		МК	2,272	0,0002	0,0306	
3	МНК/МК		322,50	2,82	4	МНК/МК		956,00	0,59	
	МНК	4,507	0,0391	0,0474		МНК	3,201	0,0548	0,0410	
	МК	2,222	0,0092	0,0131		МК	2,272	0,0180	0,0485	
5	МНК/МК		4,25	3,62	6	МНК/МК		3,04	0,85	
	МНК	9,649	0,0300	0,1526		МНК	1,455	0,0024	0,0228	
	МК	5,421	0,0038	0,0795		МК	0,644	0,0029	0,0166	
7	МНК/МК		7,89	1,92	8	МНК/МК		0,83	1,37	
	МНК	12,0563	0,1195	0,2028		МНК	5,304	0,0504	0,0827	
	МК	5,391	0,0174	0,1144		МК	2,182	0,0016	0,0622	
9	МНК/МК		6,87	1,77	10	МНК/МК		31,50	1,33	
	МНК	10,063	0,1618	0,0913		МНК	4,784	0,0625	0,0565	
	МК	4,572	0,0144	0,0341		МК	2,440	0,0012	0,0432	
1	МНК/МК		11,24	2,68	2	МНК/МК		52,08	1,31	
	d_1	d_2	239,50	3,81			cond(6,27)			
	МНК	6,788	0,0645	0,0704		МНК	4,069	0,1912	0,0182	
3	МК	2,571	0,0005	0,0200	МК	2,127	0,0023	0,0404		
	МНК/МК		129,00	3,52	МНК/МК		83,13	0,45		
	МНК	4,507	0,0391	0,0474	МНК	3,201	0,0548	0,0410		
5	МК	1,391	0,0002	0,0226	МК	1,940	0,0059	0,0358		
	МНК/МК		195,50	2,10	МНК/МК		9,29	1,15		
	МНК	9,649	0,0300	0,1526	МНК	1,455	0,0024	0,0228		
5	МК	4,036	0,0224	0,0160	МК	0,839	0,0011	0,0159		
	МНК/МК		1,34	9,54	МНК/МК		2,18	1,43		

7	МПК	12,056	0,1195	0,2028	МПК	5,304	0,0504	0,0827
	МК	2,385	0,0001	0,0242	МК	1,829	0,0006	0,0461
	МПК/МК		1195,00	8,38	МПК/МК		84,00	1,79
9	МПК	10,063	0,1618	0,0913	МПК	4,784	0,0625	0,0565
	МК	4,463	0,0003	0,0126	МК	1,811	0,0004	0,0228
	МПК/МК		539,33	7,25	МПК/МК		156,25	2,48
	d ₁	d ₂	12,30	1,84		кор (6.26)		
1	МПК	6,788	0,0645	0,0704	МПК	4,063	0,1912	0,0182
	МК	4,889	0,0009	0,0288	МК	3,413	0,0176	0,0219
	МПК/МК		71,67	2,44	МПК/МК		10,86	0,83
3	МПК	4,507	0,0391	0,0474	МПК	3,201	0,0548	0,0410
	МК	2,484	0,0080	0,0152	МК	2,941	0,0126	0,0385
	МПК/МК		4,89	3,12	МПК/МК		4,35	1,06
5	МПК	9,649	0,0300	0,1526	МПК	1,455	0,0024	0,0228
	МК	6,859	0,0041	0,0845	МК	1,110	0,0057	0,0150
	МПК/МК		7,32	1,81	МПК/МК		0,42	1,52
7	МПК	12,056	0,1195	0,2028	МПК	5,304	0,0504	0,0827
	МК	6,317	0,0112	0,0795	МК	3,719	0,0067	0,0397
	МПК/МК		10,67	2,55	МПК/МК		7,52	2,08
9	МПК	10,063	0,1618	0,0913	МПК	4,784	0,0625	0,0565
	МК	9,267	0,0679	0,0418	МК	4,431	0,0214	0,0734
	МПК/МК		2,38	2,18	МПК/МК		2,92	0,77

Поясним результаты счёта, приведенные в табл. 6.13 – 6.16:

1) каждая таблица состоит из 3-х частей, в которых реализован многокритериальный метод (МК) на моделях геодезических сетей. В первой части используется формула (6.2), во второй – формула (6.27), в третьей – формула (6.25);

2) по координатам всех пунктов вычисляются истинные значения измерений, и эти координаты мы называем истинными;

3) каждому истинному измерению даётся поправка по датчику случайных чисел, разработанному К.Л. Проворовым в соответствии с точностью измерений σ , и номеру варианта;

4) уравнивание выполняется по МНК и по МК в десяти вариантах, и поскольку уравнивание по МНК не связано с равенствами (6.2), (6.27) и (6.25), в трёх вариантах для формул (6.2), (6.27) и (6.25) числа в строчках МНК одинаковы в соответствующем варианте;

5) для каждого варианта записывается величина МНК/МК, которая характеризует для $d_1 \geq 1,1$ лучший показатель оценки точности пунктов в слабом месте для МК, и $d_2 \geq 1,1$ характеризует отклонение от истины, вычисляемое для δ_{\max} (наибольшее расстояние в метрах между урavnенными координатами и их истинными значениями);

6) чем больше d_1 и d_2 , которые вычислены как среднее арифметическое из десяти вариантов, тем лучше метод МК.

По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Формулы (4.76) – (4.81) позволяют уравнивать любые геодезические сети по единому алгоритму, универсальному и эффективному.

2. Все попытки записать матрицу Z по формуле (4.63) средствами матричной алгебры не удалось. При $n = 2$ согласно (4.62) $Z = 0$.

3. Эффективность решения обратной засечки (табл. 6.16) превзошла все ожидания: новый метод во всех случаях оказался точнее, и определение координат оказалось в 2 раза ближе к истинному положению определяемого пункта.

4. Программы, по которым выполнялись вычисления, являлись исследовательскими при $N \leq 40$ и $t \leq 15$ для GPS и $t \leq 10$ для плановых сетей.

5. Проведённые исследования показали, что при обработке плановых геодезических сетей уравнивание по направлениям многокритериальным способом является эффективным и приводит к многократному уменьшению величины M по сравнению с M по МНК.

6.3. Сравнение программных продуктов на тестовых примерах

Программный комплекс ООО создан в 1999 – 2004 гг. для реализации метода Lp-оценок для одно- и многокритериальной оптимизации геодезических измерений. Программный комплекс KEMNIZ создан в 2005 – 2007 гг. для реализации уравнивания плановых геодезических сетей обобщённым методом Lp-оценок.

Целью исследований является сопоставление результатов математической обработки двух программных комплексов при однородной постановке задачи. В результате уравнивания геодезического четырёхугольника по направлениям как с привлечением углов, замыкающих горизонт, так и с использованием корреляционной матрицы поправок по методу наименьших квадратов.

Из теории математической обработки геодезических измерений известно, что уравнивание геодезического четырёхугольника классическим способом с привлечением углов, замыкающих горизонт, и обобщённым методом наименьших квадратов даёт одинаковые результаты. На этом основываются все выполненные исследования. Один и тот же геодезический четырёхугольник уравниваем трижды:

- 1) с использованием ориентирных углов [49];
- 2) с применением углов, замыкающих горизонт [94];
- 3) с использованием корреляционной матрицы поправок [46, 71].

Первый случай реализуем отдельно без составления программы. Второй вариант – с применением программного комплекса ООО.bat и третий вариант – с применением программы KEMNIOOO.bat

Вторая часть исследований заключается в сравнении результатов уравнивания геодезического четырёхугольника по направлениям многокритериальным способом (МК) по четырём методикам:

- 1) нелинейным МК [49];
- 2) линейным МК [94];
- 3) МК с замыканием горизонта;
- 4) МК с привлечением корреляционной матрицы [71].

При этом методика 1 и 2 реализованы программным комплексом ООО, а алгоритмы, входящие в 3, 4 – программным комплексом KEMNIZ.

6.3.1. Уравнивание геодезического четырёхугольника по МНК с использованием углов, замыкающих горизонт, и корреляционной матрицы поправок K_d

Рассмотрим уравнивание по направлениям для геодезического четырёхугольника (см. рис. 5.1) тремя способами.

6.3.1.1. Применение ориентирных углов

Для каждого измеренного направления составляется 12 параметрических уравнений поправок вида

$$v_{AB} = -\delta Z_A + a_{AB} \delta x_A + b_{AB} \delta y_A + a_{BA} \delta x_B + b_{BA} \delta y_B + l'_{AB}, \quad (6.28)$$

где $l'_{AB} = \alpha_{AB}^{MKB} - (Z_A^{MKB} + M_{AB})$,

$$a_{AB} = \rho'' \frac{\Delta_{AB}}{S_{AB}^2}; \quad b_{AB} = -\rho'' \frac{\Delta_{AB}}{S_{AB}^2}. \quad (6.29)$$

Поправки в углы при уравнивании четырёхугольника приведены в табл. 6.17 (колонка 1).

6.3.1.2. Применение углов, замыкающих горизонт

Воспользуемся алгоритмом параметрического способа МНК с применением уравнений поправок, записанного для угла 1 (см. рис. 5.1)

$$v_1 = (a_{12} - a_{11})\delta x_1 + (b_{12} - b_{11})\delta y_1 + a_{21}\delta x_2 + b_{21}\delta y_2 - a_{11}\delta x_1 - b_{11}\delta y_1 + l_1, \quad (6.30)$$

При этом надо учитывать, что для исходного пункта 3 $\delta x_3 = \delta y_3 = 0$.

Таких уравнений поправок будет 12 (8 углов четырёхугольника и 4 угла, замыкающих горизонт).

Результаты уравнивания приведены в табл. 6.17 (колонка 2).

6.3.1.3. Применение программы КЕМНИООО с использованием углов, замыкающих горизонт

Здесь используется корреляционная матрица $\chi_{\alpha}^{-2} = P$. Результаты вычислений приведены в табл. 6.17 (колонка 3)

6.3.1.4. Уравнивание по направлениям с использованием корреляционной матрицы в программе КЕМНИООО при $\chi_{\alpha}^{-2} = P$ (без использования углов, замыкающих горизонт)

Поправки в углы приведены в табл. 6.17 (колонка 4) с использованием корреляционной матрицы, составленной по формуле Ю.И. Маркузе [46] при $\chi_{\alpha}^{-2} = P \frac{1}{S_{AB}^2}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	-0.5						
2	-0.5	1						
3			1	-0.5				
4			-0.5	1				
5					1	-0.5		
6					-0.5	1		
7							1	-0.5
8							-0.5	1

Таблица 6.17

Поправки в углы из уравнивания геодезического четырёхугольника по направлениям

№ пп	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3.91''	3.92''	3.90''	4.22''	4.62''	3.82''	0.51''	-0.24''
2	-0.26	-0.26	-0.26	1.16	-0.39	0.39	0.07	1.50
3	-2.30	-2.29	-2.30	-1.86	-0.98	0.36	-0.49	0.50
4	16.75	16.75	16.75	14.50	18.34	15.64	19.00	20.60
5	-12.25	-12.26	-12.26	-14.71	-11.11	-15.73	-11.44	-9.35
6	21.65	21.63	21.65	23.14	18.02	20.19	20.98	19.14
7	-13.39	-13.40	-13.39	-12.88	-15.57	-12.85	-12.58	-14.86
8	15.90	15.92	15.91	16.43	17.07	18.19	13.96	12.71
M ₁ , м	0.0683	0.0683	0.0683	0.0651	0.0723	0.0720	0.0304	0.0052
M ₂ , м	0.1009	0.1009	0.1009	0.1368	0.1014	0.0890	0.0457	0.0057

6.3.2. Уравнивание геодезического четырёхугольника по МК

В колонке 5 табл. 6.17 приведены поправки в углы, полученные МК-методом без линеаризации параметрических уравнений (нелинейный метод Ньютона) [55].

В колонке 6 даны поправки в углы из уравнивания линейным МК [59].

В колонке 7 приведены результаты вычислений МК-методом с применением углов, замыкающих горизонт.

В колонке 8 записаны поправки в углы при уравнивании линейным МК с применением

$$k_n = P^{-\frac{1}{2}} R P^{-\frac{1}{2}} \quad (6.31)$$

Вопросы многокритериального уравнивания плановых геодезических сетей методом Ньютона были рассмотрены в статье [55]. Линеаризованный вариант параметрического многокритериального способа (МК) изложен в статье [59]. Цель настоящей работы – применить линеаризованный метод для целевых функций

$$\Phi_1(X) = \left(|L(X)|^{\frac{1}{2}} \right)^T \cdot K_0^{-1} |L(X)|^{\frac{1}{2}}; \quad (6.32)$$

$$\Phi_2(X, n) = \min \max M, \quad (6.33)$$

где n – показатель степени, определяемый под условиями (6.33) для каждого измерения; M – ошибка положения определяемого пункта.

Минимизация функции (6.32) осуществляется под условием минимума функции (6.33). Выполняется это следующим путём:

- 1) вычисляется M_i при $n = 2, 0$;

2) изменяется степень n для одного из N измерений с шагом $n_{j+1} = n_j \pm 0.1$ и вычисляются два вектора $M_i (i = 1, k)$, где k – число определяемых пунктов;

3) запоминается то значение степени n_{j+1} , для которого выполняется функция (6.32),

4) за одно приближение вычисляются поправки в степень n для N измерений, количество итераций не более 20.

Для k -того пункта имеем ошибку положения

$$M_k = \mu \sqrt{Q_{kx} + Q_{k+1, k+1}}, \quad (6.34)$$

где
$$\mu_{MK} = \sqrt{\frac{V_{MK}^T K_n^{-1} V_{MK}}{r}}, \quad (6.35)$$

в которой r – количество избыточных измерений; $V_{MK} = T_{MK}^{obs} - T_{MK}^{nom}$.

Обратная матрица весов вычисляется по формуле

$$Q = FK_n F^T, \quad (6.36)$$

в которой

$$F = H^{-1} A^T C_2 \quad \text{при} \quad K_n^{-1} = F$$

$$F = \sum_{i=1}^n H^{-1} A^T C_2 \quad \text{при} \quad K_n^{-1} \neq F$$

$$H = Z + A^T C_2 A, \quad (6.37)$$

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M a_{ki} a_{lj} \cdot (C_1)_{kl}, \quad (6.38)$$

$$\forall \Phi = G = A^T C_2 l, \quad (6.39)$$

$$l = [1, 1, \dots, 1]^T, \quad (6.40)$$

где $A_{N \times n}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок с элементами a_{ij} ;

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \text{diag} \left(\frac{n_i |n_i - 2|}{2} \right) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[|L_i(X)|^{\frac{n_i}{2}} \right]^T \right\}; \quad (6.41)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot \text{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[\text{diag}(S_i \cdot \frac{n_i}{2}) \cdot |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \right]^T \right\}; \quad (6.42)$$

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot \text{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[|L_i(X)|^{\frac{n_i}{2}} \right]^T \right\}. \quad (6.43)$$

При этом для обобщённого МНК имеем

$$Q = (A^T K_2^{-1} A)^{-1}. \quad (6.44)$$

На основе выполненных исследований по уравниванию геодезического четырёхугольника можно сделать следующие выводы:

1) программа OOO.bat даёт такие же поправки φ (табл. 6.17, колонка 2), что и классический МНК при уравнивании по направлениям (табл. 6.17, колонка 1,) и программа KEMNI для некоррелированных углов с использованием углов, замыкающих горизонт (табл. 6.17, колонка 3). Так как поправки в колонках 1, 2, 3 одинаковы, то программные продукты во втором и третьем случаях работают верно;

2) программа KEMNI с использованием K_n (табл. 6.17, колонка 4) даёт близкие к тем же результатам уравнивания по углам, что и в первых трёх колонках;

3) применение многокритериальной оптимизации с использованием программ OPTNT2 (табл. 6.17, колонка 5) и OOP35 (табл. 6.17, колонка 6) с применением углов, замыкающих горизонт, даёт близкие результаты к полученным без использования корреляционной матрицы;

4) при применении программы KEMNIMMM, данные в колонках 7 и 8 табл. 6.17 отличаются лишь оценкой точности. Так, например, в колонке 7 данные получены с применением четырёх углов, замыкающих горизонт, а в колонке 8 – с применением K_n для восьми углов. Требуются дополнительные исследования по обоснованию малости величин оценок точности положения пунктов M_1 и M_2 (см. колонку 8).

Ниже выполним вычисления, используя 7 тестовых примеров, по которым достоверно установлено, что линейризованное многокритериальное уравнивание до 250 раз требует меньше машинного времени по сравнению с нелинейным и для пяти определяемых пунктов полигонометрии занимает до 150 с машинного времени на Pentium III.

В каждой таблице приведены:

$M_{\text{МНК}}$ – ошибка положения пункта для метода наименьших квадратов;

$M_{\text{МК}}$ – ошибка положения пункта для многокритериального метода;

$\delta S_{\text{МНК}}$ – сдвиг точки в МНК из-за введения поправок в измерения в моделируемой сети;

$\delta S_{\text{МК}}$ – сдвиг точки в МК, характеризующий отклонения от истинных координат пункта.

Величины δS получаются по координатам пунктов, заданных в исходной информации, и координатам, найденным в процессе уравнивания сгенерированными поправками в измерения $t^{\text{мк}} = t^{\text{мк}} + \Delta t$ с применением формул

по МНК

$$X_{\text{МНК}}^{(j+1)} = X_{\text{МНК}}^{(j)} - (A^T K_2^{-1} A)^{-1} A^T K_2^{-1} L_{\text{МНК}}, \quad (6.45)$$

где $L_{\text{МНК}} = T_{\text{МНК}}^{\text{МНК}} - T^{\text{МНК}}$;

и по МК

$$X_{\text{МК}}^{(j+1)} = X_{\text{МК}}^{(j)} - (A^T K_0^{-1} A)^{-1} A^T K_0^{-1} L_{\text{МК}}. \quad (6.46)$$

На основе данных табл. 6.17 можно сделать следующие выводы:

- 1) $\mu_{\text{МНК}}$ и $\mu_{\text{МК}}$ изменяются без закономерностей;
- 2) $M_{\text{МНК}} \geq M_{\text{МК}}$ практически во всех случаях;
- 3) $\delta S_{\text{МНК}}$ и $\delta S_{\text{МК}}$ близки друг к другу и не превосходят 3М.

Приведем сведения о тестовых примерах:

Пример 1. Геодезический четырехугольник триангуляции из статьи [53].

Пример 2. Сеть триангуляции из книги [79, с. 93].

Пример 3. Сеть триангуляции из книги [79, с. 129].

Пример 4. Сеть триангуляции из книги [79, с. 153].

Пример 5. Линейно-угловая триангуляция из книги [79, с. 217].

Пример 6. Звено триангуляции из книги [84, с. 145].

Таблица 6.18

Сравнение МНК с МК

Вар.	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$	Вар.	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$
Геодезический четырехугольник из статьи [53]									
	d_1	d_2	3,12	0,74					
1	МНК	1,256	0,0347	0,0447	2	МНК	1,200	0,0365	0,0524
	МК	0,799	0,0157	0,0593		МК	0,601	0,0108	0,0521
	МНК/МК		2,21	0,75		МНК/МК		3,38	1,01
3	МНК	1,555	0,0412	0,0137	4	МНК	1,933	0,0534	0,1055
	МК	1,353	0,0374	0,0535		МК	1,056	0,0136	0,0934
	МНК/МК		1,10	0,26		МНК/МК		3,93	1,13
5	МНК	2,828	0,0283	0,0442	6	МНК	2,105	0,0590	0,0112
	МК	1,469	0,0094	0,0434		МК	0,918	0,0111	0,0309
	МНК/МК		3,01	1,02		МНК/МК		5,32	0,36
7	МНК	1,475	0,0220	0,0236	8	МНК	2,050	0,0542	0,0740
	МК	0,802	0,0097	0,0207		МК	1,355	0,0112	0,0751
	МНК/МК		2,27	1,14		МНК/МК		4,84	0,99
9	МНК	1,467	0,0405	0,0834	10	МНК	1,521	0,0402	0,0255
	МК	50,923	0,0224	1,2955		МК	0,786	0,0119	0,0384
	МНК/МК		1,81	0,06		МНК/МК		3,38	0,66
Сеть триангуляции из книги [79, с.93]									
	d_1	d_2	3,04	0,98					
1	МНК	1,812	0,0745	0,0966	2	МНК	1,755	0,0521	0,1915
	МК	3,776	0,0673	0,0934		МК	1,461	0,0363	0,2640
	МНК/МК		1,11	1,03		МНК/МК		1,44	0,73

Продолжение табл. 6.18

3	МНК	1,508	0,0821	0,1221	4	МНК	2,573	0,1067	0,0864
	МК	1,542	0,0419	0,0631		МК	2,416	0,0300	0,1027
	МНК/МК		1,96	1,94		МНК/МК		3,56	0,84
5	МНК	4,072	0,1138	0,2393	6	МНК	1,927	0,0684	0,0691
	МК	4,116	0,0635	0,3271		МК	1,804	0,0269	0,0879
	МНК/МК		1,79	0,73		МНК/МК		2,54	0,79
7	МНК	2,908	0,0805	0,0795	8	МНК	1,868	0,0760	0,1284
	МК	3,340	0,0099	0,1130		МК	1,628	0,0234	0,1300
	МНК/МК		8,13	0,70		МНК/МК		3,25	0,99
9	МНК	3,250	0,1366	0,0570	10	МНК	1,515	0,0469	0,1275
	МК	3,465	0,0358	0,1282		МК	1,449	0,0165	0,0806
	МНК/МК		3,82	0,44		МНК/МК		2,84	1,58
Сеть триангуляции из книги [79, с.129]									
	d_1	d_2	6,96	0,73					
1	МНК	2,557	0,0420	0,0258	2	МНК	3,365	0,0456	0,0352
	МК	2,868	0,0068	0,1111		МК	3,447	0,0073	0,0438
	МНК/МК		6,18	0,23		МНК/МК		6,25	0,80
3	МНК	2,224	0,0204	0,0524	4	МНК	2,740	0,0578	0,0483
	МК	2,498	0,0050	0,0261		МК	9,425	0,0326	0,2960
	МНК/МК		4,08	2,01		МНК/МК		1,77	0,16
5	МНК	2,443	0,0443	0,0837	6	МНК	2,613	0,0632	0,0531
	МК	2,530	0,0047	0,0969		МК	10,244	0,0128	0,6766
	МНК/МК		9,43	0,86		МНК/МК		4,94	0,08
7	МНК	2,859	0,0709	0,0497	8	МНК	2,234	0,0414	0,0870
	МК	4,412	0,0064	0,1338		МК	2,242	0,0107	0,0692
	МНК/МК		11,08	0,37		МНК/МК		3,87	1,26
9	МНК	3,659	0,0645	0,0903	10	МНК	2,684	0,0420	0,0359
	МК	3,306	0,0055	0,1045		МК	2,935	0,0041	0,0580
	МНК/МК		11,73	0,86		МНК/МК		10,24	0,62
Вар.	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$	Вар.	Метод	μ	M(max)	$\delta S(\max)$
Сеть триангуляции из книги [79, с.153]									
	d_1	d_2	5,15	0,98					
1	МНК	2,018	0,0425	0,0487	2	МНК	3,725	0,0683	0,0633
	МК	2,579	0,0094	0,0624		МК	3,973	0,0317	0,0904
	МНК/МК		4,52	0,78		МНК/МК		2,15	0,70
3	МНК	2,384	0,0490	0,0631	4	МНК	2,578	0,0403	0,2016
	МК	2,066	0,0037	0,1128		МК	2,866	0,0079	0,1027
	МНК/МК		13,24	0,56		МНК/МК		5,10	1,96
5	МНК	3,204	0,0818	0,1210	6	МНК	2,581	0,0438	0,0397
	МК	49,303	0,0354	2,3158		МК	3,510	0,0070	0,0727
	МНК/МК		2,31	0,05		МНК/МК		6,26	0,55
7	МНК	3,117	0,0628	0,0808	8	МНК	1,627	0,0309	0,1228
	МК	2,636	0,0116	0,0611		МК	1,600	0,0260	0,0704
	МНК/МК		5,41	1,32		МНК/МК		1,19	1,74
9	МНК	3,298	0,0753	0,0878	10	МНК	1,893	0,0421	0,0833
	МК	2,808	0,0190	0,0960		МК	1,750	0,0057	0,0697
	МНК/МК		3,96	0,91		МНК/МК		7,39	1,20

Линейно-угловая триангуляция из книги [79, с.217]									
	d_1	d_2	3,29	0,76					
1	МНК	1,573	0,0089	0,0118	2	МНК	1,841	0,0100	0,0238
	МК	2,132	0,0030	0,0247		МК	2,530	0,0023	0,0219
	МНК/МК		2,97	0,48		МНК/МК		4,35	1,09
3	МНК	1,833	0,0117	0,0052	4	МНК	2,294	0,0137	0,0155
	МК	1,891	0,0033	0,0062		МК	2,509	0,0038	0,0228
	МНК/МК		3,55	0,84		МНК/МК		3,61	0,68
5	МНК	2,124	0,0161	0,0150	6	МНК	1,250	0,0091	0,0120
	МК	3,462	0,0049	0,0412		МК	1,585	0,0036	0,0088
	МНК/МК		3,29	0,36		МНК/МК		2,53	1,36
7	МНК	2,465	0,0143	0,0090	8	МНК	1,426	0,0102	0,0158
	МК	5,464	0,0065	0,0362		МК	1,928	0,0036	0,0152
	МНК/МК		2,20	0,25		МНК/МК		2,83	1,04
9	МНК	2,341	0,0135	0,0099	10	МНК	2,144	0,0150	0,0118
	МК	2,961	0,0043	0,0304		МК	2,536	0,0034	0,0097
	МНК/МК		3,14	0,33		МНК/МК		4,41	1,22
Звено триангуляции из книги [84, с.145]									
	d_1	d_2	5,42	1,18					
1	МНК	3,312	0,2306	0,4298	2	МНК	3,192	0,3172	0,4374
	МК	2,331	0,0352	0,4327		МК	3,512	0,0351	0,3300
	МНК/МК		6,55	0,99		МНК/МК		9,04	1,33
3	МНК	2,542	0,1724	0,1977	4	МНК	2,754	0,1363	0,4088
	МК	2,101	0,0607	0,1602		МК	2,349	0,0525	0,3478
	МНК/МК		2,84	1,23		МНК/МК		2,60	1,18
5	МНК	2,977	0,2171	0,2626	6	МНК	2,702	0,2122	0,1849
	МК	3,250	0,0359	0,2865		МК	7,869	0,1862	0,7122
	МНК/МК		6,05	0,92		МНК/МК		1,14	0,26
7	МНК	3,107	0,2138	0,1915	8	МНК	2,395	0,1698	0,2825
	МК	3,010	0,0466	0,2022		МК	2,340	0,0201	0,1731
	МНК/МК		4,59	0,95		МНК/МК		8,45	1,63
9	МНК	3,053	0,2765	0,2089	10	МНК	2,589	0,2366	0,4261
	МК	2,541	0,0427	0,1379		МК	2,263	0,0366	0,2322
	МНК/МК		6,48	1,51		МНК/МК		6,46	1,84

Применим многокритериальный метод для проектирования плохо обусловленной прямой и обратной засечек на плоскости.

Многокритериальный метод (МК) осуществляет минимизацию векторной функции

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N p_i |L_i(x)|^2 \quad (6.47)$$

и целевой функции (6.33) или (6.27).

Расчеты выполнены по трем программам:

- 1) uklgioo.bat, – генерация ошибок измерений (до 10 вариантов) и обработка по методу наименьших квадратов (МНК);
- 2) nkfgtimm.bat, – применение многокритериального метода с использованием целевой функции (6.47) и (6.26);
- 3) uklocond.bat, – МК с использованием целевой функции (6.47) и (6.33).

В табл. 6.19 приведены следующие значения для прямой и обратной засечек на плоскости:

y – удаление определяемого пункта от исходных (рис. 6.7, *a*);

x – удаление определяемого пункта от центральной точки окружности радиуса 1000 м (рис. 6.7, *b*);

$d_1 = C_{\text{МНК}} / C_{\text{МК}}$ – среднее из 10 вариантов;

$d_2 = M_{\text{max(МНК)}} / M_{\text{max(МК)}}$ – среднее из 10 вариантов;

$d_3 = \delta_{x(\text{МНК})} / \delta_{x(\text{МК})}$ – среднее из 10 вариантов, где δ_x – уклонение от истинного значения, известного при генерации вариантов.

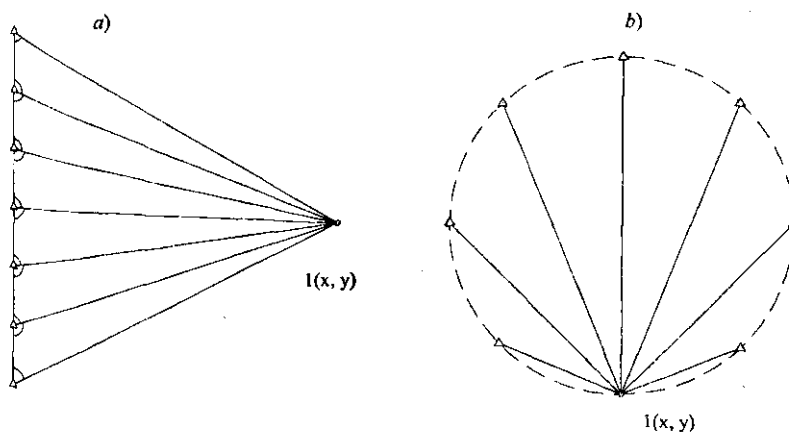


Рис. 6.7. Прямая и обратная засечки на плоскости

Таблица 6.19
 Результаты обработки прямой и обратной геодезических засечек

№ пп	x(y), м	сopd _(МНК)	d_1	d_2	d_3
Прямая засечка (программы № 1 и № 2)					
1	500	9,7	0,94	1,95	1,06
2	8000	2000	1,05	1,99	1,02
3	16000	8000	1,00	2,00	1,06
Прямая засечка (программы № 1 и № 3)					
4	500	9,7	1,53	1,77	1,03
5	8000	2000	1,51	1,84	1,57
6	16000	8000	1,45	1,90	1,08
Обратная засечка для углов (программы № 1 и № 2)					
7	31	457	0,52	6,28	0,97
8	500	2,02	0,39	3,73	0,88
9	1001	2,24	0,61	2,77	0,91
Обратная засечка для углов (программы № 1 и № 3)					
10	31	457	1,14	4,91	0,98
11	500	2,02	0,95	2,23	1,02
12	1001	2,24	1,07	1,91	0,89
Обратная засечка по направлениям (программы №1 и №2)					
13	31	716	0,57	17,70	0,96
14	500	2,47	0,20	1,77	1,55
15	1001	7,00	0,54	2,60	1,80
Обратная засечка по направлениям (программы № 1 и № 3)					
16	31	716	0,57	20,51	2,82
17	500	2,47	0,28	2,82	1,96
18	1001	7,00	1,69	4,70	3,78

По данным табл. 6.19 можно сделать следующие выводы:

1. Программа № 2 для прямой засечки плохого качества дает для МК большее число обусловленности, чем МНК, эта тенденция сохраняется и для обратной засечки. Вывод сделан по коэффициенту d_1 .

2. Метод МК дает ошибки положения в слабом месте в два и более раз меньше, чем МНК. Вывод сделан по коэффициенту d_2 .

3. При оптимизации целевой функции (6.33) коэффициент d_1 , характеризующий удаление от истины, всегда больше 1, т.е. МК при одновременно лучшем коэффициенте d_2 дает близкие к истинным значениям координаты определяемого пункта.

6.4. О вычислении корреляционной матрицы измерений после уравнивания

Классический необобщенный метод МНК, как правило, реализуется в большинстве программ, включая алгоритмы CREDO-DIALOG, в матричной форме. Этот способ программируется с использованием следующих формул:

$$V_{N \times 1} = A_{N \times n} \delta X_{n \times 1} + L_{N \times 1}, \quad (6.48)$$

где используют векторы и матрицы

$$V_{N \times 1} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}; \quad \delta X_{n \times 1} = \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \vdots \\ \delta X_n \end{pmatrix}; \quad L_{N \times 1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{pmatrix};$$

$$A_{N \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} \end{pmatrix}; \quad P_{N \times N} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_N \end{pmatrix};$$

Здесь $P_{N \times N}$ – диагональная матрица весов, некоррелированных измерений, используемая при отыскании неизвестных $\delta X_{n \times 1}$ под условием

$$\Phi_1(\bar{X}) = \sum_{i=1}^N P_i V_i^2 = \min. \quad (6.49)$$

Поскольку число неизвестных $\delta X_{n \times 1}$ меньше количества уравнений N , то система (6.48) называется переопределённой, и для получения однозначного решения под условием МНК обычно переходят к нормальным уравнениям, которые можно получить, умножая слева (6.48) на $A^T P$

$$A_{n \times N}^T P_{N \times N} V_{N \times 1} = A_{n \times N}^T P_{N \times N} A_{N \times n} \delta X_{n \times 1} + A_{n \times N}^T P_{N \times N} L_{N \times 1},$$

где в левой части получаем градиент целевой функции $\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i L_i^2(X)$, а он в точке минимума равен нулю.

Обозначим $R = A^T P A$, $B = A^T P L$ соответственно через матрицу коэффициентов нормальных уравнений R и вектор свободных членов нормальных уравнений B . С учётом обозначений имеем

$$R_{n \times n} \delta X_{n \times 1} + B_{n \times 1} = 0, \quad (6.50)$$

откуда
$$\delta X_{икл} = -Q_{икл} B_{икл}, \quad (6.51)$$

где $Q_{икл} = R_{икл}^{-1}$ – обратная весовая матрица, используемая не только при уравнивании, но и при оценке точности функции.

С применением расширенной псевдообратной матрицы

$$F_{икл} = (A_{икл}^T P_{икл} A_{икл})^{-1} A_{икл}^T P_{икл} \quad (6.52)$$

формула (6.51) примет вид

$$\delta X_{икл} = -F_{икл} L_{икл}. \quad (6.53)$$

В обобщённом МНК [36] вместо P используется корреляционная матрица измерений, равная

$$(K_v)_{икл} = P_n^{-\frac{1}{2}} K_n P_n^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.54)$$

где $(K_n)_{икл}$ – корреляционная матрица с единицами по диагонали и коэффициентами корреляции вне её; n – показатель степени, равный 2 для МНК и 1 для МНМ (метода наименьших модулей).

Таким образом, в обобщённом МНК вместо (6.52) будем иметь

$$F = (A^T K_n^{-1} A)^{-1} A^T K_n^{-1}. \quad (6.55)$$

Для корреляционной матрицы после уравнивания $(K_v)_{икл}$ получили следующие формулы

$$D_{икл} = A_{икл} F_{икл}; \quad (6.56)$$

$$(K_v)_{икл} = D K_n = A Q A^T, \quad (6.57)$$

где D – идемпотентная матрица ($D = D \cdot D \cdot \dots \cdot D$); Q – обратная весовая матрица

Числовой пример

Рассмотрим геодезический четырёхугольник

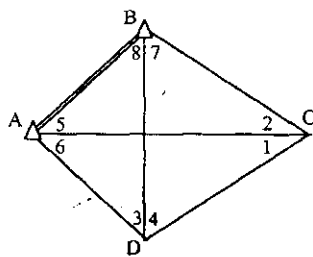


Рис. 6.8. Геодезический четырёхугольник

Таблица 6.20

Исходные данные

Номер угла	Измеренные углы
1	50° 01' 55"
2	41° 41' 41"
3	26° 57' 40"
4	27° 14' 40"
5	37° 58' 22"
6	75° 45' 05"
7	61° 01' 37"
8	39° 18' 30"

Координаты исходных пунктов $x_A = 1100.00$ м; $y_A = 100.00$ м;
 $x_B = 1650.00$ м; $y_B = 640.00$ м.

Предварительные координаты определяемых пунктов: $x_C = 1230.00$ м;
 $y_C = 1230.00$ м; $x_D = 100.00$ м; $y_D = 500.00$ м.

Уравнивание выполним по направлениям, используя матрицу $A_{8 \times 4}$,
 составленную для восьми углов:

$$A = \begin{bmatrix} -98.22 & -104.03 & -81.15 & 127.84 \\ -60.14 & -186.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 83.04 & 45.81 \\ -81.15 & 127.84 & 69.22 & 4.16 \\ -179.37 & 23.81 & 0 & 0 \\ 179.37 & -23.81 & -71.12 & -177.81 \\ 239.51 & 162.38 & 11.92 & -132.0 \\ 0 & 0 & -11.92 & 132.0 \end{bmatrix};$$

При $P = E$ корреляционная матрица K , будет такой

$$K_n = K_r = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -0.5 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Корреляционные матрицы для уравнивания углов геодезического че-
 тырёхугольника при $P = K = E$ следующие

$$K_u = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.1 & -0.5 & -0.4 & 0.0 & -0.1 & -0.4 & 0.5 \\ & 1.0 & 0.3 & -0.3 & -0.1 & 0.1 & -0.5 & -0.3 \\ & & 1.0 & 0.2 & -0.5 & -0.6 & 0.0 & 0.1 \\ & & & 1.0 & 0.7 & -0.6 & 0.1 & -0.2 \\ & & & & 1.0 & -0.1 & -0.4 & -0.4 \\ & & & & & 1.0 & 0.4 & -0.4 \\ & & & & & & 1.0 & 0.0 \\ & & & & & & & 1.0 \end{pmatrix}$$

С использованием матрицы K_n для обобщённого МНК получим

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.7 & -0.4 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.6 \\ & 1.0 & 0.4 & -0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.5 & -0.6 \\ & & 1.0 & 0.2 & -0.4 & -0.6 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 1.0 & 0.5 & -0.8 & 0.0 & -0.3 \\ & & & & 1.0 & 0.2 & -0.5 & -0.7 \\ & sim & & & & 1.0 & 0.1 & -0.5 \\ & & & & & & 1.0 & 0.4 \\ & & & & & & & 1.0 \end{pmatrix}$$

Сравнивая матрицы K_n , полученные для углов геодезического четырёхугольника, можно сказать, что теснота корреляционных связей выше при уравнивании геодезического четырёхугольника по направлениям (второй случай матрицы K_n), чем по углам.

Рассмотрим необобщённый метод Лр-оценок. Метод Лр-оценок для диагональной матрицы весов результатов измерений $P_{N \times N}$ реализуется по формулам:

– целевая функция [69]

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^n \right)^T P_n |L(X)|^n, \quad (6.58)$$

где n – показатель степени; диагональный элемент P_n равен $P_i = \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^n$;

σ – стандарт измерения;

$$x = -(A^T C A)^{-1} A^T C L(X), \quad (6.59)$$

где диагональная матрица

$$C = P_n \left(\text{diag} |L(X)|^{n-2} \right); \quad (6.60)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V_n^T P_n V_n}{N-l}}, \quad (6.61)$$

$$V_n = L(\hat{X}); \quad \hat{X} = X^0 + x. \quad (6.62)$$

Матрица обратных весов

$$Q = F P_n^{-1} F^T, \quad (6.63)$$

где

$$F_{n \times N} = (A^T C A)^{-1} A^T C. \quad (6.64)$$

Как показали исследования, корреляционная матрица измерений после уравнивания необобщённым методом Лр-оценок будет следующей

$$K_n = A_{N \times l} F_{l \times N} P_{N \times N}^{-1}. \quad (6.65)$$

Числовые примеры

Веса результатов измерений P_n вычислялись по указанной выше формуле при $\sigma_n \approx 5''$.

При $n = 1$ (МНМ – метод наименьших модулей):

$\bar{x}_c = 1249.842$ м; $\bar{y}_c = 1230.102$ м; $\bar{x}_D = 99.970$ м; $\bar{y}_D = 499.944$ м; $\mu = 8.554$;
ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.0732$ м; $M_D = 0.1271$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.2 & 0.0 & -0.8 & -0.8 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.6 & 0.0 & -1.6 & -0.6 & 0.6 \\ -0.4 & -0.4 & 0.6 & 1.0 & 0.4 & -1.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 1.0 & -0.7 & -0.7 & -0.3 \\ -0.4 & 0.1 & -0.4 & -0.3 & -0.1 & 1.0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.7 & 0.2 & -0.3 & -0.1 & -0.2 & 1.1 & 1.0 & -0.6 \\ 0.8 & -0.2 & 0.3 & 0.1 & -0.1 & -1.2 & -0.7 & 1.0 \end{pmatrix}$$

При $n = 2$ (МНК)

$\bar{x}_c = 1249.888$ м; $\bar{y}_c = 1230.086$ м; $\bar{x}_D = 99.969$ м; $\bar{y}_D = 499.955$ м; $\mu = 3.545$;
ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.1034$ м; $M_D = 0.1634$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.1 & -0.5 & -0.4 & 0.0 & -0.1 & -0.4 & 0.5 \\ & 1.0 & 0.3 & -0.3 & -0.1 & 0.1 & -0.5 & -0.3 \\ & & 1.0 & 0.2 & -0.5 & -0.6 & 0.0 & 0.1 \\ & & & 1.0 & 0.7 & -0.6 & 0.1 & -0.2 \\ & & & & 1.0 & -0.1 & -0.4 & -0.4 \\ & & sim & & & 1.0 & 0.4 & -0.4 \\ & & & & & & 1.0 & 0.0 \\ & & & & & & & 1.0 \end{pmatrix}$$

При $n = 3$

$\bar{x}_c = 1249.905$ м; $\bar{y}_c = 1230.064$ м; $\bar{x}_D = 99.998$ м; $\bar{y}_D = 499.971$ м; $\mu = 1.612$;
ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.8940$ м; $M_D = 0.1638$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.6 & -0.3 & 0.3 & 0.2 & -0.3 & 0.5 \\ -0.5 & 1.0 & 0.6 & -0.2 & -0.2 & 0.0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.8 & 0.7 & 1.0 & 0.1 & -0.5 & -0.3 & 0.0 & -0.2 \\ -0.9 & -0.5 & 0.3 & 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.4 & -0.4 \\ 0.5 & -0.5 & -0.9 & 0.3 & 1.0 & 0.1 & -0.3 & -0.2 \\ 0.1 & 0.0 & -0.7 & -0.4 & 0.1 & 1.0 & 0.3 & -0.4 \\ -0.5 & -0.7 & 0.0 & 0.2 & -0.3 & 0.2 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & -0.8 & -0.4 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & 0.1 & 1.0 \end{pmatrix}$$

По результатам вычислений можно сделать вывод, что в матрицах K_n наибольшая теснота связей начинается с $n = 3$, затем $n = 1$ и $n = 2$.

Рассмотрим обобщённый метод Лр-оценок.

Формулы, реализующие обобщённый алгоритм метода Лр-оценок, имеют вид:

– целевая функция

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |L(X)|^{\frac{n}{2}}, \quad (6.66)$$

где $K_n = P_n^{-\frac{1}{2}} R P_n^{-\frac{1}{2}}$, R – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, а внедиагональные числа равны коэффициентам корреляции.

Вспомогательные в общем случае недиагональные матрицы размером $N \times N$ будут такими

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}, \quad (6.67)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[S \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (6.68)$$

где $S_{N \times N}$ – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали со знаком числа $L(X)$);

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}, \quad (6.69)$$

$$x = -H^{-1}G, \quad (6.70)$$

где $H_{N \times N}$ – матрица Гессе (вторых частных производных от функции (6.66))

$$H = \frac{n(n-2)}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_2 A, \quad (6.71)$$

где $Z_{N \times N}$ – матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и C_1 по формуле

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^N a_{k,i} \cdot a_{k,j} \cdot (C_1)_{k,r}. \quad (6.72)$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (6.70), вычисляется по формуле

$$G = n \cdot A^T \cdot C_3 \cdot I, \quad (6.73)$$

где $I_{N \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N \times 1}$;

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K_n^{-1} V}{N-t}}, \quad (6.74)$$

где

$$V = Ax + L(X). \quad (6.75)$$

Матрицу обратных весов вычисляют по формуле

$$Q = FK_n F^T, \quad (6.76)$$

где расширенная псевдообратная матрица

$$F = H^{-1} A^T C_2. \quad (6.77)$$

В формулах (6.67) – (6.69) знак \times означает поэлементное умножение матриц. Например, $A \times B = (a_{i,j} \cdot b_{i,j})$.

Как показали исследования, корреляционная матрица измерений после уравнивания обобщённым методом Лр-оценок будет следующей

$$K_n = AFK_n. \quad (6.78)$$

Рассмотрим тот же числовой пример с применением корреляционной матрицы K_n , имеющей вид

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ & sim & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -0.5 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.79)$$

При $n = 1$ (обобщённый МНМ)

$\hat{x}_c = 1249.842$ м; $\hat{y}_c = 1230.102$ м; $\hat{x}_D = 99.971$ м; $\hat{y}_D = 499.944$ м; $\mu = 10.593$;
ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.0553$ м; $M_D = 0.3599$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.2 & 0.0 & -0.8 & -0.8 & 0.8 \\ -0.8 & 1.0 & 0.0 & -0.3 & 0.0 & 1.1 & 0.1 & -1.1 \\ -0.1 & 0.0 & 1.0 & 0.6 & 0.0 & -1.6 & -0.6 & 0.6 \\ -4.2 & -0.3 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 3.2 & 3.6 & -3.2 \\ 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 1.0 & -1.3 & -1.3 & 0.3 \\ -1.2 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 & 0.9 & -1.0 \\ -1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.2 & -0.1 & 0.0 & -0.2 & 0.0 & -1.0 & -0.9 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

При $n = 2$ (обобщённый МНК)
 $\bar{x}_c = 1249.919$ м; $\bar{y}_c = 1230.071$ м; $\bar{x}_d = 99.926$ м; $\bar{y}_d = 499.983$ м; $\mu = 5.170$;
 ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.0651$ м; $M_d = 0.1368$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.7 & -0.4 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.6 \\ & 1.0 & 0.4 & -0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.5 & -0.6 \\ & & 1.0 & 0.2 & -0.4 & -0.6 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 1.0 & 0.5 & -0.8 & 0.0 & -0.3 \\ & & & & 1.0 & 0.2 & -0.5 & -0.7 \\ & & sim & & & 1.0 & 0.1 & -0.5 \\ & & & & & & 1.0 & 0.4 \\ & & & & & & & 1.0 \end{pmatrix}$$

При $n = 3$ (обобщённый метод наименьших кубов)
 $\bar{x}_c = 1249.915$ м; $\bar{y}_c = 1230.049$ м; $\bar{x}_d = 99.987$ м; $\bar{y}_d = 499.980$ м; $\mu = 2.290$;
 ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.0156$ м; $M_d = 0.0252$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.8 & -0.3 & 0.2 & 0.0 & -0.2 & 0.5 \\ -0.4 & 1.0 & 0.5 & -0.2 & -0.1 & 0.0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.1 & -0.5 & -0.4 & 0.0 & -0.1 \\ -0.7 & -0.7 & 0.2 & 1.0 & 0.6 & -0.5 & 0.4 & -0.3 \\ 0.3 & -0.3 & -0.8 & 0.3 & 1.0 & 0.2 & -0.3 & -0.4 \\ 0.1 & 0.1 & -0.7 & -0.4 & 0.2 & 1.0 & 0.2 & -0.5 \\ -0.3 & -1.0 & -0.1 & 0.2 & -0.3 & 1.0 & 1.0 & 0.3 \\ 0.7 & -0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.4 & -0.4 & 0.3 & 1.0 \end{pmatrix}$$

По результатам вычислений можно сделать следующие выводы:

1. С наименьшей корреляционной связью оказался МНК, затем метод наименьших кубов и после этого – МММ.

2. Оказалось, что обобщённый метод наименьших кубов по точностным характеристикам превзошёл классический и обобщённый МНК.

Рассмотрим математическую обработку геодезического четырёхугольника [54] при различных коэффициентах корреляции и значениях степени n .

В табл.6.21 – 6.26 приведены следующие сведения: r – коэффициент корреляции для матрицы

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & r & 0 & 0 \\ & & sim & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & r \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.80)$$

при r на отрезке $[-0.9; 0.9]$ с шагом 0.1.

M_{\max} – наибольшее значение ошибки положения пункта в м.

μ – СКП единицы веса, вычисленная по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K^{-1} V}{r}},$$

в которой K_* – недиагональная корреляционная матрица результатов измерений, равная

$$K_* = P_*^{-1} R P_*^{-1},$$

где P_* – диагональная матрица весов измерений.

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ – разности в мм между координатами: $\Delta_1 = \hat{x}_1 - \hat{x}'_1, \Delta_2 = \hat{y}_1 - \hat{y}'_1,$

$\Delta_3 = \hat{x}_2 - \hat{x}'_2, \Delta_4 = \hat{y}_2 - \hat{y}'_2;$

$\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2$ – урavnенные координаты при различных r и n .

$\hat{x}'_1, \hat{y}'_1, \hat{x}'_2, \hat{y}'_2$ – урavnенные координаты при $n = 2.0$ и $r = 0.0$, которые для всех шести таблиц имеют постоянные значения: $\hat{x}'_1 = 1249.888$ м, $\hat{y}'_1 = 1230.086$ м, $\hat{x}'_2 = 99.969$ м, $\hat{y}'_2 = 499.955$ м.

В табл. 6.21 (колонка 10) приведены $\Delta_1 - \Delta_4$, равные нулю, т.к. здесь $n = 2.0$ и $r = 0.0$. Эти результаты соответствуют урavnиванию геодезического четырёхугольника по МНК с составлением урavnений поправок для углов.

Зная $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ из колонки 1, можно получить урavnенные координаты для МНК при $r = 0.0$. Например, $\hat{x}_1 = \hat{x}'_1 + \Delta_1 = 1249.888 + 0.053 = 1249.941$ м.

Для $r = -0.5$ получаем координаты пунктов 1 и 2 при урavnивании геодезического четырёхугольника по направлениям (колонка 5).

В колонках 17 – 19 записаны нули не потому, что $\Delta_1 = 0$, а из-за невозможности урavnивания сети в программе *kerpiooo* при $r = 0.7, r = 0.8, r = 0.9$.

По величинам Δ_i можно сделать вывод, что они возрастают с уменьшением и с увеличением значений r относительно $r = 0.0$.

В табл. 6.22 приведены результаты урavnивания четырёхугольника при тех же исходных значениях r , но при $n = 1.0$. По данным таблицы видно, что $\Delta_1 - \Delta_4$ не зависят от значения r . Изменяются лишь μ и M_{\max} .

В табл. 6.23 величины Δ_i изменяются при различных r примерно так же, как в табл. 6.7.

Из табл. 6.24 видно, что координаты пунктов при $r = -0.9$ следующие: $\hat{x}_1 = 1249.921$ м, $\hat{y}_1 = 1230.028$ м, $\hat{x}_2 = 99.980$ м, $\hat{y}_2 = 499.981$ м, а при $r = 0.9$ $\hat{x}_1 = 1249.899$ м, $\hat{y}_1 = 1230.074$ м, $\hat{x}_2 = 99.985$ м, $\hat{y}_2 = 499.965$ м. Отметим, что судя по величинам Δ_i программа *kerpiooo* выдаёт аномальные значения разностей при $r > 0.5$.

Таблица 6.21

Значения разностей координат для различных r при $n = 2.0$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
r	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	14,02	9,34	7,25	6,01	5,17	4,61	4,05	3,82	3,68	3,54	3,48	3,50	3,58	3,76	4,09	4,31	3,90	4,43	5,80
M_{\max}	0,410	0,298	0,229	0,183	0,137	0,115	0,072	0,073	0,076	0,163	0,079	0,078	0,082	0,090	0,105	0,145	0,291	0,426	0,748
Δ_1	53	45	38	32	31	24	8	3	5	0	-6	-10	-14	-16	-11	-26	0	0	0
Δ_2	-91	-76	-62	-50	-15	4	-4	-2	-7	0	7	14	21	29	36	29	0	0	0
Δ_3	10	2	-4	-7	-43	-30	-1	-1	-5	0	8	17	28	40	54	7	0	0	0
Δ_4	43	35	28	22	28	19	7	3	3	0	-3	-6	-10	-16	-32	-38	0	0	0

Таблица 6.22

Значения разностей координат для различных r при $n = 1.0$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
r	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	22,11	15,87	13,17	11,62	10,59	9,88	9,36	8,99	8,72	8,55	8,46	8,46	8,55	8,75	9,10	9,66	10,64	12,40	16,72
M_{\max}	0,644	0,558	0,482	0,416	0,360	0,313	0,272	0,236	0,197	0,127	0,170	0,210	0,258	0,283	0,303	0,323	0,343	0,363	0,383
Δ_1	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46	-46
Δ_2	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Δ_3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Δ_4	-12	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-11	-12	-11	-11

Таблица 6.23

Значения разностей координат для различных r при $n = 1.5$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
r	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	14,47	10,36	8,58	7,52	6,88	6,41	6,06	5,76	5,52	5,34	5,23	5,17	5,04	5,22	5,41	5,74	6,46	8,17	11,72
M_{\max}	0,107	0,106	0,102	0,093	0,093	0,092	0,097	0,098	0,106	0,139	0,204	0,217	0,250	0,119	0,816	2,887	7,857	2,444	0,893
Δ_1	-49	-48	-46	-46	-45	-43	-41	-34	-26	-17	-13	-8	-12	-1	10	21	34	52	78
Δ_2	18	17	17	17	17	17	16	14	10	7	5	5	6	6	6	6	6	6	6
Δ_3	6	5	4	6	4	4	1	1	1	-1	-3	-3	-5	4	-1	-11	-12	-14	-17
Δ_4	-26	-25	-24	-29	-25	-26	-26	-20	-16	-13	-12	-10	-10	-8	-10	-8	-7	-5	-2

Таблица 6.24

Значения разностей координат для различных r при $n = 2,5$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
r	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	8,10	5,63	4,53	3,90	3,42	3,08	2,83	2,64	2,49	2,38	2,31	2,27	2,27	2,34	2,23	2,28	2,40	2,66	3,36
M_{\max}	0,079	0,068	0,060	0,044	0,041	0,040	0,040	0,042	0,044	0,150	0,055	0,066	0,100	0,085	0,222	0,537	3,701	0,580	0,451
Δ_1	33	31	29	35	30	25	21	17	14	11	12	5	3	1	11	11	11	11	11
Δ_2	-58	-53	-47	-32	-28	-25	-22	-19	-16	-12	-8	-4	-1	-8	-12	-12	-12	-12	-12
Δ_3	11	10	18	-14	-11	-7	-3	2	10	16	22	27	35	86	16	16	16	16	16
Δ_4	26	25	24	31	27	24	20	17	13	10	8	6	2	-7	10	10	10	10	10

Таблица 6.25

Значения разностей координат для различных r при $n = 3,0$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
r	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	5,30	3,71	3,00	2,58	2,29	2,08	1,92	1,79	1,69	1,61	1,55	1,51	1,49	1,50	1,46	1,48	1,53	1,66	2,04
M_{\max}	0,032	0,029	0,027	0,026	0,025	0,025	0,027	0,029	0,032	0,164	0,042	0,049	0,056	0,137	0,255	1,218	0,494	0,277	0,260
Δ_1	34	32	31	29	27	25	24	22	19	17	15	14	13	6	17	17	17	17	17
Δ_2	-50	-47	-44	-40	-37	-34	-28	-26	-24	-22	-20	-17	-17	-3	-22	-22	-22	-22	-22
Δ_3	29	20	19	18	18	19	10	15	22	29	34	39	49	33	29	29	29	29	29
Δ_4	30	29	28	27	25	24	26	22	19	16	13	11	8	19	16	16	16	16	16

Таблица 6.26

Значения разностей координат для различных r при МК

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
r	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	8,83	6,22	5,18	4,19	0,08	2,78	2,53	2,31	2,42	2,55	2,56	1,82	1,74	1,84	1,64	1,59	1,56	1,83	2,10
M_{\max}	0,004	0,009	0,003	0,002	0,006	0,018	0,023	0,028	0,033	0,061	0,048	0,050	0,054	0,052	0,054	0,056	0,059	0,065	0,066
Δ_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	12	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Δ_2	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-3	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8	-8
Δ_3	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Δ_4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Из табл. 6.24 получаем координаты пунктов при $r = -0.9$: $\hat{x}_1 = 1249.922$ м, $\hat{y}_1 = 1230.036$ м, $\hat{x}_2 = 99.998$ м, $\hat{y}_2 = 499.985$ м, а при $r = 0.9$: $\hat{x}_1 = 1249.905$ м, $\hat{y}_1 = 1230.064$ м, $\hat{x}_2 = 99.998$ м, $\hat{y}_2 = 499.971$ м. Сравнивая их с координатами из табл. 6.25, имеем максимальное различие более 1 см.

В табл. 6.26 приведены результаты уравнивания, по которым можно сделать следующие выводы:

1) все величины Δ , не зависят от r , хотя μ и M_{\max} подвержены изменению;

2) величины Δ_i , показанные в колонке 10, при $r = 0.0$ соответствуют координатам, являющимся начальными при обобщённом многокритериальном методе уравнивания.

Известно, что расширенная псевдообратная матрица может быть получена по двум формулам [73]

$$F = H^{-1} A^T C_2, \quad (6.81)$$

а в случае зависимых величин

$$F = \text{diag} \left(\frac{2}{n_j} \right) H^{-1} A^T C_2, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (6.82)$$

где коэффициент $\frac{2}{n_j}$ получен методом испытаний путём сравнения оценок точности для различных примеров.

Корреляционная матрица измерений по результатам уравнивания обобщённым способом геодезических сетей может быть получена по формуле

$$K_u = AFK_n. \quad (6.83)$$

При многокритериальной оптимизации применим не только функцию (6.33), но и новую функцию

$$\Phi_1(X, n) = \sum_{i=1}^N \left| \min_{1 \leq j \leq N} (K_u)_j \right|, \quad (6.84)$$

в которой используются абсолютные значения из минимальных коэффициентов корреляции по строкам корреляционной матрицы K_u , приведённой к виду матрицы K , с единицами на диагонали и коэффициентами корреляции вне её.

Выражение (6.84) разработано на основе известного равенства

$$m_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)_0^2 m_w^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 r_{x,y} m_x m_y + \dots, \quad (6.85)$$

откуда следует, что m_w будет минимально при минимальных (даже отрицательных) коэффициентах корреляции r .

Рассмотрим необобщённые методы уравнивания

С применением критериальной функции (6.33) для геодезического четырёхугольника [53] получим:

координаты после уравнивания $\bar{x}_c = 1249.900$ м; $\bar{y}_c = 1230.083$ м; $\bar{x}_D = 99.959$ м; $\bar{y}_D = 499.965$ м; $\mu = 2.554$; ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.0628$ м; $M_D = 0.0610$ м.

Коррелятные матрицы после уравнивания будут такими:

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & -0.1 & -0.4 & -0.2 & -0.4 & -0.6 & 0.8 \\ 0.0 & 1.0 & 0.1 & -0.4 & 0.0 & 0.3 & -0.6 & -0.4 \\ -0.2 & 0.0 & 1.0 & 0.1 & -0.8 & -0.9 & 0.1 & 0.7 \\ -0.2 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.3 & -0.9 & -0.8 & -0.5 \\ 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.7 & 1.0 & -0.5 & -0.6 & -0.4 \\ -0.1 & 0.0 & -0.2 & -0.7 & -0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.0 \\ -0.2 & 0.0 & 0.0 & -0.8 & -1.2 & 1.0 & 1.0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.3 & -0.9 & -1.4 & 0.0 & 0.4 & 1.0 \end{pmatrix}; n = \begin{pmatrix} 1.12 \\ 1.20 \\ 1.13 \\ 2.43 \\ 2.95 \\ 2.36 \\ 2.45 \\ 2.27 \end{pmatrix}; V_n = \begin{pmatrix} -0.18 \\ 0.00 \\ 0.06 \\ 19.89 \\ -10.94 \\ 20.23 \\ -12.71 \\ 13.65 \end{pmatrix}.$$

Для критериальной функции (6.84) имеем:

координаты после уравнивания $\bar{x}_c = 1249.902$ м; $\bar{y}_c = 1230.092$ м; $\bar{x}_D = 99.971$ м; $\bar{y}_D = 499.972$ м; $\mu = 3.700$; ошибка положения определяемых пунктов $M_c = 0.1244$ м; $M_D = 0.1714$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.2 & -0.4 & -0.4 & 0.0 & -0.2 & -0.4 & 0.6 \\ -0.2 & 1.0 & 0.3 & -0.4 & -0.2 & 0.3 & -0.4 & -0.4 \\ -0.6 & 0.4 & 1.0 & 0.1 & -0.6 & -0.5 & 0.1 & 0.1 \\ -0.5 & -0.5 & 0.1 & 1.0 & 0.8 & -0.6 & 0.0 & -0.4 \\ 0.0 & -0.1 & -0.4 & 0.6 & 1.0 & -0.2 & -0.4 & -0.5 \\ -0.2 & 0.3 & -0.4 & -0.5 & -0.2 & 1.0 & 0.4 & -0.4 \\ -0.5 & -0.5 & 0.1 & 0.0 & -0.5 & 0.4 & 1.0 & 0.0 \\ 0.7 & -0.4 & 0.1 & -0.3 & -0.6 & -0.5 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}; n = \begin{pmatrix} 2.39 \\ 2.40 \\ 1.90 \\ 2.12 \\ 1.30 \\ 1.80 \\ 2.50 \\ 2.50 \end{pmatrix}; V_n = \begin{pmatrix} -1.39 \\ -1.71 \\ 1.30 \\ 21.60 \\ -11.14 \\ 18.48 \\ -11.51 \\ 14.36 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим обобщённые методы уравнивания

Здесь используется формула $K_n = P_n^{-1} R P_n^{-1}$, где для нашего примера

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ & & sim & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -0.5 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

При уравнивании с применением функции (6.33):

координаты после уравнивания. $\bar{x}_c = 1249.890$ м; $\bar{y}_c = 1230.078$ м;
 $\bar{x}_D = 99.968$ м; $\bar{y}_D = 499.959$ м; $\mu = 3.081$; ошибка положения определяемых
 пунктов $M_C = 0.0052$ м; $M_D = 0.0057$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.2 & -0.5 & -0.3 & 0.2 & -0.2 & -0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 1.0 & 0.0 & -0.2 & 0.4 & 0.0 & -1.0 & -0.4 \\ -0.7 & 0.4 & 1.0 & 0.0 & -0.7 & -0.3 & 0.3 & 0.1 \\ -0.9 & -0.1 & 0.4 & 1.0 & 0.8 & -0.5 & 0.0 & -0.6 \\ 0.1 & 0.0 & -0.4 & 0.5 & 1.0 & -0.2 & -0.6 & -0.4 \\ -0.2 & 0.0 & -0.3 & -0.4 & -0.3 & 1.0 & 0.6 & -0.3 \\ -0.6 & -0.2 & 0.3 & -0.1 & -0.8 & 0.4 & 1.0 & 0.0 \\ 0.7 & -0.4 & 0.0 & -0.4 & -0.7 & -0.3 & 0.1 & 1.0 \end{pmatrix}; n = \begin{pmatrix} 3.26 \\ 2.01 \\ 1.11 \\ 2.32 \\ 3.90 \\ 2.89 \\ 2.56 \\ 2.13 \end{pmatrix}; V_n = \begin{pmatrix} -0.24 \\ 1.50 \\ 0.50 \\ 20.60 \\ -9.35 \\ 19.14 \\ -14.86 \\ 12.71 \end{pmatrix}$$

Применим целевую функцию (6.84):

координаты после уравнивания. $\bar{x}_c = 1249.901$ м; $\bar{y}_c = 1230.092$ м;
 $\bar{x}_D = 99.969$ м; $\bar{y}_D = 499.961$ м; $\mu = 4.986$; ошибка положения определяемых
 пунктов $M_C = 0.0444$ м; $M_D = 0.0688$ м.

$$K_n = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.4 & -0.4 & -0.3 & 0.0 & -0.3 & -0.3 & 0.8 \\ -0.1 & 1.0 & 0.2 & -0.3 & 0.0 & 0.3 & -0.5 & -0.5 \\ -0.6 & 0.6 & 1.0 & 0.1 & -0.5 & -0.4 & -0.1 & 0.0 \\ -0.6 & -0.4 & 0.2 & 1.0 & 0.8 & -0.6 & 0.0 & -0.4 \\ -0.1 & 0.0 & -0.3 & 0.6 & 1.0 & -0.2 & -0.5 & -0.5 \\ -0.2 & 0.3 & -0.3 & -0.4 & -0.2 & 1.0 & 0.4 & -0.5 \\ -0.4 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & -0.6 & 0.4 & 1.0 & 0.1 \\ 0.6 & -0.6 & 0.0 & -0.2 & -0.5 & -0.5 & 0.2 & 1.0 \end{pmatrix}; n = \begin{pmatrix} 2.20 \\ 1.90 \\ 1.30 \\ 1.78 \\ 3.00 \\ 2.00 \\ 2.20 \\ 1.45 \end{pmatrix}; V_n = \begin{pmatrix} -2.51 \\ -1.72 \\ 0.72 \\ 21.57 \\ -10.98 \\ 20.22 \\ -10.35 \\ 13.04 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что при уравнивании по МНК или при обработке по методу Лр-оценок, а также в многокритериальном случае как при некоррелированных, так и при коррелированных результатах измерений можно применять универсальные формулы (6.66) – (6.78).

В статье [74] приведены формулы для обобщённого метода уравнивания геодезических сетей. В частности, для оценки точности здесь применяется расширенная псевдообратная матрица

$$F = (A' K_0^{-1} A)^{-1} A' K_0^{-1}, \quad (6.86)$$

где K_0 – корреляционная матрица измерений до уравнивания, A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок.

Формула (6.88) для случая необобщённого метода уравнивания имеет вид

$$F = H^{-1} A' C_1, \quad (6.87)$$

где H – матрица Гессе, а весовая матрица C_1 имеет вид

$$C_1 = K_0^{-1} \cdot S \cdot \left\{ L(X)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left[S \cdot |L(X)|^{\frac{m-1}{2}} \right]^{-1} \right\}^T, \quad (6.88)$$

где S_{diag} – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали со знаком числа $L(X)$); \cdot – знак поэлементного умножения матриц, например, $A \cdot B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$.

Матрица F используется также в формуле [6]

$$K_1 = (E - AF) \cdot C^{-1}, \quad (6.89)$$

где K_1 – корреляционная матрица поправок в измерения, E – единичная матрица, C – весовая матрица.

Далее анализируется матрица

$$K_2 = AFK_1, \quad (6.90)$$

где K_2 – корреляционная матрица измерений после уравнивания.

Формула (6.90) может быть применена как в методе наименьших квадратов (МНК), так и в методе Лр-оценок, и в многокритериальном методе (МК).

Введём обозначения и вычислим по формуле (6.90) данные корреляционной матрицы для геодезического четырёхугольника [53]:

K_2 – корреляционная матрица измерений после уравнивания классическим МНК;

K_2 – корреляционная матрица измерений после уравнивания многокритериальным необобщённым методом при $\phi_2 = \min \max(M)$;

K_3 – корреляционная матрица измерений после уравнивания многокритериальным необобщённым методом при $\phi_3 = \sum_{i=1}^n |\min(K_{ij})_s|$;

K_4 – корреляционная матрица измерений после уравнивания обобщённым МНК;

K_5 – корреляционная матрица измерений после уравнивания многокритериальным обобщённым методом при $\phi_5 = \min \max(M)$;

K_6 – корреляционная матрица измерений после уравнивания многокритериальным обобщённым методом при $\phi_6 = \sum_{i=1}^n |\min(K_{ij})_s|$;

M_j – вектор-строка ошибок планового положения двух пунктов геодезического четырёхугольника в метрах

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1,000 & -0,140 & -0,500 & -0,410 & 0,058 & -0,084 & -0,450 & 0,530 \\ -0,120 & 1,000 & 0,320 & -0,350 & -0,130 & 0,140 & -0,540 & -0,340 \\ -0,570 & 0,420 & 1,000 & 0,160 & -0,530 & -0,600 & -0,020 & 0,130 \\ -0,560 & -0,540 & 0,200 & 1,000 & 0,700 & -0,640 & 0,095 & -0,250 \\ 0,055 & -0,140 & -0,450 & 0,490 & 1,000 & -0,099 & -0,410 & -0,450 \\ -0,077 & 0,150 & -0,490 & -0,440 & -0,095 & 1,000 & 0,370 & -0,420 \\ -0,450 & -0,620 & -0,018 & 0,070 & -0,420 & 0,400 & 1,000 & 0,044 \\ 0,650 & -0,470 & 0,140 & -0,230 & -0,580 & -0,560 & 0,054 & 1,000 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,001 & -0,140 & -0,420 & -0,180 & -0,440 & -0,580 & 0,760 \\ 0,051 & 1,000 & 0,080 & -0,420 & 0,310 & 0,290 & -0,630 & -0,400 \\ -0,210 & 0,003 & 1,000 & 0,073 & -0,840 & -0,860 & 0,140 & 0,700 \\ -0,150 & -0,004 & 0,019 & 1,000 & 1,320 & -0,860 & -0,840 & -0,480 \\ -0,032 & 0,000 & -0,110 & 0,660 & 1,000 & -0,520 & -0,630 & -0,370 \\ -0,130 & 0,002 & -0,180 & -0,690 & -0,840 & 1,000 & 0,820 & 0,014 \\ -0,200 & -0,005 & 0,320 & -0,790 & -1,180 & 0,960 & 1,000 & 0,190 \\ 0,510 & -0,006 & 0,330 & -0,870 & -1,360 & 0,032 & 0,370 & 1,000 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1,000 & -0,150 & -0,410 & -0,420 & -0,047 & -0,170 & -0,430 & 0,630 \\ -0,160 & 1,000 & 0,280 & -0,390 & -0,170 & 0,270 & -0,450 & -0,380 \\ -0,610 & 0,400 & 1,000 & 0,130 & -0,610 & -0,520 & 0,079 & 0,130 \\ -0,540 & -0,480 & 0,110 & 1,000 & 0,810 & -0,570 & 0,022 & -0,350 \\ -0,042 & -0,140 & -0,370 & 0,570 & 1,000 & -0,160 & -0,380 & -0,480 \\ -0,180 & 0,270 & -0,370 & -0,460 & -0,180 & 1,000 & 0,370 & -0,450 \\ -0,510 & -0,510 & 0,063 & 0,021 & -0,510 & 0,420 & 1,000 & 0,022 \\ 0,710 & -0,420 & 0,097 & -0,310 & -0,600 & -0,490 & 0,020 & 1,000 \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,470 & -0,700 & -0,400 & 0,026 & 0,100 & -0,130 & 0,580 \\ -0,380 & 1,000 & 0,360 & -0,110 & 0,096 & 0,140 & -0,510 & -0,590 \\ -0,650 & 0,400 & 1,000 & 0,260 & -0,430 & -0,610 & -0,018 & 0,047 \\ -0,770 & -0,260 & 0,540 & 1,000 & 0,520 & -0,770 & 0,025 & -0,290 \\ 0,029 & 0,130 & -0,530 & 0,310 & 1,000 & 0,200 & -0,470 & -0,660 \\ 0,100 & 0,170 & -0,690 & -0,420 & 0,180 & 1,000 & -0,140 & -0,490 \\ -0,180 & -0,840 & -0,026 & 0,018 & -0,560 & 0,180 & 1,000 & 0,410 \\ 0,570 & -0,720 & 0,051 & -0,150 & -0,580 & -0,470 & 0,300 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,200 & -0,550 & -0,270 & 0,260 & -0,180 & -0,540 & 0,470 \\ 0,240 & 1,000 & 0,017 & -0,240 & 0,380 & -0,012 & -1,000 & -0,390 \\ -0,730 & 0,410 & 1,000 & 0,051 & -0,740 & -0,320 & 0,280 & 0,063 \\ -0,880 & -0,093 & 0,360 & 1,000 & 0,760 & -0,490 & -0,030 & -0,640 \\ 0,110 & 0,009 & -0,360 & 0,460 & 1,000 & -0,210 & -0,580 & -0,430 \\ -0,230 & 0,013 & -0,340 & -0,430 & -0,340 & 1,000 & 0,640 & -0,320 \\ -0,650 & -0,250 & 0,340 & -0,110 & -0,790 & 0,410 & 1,000 & 0,037 \\ 0,700 & -0,400 & 0,056 & -0,440 & -0,740 & -0,320 & 0,140 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,370 & -0,380 & -0,290 & -0,041 & -0,340 & -0,340 & 0,760 \\ -0,140 & 1,000 & 0,180 & -0,310 & 0,038 & 0,270 & -0,550 & -0,490 \\ -0,630 & 0,600 & 1,000 & 0,084 & -0,540 & -0,460 & -0,056 & -0,001 \\ -0,580 & -0,400 & 0,170 & 1,000 & 0,800 & -0,590 & -0,021 & -0,380 \\ -0,084 & 0,012 & -0,260 & 0,560 & 1,000 & -0,220 & -0,490 & -0,520 \\ -0,250 & 0,320 & -0,300 & -0,460 & -0,220 & 1,000 & 0,380 & -0,480 \\ -0,430 & -0,530 & 0,039 & -0,040 & -0,560 & 0,430 & 1,000 & 0,092 \\ 0,660 & -0,640 & 0,025 & -0,180 & -0,520 & -0,500 & 0,160 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = [0,1030 \ 0,1630] ; \quad M_2 = [0,0628 \ 0,0610] ; \quad M_3 = [0,1240 \ 0,1710] ;$$

$$M_4 = [0,065 \ 0,1370] ; \quad M_5 = [0,0052 \ 0,0057] ; \quad M_6 = [0,0444 \ 0,0688] ;$$

Выполним сравнение матриц с использованием поэлементного деления матриц ($D_1 - D_6$) (табл. 6.27).

Для анализа матриц воспользуемся известной формулой [5]

$$m_i^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_e^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_e^2 m_\omega^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_e \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e r_{x,y} m_x m_y + \dots, \quad (6.91)$$

предназначенной для оценки точности функции измеренных и уравненных величин.

Из формулы (6.91) видно, что чем меньше коэффициент корреляции r , тем выше результаты оценки точности (меньше величина m_i).

Выполняя поэлементное деление матриц K_i , получим следующие результаты.

Результаты поэлементного деления матриц

Таблица 6.27

Формулы	Наименьший элемент	Строка	Столбец
$D_1=K_2 ./ K_1$	-17,8	7	3
$D_2=K_3 ./ K_1$	-4,0	3	7
$D_3=K_5 ./ K_4$	-13,1	7	3
$D_4=K_6 ./ K_4$	-2,9	5	1
$D_5=K_4 ./ K_2$	-470,0	1	2
$D_6=K_5 ./ K_2$	-200,0	1	2

Сравнительные результаты оценки точности планового положения пунктов

Таблица 6.28

Формулы	Результаты вычислений	
	определяемый пункт 1	определяемый пункт 2
$DM_1=M_3 ./ M_2$	1,6	2,7
$DM_2=M_1 ./ M_3$	0,8	4,8
$DM_3=M_4 ./ M_5$	12,5	24,0
$DM_4=M_4 ./ M_6$	1,5	2,0
$DM_5=M_1 ./ M_4$	1,6	1,2
$DM_6=M_2 ./ M_5$	12,1	10,7

Данные табл.6.27 легко получить по значениям $K_1 - K_6$, приведенным выше. Так, для случая 1 табл. 6.27 имеем

$$-17,8 = 0,320 / -0,018$$

По данным табл. 6.27 и 6.28 можно сделать следующие выводы:

1. Для независимых измеренных величин метод МК не столь эффективен, как следовало ожидать, по результатам оценки точности (см. D_1, D_2, DM_1, DM_2).

2. Для зависимых измеренных величин метод МК также не обладает большим потенциалом, как, например, метод МНК.

3. Наибольший эффект достигнут при сравнении матриц K_4 и K_5 с матрицей K_2 , т. е. обобщенный МК метод является в несколько десятков раз эффективнее необобщенного.

В линейной алгебре над матрицами предусмотрены следующие вычислительные действия, которые мы рассмотрим на примере двух матриц.

$$A_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0,5 & 1 & 3 \\ 3 & 0,9 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

В матричной алгебре наиболее часто используют сложение и вычитание матриц, которые выполняются поэлементно.

Сложение $C_1 = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \\ 10 & 10,5 & 12 & 15 \\ 16 & 14,9 & 17 & 17 \end{pmatrix}$

Вычитание $C_2 = A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 2 \\ -5 & -5 & -3 & -13 \\ -8 & -9,5 & -10 & -9 \\ -10 & -13,1 & -13 & -15 \end{pmatrix}$

Действия умножение и обращение матриц не выполняются поэлементно. В нашем случае

$$C_3 = A \cdot B = \begin{pmatrix} 114 & 124 & 134 & 144 \\ -24 & -24 & -24 & -24 \\ 51,5 & 57 & 62,5 & 68 \\ 38,5 & 45,4 & 52,3 & 59,2 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,2281 & 0,5842 & 2,9552 & -0,5757 \\ -0,8337 & 1,2751 & 6,5373 & -0,2345 \\ -1,4392 & 1,9659 & 10,1194 & 0,1066 \\ -2,0448 & 2,6567 & 13,7015 & 0,4478 \end{pmatrix}$$

Если существует поэлементное сложение и вычитание матриц, то почему бы не применить поэлементное умножение и деление матриц.

Например, поэлементное умножение матриц можно записать так

$$A \cdot \times B = (a_i b_{ij}) \quad (6.92)$$

Символ $\cdot \times$ впервые предложен математиками. В нашем случае

$$C_i = A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 15 & 24 \\ 0 & 6 & 28 & -40 \\ 9 & 5 & 11 & 36 \\ 39 & 12,6 & 30 & 16 \end{pmatrix}$$

Математиками предложен следующий символ

$$A \cdot B = (a_i/b_i) \quad (6.93)$$

В нашем случае

$$C_i = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0,6 & 0,67 \\ \infty & 6 & 1,75 & -1,6 \\ 9 & 20 & 11 & 4 \\ 4,33 & 15,56 & 7,5 & 16 \end{pmatrix}$$

Если в поэлементном умножении можно поменять матрицы местами (коммутативность), то в поэлементном делении этого сделать нельзя.

При участии профессора В.И. Мицкевича эти арифметические операции стали применяться в геодезии в уравнительных вычислениях.

Например, для вычисления весовой матрицы C применяется формула [10]

$$C = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ [L(X)]^{\frac{2n-1}{2}} \cdot [S \cdot [L(X)]^{\frac{2n-1}{2}}]^T \right\} \quad (6.94)$$

где K_n – корреляционная матрица результатов измерений, полученная при различных n ; n – показатель степени (при $n = 2$ – МНК; $n = 1$ – МНМ; $n = 3$ – метод наименьших кубов); S – диагональная матрица sign-ум (1 на диагонали со знаком числа $L(X)$); $L(X)$ – свободный член параметрического уравнения поправок; X – вектор координат пунктов.

$$L(X) = T^{*m} - T^{**m};$$

Применение поэлементного деления матриц найдено для сравнения корреляционных матриц результатов измерений после уравнивания.

Корреляционная матрица до уравнивания

$$(K_{n+1})_n = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & 1 & r_4 & r_5 \\ r_2 & r_4 & 1 & r_6 \\ r_3 & r_5 & r_6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.95)$$

которая в настоящее время широко применяется в спутниковой геодезии

$$(K_{\text{изм}})_u = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & 1 & d_5 & d_6 \\ d_7 & d_8 & 1 & d_9 \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.96)$$

Матрица K_u отыскивается по формулам

$$\begin{aligned} K_u &= AFK_n, \\ F &= (A^T K_n^{-1} A)^{-1} A^T K_n^{-1}; \end{aligned} \quad (6.97)$$

где $A_{N \times r}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; N – количество измерений; r – число параметров.

Рассмотрим применение формулы поэлементного деления для сравнения корреляционных матриц K_u , в которых:

$(K_u)_1$ – корреляционная матрица измерений после уравнивания по МНК;

$(K_u)_2$ – корреляционная матрица измерений после уравнивания обобщённым МНК, в котором весовая матрица $K_n^{-1} = P_n$

$$(K_u)_1 = \begin{pmatrix} 1,000 & -0,140 & -0,500 & -0,410 \\ -0,120 & 1,000 & 0,320 & -0,350 \\ -0,570 & 0,420 & 1,000 & 0,160 \\ -0,560 & -0,540 & 0,200 & 1,000 \end{pmatrix}; \quad (6.98)$$

$$(K_u)_2 = \begin{pmatrix} 1,000 & -0,470 & -0,700 & -0,400 \\ -0,380 & 1,000 & 0,360 & -0,110 \\ -0,650 & 0,400 & 1,000 & 0,260 \\ -0,770 & -0,260 & 0,540 & 1,000 \end{pmatrix}; \quad (6.99)$$

$$C = (K_u)_2 / (K_u)_1 = \begin{pmatrix} 1,000 & 3,357 & 1,400 & 0,976 \\ 3,167 & 1,000 & 1,125 & 0,314 \\ 1,140 & 0,952 & 1,000 & 1,625 \\ 1,375 & 0,481 & 2,700 & 1,000 \end{pmatrix}. \quad (6.100)$$

В данном случае C_6 используется для сравнения матриц, чтобы узнать наименьший элемент корреляции.

Величина C_6 положительна и больше 1, поэтому чем меньше r , тем лучше результаты оценки точности, получаемые по формуле (6.91).

7. НОВЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СПУТНИКОВЫХ ЗАВИСИМЫХ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ

7.1. Робастное уравнивание GPS-измерений

Результаты спутниковых измерений в зависимости от условий их использования могут интерпретироваться как зависимые, независимые, свободные или нуль-свободные, что не может не учитываться при их математической обработке. Ниже на примере реального GPS-треугольника сравниваются между собой результаты робастного уравнивания спутниковой геодезической сети при неравноточных, зависимых и независимых результатах измерений.

В современной литературе по обработке спутниковых GPS-сетей достаточно редко рассматриваются вопросы робастного уравнивания¹, при котором возможно применение степеней $1.0 \leq n \leq 2.0$ ($n = 2.0$ соответствует обработке по методу наименьших квадратов (МНК), а при $n = 1.0$ уравнивание выполняется по методу наименьших модулей (МНМ)). Как отмечалось в [47, с. 200], робастному уравниванию противопоставляют также метод Lp-оценок (метод наименьших степеней), сохраняющий робастные и обеспечивающий в определенном смысле оптимальные свойства оценок при $1.0 \leq n \leq 2.0$. Получаемые же оценки совпадают с оценками метода максимального правдоподобия.

Обычно для получения уравненных приращений координат Δx , Δy , Δz между пунктами предпочтение отдается МНК. При этом рассматриваются вопросы уравнивания зависимых результатов GPS-измерений, получаемых в относительном методе спутниковой геодезии только в рамках МНК [14, 19], и нигде не анализируется обработка робастного уравнивания зависимых приращений Δx , Δy , Δz . Причина последнего заключается в отсутствии опубликованных алгоритмов.

Рассмотрим основные формулы робастного уравнивания зависимых и независимых² результатов измерений и применим их к обработке нуль-

¹ Робастным называют уравнивание, выполняемое под условием $[pv^2] = \min$ при $n < 2$, когда обеспечивается сглаживание влияния больших поправок к измерениям. Из известных модификаций метода наибольшее применение находят так называемый датский вариант, предусматривающий применение на первом этапе МНК, а на втором – итерации с уточнением весов измерений.

² Термины «зависимые» и «независимые» спутниковые измерения трактуются в соответствии с общими правилами теории ошибок измерений, применение которых поясним на следующем примере. Если на пунктах 1, 2 и 3 выполнены синхронные наблюдения одних и тех же спутников, то вычисленные по результатам этих наблюдений разности координат пунктов будут зависимыми. Причем, невязка в треугольнике 1-2-3 будет или равна нулю, или близка к нему даже при плохом разрешении неоднозначности на одном из пунктов.

свободных (без исходных пунктов) и свободных (с одним исходным пунктом) спутниковых GPS сетей. Уравнивание зависимых геодезических измерений выполняется путём минимизации целевой функции [36]

$$\Phi(X) = \left(|V|_j^a \right)^T \cdot K_a^{-1} \cdot |V|_j^a \quad (7.1)$$

где $V_{N_{j+1}}$ – вектор поправок в результаты измерений, вычисляемый в j -том приближении с использованием вектора координат определяемых пунктов $X_{N_{j+1}}$; корреляционная матрица K_a вычисляется с помощью матриц по формуле [36]

$$K_a = P_a^{-1/2} R P_a^{-1/2}; \quad (7.2)$$

где
$$P_a = \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma \end{pmatrix}^a \text{ и } R_{N_{j+1} \times N_{j+1}} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ & 1 & \dots & r_{2N} \\ \text{sim} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

здесь r – коэффициенты корреляции.

При уравнивании независимых величин используют следующие формулы:

вектор поправок в j -том приближении находят из выражения

$$V_j = V_{j-1} - A F V_{j-1}, \quad (7.3)$$

где $A_{N_{j+1} \times N_{j+1}}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $F_{N_{j+1} \times N_{j+1}}$ – расширенная псевдообратная матрица, определяемая для свободных и несвободных геодезических сетей по формуле

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C, \quad (7.4)$$

или для нуль-свободных, когда нет исходных пунктов, с применением следующих матричных выражений [39]:

$$F = \{ (A^T C A + G^T G)^{-1} - G^T (G G^T G G^T)^{-1} G \} \cdot A^T C, \quad (7.5)$$

где
$$G_{3N_{j+1} \times 3N_{j+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Весовая матрица $C_{N_{j+1} \times N_{j+1}}$ для независимых результатов измерений будет такой

$$C = P_a \left(\text{diag} |V|^{n-2} \right). \quad (7.6)$$

Для зависимых измерений используем формулы

$$x = -H^{-1} G, \quad (7.7)$$

где $H_{N_{j+1} \times N_{j+1}}$ – матрица Гессе (вторых частных производных от функции (7.1))

$$H = \frac{n|n-2|}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_2 A, \quad (7.8)$$

где $Z_{\alpha\alpha}$ – матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и c , по формуле

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{k,i} a_{k,j} \cdot (C_1)_{k,l}. \quad (7.9)$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (7.7), вычисляется по формуле

$$G = n \cdot A^T \cdot C_1 \cdot 1, \quad (7.10)$$

где $1_{N \times 1} = [1 \dots 1]_{N \times 1}^T$;

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \times \left\{ |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (7.11)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot \times s \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[s \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (7.12)$$

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot \times s \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (7.13)$$

где $s_{N \times N}$ – диагональная матрица сигналов (единиц на диагонали со знаком числа $L(X)$); знак $\cdot \times$ означает поэлементное умножение матриц. Например, $A \cdot \times B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$.

В первом приближении при $j = 1$ в равенстве (7.3) используют V_0 , найденное по МНК. Приближения выполняются до тех пор, пока

$$\Phi_j(X) < \Phi_{j-1}(X), \quad (7.14)$$

при $j \leq 5$, чтобы остановить медленно сходящийся итерационный процесс.

Для случая независимых результатов геодезических измерений в формуле (7.1) вместо K_n^{-1} подставляют P_n .

Применим равенства (7.7) – (7.14) для уравнивания GPS треугольника с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta x, \Delta y, \Delta z_M = \begin{bmatrix} 4066.7312 \\ -1771.5160 \\ -2048.9064 \\ 634.4404 \\ -9396.2266 \\ 2781.3649 \\ 4701.1765 \\ -11167.7437 \\ 732.4672 \end{bmatrix}.$$

Из измерений для трёх векторов GPS треугольника известно для вектора 1-2

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 0.000004545 & K_{12} &= 0.000001611 & K_{13} &= 0.000003790 \\ \sigma_y^2 &= 0.000003330 & K_{23} &= 0.000002196; \\ & & \sigma_z^2 &= 0.000008858 \end{aligned}$$

для вектора 1-3

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 0.000019616 & K_{12} &= 0.000011463 & K_{13} &= 0.000019156 \\ \sigma_y^2 &= 0.000015276 & K_{23} &= 0.000011668; \\ & & \sigma_z^2 &= 0.000032130 \end{aligned}$$

для вектора 2-3

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 0.000014132 & K_{12} &= 0.000002717 & K_{13} &= 0.000008115 \\ \sigma_y^2 &= 0.000009934 & K_{23} &= 0.000004483, \\ & & \sigma_z^2 &= 0.000026667 \end{aligned}$$

откуда по формуле

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (7.15)$$

получим для всей матрицы R следующие значения

$$R_{\text{кор}} = \begin{array}{l} \Delta x_{1-2} \\ \Delta y_{1-2} \\ \Delta z_{1-2} \\ \Delta x_{2-3} \\ \Delta y_{2-3} \\ \Delta z_{2-3} \\ \Delta x_{1-3} \\ \Delta y_{1-3} \\ \Delta z_{1-3} \end{array} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0.414 & 0.597 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0.404 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0.229 & 0.418 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0.275 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & \text{sim} & & & & 1 & 0.662 & 0.763 \\ & & & & & & & 1 & 0.527 \\ & & & & & & & & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Как легко заметить, общая корреляционная матрица состоит из k треугольных блочдиагональных блоков, где k – количество сторон в GPS-сети. При этом каждый блок корреляционной матрицы получают известным путём из блока ковариационной матрицы, являющейся исходной информацией на каждой станции зависимых GPS-измерений.

Нетрудно доказать, что блочную матрицу R^{-1} для GPS-сетей можно получить по формуле

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{3 \times 3} & 0 & \dots & 0 \\ & Q_{3 \times 3} & \dots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ \text{sim} & & & Q_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

обращая только фрагменты Q из блочной матрицы R , что приводит к заметному уменьшению машинного времени при переходе от R к R^{-1} , используем в выражении

$$K_n^{-1} = P_n^{\frac{1}{2}} R^{-1} P_n^{\frac{1}{2}}. \quad (7.16)$$

Например, при количестве измерений $N = 333$ обращение полной матрицы R займёт на Pentium III 30 мин машинного времени, а фрагментарное получение обратной матрицы R^{-1} выполнится за 1 с.

Известно [39], что применение формул (7.3) и (7.4) или (7.3) и (7.5) приведёт к одинаковым V , для свободной и нуль-свободной геодезической сети. Отличие будет только в оценке точности, реализуемой по формуле

$$Q = F P_n^{-1} F^T. \quad (7.17)$$

Для случая зависимых неравноточных измерений вместо (7.17) для оценки точности применяют формулу

$$Q = F K_n F^T. \quad (7.18)$$

Решим пример уравнивания GPS-треугольника с исходным пунктом 3. Матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок A приведена выше.

В табл. 7.1 приведены веса измерений, полученные из выражения $P_n = (P')^n$;

$$P'_{x,y,z} = \frac{\sqrt{1000/|\Delta|_{x,y,z}}}{\sigma_A}; \quad \sigma_A = 0.01 \text{ м.}$$

Таблица 7.1

Веса результатов измерений

№	$P' =$	$P_{1,0}$	$P_{1,5}$	$P_{2,0}$	$P_{2,5} \cdot 10^3$	$P_{3,0} \cdot 10^3$
1		49,6	349	2459	17,3	122
2		75,1	651	5645	48,9	424
3		69,9	584	4881	40,8	341
4		125,5	1407	15762	176,7	1979
5		32,6	186	1064	6,1	34,7
6		59,9	464	3595	27,8	215,6
7		46,1	313	2127	14,4	98,1
8		29,9	164	895	4,90	26,8
9		116,8	1263	13652	147,6	1595

В табл. 7.2 приведены поправки в результаты измерений при различных степенях n для независимых измерений в миллиметрах.

Таблица 7.2

Обработка независимых GPS-измерений

№	V _{1.0}	V _{1.5}	V _{2.0}	V _{2.5}	V _{3.0}
1	3,8	2,6	2,1	2,1	2,2
2	0	0	0	-0,1	-0,1
3	2,9	3,2	3,2	3,2	3,2
4	0	0,1	0,3	0,4	0,6
5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,4
6	-5,4	4,8	4,4	4,1	4,0
7	1,1	-2,1	-2,4	-2,3	-2,1
8	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5
9	-0,4	-0,8	-1,1	-1,4	-1,5

В табл. 7.3 приведены поправки в результаты измерений при различных степенях n для зависимых измерений.

Таблица 7.3

Обработка зависимых GPS-измерений

№	V _{1.2}	V _{1.5}	V _{2.0}	V _{2.5}	V _{3.0}
1	-3,0	-0,4	1,0	1,4	0,4
2	-0,2	-0,4	0,2	-0,3	-0,4
3	-4,8	-0,8	2,2	2,6	2,8
4	-0,7	1,4	0,0	0,4	0,3
5	1,9	-1,4	-0,8	-0,5	-0,7
6	12,2	9,1	5,9	4,9	4,4
7	-2,6	-3,8	-3,8	-3,1	-4,2
8	2,7	-0,7	0,5	0,3	0,0
9	-1,2	-0,4	-0,6	-1,2	-1,5

7.2. Обобщённый метод L_p-оценок

В опубликованной литературе уже приводились примеры применения неклассических методов уравнивания [48, 77]. Особо перспективным является предложенный недавно метод обработки измерений, получивший название метода L_p-оценок. Он обобщает классический метод наименьших квадратов (параметр распределения $n = 2$) и нетрадиционные методы – наименьших модулей ($n = 1$), чебышевского минимакса ($n = \infty$) и ряд других, соответствующих промежуточным значениям $1 \leq n < \infty$ [48].

В общем случае плотность распределения представим в виде [47]

$$y = \frac{Z_n}{2\Delta_n} \exp\left(-\frac{1}{n} \left| \frac{\varphi(X) - T}{\Delta_n} \right|^n\right), \quad n \geq 1. \quad (7.19)$$

где n и Z_n – параметры распределения; Δ_n – параметр рассеивания; $\varphi(X)$ и T – значения случайной величины и ее математического ожидания.

Уравнивание результатов измерений, ошибки которых подчиняются закону (7.19), необходимо выполнять, как это следует из принципа максимального правдоподобия Фишера, под условием метода Lp-оценок

$$\sum_i |V_i|^n \rightarrow \min, \quad (7.20)$$

где V_i – i -тое значение дискретной случайной величины; i – текущий индекс. Из работы [96] известно, что если математическое ожидание ошибок равно нулю и дисперсия их конечна

$$D(V) < \infty,$$

а оценки ищутся под условием (7.20), то применение указанного метода приводит к оценкам, несмещенным и эффективным с точки зрения метода максимального правдоподобия.

7.2.1. Целевые функции при реализации алгоритма Lp-оценок

При нелинейном методе оценок для уравнивания геодезических сетей минимизируют целевую функцию

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^N P_i |L_i(X)|^n, \quad (7.21)$$

где $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ – вектор неизвестных координат определяемых пунктов; P_i – вес результата измерений; $L(X) = \varphi(X) - T$ – свободный член нелинейного параметрического уравнения, равный разности вычислительного значения измерения и результата измерения; N – количество измерений; n – показатель степени. В обычном методе Lp-оценок показатель n является общим для всей целевой функции, но может для каждой $L_i(X)$ принимать свою индивидуальную степень (многостепенная оптимизация). Вместо (7.21) возможна и матричная форма записи

$$\Phi(X) = \left(|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right)^T P |L(X)|^{\frac{n}{2}}, \quad (7.22)$$

где P – диагональная матрица весов результатов измерений.

Опираясь на исследования [31], рассмотрим вопрос о назначении весов измерений при уравнивании геодезических сетей методом Lp-оценок.

Если предположить, что ошибки геодезических измерений следуют χ^2 -распределению с плотностью вероятности (7.19), то, как доказывается в [95], вес i -того измерения

$$C_i = \left(\frac{1}{\Delta_n} \right)^n |\varphi_i(X) - T|^{n-2} \quad (7.23)$$

и используется при поиске решения по формуле

$$\delta X_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L \quad (7.24)$$

Здесь параметры Z_n , Δ_n и n устанавливаются из предварительного анализа результатов измерений, а последний из них определяют по методу максимального правдоподобия с применением критерия согласия.

Если $\hat{X} = X_0 + \delta X$ отыскивается не с применением (7.24), а напрямую с использованием целевой функции (7.21), то согласно (7.23) $P = (1/\Delta_n)^n$. Минимизация функции (7.21) дает более устойчивое решение по сравнению с (7.24), имеющим при $n < 2$ точку разрыва, когда $v_i = \varphi_i(X) - T = 0$. В этом случае обычно применяют большое значение веса C_i (например, $C = 10^6$), что неизбежно приводит к ухудшению обусловленности информационной матрицы Фишера ($A^T C_j A$).

Для определения веса P воспользуемся формулой [47]

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{c^2},$$

где σ – стандарт измерения. Теперь, зная, что $\Delta_n = \frac{\sigma}{c}$,

$$P_i = \left(\frac{c}{\sigma_i} \right)^n \quad (7.25)$$

Поскольку веса P_i относительны, то в качестве « c » можно брать любую константу, например $c = 1$. Значения веса измерения, входящего в (7.21) и равного

$$P_i = (1/\sigma_i)^n, \quad (7.26)$$

приведут даже при уравнивании линейно-угловых сетей к тем же результатам, что и с использованием формулы (7.25).

При уравнивании нивелирных сетей обычно применяют веса превышений в виде $P' = c/K$ или $P' = c/L_{км}$, где c – произвольная постоянная; K – число станций нивелирования в ходе; $L_{км}$ – длина хода в километрах. Но и формула (7.26) необходима для нивелирования.

Для этого вычисляют

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{P'_i}}, \quad (7.27)$$

где σ_0 – стандарт превышения, для которого $P' = 1$.

Минимизацию функции (7.21) можно выполнить любым методом нелинейного программирования [89], например, методом Ньютона.

7.2.2. Реализация алгоритма Lp-оценок параметрическим способом

В известном методе Флетчера – Гранта – Хебдена [95] для решения системы параметрических уравнений поправок ставят условие в виде

$$\sum_{i=1}^N P_i |\vartheta_i|^{n-2} \vartheta_i^2 \Rightarrow \min, \quad n \geq 1, \quad (7.28)$$

в котором N – количество измерений; P – веса измерений; ϑ – поправки в измеренные величины из уравнения; n – показатель степени (при $n = 1,0$ – оценки параметров по методу наименьших модулей (МНМ); при $n = 1,5$ – метод наименьших «полтора» и т.д.). При $1,0 \leq n < 2,0$, разность $n - 2$ отрицательна и, следовательно, при $\vartheta_i = 0,0$ необходимо поправке присвоить малую величину.

Выражение (7.28) рассматривается как условие МНК с неизвестной весовой матрицей

$$C = P \cdot \text{diag} |\vartheta|^{n-2}, \quad (7.29)$$

уточняемой путем применения следующей процедуры [12, 47, 48]:

1. При любом n находят решение, например, по МНК ($n = 2$)

$$\begin{aligned} \delta X &= -(A^T P A)^{-1} A^T P L; \\ V &= A \delta X + L. \end{aligned} \quad (7.30)$$

2. При $1,0 \leq n < 2,0$ применяют итеративный метод

$$\delta X_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L; \quad (7.31)$$

$$V_j = A \delta X_j + L; \quad (7.32)$$

3. При $n > 2$ выполняют вычисления

$$\begin{aligned} G &= 1/(n-1) \\ \delta X_j &= (1-G)\delta X_{j-1} + G\delta \hat{X}_j, \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\delta \hat{X}_j = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L$$

и далее применяют равенства (7.32) – (7.33).

Процесс итераций заканчивается, если

$$\varepsilon > \frac{\|\delta X_j - \delta X_{j-1}\|}{\|\delta X_j\|}, \quad (7.34)$$

где ε – малое наперед заданное число.

Окончательное решение находят по формуле

$$\hat{X} = X_0 + \delta X, \quad (7.35)$$

где X_0 – вектор предварительных координат, соответствующий L .

Для достижения наилучшего решения при данной разрядной сетке ЭВМ предлагаем другую процедуру уравнивания, позволяющую находить минимум некоторой целевой функции.

При минимизации избранной целевой функции каждый раз уточняются координаты

$$\hat{X}_{j+1} = \hat{X}_j + \delta X_{j+1}, \quad (7.36)$$

и

$$\delta X_{j+1} = -(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L_j, \quad (7.37)$$

где

$$L_j = \varphi(\hat{X}_j) - T \quad (7.38)$$

– вектор свободных членов параметрических уравнений, а

$$C_j = P \cdot \text{diag} |L_j|^{n-2}. \quad (7.39)$$

Здесь X_0 – вектор начальных координат, попавший в область сходимости итераций, например, при $n = 2$ и уточняемый по (7.36) до тех пор, пока уменьшается значение целевой функции.

Процедура (7.36) – (7.39) проще алгоритма (7.30) – (7.35), и рабочие формулы не зависят от значений n . Ее отличает простота критерия останова итераций. Для этих целей вместо (7.34) можно использовать

$$\varepsilon > \max |\delta X_{j+1}|, \quad (7.40)$$

или условие, когда вместо уменьшения критериальной функции $\Phi(X)$ начался процесс ее увеличения. Иначе говоря, итерации продолжаются до тех пор, пока

$$\Phi(X_{j+1}) < \Phi(X_j). \quad (7.41)$$

В этом случае достигается наилучшее решение, не уступающее по точности первоначально рассмотренной процедуре.

Используя расширенную псевдообратную матрицу $F = (A^T C A)^{-1} A^T C$, запишем формулу (7.37) в виде

$$\delta X_{j+1} = -F_j L_j. \quad (7.42)$$

Теперь матрицу обратных весов можно вычислить по известной формуле МНК (фундаментальная теорема о переносе ошибок)

$$Q = F P_n^{-1} F^T \quad (7.43)$$

и выполнить оценку точности любой функции.

7.2.3. Реализация алгоритмов Лр-оценок коррелятным способом

Выше мы рассмотрели метод Лр-оценок при параметрическом способе уравнивания. Благодаря исследованиям С.Д. Волжанина стало возможно применение в алгоритмах Лр-оценок коррелятного способа [8].

Допустим, что задана система условных уравнений $BV + W = 0$ с весовой матрицей P . Решение этой системы методом Лр-оценок предполагает

А. При $1 \leq n < 2$:

1. Нахождение приближенного решения по МНК при $n = 2, 0$

$$K = -(BP^{-1}B^T)^{-1}W; \quad (7.44)$$

$$V = P^{-1}B^TK. \quad (7.45)$$

2. Вычисление векторов коррелят и поправок в измерения

$$C_j = P \cdot \text{diag}\{\vartheta_j\}^{n-2};$$

$$K_{j+1} = -(BC_j^{-1}B^T)^{-1}W;$$

$$V_{j+1} = C_j^{-1}B^TK_{j+1}$$

3. Приближения продолжаются до тех пор, пока

$$\frac{\|K_{j+1} - K_j\|}{\|K_j\|} < \varepsilon. \quad (7.46)$$

Б. При $n > 2$:

1. Нахождение приближенного решения по (7.44), (7.45) при $n = 2, 0$.

2. Вычисление вспомогательного числа $G = 1/(n-1)$ при заданном n .

3. Вычисление вектора коррелят

$$R_j = P^{-1}B^TK_j;$$

$$U_j = P \cdot \text{diag}\{R_j\}^{n-2};$$

$$K_0 = -(BU_j^{-1}B^T)^{-1}W;$$

$$K_{j+1} = (1-G)K_j + GK_0.$$

4. Приближения продолжаются до тех пор, пока не выполнится неравенство (7.34) с наперед заданным значением малой величины ε .

5. Вычисляют вектор поправок в измерения

$$V = U_j^{-1}B^TK_{j+1}.$$

Оценку точности функций измеренных и уравниваемых величин можно выполнить по формулам

$$m_f = \mu \sqrt{\frac{1}{P_f}}; \quad \mu = \sqrt{\frac{V^T P_n V}{r}}; \quad \frac{1}{P_f} = f_k P_n^{-1} f_k^T,$$

где $f_k = f_P F$, а f_P — функция для оценки точности измеренных и уравниваемых величин параметрическим способом.

Числовые примеры

Приведённые выше формулы позволяют уравнивать методом Лр-оценок не только плановые и высотные геодезические сети, но и спутниковые сети GPS/ГЛОНАСС. Для последнего случая возьмём GPS-четырёхугольник (рис. 7.1).

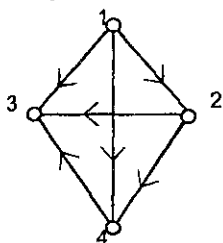


Рис. 7.1. Геодезический GPS-четырёхугольник

Поскольку для расчётов нами выбраны реальные измерения для служебного пользования, их указывать не будем, записывая координаты пунктов в условной пространственной системе. Выполним уравнивание этой сети параметрическим способом Лр-оценок по программе NIVA2.exe, с помощью которой уравнивают нивелирные сети и GPS-построения отдельно по X, Y и Z для степеней $n = 1,5$; $n = 2,0$; $n = 2,5$, взяв за исходный пункт точку с номером 4.

В табл. 7.4 приведены результаты уравнивания и оценки точности геодезического четырёхугольника.

Таблица 7.4

Разности уравненных координат и оценка точности при раздельном уравнивании

	$n = 1,5$		$n = 2,0$		$n = 2,5$	
	$\delta X, \delta Y, \delta Z$, мм	ш, мм	$\delta X, \delta Y, \delta Z$, мм	ш, мм	$\delta X, \delta Y, \delta Z$, мм	ш, мм
	2	3	4	5	6	7
μ	0,0684		0,2069		0,6627	
уравнивание по X						
1	0,6	1,9	0,0	1,8	-0,2	2,0
2	0,2	1,6	0,0	1,6	-0,2	1,6
3	0,0	1,6	0,0	1,5	0,0	1,6
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
уравнивание по Y						
μ	0,1574		0,4092		2,333	
1	2,9	5,7	0,0	5,0	0,5	10,5
2	2,1	5,3	0,0	4,8	-0,9	10,3
3	1,1	5,6	0,0	5,2	-1,1	11,8
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
уравнивание по Z						
μ	0,2272		0,6694		2,054	
1	1,1	7,2	0,0	5,5	-0,5	5,9
2	1,9	5,9	0,0	5,2	-0,8	5,2
3	1,3	6,5	0,0	5,7	-0,6	5,7
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Выполним совместное уравнивание GPS-четырёхугольника сразу по координатам X, Y и Z.

Таблица 7.

Разности уравненных координат и оценка точности при совместном уравнивании

l	n = 1,5		n = 2,0		n = 2,5	
	$\delta X, \delta Y, \delta Z, \text{ мм}$	m, мм	$\delta X, \delta Y, \delta Z, \text{ мм}$	m, мм	$\delta X, \delta Y, \delta Z, \text{ мм}$	m, мм
1	2	3	4	5	6	7
μ	0,128		0,328		0,900	
X ₁	0,5		0,0		-0,2	
Y ₁	3,3	6,6	0,0	4,4	-1,3	2,5
Z ₁	1,1		0,0		-0,6	
X ₂	0,2		0,0		-0,2	
Y ₂	2,1	5,7	0,0	4,0	-0,9	2,3
Z ₂	1,8		0,0		-0,8	
X ₃	0,0		0,0		0,0	
Y ₃	1,0	6,0	0,0	4,2	-0,4	2,4
Z ₃	1,2		0,0		-0,7	

По данным табл. 7.4 и 7.5 можно сделать следующие выводы:

1) результаты раздельного уравнивания в основном совпадают с результатами совместного уравнивания;

2) для оценки точности положения пунктов при раздельном уравнивании следует использовать формулы

$$m'_x = \mu' \sqrt{Q_{xx}}; \quad m'_y = \mu' \sqrt{Q_{yy}}; \quad m'_z = \mu' \sqrt{Q_{zz}}; \quad (7.47)$$

$$\mu' = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2}{3}}. \quad (7.48)$$

Благодаря ранее опубликованным исследованиям [69] стали возможными уравнивание и оценка точности в обобщенном методе Lp-оценок. В табл. 7.6 указаны те же сведения, что и в табл. 7.5, только для зависимых GPS-измерений.

Таблица 7.6

Разности уравненных координат и оценка точности при совместном уравнивании зависимых результатов GPS-измерений

l	n = 1,5		n = 2,0		n = 2,5	
	$\delta X, \delta Y, \delta Z, \text{ мм}$	m, мм	$\delta X, \delta Y, \delta Z, \text{ мм}$	m, мм	$\delta X, \delta Y, \delta Z, \text{ мм}$	m, мм
1	2	3	4	5	6	7
μ	0,147		0,336		0,904	
X ₁	2,1		0,0		-2,1	
Y ₁	3,0	25,1	0,0	11,4	-1,6	10,0
Z ₁	0,7		0,0		-0,7	
X ₂	0,4		0,0		-0,1	
Y ₂	2,1	25,2	0,0	7,2	-0,7	9,7
Z ₂	2,1		0,0		-0,5	
X ₃	-1,4		0,0		0,1	
Y ₃	2,0	14,6	0,0	13,3	-0,7	28,8
Z ₃	1,2		0,0		0,3	

- Сравнивая таблицы 7.5 и 7.6, можно сделать выводы:
- 1) уравниваемые координаты практически не изменяются для зависимых или для независимых величин;
 - 2) результаты оценки точности различаются на значительную величину, особенно в случаях, когда $n \neq 2,0$.

7.3. О влиянии коэффициентов корреляции на результаты уравнивания

На примере геодезического четырехугольника сети GPS исследуем влияние корреляционных связей между погрешностями по координатным осям на уравниваемые координаты и на результаты оценки точности.

В настоящее время в Беларуси и России широко используется глобальная навигационная система GPS и в будущем – ГЛОНАСС. Данные программные проекты включают в себя мероприятия по уточнению системы координат, созданию новой высокоэффективной государственной системы геодезического обеспечения своих территорий. Современные навигационные системы позволяют повысить точность, оперативность и экономическую эффективность решения задач геодезического обеспечения, созданию высокоточной геодезической сети и земельного кадастра государств.

Для достижения высокой точности результатов спутниковых определений необходимо [14, 16]:

- учитывать, что точность спутниковых определений различна по направлениям разных осей координат;
- правильно выбирать конфигурацию спутникового созвездия (время измерений) и другие факторы, снижающие точность спутниковых определений;
- корректно назначать весовые матрицы спутниковых измерений для оптимального уравнивания.

Известно, что результаты непосредственных измерений чаще всего являются некоррелированными величинами. Но в математическую обработку могут включаться не сами измерения, а их функции, например, углы, вычисленные по независимым (следовательно, коррелированным) измерениям или их функциям, например, дирекционным углам сторон, приращением координат и др.

Поэтому возникает задача уравнивания коррелированных измерений. Во всех этих случаях необходимо знать корреляционные матрицы, которые в отличие от случая некоррелированных измерений уже не будут диагоналями. Метод наименьших квадратов в применении к некоррелирован-

ным измерениям называется классическим, а к коррелированным – обобщенным. Классический принцип, таким образом, является частным случаем обобщенного принципа наименьших квадратов.

В общем случае корреляционная матрица измерений имеет вид

$$K_T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & K_{13} & K_{1N} \\ K_{21} & \sigma_2^2 & K_{23} & K_{2N} \\ K_{31} & K_{32} & \sigma_3^2 & K_{3N} \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \sigma_N^2 \end{pmatrix}, \quad (7.49)$$

где σ_i^2 – дисперсии измерений (диагональные элементы матрицы K_T); K_{ij} – корреляционные моменты (недиагональные элементы).

При выполнении спутниковых измерений для каждого вектора приращений Δ_x , Δ_y и Δ_z выдаются следующие сведения:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & K_{xy} & K_{xz} \\ & \sigma_y^2 & K_{yz} \\ \text{sim} & & \sigma_z^2 \end{pmatrix},$$

которые служат исходной информацией для вычисления коэффициентов корреляции по формуле

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (7.50)$$

В результате для трех векторов GPS-треугольника имеем следующую корреляционную матрицу

$$K_T = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & r_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & r_{45} & r_{46} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & r_{56} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & r_{78} & r_{79} \\ \text{sim} & & & & & & & 1 & r_{89} \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

Тогда в обобщенном параметрическом способе уравнения используют формулы

$$\hat{X}_{B1} = X_{B1}^0 + x_{B1}, \quad (7.51)$$

$$x_{B1} = -R_{B1}^{-1} B_{B1}, \quad (7.52)$$

$$R_{B1} = A_{B1N}^T (\bar{K}_T^{-1})_{N2N} A_{B1N}, \quad (7.53)$$

$$B_{B1} = A_{B1N}^T (\bar{K}_T^{-1})_{N2N} L_{N21}, \quad (7.54)$$

где свободный член параметрического уравнения поправок вычисляют из выражения

$$L_{Nk1} = T_{Nk1}^{своб} - T_{Nk1}^{срм}, \quad (7.55)$$

где

$$T_{Nk1}^{срм} = (\Delta X_1^0; \Delta Y_1^0; \Delta Z_1^0; \dots; \Delta X_{N/3}^0; \Delta Y_{N/3}^0; \Delta Z_{N/3}^0)^T,$$

а

$$\begin{aligned} \Delta X_{ik}^0 &= X_i^0 - X_k^0; \\ \Delta Y_{ik}^0 &= Y_i^0 - Y_k^0; \\ \Delta Z_{ik}^0 &= Z_i^0 - Z_k^0, \end{aligned}$$

которые найдены по предварительным значениям X^0 .

При этом

$$\bar{K}_T = P^{-1} K_T P^{-1}. \quad (7.56)$$

Из практики обработки спутниковых GPS-измерений выяснилось: использование корреляционных матриц, полученных по внутренней сходимости результатов в серии для реальных спутниковых определений, показало, что для измерений, проведенных в благоприятных условиях (при незаслоненности небосвода), максимальная погрешность приращений координат, как правило, не отклоняется от направления нормали к поверхности земного эллипсоида. При этом корреляционные моменты между вертикальными и горизонтальными погрешностями малы, что указывает на слабую стохастическую связь между ними. Следует отметить, что горизонтальные составляющие приращений координат в большинстве случаев также имели слабую корреляцию. Таким образом, на основе экспериментальных данных можно сделать следующие предварительные выводы: при правильном выборе установки спутникового приемника, т.е. при открытом небосводе отмечена некоррелированность результатов измерений приращения координат. В этом случае можно производить уравнивание спутниковой сети отдельно для каждой горизонтальной и вертикальной составляющих (так же, как нивелирные сети) [14, 58].

По программе KEMNGPSO обрабатываем спутниковый GPS-треугольник. Результаты вычислений представлены в табл. 7.7, где r – коэффициенты корреляции для каждого вектора с частной корреляционной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & r & r \\ & 1 & r \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$\Delta x; \Delta y; \Delta z$ – разности координат при $r \neq 0,0$ и $r = 0,0$ в мм;
 μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса при числе избыточных измерений, равном 9 ($N = 18, t = 9$);
 M_i – ошибки положения определяемых пунктов в м;
 $|V|_{\max}$ – наибольшая по модулю поправка из всех 18 приращений.

Таблица 7.7

Результаты вычислений

Обозн.	$r=0,0$	$r=0,1$	$r=0,2$	$r=0,3$	$r=0,4$	$r=0,5$	$r=0,6$	$r=0,7$	$r=0,8$	$r=0,9$
Δx_1	0	-0,1	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-1,2	-2,6	0
Δy_1	0	-0,1	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1	-3,9	-2,5	-1,7
Δz_1	0	-0,4	-0,8	-1,2	-1,5	-1,9	-2,2	-3,2	-2,9	-3,5
Δx_2	0	-0,1	-0,2	-0,1	-0,1	0	0,2	-0,2	0,1	1,5
Δy_2	0	-0,4	-0,6	-0,8	-1,1	-1,3	-1,4	-3,2	-1,7	-1,2
Δz_2	0	-0,2	-0,4	-0,6	-0,7	-0,9	-1	-0,5	-0,1	-0,9
Δx_3	0	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,1	0	-0,5	-0,5	0,9
Δy_3	0	-0,4	-0,8	-0,2	0,4	-2,1	-2,5	0,6	-0,3	-4,2
Δz_3	0	-0,3	0,5	-0,7	-1	-2,2	-1,5	-1,9	-1,7	-2,4
μ	0,328	0,315	0,309	0,309	0,315	0,328	0,352	0,396	0,423	0,615
M_1	0,0044	0,0046	0,0051	0,0058	0,0067	0,0078	0,0094	0,0123	0,0150	0,1485
M_2	0,0040	0,0040	0,0042	0,0047	0,0055	0,0069	0,0092	0,0137	0,0212	0,1458
M_3	0,0042	0,0045	0,0048	0,0055	0,0064	0,0078	0,0099	0,0237	0,0382	0,1458
$ V _{\max}$	0,0112	0,0111	0,0104	0,0102	0,0100	0,0098	0,0096	0,0097	0,0093	0,0090

По данным табл. 7.7 можно сделать следующие выводы:

1. При коэффициенте корреляции $r \leq 0,4$ расхождения в координатах малы (менее 1,1 мм при $\sigma_a = 7$ мм).
2. Величина μ практически не изменяется на отрезке $0,0 \leq r \leq 0,4$.
3. Оценка точности остается неизменной при $r = 0,5$.
4. Поправки в измерения из уравнивания практически не изменяются на отрезке $0 \leq r \leq 0,4$.
5. Даже при $0,0 \leq r \leq 0,8$ влияние корреляции мало при плохом сочетании созвездий и заслоненности небосвода.

Рассмотрим математическую обработку спутникового GPS-четырёхугольника при различных коэффициентах корреляции r и значениях степени n (рис. 7.2).

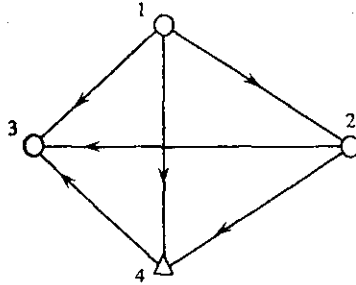


Рис. 7.2. GPS-четырёхугольник

Результаты измерений сведены в табл. 7.8.

Таблица 7.8

Исходные данные об измеренных величинах Δx , Δy , Δz

№ связи	Приращения, м	№ связи	Приращения, м	№ связи	Приращения, м
1-2 Δx	4066,7312	1-3 Δx	4701,1765	4-3 Δx	-4919,3785
Δy	-1771,5160	Δy	-11167,7437	Δy	-4509,7449
Δz	-2048,9064	Δz	732,4672	Δz	4723,6600
2-4 Δx	5553,8170	2-3 Δx	634,4404	1-4 Δx	9620,5500
Δy	-4886,4812	Δy	-9396,2266	Δy	-6657,9800
Δz	-1942,2960	Δz	2781,3649	Δz	-3991,1800

Выполним уравнивание GPS-четырёхугольника в программе `keimgps0` и сведём полученные результаты в табл. 7.9 – 7.14. При этом будем использовать Δx_i , Δy_i , Δz_i – разности в миллиметрах между координатами, полученными при $r = 0.0$ ($n = 2.0$), и координатами при других различных r на отрезке $(0; 0.8]$ с шагом 0.2 для $n = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$;

M_i – ошибки положения определяемых пунктов в м;

$|V|_{\max}$ – наибольшая по модулю поправка из 18 приращений.

При уравнивании воспользуемся корреляционной матрицей следующего вида:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r & r \\ & 1 & r \\ \text{sim} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 7.9

Значения разностей координат для различных r при $n = 2.0$

r	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
Δx_1	0	-0,2	-0,8	-1,2	-1,3
Δy_1	0	-0,2	0,2	-1,2	3,2
Δz_1	0	-0,6	-0,7	-0,3	1,0
Δx_2	0	-0,3	-0,5	-0,6	-0,9
Δy_2	0	0,6	-0,5	0,0	1,2
Δz_2	0	-0,3	-0,3	0,1	0,9
Δx_3	0	-0,4	-0,6	-0,8	-1,1
Δy_3	0	0,8	-1,2	-1,0	0,0
Δz_3	0	-0,4	-0,3	-0,2	1,5
μ	0,328	0,318	0,322	0,344	0,410
M_1	0,0088	0,0046	0,0055	0,0075	0,0124
M_2	0,0080	0,0040	0,0051	0,0084	0,0221
M_3	0,0084	0,0047	0,0062	0,0091	0,0187
IVI_{\max}	0,0112	0,0106	0,0105	0,0118	0,0138

Для МНК при $r = 0.0$ уравненные координаты трёх определяемых пунктов будут следующими:

$$\hat{x}_1 = -4701.1744 \text{ м}, \hat{y}_1 = 11167.7360 \text{ м}, \hat{z}_1 = -732.4697 \text{ м};$$

$$\hat{x}_2 = -634.4412 \text{ м}, \hat{y}_2 = 9396.2210 \text{ м}, \hat{z}_2 = -2781.3696 \text{ м};$$

$$\hat{x}_3 = -0.0006 \text{ м}, \hat{y}_3 = -0.0025 \text{ м}, \hat{z}_3 = -0.0027 \text{ м}.$$

Из табл. 7.9 видно, что при коэффициентах корреляции $r \leq 0.4$ расхождения в координатах малы (менее 1.2 мм). Величина μ практически не изменяется на отрезке $0.0 \leq r \leq 0.4$. Поправки в измерения из уравнивания практически не изменяются на отрезке $0 \leq r \leq 0.6$. Ошибки положения определяемых пунктов M_1, M_2, M_3 довольно схожи между собой при $r = 0,0; 0,2; 0,4; 0,6$.

Таблица 7.10

Значения разностей координат для различных r при $n = 1.0$

r	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
Δx_1	1,0	2,2	2,1	2,3	5,6
Δy_1	6,6	6,4	8,9	1,8	9,8
Δz_1	1,6	1,0	11,5	3,0	2,5
Δx_2	0,2	-1,0	-5,5	-2,3	-3,1
Δy_2	4,5	4,7	8,4	10,4	12,6
Δz_2	3,7	4,6	14,7	13,0	14,5
Δx_3	0,0	-1,5	-5,7	-2,5	-3,3
Δy_3	2,5	-1,7	4,3	-0,5	-1,1
Δz_3	1,8	1,2	11,7	3,2	2,7
μ	0,053	0,058	0,099	0,082	0,117
M_1	0,0082	0,0424	0,1066	0,3789	0,9141
M_2	0,0068	0,0288	0,1113	0,2007	0,9904
M_3	0,0076	0,0837	0,0878	0,1787	1,1688
IVI_{\max}	0,0172	0,0170	0,0295	0,0165	0,0204

Результаты, приведенные в табл. 7.10, показывают, что в случае МНМ ошибки положения определяемых пунктов при $r = 0$ практически одинаковы и по мере увеличения коэффициентов корреляции возрастают. Также с увеличением r возрастают разности координат по сравнению с МНК.

Таблица 7.11

Значения разностей координат для различных r при $n = 1.5$

r	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
Δx_1	0,5	0,5	0,0	-0,1	1,6
Δy_1	3,3	3,2	4,4	2,8	2,9
Δz_1	1,1	0,5	-1,0	3,0	1,8
Δx_2	0,2	-0,2	-0,2	-1,0	-2,9
Δy_2	2,1	1,6	2,0	2,4	2,7
Δz_2	1,8	1,4	1,2	0,3	-0,1
Δx_3	0,0	0,5	0,7	-1,0	-3,3
Δy_3	1,0	0,4	0,2	-1,4	1,8
Δz_3	1,2	0,9	1,3	1,8	2,6
μ	0,128	0,126	0,136	0,135	0,156
M_1	0,0074	0,0084	0,1877	0,0571	0,2348
M_2	0,0064	0,0079	0,0557	0,0825	0,3245
M_3	0,0067	0,0091	0,0487	0,1213	0,1706
IVI_{\max}	0,0138	0,0138	0,0150	0,0142	0,0135

Разности уравненных координат табл. 7.11 не превышают 4 мм для любых r из рассматриваемого диапазона. Ошибки положения определяемых пунктов M_1, M_2, M_3 близки при $r = 0,0; 0,2$ и возрастают с увеличением r . Разности координат изменяются с увеличением r незначительно и практически совпадают для случая $n = 2,0$

Таблица 7.12

Значения разностей координат для различных r при $n = 2.5$

r	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
Δx_1	-0,2	-0,9	-3,1	1,7	-4,1
Δy_1	-1,3	-1,7	-2,5	-0,5	0,9
Δz_1	-0,6	-1,0	-1,1	-1,0	-0,1
Δx_2	-0,2	-0,4	-1,9	6,3	-0,5
Δy_2	-0,9	-1,5	-2,1	0,9	1,0
Δz_2	-0,8	-0,9	-0,9	0,4	0,5
Δx_3	0,0	-0,3	-1,8	4,5	-1,2
Δy_3	-0,4	-0,8	-0,4	-2,5	-1,0
Δz_3	-0,7	-0,8	-0,5	-0,3	1,3
μ	0,900	0,864	0,857	0,922	1,075
M_1	0,0079	0,0029	0,0028	0,0153	0,0334
M_2	0,0070	0,0029	0,0028	0,0082	0,0117
M_3	0,0075	0,0033	0,0034	0,0083	0,0095
IVI_{\max}	0,0106	0,0102	0,0101	0,0102	0,0115

Из табл. 7.12 видно, что, как и в табл. 7.9, наибольшие поправки в измерения схожи на отрезке $0 \leq r \leq 0.6$ и что при коэффициентах корреляции $r \leq 0.4$ расхождения в координатах малы (менее 3 мм). Ошибки положения пунктов на отрезке $0 \leq r \leq 0.8$ малы по сравнению с табл. 7.9 – 7.11.

Таблица 7.13

Значения разностей координат для различных r при $n = 3.0$

r	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
Δx_1	-0,3	-2,2	-1,6	-16,5	-5,0
Δy_1	-1,9	-2,2	-2,7	-2,0	-1,1
Δz_1	-0,9	-1,2	-1,1	-2,8	1,5
Δx_2	-0,3	-1,7	0,8	-1,7	-1,5
Δy_2	-1,2	-1,6	-1,7	0,0	-0,2
Δz_2	-1,1	-1,2	-0,9	0,0	0,3
Δx_3	0,0	-1,5	0,7	-3,7	-4,9
Δy_3	-0,6	-1,0	-0,7	-2,1	-1,4
Δz_3	-1,0	-0,9	-0,9	4,3	-4,4
μ	2,504	2,393	2,390	4,720	5,614
M_1	0,0079	0,0042	0,0015	0,0631	0,0216
M_2	0,0068	0,0049	0,0012	0,0625	0,0778
M_3	0,0073	0,0060	0,0028	0,0609	0,0750
IVI_{\max}	0,0103	0,0100	0,0101	0,0175	0,0127

В табл. 7.13 Δx_i , Δy_i , Δz_i меньше 2 мм при коэффициентах корреляции $r \leq 0.4$. Поправки в измерения из уравнивания практически не изменяются на отрезке $0 \leq r \leq 0.4$. Ошибки положения определяемых пунктов уменьшаются с увеличением r на отрезке $0 \leq r \leq 0.4$.

Таблица 7.14

Значения разностей координат для различных r при МК

r	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
Δx_1	0,0	-0,9	-0,8	-2,9	-3,9
Δy_1	2,7	-0,8	-4,0	-1,3	2,8
Δz_1	1,6	-0,5	-0,7	-0,5	0,9
Δx_2	0,0	-0,3	0,2	-0,3	-2,0
Δy_2	1,8	-0,9	-4,0	-1,1	1,6
Δz_2	2,3	0,2	0,6	1,2	1,5
Δx_3	-0,2	-0,3	0,1	-0,4	-2,3
Δy_3	0,8	-1,1	-1,7	-0,3	-0,7
Δz_3	1,5	-0,3	0,5	-0,1	1,5
μ	0,079	0,284	0,337	0,281	0,222
M_1	0,0038	0,003	0,0037	0,0033	0,0044
M_2	0,0033	0,0029	0,0036	0,0033	0,0044
M_3	0,0034	0,0029	0,0036	0,0029	0,0038
IVI_{\max}	0,0133	0,0107	0,0109	0,0107	0,0134

В табл. 7.14 ошибки положения определяемых пунктов наименьшие для табл. 7.9 – 7.13. Максимальные поправки в измерения не превышают 3 мм. Метод МК оказался эффективнее метода наименьших квадратов (см. табл. 7.9). Зависимость изменения разности координат от r заключается в том, что с увеличением r поправки в измерения также возрастают нелинейно по сравнению с МНК.

7.4. Об обработке GPS и плановых сетей без исходных пунктов

В современной литературе по обработке спутниковых GPS-сетей достаточно редко рассматриваются вопросы уравнивания, при котором возможно применение степеней $1.0 \leq n \leq 2.0$ ($n = 2.0$ соответствует обработке по методу наименьших квадратов (МНК), а при $n = 1.0$ уравнивание выполняется по методу наименьших модулей (МНМ)). Обычно для получения уравненных приращений координат Δx , Δy , Δz между пунктами предпочтение даётся МНК. При этом рассматриваются вопросы уравнивания зависимых результатов GPS измерений, получаемых в относительном методе спутниковой геодезии только в рамках МНК [36], и нигде не анализируется обработка уравнивания зависимых приращений Δx , Δy , Δz . Причина заключается в отсутствии опубликованных алгоритмов.

Рассмотрим основные формулы уравнивания зависимых и независимых результатов измерений и применим их к обработке нуль-свободных (без исходных пунктов) и свободных (с одним исходным пунктом) спутниковых GPS сетей. Уравнивание зависимых геодезических измерений выполняется путём минимизации целевой функции

$$\Phi(x) = \left(|v_j^{\pm}| \right)^T \cdot K_{\pm}^{-1} \cdot |v_j^{\pm}|, \quad (7.57)$$

где $v_{j\pm}$ – вектор поправок в результаты измерений, вычисляемый в j -том приближении с использованием вектора координат определяемых пунктов $x_{j\pm}$; корреляционная матрица K_{\pm} вычисляется с помощью матриц по формуле [69]

$$K_{\pm} = P_{\pm}^{-1} R P_{\pm}^{-1}; \quad (7.58)$$

где

$$R_{\text{ном}} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ & 1 & \dots & r_{2N} \\ & \text{sim} & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

r – коэффициенты корреляции.

При уравнивании независимых величин используют следующие формулы:

вектор поправок в j -том приближении находят из выражения

$$V_j = V_{j-1} - AFV_{j-1}, \quad (7.59)$$

где $A_{n \times n}$ – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; $F_{m \times n}$ – расширенная псевдообратная матрица, определяемая для свободных и несвободных геодезических сетей по формуле

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C.$$

Весовая матрица $C_{n \times n}$ для независимых результатов измерений будет такой

$$C = P \cdot (\text{diag} |V|^{p-2}). \quad (7.60)$$

Для зависимых измерений используем формулы [69]

$$x = -H^{-1}G, \quad (7.61)$$

где $n_{\text{вн}}$ – матрица Гессе (вторых частных производных от функции (7.57))

$$H = Z + A^T C_z A, \quad (7.62)$$

где $Z_{n \times n}$ – матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и C_z по формуле

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N a_{k,i} a_{k,j} (C_z)_{k,m}. \quad (7.63)$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (7.61), вычисляется по формуле

$$G = A^T \cdot C_z^{-1} \cdot l, \quad (7.64)$$

где

$$l_{N \times 1} = [l_1 \dots l_N]^T;$$

$$C_1 = K_1^{-1} \cdot \times \left\{ \frac{n \cdot |n-2|}{2} |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\},$$

$$C_2 = K_2^{-1} \cdot \times S \cdot n \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[S \cdot \frac{n}{2} \cdot |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \right]^T \right\},$$

$$C_3 = K_3^{-1} \cdot \times S \cdot \left\{ n \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\},$$

$S_{N \times N}$ – диагональная матрица сигналов (единиц на диагонали со знаком числа $L(X)$); знак \times означает поэлементное умножение матриц. Например, $A \cdot \times B = (a_{i,j} \cdot b_{i,j})$;

В первом приближении при $j = 1$ в равенстве (7.57) используют V_0 , найденное по МНК. Приближения выполняются до тех пор, пока

$$\Phi_j(X) < \Phi_{j-1}(X),$$

при $j \leq 5$, чтобы остановить медленно сходящийся итерационный процесс.

Отметим, что с применением формулы (7.61) используются матрицы C_1, C_2, C_3 . Однако поправки в предварительные координаты можно вычислить по формуле

$$x = -F \cdot L(x), \quad (7.65)$$

где $F = H^{-1} A^T C_2$, (7.66)

и, следовательно, используются матрицы C_1 и C_2 , а матрицу C_3 можно не вычислять.

Оценку точности выполним по известной формуле [69]

$$Q = JK_e f^T, \quad (7.67)$$

где $f = \frac{2}{n \cdot p} F$; (7.68)

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K_n^{-1} V}{N - t}}; \quad (7.69)$$

$$V = Ax + L(x). \quad (7.70)$$

Если нет исходных пунктов, то [47]

$$R_{\text{ит}}^{-1} = (H + i^T \cdot i)^{-1} - i^T (i \cdot i^T i \cdot i^T)^{-1} i, \quad (7.71)$$

в которой для нивелирной сети

$$i = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1), \quad (7.72)$$

а для GPS сети

$$i_{\text{GPS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.73)$$

Вместо (7.71) можно записать

$$R_{\text{ит}}^{-1} = (H + I)^{-1} - \frac{1}{k^2} I, \quad (7.74)$$

где

$$I_{\text{ит}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i \\ \dots \\ i \end{pmatrix} \quad (7.75)$$

легко записывается программным путём при $t = 3 \times k$ (k – количество пунктов GPS сети).

Для плановой геодезической сети

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \dots & Y_t & -X_t \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_t & Y_t \end{pmatrix}, \quad (7.76)$$

в которой $X_i = x_i - x_{cp}$; $Y_i = y_i - y_{cp}$ – отклонения от среднего арифметического, полученного по координатам всех пунктов геодезической сети.

В табл. 7.15 – 7.22 приведены следующие сведения:

μ – СКО единицы веса, вычисляемая по формуле (7.69);

M_k – ошибки положения пункта в м;

Δx , Δy , Δz – разности урванных координат между значениями при $n = 2.1$ и при другом значении n .

Для плановой сети [79, с. 217] и для GPS-четырёхугольника эти величины даются в мм.

Последняя колонка в табл. 7.5 – 7.12 соответствует многокритериальному уравниванию, когда отыскиваются степени n для каждого измерения под условием

$$\Phi_2 = \min \max M. \quad (7.77)$$

По данным табл. 7.15 – 7.22 можно сделать следующие выводы:

1) расхождение координат при разных n для плановой сети не превосходит 6 мм, а для сети GPS – 8 мм;

2) при отсутствии корреляции величины Δx , Δy , Δz равны нулю как для плановых сетей, так и для сетей GPS при многокритериальном уравнивании;

3) во всех случаях $M_{\text{многокритериальное}} < M_{n=2.0}$.

Таблица 7.15

Результаты вычислений линейно-угловой триангуляции без использования корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	0,852	0,877	1,014	1,552	4,304	1,079
M_1	0,0368	0,0201	0,0067	0,0085	0,0223	0,0058
M_2	0,0587	0,0295	0,0116	0,0139	0,0365	0,0093
M_3	0,0674	0,0314	0,0105	0,0133	0,0349	0,0087
Δx_1	1	0	0	-1	-1	0
Δy_1	-3	-2	0	1	2	0
Δx_2	-2	-2	1	0	-1	0
Δy_2	-6	-3	0	1	2	0
Δx_3	-3	-3	0	1	1	-1
Δy_3	-3	-2	1	1	1	1

Таблица 7.16

Результаты вычислений линейно-угловой триангуляции
с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	1,398	1,266	1,514	2,033	4,813	1,744
M_1	0,0669	0,0137	0,0041	0,0025	0,0033	0,0018
M_2	0,1101	0,0237	0,0066	0,0039	0,0049	0,0024
M_3	0,1490	0,0254	0,0052	0,0032	0,0042	0,0024
Δx_1	1	0	0	0	0	0
Δy_1	-4	-2	0	1	1	-1
Δx_2	3	-3	0	-1	-1	-2
Δy_2	-15	-1	0	2	3	1
Δx_3	1	-6	0	0	0	-5
Δy_3	-6	-4	0	0	-1	-3

Таблица 7.17

Уравнивание линейно-угловой триангуляции без исходных пунктов
и без корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	0,958	0,993	1,154	1,816	5,114	1,097
M_1	0,0266	0,0078	0,0038	0,0047	0,0124	0,0035
M_2	0,0345	0,0111	0,0042	0,0047	0,126	0,0039
M_3	0,0389	0,0137	0,0046	0,0056	0,0151	0,0042
M_4	0,0271	0,0117	0,0051	0,0068	0,0186	0,0044
M_5	0,0223	0,0086	0,0046	0,0056	0,0149	0,0044
Δx_1	1	1	0	-1	-1	0
Δy_1	1	0	0	1	1	0
Δx_2	0	0	0	0	0	1
Δy_2	-2	-1	1	1	2	1
Δx_3	-3	-2	0	1	2	-1
Δy_3	-1	-1	0	-1	-1	0
Δx_4	0	0	0	0	0	-1
Δy_4	1	1	0	-1	-1	0
Δx_5	1	1	0	0	-1	1
Δy_5	1	0	0	0	-1	-1

Таблица 7.18

Уравнивание линейно-угловой триангуляции без исходных пунктов
с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	1,457	1,536	1,719	2,359	5,675	2,216
M_1	0,0183	0,0075	0,0020	0,0012	0,0016	0,0009
M_2	0,0482	0,0120	0,0024	0,0012	0,0016	0,0011
M_3	0,0651	0,0122	0,0026	0,0014	0,0019	0,0011

Окончание табл. 7.1.

M ₄	0,0398	0,0084	0,0025	0,0015	0,0019	0,0009
M ₅	0,0245	0,0088	0,0024	0,0012	0,0016	0,0011
Δx ₁	1	-1	0	0	0	0
Δy ₁	4	0	0	0	0	-1
Δx ₂	0	-2	0	0	1	1
Δy ₂	-2	-1	1	1	2	1
Δx ₃	1	0	1	1	1	0
Δy ₃	-3	2	0	0	-1	0
Δx ₄	-5	0	0	0	0	-1
Δy ₄	1	0	0	-1	-1	1
Δx ₅	3	3	0	-1	-1	1
Δy ₅	0	-1	0	0	-1	-1

Таблица 7.19

Уравнивание сети GPS без использования корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	0,064	0,128	0,401	0,900	2,504	0,075
M ₁	0,0086	0,0074	0,0085	0,0079	0,0079	0,0042
M ₂	0,0065	0,0064	0,0077	0,0070	0,0068	0,0040
M ₃	0,0072	0,0067	0,0081	0,0075	0,0073	0,0039
Δx ₁	1,1	0,6	0	-0,1	-0,2	-0,1
Δy ₁	6,6	3,6	0	-1,0	-1,6	0
Δz ₁	1,7	1,2	0	-0,5	-0,8	0,2
Δx ₂	0,3	0,3	0	-0,1	-0,2	0
Δy ₂	4,6	2,4	0	-0,6	-0,9	0
Δz ₂	3,7	2,0	0	-0,6	-0,9	0,3
Δx ₃	0,0	0,0	0	0,0	0,0	-0,1
Δy ₃	2,4	1,1	0	-0,3	-0,5	0
Δz ₃	2,0	1,4	0	-0,5	-0,8	0

Таблица 7.20

Уравнивание сети GPS с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	0,142	0,147	0,404	0,904	2,459	0,310
M ₁	0,2042	0,0251	0,0093	0,01	0,0709	0,0048
M ₂	0,1509	0,0252	0,0065	0,0097	0,0195	0,0046
M ₃	0,1769	0,0146	0,0104	0,0288	0,0354	0,0048
Δx ₁	7,0	2,5	0	-1,7	0,7	-1,3
Δy ₁	7,9	3,4	0	-1,2	-2,4	-0,9
Δz ₁	6,5	0,9	0	-0,5	-0,3	0
Δx ₂	-11,5	0,4	0	-0,1	0,1	1,8
Δy ₂	2,6	2,3	0	-0,5	-1,2	-0,1
Δz ₂	0,6	2,3	0	-0,3	-0,7	0,5
Δx ₃	-11,5	-1,4	0	0,1	0,6	1,5
Δy ₃	6,1	2,2	0	-0,5	1,1	0,2
Δz ₃	6,4	1,2	0	0,3	-0,8	-0,6

Таблица 7.21

Уравнивание сети GPS без исходных пунктов и без корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	0,079	0,156	0,491	1,102	3,066	0,120
M_1	0,0060	0,0051	0,0058	0,0054	0,0054	0,0030
M_2	0,0041	0,0042	0,0049	0,0044	0,0041	0,0027
M_3	0,0050	0,0047	0,0057	0,0053	0,0054	0,0027
M_4	0,0059	0,0054	0,0064	0,0059	0,0058	0,0030
Δx_1	0,7	0,4	0	-0,1	-0,2	0
Δy_1	3,2	1,8	0	-0,5	-0,9	0
Δz_1	-0,1	0,1	0	-0,1	-0,1	0,4
Δx_2	-0,1	0,0	0	-0,1	-0,1	0,1
Δy_2	1,2	0,6	0	-0,1	-0,2	0,4
Δz_2	1,9	0,9	0	-0,2	-0,3	0,7
Δx_3	-0,3	-0,2	0	0,1	0,1	-0,1
Δy_3	-0,9	-0,6	0	0,2	0,3	-0,3
Δz_3	0,2	0,3	0	-0,1	-0,2	0,2
Δx_4	-0,3	-0,2	0	0,1	0,2	0
Δy_4	-3,4	-1,8	0	0,4	0,7	-0,9
Δz_4	-1,8	-1,1	0	0,4	0,7	-1,1

Таблица 7.22

Уравнивание сети GPS без исходных пунктов с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	n=1.1	n=1.5	n=2.1	n=2.5	n=3.0	Многокритериальный
μ	0,174	0,180	0,494	1,108	3,011	0,464
M_1	0,1939	0,0299	0,0104	0,0183	0,0549	0,0029
M_2	0,2306	0,0273	0,0059	0,0065	0,0147	0,0027
M_3	0,1635	0,0187	0,0108	0,0273	0,0288	0,0029
M_4	0,0723	0,0068	0,0044	0,0091	0,0344	0,0029
Δx_1	11,0	2,2	0	-1,3	0,3	-1,3
Δy_1	3,8	1,4	0	-0,6	-1,8	-1,5
Δz_1	3,1	-0,2	0	-0,3	0,2	0
Δx_2	-7,5	0,0	0	0,3	-0,2	1,1
Δy_2	-1,6	0,3	0	0,1	-0,6	-0,5
Δz_2	-2,8	1,2	0	-0,2	-0,3	0,6
Δx_3	-7,5	-1,8	0	0,5	0,2	0,6
Δy_3	1,9	0,2	0	0,1	1,7	1,7
Δz_3	3,0	0,1	0	0,4	-0,4	-0,3
Δx_4	4,0	-0,4	0	0,4	-0,3	-0,4
Δy_4	-4,1	-2,0	0	0,5	0,6	0,3
Δz_4	-3,4	-1,1	0	0,1	0,5	-0,3

В заключение отметим, что результаты, приведенные в табл. 7.15 – 7.22 могут быть применены при отладке соответствующих программ.

Для геодезического применения спутниковых геодезических систем используется относительный метод определения координат. Ниже рассматриваются вопросы уравнивания GPS-сети, построенной в виде замкнутых геометрических фигур (так называемый сетевой метод), который представляет собой систему пунктов с определением векторов между ними таким образом, чтобы они образовали замкнутые геометрические фигуры (полигоны). При этом возникает задача уравнивания, которую можно решить коррелятным или параметрическим способом. Второй способ проще при реализации метода Лр-оценок. Однако он должен быть дополнен соответствующей методикой при уравнивании GPS-построений без исходных пунктов. Осложняется задача уравнивания ещё и в том случае, когда предусматривается обработка зависимых GPS-измерений. Это приводит к разработке новых методов уравнивания в рамках способа Лр-оценок. Указанные выше задачи решаемы в полном объёме, включая оценку точности как при раздельной (только для наземных результатов измерений), так и при совместной обработке в относительном методе определения координат.

За последние 15 лет экспериментальные исследования показали, что спутниковые методы по сравнению с традиционными по точности определения пространственных координат удовлетворяют практически всем видам топографо-геодезических работ. Спутниковые методы можно применять для создания съёмочного обоснования крупномасштабных съёмок, вплоть до масштаба 1:500. При этом достоинствами спутниковых методов являются отсутствие необходимости в постройке геодезических сигналов; полная независимость измерения от взаимной видимости между пунктами; временами суток и года; всепогодность измерений; возможность определения координат в кратчайшие сроки.

Исследования российских ученых показали, что корреляционная матрица в спутниковых GPS-измерениях, полученная по внутренней схожести результатов серии, влияет на результаты уравнивания незначительно. Такой же незначительной будет максимальная погрешность приращения координат для измерений, проведенных в благоприятных условиях (при незаслоненности небосвода). Отсюда следует: при правильном выборе места установки спутникового приемника, т. е. при открытом небосводе, отмечена некоррелированность результатов измерений приращения координат. В этом случае можно производить уравнивание спутниковой сети раздельно для каждой горизонтальной и вертикальной составляющих (так же, как нивелирные сети).

Целью исследований является практическое доказательство того, что при единичной корреляционной матрице совместное и раздельное уравнивание дают одинаковые результаты, однако при раздельном уравнивании время вычисления на ЭВМ сокращается до 30 раз по сравнению с совместным.

В работах [2, 58] отмечается возможность раздельного уравнивания приращений прямоугольных координат ΔX , ΔY , ΔZ , полученных в относительном методе спутниковой геодезии. Преимущества раздельного уравнивания перед совместным очевидны:

1. В девять раз уменьшаются: матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок A ; матрица нормальных уравнений $A^T P A$ и обратная к ней матрица, а также матрица $F = (A^T P A)^{-1} A^T P$, используемая при оценке точности в нетрадиционных алгоритмах уравнивания.

2. Примерно в 30 раз уменьшается время вычислений на персональных компьютерах (ПК).

3. Значительно уменьшается число операторов в программе уравнивания спутниковых измерений.

4. По одной и той же программе возможно уравнивание не только GPS измерений, но и нивелирных превышений.

Препятствием к раздельному уравниванию служит наличие объемной корреляционной матрицы для вектора между двумя смежными пунктами GPS и необходимость перехода при учете корреляции к обобщенному методу наименьших квадратов. При отсутствии корреляции совместный и раздельный методы уравнивания дают одинаковые результаты (уровненные координаты и результаты оценки точности даже при использовании метода Lp-оценок).

Исследования показали, что при совместном и раздельном уравнивании оценку точности можно выполнить по следующим формулам [58]:

$$\mu_{\text{совм}} = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2}{3}}; \quad (7.78)$$

$$M_{\text{совм}} = \mu_{\text{совм}} \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}}, \quad (7.79)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \left(\frac{m_x}{\mu_x} \right)^2; \\ Q_{22} &= \left(\frac{m_y}{\mu_y} \right)^2; \\ Q_{33} &= \left(\frac{m_z}{\mu_z} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Средние квадратические ошибки по осям координат можно вычислить по известным формулам

$$\mu_x = \sqrt{\frac{V_x^T P_x V_x}{r}}, \mu_y = \sqrt{\frac{V_y^T P_y V_y}{r}}, \mu_z = \sqrt{\frac{V_z^T P_z V_z}{r}}, \quad (7.81)$$

где $r = N - t$, N – количество измерений, t – число параметров.

Важным как при совместной, так и при отдельной обработке является вопрос уравнивания GPS сетей без исходных пунктов. В работе [2] дано решение этой задачи на основе метода регуляризации. Но, как оказалось, для поиска параметра регуляризации необходимо до 10 – 15 раз получить обратную матрицу нормальных уравнений.

Для обработки GPS построений и сетей нивелирования в производственных программах рекомендуем следующий метод получения N^+

$$N^+ = (N + I^T I)^{-1} - \frac{1}{\kappa^2} I^T I, \quad (7.82)$$

где $I = (1 \ 1 \ \dots \ 1)_{1 \times \kappa}$, κ – число всех пунктов геодезической сети.

Формула (7.82) легко программируется: 1) вычисляем $N = A^T P A$; 2) к каждому элементу этой матрицы прибавляем единицу и получаем обратную матрицу Q обычным путем; 3) из каждого элемента матрицы Q отнимаем $1/\kappa^2$ и получаем N^+ .

Решим пример уравнивания реального GPS четырехугольника совместным и отдельным способами при одном исходном пункте (табл. 7.23. и табл. 7.24.) и при отсутствии исходных пунктов (табл. 7.25 и 7.26), когда при использовании совместного способа матрица I в формуле (7.82) будет такой (7.73)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 10},$$

Таблица 7.23

Совместное уравнивание GPS-четырёхугольника без исходных пунктов (некоррелированные измерения). Программа kgpsnulo.bat

Обозначения	$\sigma = 1.5$	$\sigma = 2.0$	$\sigma = 2.5$
1	3	4	5
μ	0.156	0.402	1.102
M_1	0.0051	0.0060	0.0054
M_2	0.0042	0.0051	0.0044
M_3	0.0047	0.0060	0.0053
M_4	0.0054	0.0067	0.0059
δ_{x1}	0.0004	-4701.1744	-0.0001

Окончание табл. 7.23

δ_{y1}	0.0016	11167.7361	-0.0007
δ_{z1}	0.0001	-732.4697	-0.0001
δ_{x2}	0.0000	-634.4412	-0.0001
δ_{y2}	0.0005	9396.2221	-0.0002
δ_{z2}	0.0008	-2781.3696	-0.0003
δ_{x3}	-0.0002	-0.0006	0.0001
δ_{y3}	-0.0006	-0.0025	-0.0002
δ_{z3}	0.0002	-0.0027	-0.0002
δ_{x4}	-0.0002	4919.3766	0.0001
δ_{y4}	-0.0016	4509.7454	0.0004
δ_{z4}	-0.0010	-4723.6609	0.0005

Таблица 7.24

Совместное уравнивание GPS-четырёхугольника без исходных пунктов
(коррелированные измерения). Программа kgrsnulo.bat

Обозначения	$n = 1.5$	$n = 2.0$	$n = 2.5$
1	3	4	5
μ	0.180	0.411	1.108
M_1	0.0299	0.0127	0.0183
M_2	0.0273	0.0076	0.0065
M_3	0.0187	0.0142	0.0273
M_4	0.0068	0.0049	0.0091
δ_{z1}	0.0019	-4701.1746	-0.0016
δ_{y1}	0.0012	11167.7370	-0.0008
δ_{z1}	-0.0003	-732.4699	-0.0004
δ_{x2}	0.0001	-634.4412	0.0004
δ_{y2}	0.0003	9396.2224	0.0001
δ_{z2}	0.0011	-2781.3696	-0.0003
δ_{x3}	-0.0017	-0.0008	0.0006
δ_{y3}	0.0002	-0.0039	0.0001
δ_{z3}	0.0002	-0.0027	0.0005
δ_{x4}	-0.0003	4919.3770	0.0005
δ_{y4}	-0.0018	4509.7455	0.0007
δ_{z4}	-0.0010	-4723.6607	0.0002

В таблице 7.24 приведены результаты вычислений по формулам, опубликованным ранее [69], для зависимых GPS-измерений.

Таблица 7.25
Оценка точности координат точек без исходных пунктов при раздельном уравнивании по X, Y и Z (некоррелированные измерения)

Обозначения	n = 1.5		n = 2.0		n = 2.5	
	Q _n	m	Q _n	m	Q _n	m
l	3	4	5	6	7	8
Уравнивание по оси X						
μ	0.0494		0.126		0.337	
m _{x1}	442	1.04	102	1.27	10.6	1.10
m _{x2}	197	0.69	41.2	0.81	4.23	0.69
m _{x3}	231	0.75	41.2	0.81	4.23	0.69
m _{x4}	442	1.04	121	1.38	12.9	1.21
Уравнивание по оси Y						
μ	0.160		0.376		0.977	
m _{y1}	408	3.23	87.7	3.52	9.44	3.00
m _{y2}	313	2.83	79.3	3.35	8.04	2.77
m _{y3}	517	3.64	140	4.44	16.2	3.92
m _{y4}	408	3.23	99.6	3.75	10.6	3.18
Уравнивание по оси Z						
μ	0.212		0.573		1.605	
m _{z1}	258	3.41	33.0	3.29	3.36	2.94
m _{z2}	216	3.12	41.6	3.70	3.63	3.06
m _{z3}	178	2.83	36.5	3.46	3.11	2.83
m _{z4}	343	3.92	60.2	4.44	5.64	3.81
Совместная оценка точности при раздельном уравнивании						
μ	0.156		0.402		1.102	
M ₁	5.19		6.00		5.33	
M ₂	4.19		5.12		4.39	
M ₃	4.75		5.93		5.34	
M ₄	5.39		6.74		5.44	

В табл. 7.25 обработка выполнялась по формулам (7.78) – (7.83).

Таблица 7.26
Раздельное уравнивание GPS четырехугольника по осям X, Y, Z без исходных пунктов

Обозначения	n = 1.5	n = 2.0	n = 2.5
	2	3	4
Уравнивание по оси X			
δ_{x1}	-0.0004	-4701.1744	-0.0001
δ_{x2}	0.0000	-634.4412	-0.0001
δ_{x3}	0.0002	-0.0006	0.0001
δ_{x4}	0.0002	4919.3766	0.0001

Окончание табл. 7.26

Уравнивание по оси Y			
δ_{y1}	0.0016	11167.7361	-0.0007
δ_{y2}	0.0005	9396.2221	-0.0002
δ_{y3}	-0.0006	-0.0025	0.0002
δ_{y4}	-0.0016	4509.7454	0.0006
Уравнивание по оси Z			
δ_{z1}	0.0001	-732.4697	-0.0001
δ_{z2}	0.0008	-2781.3696	-0.0003
δ_{z3}	0.0002	-0.0027	-0.0002
δ_{z4}	-0.0010	-4723.6609	0.0005

В таблицах 7.23 – 7.26:

n – показатель степени ($n = 2.0$, – метод наименьших квадратов; $n = 1.0$, – метод наименьших модулей);

δ – изменения приращений координат по сравнению с $n = 2.0$;

μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса;

M_i – средняя квадратическая ошибка положения i -той точки.

По данным табл. 7.23 – 7.26 можно сделать выводы:

1. Результаты как совместного, так и раздельного уравнивания полностью совпадают.

2. При использовании различных степеней n наихудшие результаты оценки точности получены для метода, соответствующего $n = 1.5$, независимо от того, присутствуют или отсутствуют исходные пункты.

3. Эффект, указанный в пункте 2, также присутствует при анализе величин δ_x , δ_y и δ_z , полученных при различных значениях n .

Отметим, что с использованием формулы (7.82) составлена производственная программа по раздельному уравниванию GPS-сетей, внедренная в 2004 г. в Республиканском унитарном предприятии «Белаэрокосмогеодезия».

ЛИТЕРАТУРА

1. Афонин, К.Ф. Об оптимальном проектировании геодезических сетей / К.Ф. Афонин // Тр. НИИГАиЖ, Новосибирск. – 1975. – Т. 37. – С. 141 – 152.
2. Бойко, Е.Г. Особенности уравнивания сетей, построенных относительно-ным методом спутниковой геодезии / Е.Г. Бойко, С.А. Ванин // Геодезия и картография. – 2001. – № 9. – С. 9 – 14.
3. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
4. Большаков, В.Д. Уравнивание геодезических построений: справочное пособие / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.
5. Большаков, В.Д. Теория ошибок измерений: учеб. для вузов / В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
6. Бондаренко, В.А.. Уравнивание нивелирных сетей с поиском грубых ошибок измерений / В.А. Бондаренко, В.И. Мишкевич, Н.С. Сырова // Геодезия и картография. – 2003. – № 5. – С. 26 – 28.
7. Будо, А.Ю. Применение метода Lp-оценок для уравнивания и оценки точности спутниковых GPS- и ГЛОНАСС-измерений / А.Ю. Будо, Н.О. Куприяненко, А.П. Присяжнюк // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. Ф. Прикладные науки. – 2007. – № 12. – С.114 – 119.
8. Будо, А.Ю. О малости отклонений координат пунктов от их истинных значений в обобщённом многокритериальном методе Lp-оценок по сравнению с методом наименьших квадратов / А.Ю. Будо // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. – 2007. – Вып. 22. – С. 142 – 146.
9. Будо, А.Ю. О свойствах обобщённого метода Lp-оценок на примере уравнивания плановой геодезической сети триангуляции / А.Ю. Будо // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. – 2007. – Вып. 22. – С. 146 – 148.
10. Будо, А.Ю. Уравнивание зависимых результатов измерений нелинейным и линейным методом Lp-оценок / А.Ю. Будо // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. – 2007. – Вып. 22. – С. 139 – 141.
11. Бурмистров, Г.А. Основы способа наименьших квадратов / Г.А. Бурмистров. – М.: Геодезиздат, 1963. – 392 с.
12. Волжанин, С.Д. Уравнивание геодезических сетей методом Lp-оценок / С.Д. Волжанин // Геодезия картография и аэросъемка. – Львов. – 1984. – Вып. 40. – С. 20 – 23.

13. Вычислительная математика / В.А. Вергасов [и др.]. – М.: Недра, 1976. – 230 с.
14. Гаврилов, Ю.А. Исследование пространственных ориентаций погрешностей спутниковых определений: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Ю.А. Гаврилов. – СПб., 2003. – 22 с.
15. Гайдаев, П.А. Математическая обработка геодезических сетей / П.А. Гайдаев. – М.: Недра, 1973. – 288 с.
16. Генике, А.А. Глобальная спутниковая система определения местоположения GPS и ее применение в геодезии / А.А. Генике, Г.Г. Побединский. – М.: Картогеоцентр – Геодезиздат, 1999. – 272 с.
17. Герасименко, М.Д. Оптимизация точности измерений в геодезических сетях / М.Д. Герасименко // Геодезия и картография. – 1985. – № 2. – С. 10 – 14.
18. Герасименко, М.Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями / М.Д. Герасименко. – Владивосток, 1994. – 73 с.
19. Герасименко, М.Д. Каких неприятностей можно ждать от зависимых измерений? / М.Д. Герасименко, Н.В. Шестаков, М. Касахара // Геодезия и картография. – 2002. – № 10. – С. 10 – 13.
20. Гордеев, Ю.А. О применении принципа наименьших квадратов при уравнивании зависимых результатов измерений / Ю.А. Гордеев // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1960. – № 2.
21. Гринберг, Г.М. Применение электронно-вычислительных машин при уравнивании триангуляции и полигонометрии. Проблемы астрономии и геодезии / Г.М. Гринберг. – М.: Наука, 1970. – С. 115 – 121.
22. Грищенко, Е.В. Алгоритм автоматизированного вычисления координат определяемых пунктов при отсутствии видимости между исходными пунктами / Е.В. Грищенко // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. Ф. Прикладные науки. Строительство. – 2007. – № 12. – С. 120 – 124.
23. Грищенко, Е.В. Выявление засечек двух пунктов по двум исходным, для которых добавление пятого избыточного измерения не улучшает качества построения / Е.В. Грищенко; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2005. – 8 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 27.06.05, № 870 – гд. 2005.
24. Грищенко, Е.В. Математическая обработка двух пунктов по двум исходным, для которых добавление пятого избыточного измерения не улучшает качества построения / Е.В. Грищенко; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2005. – 8 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 27.06.05. – № 869. – гд. 2005.
25. Грищенко, Е.В. Поиск качественных и некачественных засечек четырех определяемых пунктов по четырем исходным / Е.В. Грищенко; Полоцкий

- гос. ун-т. – Новополоцк. – 2005. – 8 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 27.06.05. – № 868. – гд. 2005.
26. Грищенко, Е.В. Поиск наилучших и наихудших сочетаний геодезических измерений для однократных засечек трёх определяемых пунктов по трём исходным / Е.В. Грищенко // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. – 2007. – Вып. 22. – С. 148 – 154.
 27. Грищенко, Е.В. Анализ качества построения однократных засечек двух пунктов по двум исходным / Е.В. Грищенко, Л.Ф. Зуева // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2006. – № 1(20). – С. 24 – 25.
 28. Грищенко, Е.В. О влиянии корреляции на результаты обработки спутниковых GPS-измерений / Е.В. Грищенко, А.П. Присяжнюк // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. Ф. Прикладные науки. Строительство. – 2007. – № 6. – С. 132 – 135.
 29. Грищенко, Е.В. Оптимизация качества построения геодезических сетей методами нелинейного программирования / Е.В. Грищенко, Л.А. Черкас // Вестник Полоцкого гос. ун-та. – Сер. Ф. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 117 – 120.
 30. Грищенко, Е.В. О назначении весов угловых измерений при уравнивании линейно-угловой и угловой триангуляции / Е.В. Грищенко // Тр. молодых специалистов Полоцкого гос. ун-та. – 2007. – Вып. 22. – С. 154 – 159.
 31. Джунь, И.В. Теория веса геодезического измерения, основанная на принципе правдоподобия / И.В. Джунь // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – Львов. – 1988. – Вып. 47. – С. 9 – 13.
 32. Зубрицкий, И.В. Метод четырёхугольников без диагоналей в геодезии и его точность / И.В. Зубрицкий // В сб.: Уравнивание и оценка точности сетей геодезического съёмочного обоснования. – Минск: Урожай, 1965.
 33. Ивлиева, Н.Г. Устойчивые методы решения плохо обусловленных систем нормальных уравнений при уравнивании геодезических построений: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Н.Г. Ивлиева. – М., 1993. – 23 с.
 34. Картавенков, И.Г. О целесообразности применения нуль-свободных плановых геодезических сетей в практике земельно-кадастровых работ / И.Г. Картавенков // Земля Беларуси. – 2005. – № 1. – С. 30 – 31.
 35. Кемниц, Ю.В. Обобщённая формула средней квадратической ошибки нелинейной функции / Ю.В. Кемниц // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1958. – № 5.

36. Кемниц, Ю.В. Математическая обработка зависимых результатов измерений / Ю.В. Кемниц. – М.: Недра, 1970. – 192 с.
37. Купчинов, И.И. Проблема собственных чисел матриц в геодезии / И.И. Купчинов, М.М. Иванова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1973. – № 1. – С. 3 – 9.
38. Лебедев, Н.Н. Курс инженерной геодезии / Н.Н. Лебедев. – М.: Недра, 1974. – 360 с.
39. Левданский, П.М. Уравнивание и оценка точности нуль-свободных сетей нивелирования и GPS-построений, минуя регуляризацию / П.М., Левданский, Н.С. Сырова, А.П. Присяжнюк // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – М. – 2001. – № 3(5). – С. 22 – 23.
40. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основа математической теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – М.: Физматгиз, 1962. – 349 с.
41. Мазмишвили, А.И. Способ наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1968. – 438 с.
42. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
43. Маркузе, Ю.И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1972. – 152 с.
44. Маркузе, Ю.И. Основы уравнивательных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
45. Маркузе, Ю.И. Поиск грубых ошибок при рекуррентном уравнивании наземных и спутниковых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе // Геодезия и картография. – 1995. – № 11. – С. 8 – 15.
46. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.
47. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
48. Мещеряков, Г.А. Об уравнивании геодезических измерений с учётом закона распределения ошибок измерений / Г.А. Мещеряков, С.Д. Волжанин, В.В. Киричук // Геодезия и картография. – 1984. – № 2. – С. 9 – 11.
49. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич [и др.]. // Вестник Полоцкого гос. ун-та. – 2004. – № 4. – С. 77 – 79.
50. Мицкевич, В.И. Исследование взаимосвязи чисел обусловленности / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1995. – № 1. – С. 8 – 10.

51. Мицкевич, В.И. Математическая обработка геодезических построений методами нелинейного программирования: автореф. дис. ... д-ра техн. наук / В.И. Мицкевич. – СПб., 2004. – 29 с.
52. Мицкевич, В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования / В.И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ. – 1997. – 64 с.
53. Мицкевич, В.И. О невозможности поиска грубых ошибок измерений при параметрическом способе уравнивания / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1994. – № 4. – С. 24 – 26.
54. Мицкевич, В.И. К вопросу обоснования обобщенного метода наименьших квадратов / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. Ф. Прикладные науки. – 2007. – № 6. – С. 107 – 113.
55. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 9 с. – Деп в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.99, № 681. – гд. 99.
56. Мицкевич, В.И. Применение метода релаксации при многокритериальном уравнивании и оценке точности геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 680. – гд. 99.
57. Мицкевич, В.И. Оценка качества построения геодезических сетей с помощью относительной обусловленности / В.И. Мицкевич, С.В. Маковский // Геодезия и картография. – 1995. – № 11. – С. 16 – 17.
58. Мицкевич, В.И. Раздельное уравнивание GPS-измерений / В.И. Мицкевич, А.П. Присяжнюк, В.Г. Стержанов; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2000. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 720. – гд. 2000.
59. Мицкевич, В.И. Особенности уравнивательных вычислений по методу многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.2002, № 776. – гд. 2002.
60. Вывод формулы для вычисления весов результатов измерений при многостепенной оптимизации / В.И. Мицкевич [и др.]; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 01.09.2003, № 806. – гд. 2003.
61. Мицкевич, В.И. Сравнительный анализ относительной обусловленности для вытянутых сетей / В.И. Мицкевич, А.В. Строк, А.А. Ткачев;

- Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2003. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК, 01.09.2003, № 809. – гд. 2003.
62. Мицкевич, В.И. Взаимосвязь допусков на развитие геодезических сетей с допусками на относительную обусловленность, характеризующую качество построения этих сетей / В.И. Мицкевич, А.В. Строк, Л.А. Черкас // Тр. междунар. науч.-техн. конф. Геодезия, картография, кадастры и экология. – Полоцкий гос. ун-т. – 2001. – С. 141 – 144.
63. Мицкевич, В.И. Анализ качества построения геодезических сетей, характеризующихся плохо обусловленной матрицей нормальных уравнений / В.И. Мицкевич, Л.А. Черкас // Материалы междунар. конф., г. Горки, 1999. – С. 242 – 243.
64. Мицкевич, В.И. Об исключениях из правила Ансермета и их учёте при проектировании плановых геодезических сетей / В.И. Мицкевич, Л.А. Черкас, Е.В. Грищенко // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2007. – № 1(24). – С. 28 – 29.
65. Мицкевич, В.И. Уравнивание и оценка точности геодезических сетей методом Ньютона / В.И. Мицкевич, В.В. Ялтыхов; Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 6 с. – Деп в ОНТИ ЦНИИГАиК 22.03.99, № 658 – гд. 99. // РЖ: 52. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1999. – № 8. – 08.52.198ДЕП. – С. 27.
66. Мицкевич, В. И. Исследование области сходимости при вычислении координат способом линеаризованных итераций / В.И. Мицкевич, Ахмад Али Хасан // Геодезия и картография. – 1994. – № 6. – С. 14 – 16.
67. Мицкевич, В.И. К вопросу оценки качества построения геодезических сетей на ЭВМ / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский // Геодезия и картография. – 1996. – № 6. – С. 19 – 21.
68. Мицкевич, В.И. Математические методы и модели на ЭВМ. / В.И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 2007. – 184 с.
69. Мицкевич, В.И. Алгоритм обобщённого метода Лр-оценок на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. – 2006. – № 9. – С. 92 – 96.
70. Мицкевич, В.И. Вычисление различных видов засечек на ЭЦВМ методом сверхрелаксации / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1974. – № 10. – С. 36 – 40.
71. Мицкевич, В.И. Исследования по переходу от нелинейного к линейному обобщённому методу Лр-оценок / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо, П.М. Туронок // Междунар. конф. Геодезия и кадастры. Прошлое, настоящее, будущее. – 2006. – С. 89 – 100.

72. Мицкевич, В.И. К вопросу обоснования обобщенного метода наименьших квадратов / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. Ф. Прикладные науки. – 2007. – № 6. – С. 107 – 113.
73. Мицкевич, В.И. Некоторые вопросы робастного уравнивания зависимых GPS-измерений / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо, Ю.П. Будо // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2007. – № 2 (55). – С. 9 – 11.
74. Об эффекте использования метода наименьших квадратов при решении нелинейных уравнений / В.И. Мицкевич [и др.]. // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2008. – № 1 (28). – С. 61 – 63.
75. Мицкевич, В.И. Общий алгоритм вычисления пространственных засечек на ЭВМ методом релаксации / В.И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1978. – № 2. – С. 25 – 28.
76. Монин, И.И. Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях / И.И. Монин // Респ. межвед. науч.-техн. сб. Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1982. – Вып. 35. – С. 75 – 84.
77. Мудров, В.И. Методы обработки измерений / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Недра, 1970.
78. Нейман, Ю.М. Алгоритм проектирования геодезического построения на ЭВМ / Ю.М. Нейман // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1966. – № 6. – С. 33 – 45.
79. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
80. Применение геодезических засечек, их обобщенные схемы и способы машинного решения / П.И. Баран [и др.]. – М.: Недра, 1986. – 166 с.
81. Проворов, К.Л. Некоторые вопросы оптимального проектирования геодезической сети / К.Л. Проворов, К.Ф. Афонин // Геодезия и картография. – 1976. – № 1. – С. 16 – 20.
82. Проворов, К.Л. Кривые ошибок геометрической связи в триангуляции / К.Л. Проворов // Тр. НИИГАиК. – Новосибирск. – 1958. – Т. X.
83. Проворов, К.Л. Радиогеодезия. 2-е изд, испр. и доп. / К.Л. Проворов, Ф.П. Носков. – М.: Недра, 1973. – 352 с.
84. Рабинович, Б.Н. Практикум по высшей геодезии / Б.Н. Рабинович. – М.: Геоиздат, 1961. – 339 с.
85. Станеев, И. Изчисляване на многократни обратни засечки с помощта на ЦЕИМ / И. Станеев // Геодезия, картография, землеустройство. – 1973. – 13. – № 2. – С. 8 – 9.

86. Тамутис, З.П. Оптимальные методы проектирования геодезических сетей / З.П. Тамутис. – М.: Недра, 1979. – 133 с.
87. Тамутис, З.П. Проектирование инженерных геодезических сетей / З.П. Тамутис. – М.: Недра, 1990. – 138 с.
88. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов [и др.]. // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1978. – № 3. – С. 3 – 10.
89. Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. / Д.М. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
90. Черкас, Л.А. Анализ причин плохой обусловленности системы параметрических нормальных уравнений при обработке геодезических построений на плоскости / Л.А. Черкас, Е.В. Грищенко // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 3. – С. 124 – 126.
91. Черкас, Л.А. Исследование логических взаимосвязей между качеством построения засечек и сетей, из них состоящих / Л.А. Черкас, Е.В. Грищенко // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 3. – С. 116 – 120.
92. Черкас, Л.А. О применении эффекта сжатия геодезических звеньев при их проектировании / Л.А. Черкас, Е.В. Грищенко // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. В. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 114 – 116.
93. Юршанский, З.М. О необходимости и достаточном числе приближений при уравнивании триангуляции / З.М. Юршанский // Тр. Новосибирского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. – 1948. – Т. II. – С. 89 – 100.
94. Ялтыхов В.В. Многократное уравнивание нуль-свободных плановых геодезических сетей / В.В. Ялтыхов, С.Г. Шнитко, П.М. Левданский // Вестник Полоцкого гос. ун-та. – 2006. – № 3. – С. 111 – 115.
95. Fletcher, R. The calculation of linear best Lp-approximations / R. Fletcher, I.A. Grant, M.D. Hebden // Computer Journal. – 1971. – V. 14. – № 3. – P. 277 – 279.
96. Hogan, W. Norm minimizing estimation and unbiasedness / W. Hogan // Econometrica. – 1976. – V. 44. – № 3. – P. 277 – 279.

Научное издание

**МИЩКЕВИЧ Валерий Иванович
БУДО Андрей Юрьевич
ГРИЦЕНКОВ Евгений Владимирович**

**АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ И УРАВНИВАНИЯ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ**

Редактор *Г.А. Тарасова*
Дизайн обложки *В.А. Виноградовой*

Подписано в печать 30.10.08. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 16,24. Уч.-изд. л. 15,15. Тираж 50. Заказ 1801.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.2004 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.2004

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29