

УДК 528.48

**АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ
МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ****д-р техн. наук, проф. В.П. ПОДШИВАЛОВ,
В.А. КУЗЬМИЧ****(Белорусский национальный технический университет, Минск)**

В практике маркшейдерско-геодезического обеспечения предприятий горнодобывающей промышленности не всегда известны параметры связи различных систем координат. В данной работе представлены результаты применения метода наименьших квадратов для преобразования систем координат. Рассмотрено различное количество связующих пунктов, различное положение этих пунктов на координатной плоскости. Проанализированы разнообразные случаи вычисления предварительных значений параметров преобразования в зависимости от положения пар точек относительно друг друга и остальных пунктов. Алгоритм вычислений реализован на примерах, характеризующих рассматриваемые варианты. Результаты исследования представлены в виде таблиц. Приведена точность преобразований. Представлены предварительные выводы по применению метода наименьших квадратов для осуществления связи между системами координат.

Введение. Преобразование систем координат является важным вопросом в горнодобывающем производстве. При создании маркшейдерско-геодезического обоснования необходимо привязываться к пунктам государственной геодезической сети (ГГС). Это необходимо для того, чтобы получить возможность вести с заданной точностью предстоящие маркшейдерско-геодезические работы в системе координат и отметок исходных опорных пунктов, а также осуществлять контроль и выдерживать необходимую точность выполняемых геодезических работ. От точности преобразованных координат пунктов зависит точность и, соответственно, правильность пространственного расположения построений на основе натуральных измерений.

Зачастую необходимо осуществлять связь между различными системами координат, описывающих пункты и реперы государственных, местных и разбивочных сетей.

В процессе строительства и деформации земной поверхности от ведения горных работ происходит утрата части знаков, следовательно, необходимо выполнять дополнительные работы по восстановлению маркшейдерско-геодезического обоснования.

Одним из наиболее широко применимых методов слежения за сохранностью пунктов является мониторинг их пространственного положения от стабильных пунктов Государственной геодезической сети (ГГС), который требует решать задачу связи систем координат, а также анализировать значимость имеющих место изменений пространственного положения центров пунктов маркшейдерско-геодезического обоснования.

Для решения данных задач предлагаем применение метода наименьших квадратов, так как он дает как количественные вероятнейшие значения, так и их интервальные оценки.

Исследования проведены с целью выработки рекомендации по практическому применению метода наименьших квадратов для осуществления связи между различными системами координат, что в свою очередь расширяет возможность практического использования современных технологий маркшейдерско-геодезического обеспечения для модернизации и поддержания на высоком техническом уровне маркшейдерско-геодезических работ горнодобывающей отрасли.

Ход работы и результаты

В основу анализа данных взята работа [1]. Координаты точек некоторой системы $O'X'Y'$ преобразовывались в другую систему OXY . Для объективной оценки эффективности алгоритма преобразования систем координат исследования проводились на моделях, когда известны истинные значения координат и параметры связи. В ходе исследования произведен анализ влияния расположения пунктов, их число, расположение связующих точек на параметры преобразования и их точность. Рассмотрено разное количество пунктов в системе (8 пунктов, 16 пунктов и 50 пунктов), а также различное положение связующих точек относительно этих пунктов (табл. 1).

Все вычисления производились в программе Excel, фрагменты исходных данных и алгоритм преобразований представлены в таблицах 2 – 9.

Таблица 1

Расположение пунктов (обозначены мелкими точками) и связующих точек (обозначены крупными точками) относительно их в системе OXY

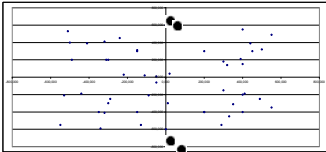
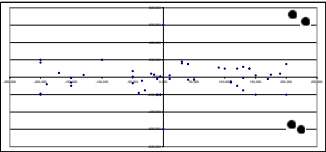
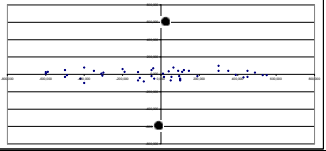
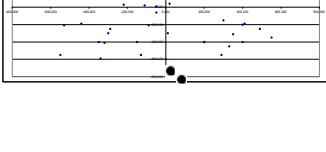
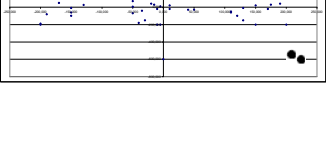
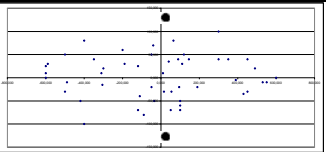
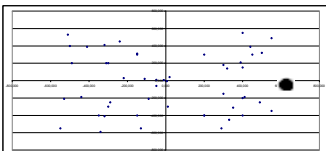
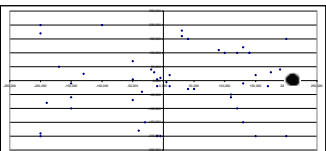
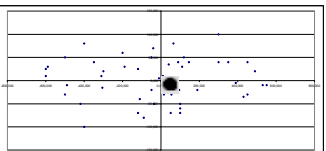
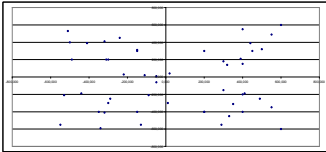
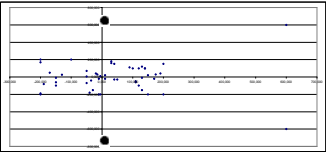
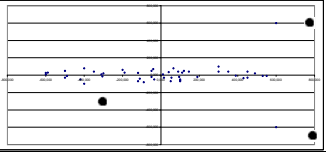
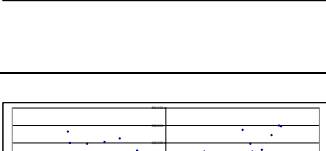
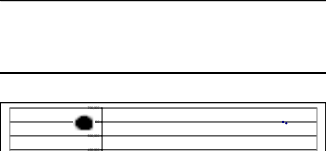
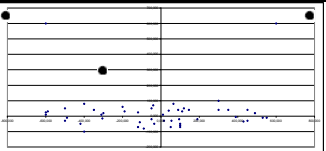
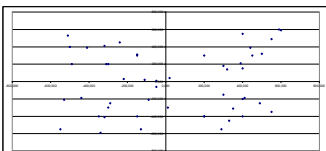
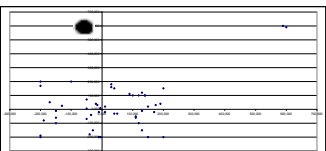
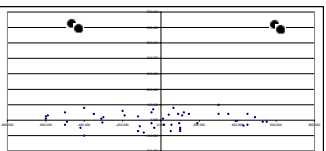
Варианты расположения свя- зующих точек		Варианты расположения пунктов		
		рассредоточенное	сосредоточенное вдоль одной оси	сгруппированное
		1	2	3
далеко относительно друг друга, внутри относительно пунктов	а-1			
	а-2			
близко относительно друг друга, внутри относительно пунктов	б			
далеко относительно друг друга, снаружи относительно пунктов	в-1			
	в-2			
близко относительно друг друга, снаружи относительно пунктов	г			

Таблица 11

Ошибки приближенных и вероятнейших значений параметров преобразования

Расположе- ние пунктов	Расположе- ние связующих точек	Ошибки параметров преобразования											
		8 пунктов				16 пунктов				50 пунктов			
		Δa , м	Δb , м	$\Delta \alpha$	Δt	Δa , м	Δb , м	$\Delta \alpha$	Δt	Δa , м	Δb , м	$\Delta \alpha$	Δt
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	а	До обработки				До обработки				До обработки			
		0,003	0,012	0°02'16"	0,00042	0,003	0,012	0°02'16"	0,00042	0,191	0,07	0°00'28"	0,00025
		После обработки				После обработки				После обработки			
		0,024	0,001	0°00'44"	0,00001	0,037	0,013	0°02'10"	0,00004	0,005	0,00	0°00'07"	0,00009
	б	До обработки				До обработки				До обработки			
		0,049	0,107	2°40'20"	0,02201	0,049	0,107	2°40'20"	0,02201	0,185	0,12	0°05'15"	0,00231
		После обработки				После обработки				После обработки			
		0,000	0,007	0°03'35"	0,00088	2,800	0,720	2°33'54"	0,00093	0,005	0,00	0°00'00"	0,00010
	в	До обработки				До обработки				До обработки			
		0,251	0,451	0°02'16"	0,00084	0,251	0,451	0°02'16"	0,00084	0,347	0,00	0°00'28"	0,00025
		После обработки				После обработки				После обработки			
		0,022	0,026	0°00'34"	0,00001	0,039	0,035	0°02'09"	0,00003	0,006	0,00	0°00'05"	0,00007
г	До обработки				До обработки				До обработки				
	30,22	46,89	3°39'18"	0,01628	30,22	46,89	3°39'18"	0,01628	18,71	9,44	0°06'20"	0,00775	
	После обработки				После обработки				После обработки				
	0,018	0,020	0°03'41"	0,00191	0,971	3,289	3°27'06"	0,00193	0,005	0,00	0°00'27"	0,00022	
2	а	До обработки				До обработки				До обработки			
		0,003	0,012	0°02'16"	0,00042	0,003	0,012	0°02'16"	0,00042	0,191	0,07	0°00'28"	0,00025
		После обработки				После обработки				После обработки			
		0,013	0,008	0°02'11"	0,00021	0,002	0,010	0°02'15"	0,00023	0,004	0,00	0°00'35"	0,00003
	б	До обработки				До обработки				До обработки			
		0,049	0,107	2°40'20"	0,02201	0,049	0,107	2°40'20"	0,02201	0,185	0,12	0°05'15"	0,00231
		После обработки				После обработки				После обработки			
		0,010	0,005	0°05'32"	1,02201	0,357	0,427	2°29'36"	0,00107	0,003	0,00	0°00'57"	0,00027
	в	До обработки				До обработки				До обработки			
		0,251	0,451	0°02'16"	0,00084	0,251	0,451	0°02'16"	0,00084	0,347	0,00	0°00'28"	0,00025
		После обработки				После обработки				После обработки			
		0,009	0,072	0°01'26"	0,00013	0,011	0,055	0°02'07"	0,00016	0,001	0,00	0°00'19"	0,00005
г	До обработки				До обработки				До обработки				
	30,22	46,89	3°39'18"	0,01628	30,22	46,89	3°39'18"	0,01628	18,71	9,44	0°06'20"	0,00775	
	После обработки				После обработки				После обработки				
	0,005	0,040	0°04'08"	0,00196	3,697	4,130	2°59'29"	0,00203	0,007	0,00	0°00'04"	0,00043	

Окончание таблицы 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	а-1	До обработки				До обработки				До обработки			
		0,003	0,012	0°02'16"	0,000421	0,003	0,012	0°02'16"	0,000421	0,191	0,077	0°00'28"	0,000259
		После обработки				После обработки				После обработки			
		0,010	0,004	0°01'36"	0,000123	0,002	0,005	0°01'15"	0,000062	0,000	0,005	0°00'16"	0,000103
		До обработки				До обработки				До обработки			
		0,003	0,012	0°01'27"	0,001316	0,003	0,012	0°01'27"	0,000658	0,191	0,077	0°00'53"	0,000134
	После обработки				После обработки				После обработки				
	0,015	0,012	0°00'11"	0,000238	0,000	0,000	0°00'12"	0,000129	0,000	0,006	0°00'26"	0,000088	
	До обработки				До обработки				До обработки				
	0,049	0,107	2°40'20"	0,022013	0,049	0,107	2°40'20"	0,022013	0,185	0,125	0°05'15"	0,002313	
	После обработки				После обработки				После обработки				
	0,001	0,002	0°04'29"	0,000915	0,005	0,008	0°15'17"	0,000923	0,001	0,007	0°00'13"	0,000106	
	До обработки				До обработки				До обработки				
	0,251	0,451	0°02'16"	0,000842	0,251	0,451	0°02'16"	0,000842	0,347	0,003	0°00'28"	0,000259	
	После обработки				После обработки				После обработки				
	0,004	0,050	0°01'08"	0,000085	0,006	0,018	0°01'00"	0,000051	0,003	0,003	0°00'11"	0,000056	
	До обработки				До обработки				До обработки				
	0,251	0,606	0°01'27"	0,001317	0,251	0,406	0°01'27"	0,000658	0,347	0,003	0°00'54"	0,000134	
	После обработки				После обработки				После обработки				
	0,041	0,048	0°00'53"	0,000292	0,024	0,012	0°00'50"	0,000192	0,000	0,005	0°00'19"	0,000032	
	До обработки				До обработки				До обработки				
	30,226	46,898	3°39'18"	0,016288	30,226	46,898	3°39'18"	0,016288	18,710	9,440	0°06'20"	0,007759	
	После обработки				После обработки				После обработки				
	0,003	0,035	0°04'02"	0,001959	0,031	0,026	0°14'59"	0,001981	0,000	0,005	0°00'17"	1,007759	

Таблица 12

Точность вычисления параметров перехода

Рассматриваемые случаи		Точность параметров перехода											
		8 пунктов				16 пунктов				50 пунктов			
		σ_α	σ_m	σ_a	σ_b	σ_α	σ_m	σ_a	σ_b	σ_α	σ_m	σ_a	σ_b
1	а	0,000186	0,000186	0,104	0,104	0,000040	0,000166	0,082	0,082	0,000075	0,000075	0,037	0,037
	б	0,007407	0,007570	3,604	3,604	0,001723	0,008693	3,869	3,903	0,000078	0,000075	0,037	0,037
	в	0,000176	0,000176	0,112	0,112	0,000042	0,000162	0,087	0,087	0,000074	0,000074	0,037	0,037
	г	0,013425	0,013644	8,668	8,668	0,003140	0,013408	7,222	7,190	0,000073	0,000074	0,037	0,037
2	а	0,000234	0,000234	0,086	0,086	0,000084	0,000222	0,061	0,064	0,000185	0,000185	0,038	0,038
	б	0,002294	0,002345	0,494	0,494	0,001928	0,007484	1,462	1,461	0,000228	0,000228	0,038	0,038
	в	0,000228	0,000228	0,108	0,108	0,000091	0,000205	0,073	0,072	0,000161	0,000161	0,038	0,038
	г	0,012442	0,012645	5,950	5,950	0,005303	0,012523	4,385	4,366	0,000160	0,000161	0,038	0,038
3	а-1	0,000213	0,000213	0,092	0,092	0,000171	0,000171	0,068	0,068	0,000111	0,000111	0,037	0,037
	а-2	0,000243	0,000242	0,105	0,105	0,000185	0,000185	0,074	0,074	0,000111	0,000111	0,037	0,037
	б	0,002405	0,002458	0,768	0,768	0,001081	0,001108	0,374	0,374	0,000119	0,000119	0,037	0,037
	в-1	0,000202	0,000202	0,107	0,107	0,000160	0,000160	0,072	0,072	0,000105	0,000105	0,037	0,037
	в-2	0,000194	0,000194	0,102	0,102	0,000158	0,000158	0,072	0,072	0,000105	0,000105	0,038	0,038
	г	0,011224	0,011407	5,979	5,979	0,006000	0,006110	2,750	2,750	0,000105	0,000105	0,038	0,038

Взяты истинные значения координат в системе OXY и параметров преобразования (табл. 2, 3); вычислены точные значения координат данных пунктов в системе $O'X'Y'$ (табл. 4); с помощью генератора случайных чисел искажали эти значения (табл. 5).

Далее находили приближенные значения параметров преобразования по двум связующим точкам (так как неизвестных всего четыре: α – угол разворота систем координат $O'X'Y'$ и OXY ; a и b – координаты центра системы $O'X'Y'$ в системе OXY ; m – масштаб преобразования) (табл. 6, 7).

Таблица 2

Точные значения связующих пунктов

Координаты	Номера связующих пунктов и значения их координат									
	1	2	3	4	...	46	47	48	49	50
x	100,000	10,000	20,000	40,000	...	60,000	175,000	200,000	30,000	-20,000
y	200,000	30,000	60,000	80,000	...	26,000	300,000	40,000	20,000	-30,000

Таблица 3

Точные значения параметров преобразования

α	a	b	m
0,003489	1000,000	1500,000	1,000000

Таблица 4

Точные значения координат связующих пунктов в системе $O'X'Y'$

Координаты	Номера связующих пунктов и значения их координат									
	1	2	3	4	...	46	47	48	49	50
x	1099,302	1009,895	1019,791	1039,721	...	1059,909	1173,952	1199,859	1029,930	980,105
y	1700,348	1530,035	1560,069	1580,139	...	1526,209	1800,609	1540,698	1520,105	1469,930

Таблица 5

Искаженные значения координат связующих пунктов в системе $O'X'Y'$

Координаты	Номера связующих пунктов и значения их координат									
	1	2	3	4	...	46	47	48	49	50
x	1099,069	1010,157	1019,632	1039,924	...	1059,553	1174,070	1200,044	1029,736	979,749
y	1700,722	1529,637	1559,676	1580,207	...	1525,310	1800,524	1541,094	1519,711	1470,115

Таблица 6

Координаты двух связующих точек, относительно которых вычисляются приближенные значения параметров преобразования

Координаты	Номера связующих пунктов и значения координат	
	30	19
x	300,000	-200,000
y	150,000	-100,000
x'	1299,134	800,296
y'	1650,738	1399,071

Таблица 7

Приближенные значения параметров преобразования

α_0	a_0	b_0	m_0
0,003600	999,831	1499,737	0,999481

Далее находили вероятнейшие значения параметров преобразования систем координат (табл. 8).

Таблица 8

Вероятнейшие значения параметров преобразования

α	a	b	m
0,003530	1000,007	1500,004	0,999824

Затем вычисляли вероятнейшие поправки в координаты системы OXY (табл. 9).После введения этих поправок в искаженные значения координат в системе $O'X'Y'$ получали вероятнейшие значения координат в системе $O'X'Y'$ (табл. 10).

Таблица 9

Вероятнейшие поправки в координаты связующих пунктов

Номера пунктов	Поправки в координаты	
	Δx_i	Δy_i
1	0,213	-0,401
2	-0,257	0,397
3	0,159	0,388
4	-0,207	-0,077
5	0,146	-0,344
...		
45	0,401	-0,388
46	0,351	0,401
47	-0,154	0,043
48	-0,215	-0,391
49	0,195	0,395
50	0,367	-0,177

Таблица 10

Вероятнейшие значения координат связующих пунктов в системе ОХУ

Координаты	Номера связующих пунктов и значения их координат									
	1	2	3	4	...	46	47	48	49	50
x	1099,283	1009,899	1019,792	1039,717	...	1059,904	1173,916	1199,829	1029,931	980,116
y	1700,320	1530,034	1560,064	1580,130	...	1526,211	1800,567	1540,702	1520,106	1469,939

В заключение производили сравнение вычисленных приближенных и вероятнейших значений параметров преобразования и координат пунктов с точными.

Результаты исследования представлены в таблице 11.

Отклонение вероятнейших значений от истинных показывает, насколько эффективен метод при различных условиях. В таблице 12 показана точность вычисленных значений параметров связи.

В заключение проведенного исследования по применению алгоритма преобразования систем координат по методу наименьших квадратов можно сделать следующие **выводы**:

- применялся модельный способ, что позволяет объективно оценить отклонение вероятнейших значений исследуемых величин от их истинных значений;
- во всех случаях, рассмотренных в данной работе, имеет место эффект математической обработки по методу наименьших квадратов. Искаженные значения параметров преобразования и координат пунктов значительно приближаются к истинным;
- наибольший эффект заметен, когда имеется достаточно большое количество пунктов с известными координатами. Эти пункты должны быть сгруппированы как можно ближе друг к другу (хотя бы по одной из координат (x или y)), а связующие пункты, относительно которых вычисляются приближенные значения параметров преобразования, наоборот, должны быть разнесены как можно дальше;
- нет необходимости существенно увеличивать число избыточных значений координат связующих пунктов в двух системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подшивалов, В.П. Оценка параметров преобразования координат на плоскости методом наименьших квадратов / В.П. Подшивалов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – М., 2010. – № 7. – С. 69 – 71.

Поступила 04.12.2013

**ANALYSIS OF THE ACCURACY OF COORDINATE SYSTEM TRANSFORMATION
BY THE MEANS OF THE LEAST SQUARES METHOD**

U. PADSHYVALOU, V. KUZMICH

In the practice of survey and geodesic support of mining ventures the characteristics of the connection of various coordinate systems are not always known. In the article the results of applying of least squares method for coordinate system transformation are presented. Various numbers of points and their different positions on the coordinate plane are reviewed. Various cases of calculation of tentative value of transformation characteristics depended on the position of the pairs of points respecting each other and the other points are analyzed. The algorithm of the calculation is realized on the examples, characterizing the variants under study. The results of the research are presented in the form of tables. The transformation accuracy is given. Preliminary conclusions about the further applying of the least squares method for connecting coordinate systems are drawn.