

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ОСНОВЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
для студентов специальности 1-39 01 01 «Радиотехника»

Составление и общая редакция
С.В. Мальцева

Новополоцк 2005

УДК 621.391 (075.8)
ББК 22.143 я 73
О 75

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Е.В. ГЛУШКО, гл. инженер РПУП завод «Измеритель»;
Р.П. БОГУШ, канд. техн. наук, доцент кафедры радиоэлектроники

Рекомендован к изданию методической комиссией
радиотехнического факультета

О 75 Основы матричного анализа: Учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-39 01 01 «Радиотехника» / Сост. и общ ред. С.В. Мальцева. – Новополоцк: ПГУ, 2005. – 76 с. ISBN 985-418-366-1

Представлен курс лекций по основам построения алгоритмов обработки информации на основе матричного анализа с использованием векторно-матричного аппарата, методические указания к выполнению практических работ. Предлагается система оценки знаний студентов.

Предназначен для студентов и преподавателей радиотехнического факультета.

УДК 621.391 (075.8)
ББК 22.143 я 73

ISBN 985-418-366-1

©УО «ПГУ», 2005
© Мальцев С.В., сост., 2005

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
РАЗДЕЛ 1. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ КАК ЗАДАЧА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ	8
1.1. Введение	8
1.2. Корреляционный анализ в задачах обработки изображений и сигналов	8
1.3. Методы корреляционной обработки	10
1.3.1. Обработка изображений	10
1.3.2. Обработка сигналов	12
1.4. Способы сокращения вычислительных затрат при корреляционной обработке информации	13
Практическое занятие № 1	15
РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО АППАРАТА	16
2.1. Основные понятия и определения	16
2.2. Основные векторно-матричные операции	19
Практическое занятие № 2	22
РАЗДЕЛ 3. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ	23
3.1. Формализация задач декодирования кодов и синхронизации сигналов	23
3.2. Факторизация матриц Адамара	24
3.3. Методы факторизации Пойда и Ярославского	32
3.4. Универсальный метод факторизации матриц	35
Практическое занятие № 3	37
Практическое занятие № 4	38
РАЗДЕЛ 4. ОПТИМИЗИРУЮЩИЕ МЕТОДЫ ФАКТОРИЗАЦИИ	39
4.1. Факторизация бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения	39
4.1.1. Оптимизация размера блока при факторизации матриц	39
4.1.2. Алгоритм факторизации бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения	43

4.2. Факторизация бинарных матриц на основе переупорядочения строк подматриц по коду Грея	46
4.3. Оценки верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения	53
Практическое занятие № 5	57
Практическое занятие № 6	57
Практическое занятие № 7	57
РАЗДЕЛ 5. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ	58
5.1. Преобразования Уолша – Адамара	58
5.2. Преобразования в базисе ДЭФ	62
Практическое занятие № 8	74
Практическое занятие № 9	74
Литература	75

ВВЕДЕНИЕ

Цель и задачи дисциплины

Основная цель курса «Основы матричного анализа» – изучение студентами основ матричного анализа применительно к задачам, которые решаются в радиотехнике.

В результате изучения дисциплины студенты должны знать:

- математические основы современных методов обработки сигналов с позиций векторно-матричного анализа;
- алгебраические принципы построения алгоритмов основных векторно-матричных операций применительно к радиотехническим задачам;
- методы построения эффективных алгоритмов обработки сигналов с использованием векторно-матричного аппарата;

Уметь:

- формализовать различные радиотехнические задачи с использованием векторно-матричного аппарата для их решения;
- разрабатывать эффективные алгоритмы обработки информации;
- иметь представление о вычислительной сложности алгоритмов обработки информации с использованием векторно-матричного подхода; о направлениях, перспективах и проблемах развития теории матричного анализа для решения современных информационных задач.

Структура дисциплины

Согласно учебному плану специальности 1-39 01 01 «Радиотехника» курс «Основы матричного анализа» изучается студентами на 2 курсе (3 семестр), рассчитан на 36 часов и включает в себя следующие виды аудиторных занятий:

- 18 часов лекций;
- 18 часов практических работ.

Ниже представлено распределение курса по видам аудиторных занятий по разделам и темам.

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

Наименование разделов и тем лекций и их содержание	Количество часов
Введение	
Структура дисциплины	2
Раздел 1. Цифровая обработка сигналов как задача вычисления векторно-матричного произведения	
1.1. Введение	0,5
1.2. Корреляционный анализ в задачах обработки изображений и сигналов	0,5

1.3. Методы корреляционной обработки изображений и сигналов	0,5
1.4. Способы сокращения вычислительных затрат при корреляционной обработке бинарных сигналов и изображений	0,5
Раздел 2. Математические основы цифровой обработки сигналов на основе векторно-матричного аппарата	
2.1. Основные понятия и определения векторно-матричной алгебры	1
2.2. Основные операции векторно-матричной алгебры	1
Раздел 3. Факторизация матриц применительно к задачам цифровой обработки сигналов	
3.1. Формализация задач декодирования кодов и синхронизации сигналов	1
3.2. Факторизация матриц Адамара при обработке бинарных сигналов	2
3.3. Факторизация матриц методами Пойда и Ярославского	1
3.4. Универсальный алгоритм факторизации произвольных бинарных матриц	2
Раздел 4. Оптимизирующие алгоритмы факторизации бинарных матриц	
4.1. Факторизация бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения	1
4.2. Факторизация бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения и переупорядочения строк подматриц по коду Грея	2
4.3. Оценки верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения	1
Раздел 5. Факторизация матриц при спектральном анализе в различных базисах	
5.1. Преобразования Уолша – Адамара	1
5.2. Преобразования в базисе ДЭФ	1

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Наименование практического занятия	Количество часов
1. Цифровая обработка сигналов как задача вычисления векторно-матричного произведения	2
2. Математические основы цифровой обработки сигналов с использованием векторно-матричного аппарата	2
3. Факторизация матриц Адамара при обработке бинарных сигналов	2
4. Универсальный алгоритм факторизации произвольных бинарных матриц	2
5. Факторизация бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения	2
6. Факторизация бинарных матриц на основе переупорядочения строк подматриц по коду Грея	2
7. Оценки верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения	2
8. Преобразования Уолша – Адамара	2
9. Преобразования в базисе ДЭФ	2

Оценка знаний студентов

Для оценки работы и знаний студентов в рамках курса «Основы матричного анализа» используется накопительная система. Зачет выставляется по сумме баллов, которые студент набирает в течение всего учебного семестра, а также в результате выходного итогового контроля – контрольной работы.

Для получения аттестации (100 баллов максимум) необходимо:

- по практическим работам набрать не менее $2/3$ от максимально возможного количества баллов на момент аттестации по данному виду занятий;
- выполнить контрольную работу (два зачетных задания).

Распределение баллов по видам занятий

Вид занятий	Форма оценки учебной активности студента	Максимальное количество баллов по каждой форме оценки	Максимальное количество баллов по каждому виду занятий
Практические работы	Устные ответы на вопросы	5	$20 \times 9 = 180$
	Решение задач	10	
	Выполнение тестовых заданий	5	

Дополнительные баллы предусматриваются:

- за выполнение научно-исследовательской работы по основам матричного анализа (до 200 баллов);
- за подготовку докладов по методам и алгоритмам факторизации матриц, не включенным в рабочую программу курса «Основы матричного анализа» (до 100 баллов).

Очевидно, что для получения зачета студент должен набрать не менее 260 баллов, а для этого необходимо:

- получить две аттестации – 200 баллов минимум;
- получить не менее 60 баллов за итоговую контрольную работу (из возможных 100).

РАЗДЕЛ 1. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ КАК ЗАДАЧА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1.1. Введение

В настоящее время обработка изображений и сигналов с использованием цифровых преобразований все шире используется для решения множества прикладных задач в связи, радиолокации, измерительной технике, медицине и других областях, в которых раньше доминировала аналоговая обработка. Преимущество цифровых систем обусловлено рядом факторов, основной из которых – фактор качества. Аналоговые реализации многих систем зачастую не позволяют обеспечить высоких показателей качества передачи и воспроизведения сигналов, а переход на мировые стандарты ужесточает требования к таким параметрам систем, как быстродействие, помехоустойчивость и точность.

Повышение эффективности применения цифровых преобразований идет не только за счет развития элементной базы, но и путем совершенствования алгоритмов цифровой обработки изображений и сигналов. На современном этапе разработчику предлагается широкий спектр цифровых процессоров общего и специального назначения, т. е. реально существует элементная база для реализации эффективных алгоритмов обработки изображений и сигналов. Если 10 – 15 лет назад основным сдерживающим фактором внедрения методов цифровой обработки было отсутствие требуемой элементной базы, то на современном этапе развития техники уже можно говорить об отсутствии эффективных алгоритмов, обеспечивающих решение ряда прикладных задач.

1.2. Корреляционный анализ в задачах обработки изображений и сигналов

Цифровая обработка изображений и сигналов в настоящее время широко применяется для решения ряда прикладных задач в космических исследованиях, военной технике, связи, медицине, а также в различных областях промышленности и науки.

Обработка изображений является наиболее бурно развивающейся областью информационных технологий и в последнее время ей уделяется большое внимание во многих странах, в том числе и в Республике Беларусь. В области обработки изображений основные научные исследования проводятся для следующих практических направлений:

- системы машинного зрения для технологических процессов;
- системы для диагностики, мониторинга состояния объектов и окружающей среды;
- системы поиска и распознавания объектов для обработки медицинских изображений, изображений карт земной поверхности, чертежей, фотоснимков и др.;
- системы распознавания текста (рукописного и стилизованного).

Современные радиотехнические комплексы и системы наиболее широко используют сложные бинарные сигналы. Применение таких сигналов позволяет увеличить помехоустойчивость, имитационную и криптостойкость, более эффективно использовать частотный диапазон, осуществлять прием при отрицательном отношении сигнал/шум и в условиях многолучевого отражения с достаточно высокой вероятностью, повысить точность измерения координат и уменьшить импульсную мощность излучения. Причем, чем больше база сигнала (произведение длительности сигнала на ширину спектра), тем эффективнее проявляются перечисленные достоинства. В тоже время увеличение базы влечет за собой рост вычислительных и временных затрат при обработке.

Практически во всех перечисленных задачах используется спектрально-корреляционная обработка. При этом современное развитие теории и практики прикладных систем обработки информации характеризуется ужесточением требований к точности, надежности и быстродействию функционирования. Повышение качества работы достигается за счет использования современных цифровых систем обработки информации. Традиционно основой построения цифровых систем обработки изображений и сигналов являются методы, алгоритмы и программно-аппаратные средства спектрально-корреляционной обработки. Однако для спектрально-корреляционной обработки актуальной является проблема быстродействия. Особенно остро она проявляется при обработке изображений из-за их многомерного представления. Для повышения быстродействия цифровых систем обработки информации широко используются дискретные ортогональные преобразования с быстрыми вычислительными процедурами и специализированные программно-аппаратные средства.

Обнаружение объектов и сигналов является составной частью многих прикладных задач. Большинство из них имеет общий подход, заключающийся в вычислении степени соответствия (функции корреляции) между заданным объектом (сигналом) и обрабатываемым изображением (сигналом). Местоположение корреляционного максимума соответствует местоположению обнаруживаемого объекта (сигнала). При этом величина

максимума корреляции служит мерой близости входного изображения (сигнала) и эталона.

К основным трудностями корреляционной обработки изображений относятся:

- взаимная корреляционная функция может иметь довольно размытый максимум, что затрудняет обнаружение;
- величина корреляции чувствительна к повороту и изменению масштаба входного изображения относительно эталона.

Решение первой задачи осуществляется за счет различных методов нормирования взаимной корреляции. Преодоление второй трудности достигается за счет использования некоторого количества эталонов при поиске одного объекта. Очевидно, что при этом значительно увеличивается объем вычислений. Однако корреляционный поиск изображений и сигналов позволяет с максимальной точностью обнаруживать объекты (сигналы), идентичные заданному. Поэтому обработка изображений и сигналов с использованием корреляционного анализа широко используется при решении различных практических задач.

1.3. Методы корреляционной обработки изображений и сигналов

1.3.1. Обработка изображений

Рассмотрим формальную сущность прикладных задач корреляционной обработки изображений.

Поиск объектов на изображении методом сопоставления с эталоном является одним из основных методов обнаружения. При этом эталон сравнивается со всеми объектами, находящимися на изображении, путем последовательного перемещения по изображению, как правило, слева направо, сверху вниз. В качестве оценочной величины используется взаимная корреляция между входным и эталонным изображениями.

Корреляционный способ координатной привязки изображений состоит в поэлементном сравнении двух изображений одного и того же объекта, полученного различными датчиками или же одним датчиком в разное время. При этом формируется величина, измеряющая корреляцию между двумя изображениями, и находится положение максимума функции корреляции. Сигналы, характеризующие корреляцию, поступают в автоматическое устройство, которое изменяет взаимную ориентацию эталонных и реальных объектов до тех пор, пока показатель их совпадения (функция корреляции) не превысит значения пороговой величины.

Таким образом, рассмотренные задачи обработки изображений, в общем случае, предполагают вычисление взаимной корреляции между двумя изображениями и последующему сравнению ее с порогом.

Следует отметить, что корреляционная обработка предполагает работу с изображениями, представленными в растровом виде. Растровое изображение, в общем случае, это двумерная матрица, состоящая из большого числа пространственно упорядоченных дискретных элементов, каждый из которых может иметь при одинаковых размерах отличное от других элементов значение оптических характеристик (цвет, насыщенность и др.). Для бинарных изображений растровая матрица содержит всего два вида пикселей: 0 и 1. Растровое представление является очень привлекательным для его использования, поскольку обладает рядом существенных преимуществ по сравнению с векторным представлением:

- отсутствие какой-либо потери информации о распознаваемых объектах;
- простота вычисления некоторых параметров;
- отсутствие необходимости в очень трудоемких растр-векторных преобразованиях, которые зачастую отнимают большую часть времени, отведенную на обработку изображений.

В общем случае взаимная корреляция между двумя растровыми изображениями S_{n_1, n_2} и X_{n_1, n_2} определяется как:

$$R_{s,x}[\tau_1, \tau_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} S_{n_1, n_2} X_{n_1-\tau_1, n_2-\tau_2} \cdot$$

Для поиска объекта размером $m \times n$ на изображении размером $M \times N$ функцию корреляции требуется вычислить для всех $(M - m + 1) \times (N - n + 1)$ смещений окна в зоне поиска.

Таким образом, основной недостаток корреляционных методов обработки состоит в том, что требуются значительные вычислительные, а следовательно, и временные затраты при решении практических задач. Однако ввиду того, что постоянно возрастает мощность современных вычислительных систем, быстро развиваются математические средства, и создаются спецпроцессоры, ориентированные на обработку растровых изображений, можно считать, что корреляционная обработка является перспективной для практического применения.

1.3.2. Обработка сигналов

Цифровая обработка сигналов при беспойсковой синхронизации и декодировании кодов методом максимального правдоподобия предполагает вычисление корреляционной функции между принятым вектором входных отсчетов и всех возможных реализаций входного сигнала. В качестве принятого сигнала принимается тот, корреляция которого с входной реализацией максимальна.

При цифровой обработке, когда входной сигнал представляет поток чисел, оптимальная обработка реализуется либо при помощи специализированного вычислителя, либо программно, с использованием машинной обработки. И в том, и в другом случае время вхождения в синхронизм (декодирование кодов методом максимального правдоподобия) определяется количеством элементарных операций, которые необходимо выполнить. Следовательно, сокращение времени цифровой обработки сводится к минимизации объема вычислений, т. е. к уменьшению вычислительных затрат.

Задача декодирования кода методом максимального правдоподобия сводится к определению номера максимальной компоненты вектора $V = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1})^T$, который является результатом вычисления функции корреляции между принятым словом и всеми возможными словами кодового словаря.

Следовательно, формальной сущностью процедур беспойсковой синхронизации и декодирования кодов методом максимального правдоподобия является вычисление коэффициентов корреляции между входным сигналом и набором имеющихся последовательностей.

Качество алгоритма умножения матрицы на вектор принято оценивать коэффициентом вычислительной сложности S , равным отношению числа операций, которые необходимо выполнить, к числу строк матрицы. В зависимости от типа доминирующих операций, вычислительная сложность может быть:

- аддитивная, т. е. учитывающая только операции типа сложение/вычитание;
- мультипликативная, т. е. учитывающая только операции типа умножение/деление;
- тотальная, т. е. учитывающая все операции (включая обращение к памяти), участвующие в вычислительном процессе цифровой обработки сигналов.

1.4. Способы сокращения вычислительных затрат при корреляционной обработке бинарных изображений и сигналов

В связи со значительным объемом вычислений при корреляционном поиске объектов и обработке сигналов для сокращения временных затрат в основном используются следующие процедуры:

1. Совмещение операции вычисления корреляции с операцией сравнения с порогом, т. е. вычисление корреляционных функций прекращается для анализируемой позиции объекта на изображении, если полученное значение корреляции на некотором шаге меньше установленного порога. В данном случае снижение вычислительных затрат достигается за счет ухудшения помехоустойчивости.

2. Применение различных двукратных преобразований. Вычисление двумерной корреляции в этом случае требует выполнения следующих действий:

- выполнить прямое преобразование в одном из базисов (Фурье, Хаара или Уолша – Адамара), т. е. вычислить спектры для строк анализируемого фрагмента изображения и эталона путем умножения строк на матрицу коэффициентов используемого базиса;

- вычислить поточечное произведение полученных векторов;
- произвести обратное преобразование, т. е. умножить полученные вектора на матрицу обратного преобразования применяемого базиса.

3. Использование характеристик определенного класса изображений.

Для бинарных изображений процедуру корреляционного поиска можно значительно упростить, если применять простые арифметические действия вместо спектрального преобразования.

Для бинарных изображений и сигналов при использовании прямого метода вычисления векторно-матричного произведения операции умножения отсутствуют, поэтому основной задачей уменьшения вычислительной сложности является сокращение операций типа сложение/вычитание. Следовательно, эффективность использования различных двукратных преобразований для корреляционного анализа при обработке бинарных изображений и сигналов существенно снижается.

Метод прямого вычисления матричного произведения хотя и не требует выполнения операций умножения, но он характеризуется значительными вычислительными затратами из-за необходимости реализации большого числа операций типа сложение/вычитание. Уменьшение вычислительной сложности векторно-матричного умножения, в общем случае, может быть достигнуто за счет использования факторизации исходной матрицы. Сокращение вычислений при обработке бинарных изображений

возможно за счет разложения растровой бинарной матрицы на множители на основе универсальных алгоритмов факторизации растровых бинарных матриц, позволяющих представлять исходную матрицу любых размеров и структуры в виде произведения простых сомножителей.

Основной процедурой при корреляционной обработке бинарных изображений и сигналов в матричном представлении является вычисление векторно-матричного произведения. Сокращение сложности вычисления данной операции приводит к уменьшению временных затрат при выполнении ряда процедур цифровой обработки изображений (корреляционный поиск объектов и координатная привязка) и сигналов (например, определение фазы сигналов синхронизации, декодирование кодов по методу максимального правдоподобия, цифровая фильтрация). Уменьшение вычислительных затрат достигается за счет синтеза быстрых алгоритмов цифровой обработки сигналов, основанных на разложении (факторизации) исходной матрицы на ряд слабозаполненных матриц-сомножителей и последовательного умножения входного вектора на каждую из матриц. При этом для бинарных сигналов достигается сокращение количества операций типа сложение/вычитание. Для обработки бинарных изображений используются различные двукратные преобразования или же производится сравнение попиксельно.

Существующие быстрые алгоритмы вычисления векторно-матричного произведения основаны на свойствах сигнальных матриц, допускающих их факторизацию. Ряд известных методов факторизации (метод Гуда, Пойда, Ярославского) применим лишь для матриц с определенной внутренней структурой и размерами. Одним из важнейших свойств сигнальных матриц, определяющим возможность факторизации, является связь с матрицами Адамара, построенными на основе функций Уолша. Значительное сокращение вычислительных затрат при обработке таких сигналов достигается за счет получения структуры сигнальной матрицы путем перестановки строк и столбцов, схожей со структурой Адамара, и использовании свойств матриц Адамара при факторизации. Следует отметить, что свойства функций Уолша используются для решения различных задач цифровой обработки изображений. В связи с тем, что растровые бинарные изображения обладают произвольной внутренней структурой и произвольными размерами, использование свойств матриц Адамара для непосредственной факторизации растровых матриц изображений практически невозможно.

Современные тенденции развития науки и техники требуют снижения временных затрат при решении практических задач. Поэтому существует

необходимость в разработке алгоритмов обработки бинарных изображений и сигналов на основе факторизации матриц с целью повышения эффективности функционирования систем обработки изображений и сигналов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1
Цифровая обработка сигналов как задача вычисления
векторно-матричного произведения

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 1, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Провести анализ и формализацию задачи синхронизации бинарного сигнала с позиций векторно-матричной алгебры.
2. Провести анализ и формализацию задачи декодирования кода с позиций векторно-матричной алгебры.
3. Провести анализ и формализацию задачи обнаружения фрагмента изображения с позиций векторно-матричной алгебры.

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОГО АППАРАТА

2.1. Основные понятия и определения векторно-матричной алгебры

N -мерным вектором называется упорядоченный набор из N в общем случае комплексных чисел. Вектор вида

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

называется вектор-столбцом, в противоположность вектор-строке, когда числа расположены горизонтально. Вектор может рассматриваться как запись отчетов дискретной функции заданной N числами.

Два вектора x и y равны только в том случае, если равны их компоненты $x_i = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, N-1$. Сумма двух векторов $x + y$ также является вектором

$$\bar{x} + \bar{y} = \begin{bmatrix} x_0 + y_0 \\ x_1 + y_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_{N-1} + y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Скалярное произведение двух векторов x и y – это единственная операция над векторами, в результате которой образуется не вектор, а скаляр. Она определяется соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i;$$

Если отчеты дискретной функции представить в виде вектора x , то скалярное произведение (x, x) можно рассматривать как энергию этой функции. Аналогично, скалярное произведение векторов, представляющих две дискретные функции, есть взаимная энергия этих функций (функция корреляции).

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Под матрицей $A_{m \times n}$ будем в общем случае понимать таблицу комплексных чисел, имеющую m строк и n столбцов. Матрицы обычно обозначаются прописными буквами (A, B, C), если у матрицы m строк и n столбцов, то она имеет обозначение $A_{m \times n}$

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A_{ij} называется:

- числовой, если ее элементы a_{ij} числа;
- функциональной, если a_{ij} – функции,
- векторной, если a_{ij} – вектора.

Матрицы A и B называются равными, если их соответствующие элементы равны a_{ij} и b_{ij} ($a_{ij} = b_{ij}$) и противоположной, т. е. $A = -B$, если $a_{ij} = -b_{ij}$.

Если у матрицы $n = m$, то она называется квадратной, при этом матрицу $A_{n \times n}$ считают матрицей n -ного порядка. Квадратная матрица

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

называется диагональной.

Квадратная матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

называется единичной.

Если $a_{ij} = 0, \forall i, j$, то матрица $[a_{ij}] = [0]$ называется нулевой или нуль-матрицей.

Квадратные матрицы размером $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

называются верхней и нижней треугольной матрицей соответственно.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

где числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличные от нуля, называется трапецевидной.

В квадратной матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n-1, n-1}, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ – побочную диагональ матрицы.

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, но если все элементы матрицы равны нулю, то она называется нулевой и обозначается 0.

Если у матрицы A строки и столбцы поменять местами, то полученную матрицу A^T называют транспонированной. Следовательно

$$A^T = [a_{ji}].$$

Матрицы, удовлетворяющие условию

$$A = A^T,$$

называются симметрическими. Если для двух матриц A и A^{-1} выполняется равенство

$$AA^{-1} = 1,$$

то матрица A^{-1} называется обратной к A .

Действительная матрица A со строками, имеющими равную энергию E , и обладающая свойством

$$AA^T = E1,$$

называется ортогональной. Такая матрица обладает следующими свойствами:

- ее строки являются ортогональными векторами;
- обратная к ортогональной матрица также является ортогональной;
- произведение ортогональных матриц также ортогональная матрица.

2.2. Основные операции векторно-матричной алгебры

Суммой (разностью) двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

а произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на скаляр k называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой равны

$$C_{m \times n} = [a_{ij}k].$$

Сумма матриц обладает следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + 0 = A$;
4. $A - A = 0$;
5. $1 \times A = A$;
6. $\alpha \times (A + B) = \alpha A + \alpha B$
7. $(\alpha + \beta) \times A = \alpha A + \beta A$
8. $\alpha (\beta \times A) = (\alpha \beta) \times A$

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$

$$c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}.$$

Операция умножения двух матриц существует только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Если $A_{n \times n}$, $B_{n \times n}$, то $A \times B$ и $B \times A$ всегда существует. Но произведение матриц в общем случае некоммутативно

$$AB \neq BA,$$

поэтому безразлично, как умножить матрицу A на B – справа или слева. Свойство ассоциативности при этом сохраняется.

Произведение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A(B \times C) = (A \times B)C$;
2. $A(B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B)C = AC + BC$;
4. $\alpha \times (A \times B) = (\alpha A)B$

Если одномерный массив B рассматривать как N -мерный вектор-столбец с элементами b_k , то операция вычисления векторно-матричного произведения матрицы A и вектора B определяется следующим образом:

$$c_i = \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} b_k.$$

Результатом данной операции является новый вектор-столбец C , при этом произведение матрицы на вектор в общем случае некоммутативно

$$AB \neq BA,$$

поэтому безразлично, как умножить матрицу A на B – справа или слева. Свойство ассоциативности при этом сохраняется.

Важной операцией матричной алгебры является операция кронекеровского произведения, которая в дальнейшем будет обозначаться знаком \otimes . Для матриц $A_{m_1 \times m_1}$ и $B_{m_2 \times m_2}$ результатом кронекеровского произведения будет матрица $C_{m_1 m_2 \times m_1 m_2}$ с элементами

$$C = A \otimes B = \epsilon_{ij} A.$$

Следовательно, при образовании кронекеровского произведения каждый элемент матрицы B скалярно умножается на матрицу A и полученные блоки объединяются в новую матрицу C размером $m_1 m_2 \times m_1 m_2$.

Матрицы, являющиеся кронекеровским произведением матриц, обладают одним важным свойством, их можно представить в виде обычного произведения нескольких матриц, т. е. факторизовать или разложить на множители. Это свойство было сформулировано Гудом в виде следующей теоремы:

Теорема 1. Если $E_m^{[n]}$ произвольная матрица размером $m \times m$, то

$$E_m^{[n]} = \underbrace{E_m \times E_m \times \dots \times E_m}_{n \text{ раз}} = B_{m^n}^n.$$

Другими словами, n -ная кронекеровская степень матрицы E_m размером $m \times m$ равна обычной n -ной степени матрицы B_m^n размером $m^n \times m^n$. Факторизация матрицы n -ной кронекеровской степени может быть проведена и другим способом на основании следующей теоремы:

Теорема 2. Если $E_m^{[n]}$ произвольная матрица размером $m \times m$, то

$$E_m^{[n]} = \underbrace{E_m \times E_m \times \dots \times E_m}_{n \text{ раз}} = C_{m^n}^{(1)} \cdot C_{m^n}^{(2)} \dots C_{m^n}^{(n)},$$

где

$$C_{m^n}^{(1)} = E_m \times 1_m \times \dots \times 1_m;$$

$$C_{m^n}^{(2)} = 1_m \times E_m \times \dots \times 1_m;$$

$$C_{m^n}^{(n)} = 1_m \times 1_m \times \dots \times E_m.$$

Здесь 1_m -единичная матрица размером $m \times m$, а матрицы $C_{m^n}^{(1)}, C_{m^n}^{(2)}, \dots, C_{m^n}^{(n)}$ – все размером $m^n \times m^n$.

Замечательной особенностью матриц B_m^n и матриц $C_{m^n}^{(1)}, C_{m^n}^{(2)}, \dots, C_{m^n}^{(n)}$ является то, что они имеют не больше m^{n+1} отличных от нуля элементов. Поэтому при вычислении векторно-матричного произведения для вектора, содержащего m^n элементов, потребуется перемножить $n \times m^{n+1}$ пар чисел.

Следовательно, вычисление векторно-матричного произведения с использованием факторизации намного экономичнее, чем традиционным способом, причем экономия быстро возрастает при увеличении размеров матриц.

Подобная возможность лежит в основе быстрых преобразований Фурье, благодаря которому стало возможным широкое практическое применение цифрового спектрального анализа.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Математические основы цифровой обработки сигналов с использованием векторно-матричного аппарата

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 2, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Вычислить произведение матрицы на вектор.
2. Вычислить произведение двух матриц справа налево и слева направо.
3. Вычислить кронекеровское произведение двух матриц и осуществить факторизацию результата.

РАЗДЕЛ 3. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

3.1. Формализация задач декодирования кодов и синхронизации сигналов

Цифровая обработка бинарных сигналов во многих аспектах (беспоисковая синхронизация, декодирование кодов по методу максимального правдоподобия, цифровая фильтрация) предполагает умножение вектора входных отсчетов на сигнальную матрицу и определение максимальной компоненты в результирующем векторе.

Рассмотрим задачу беспоисковой синхронизации в векторно-матричной форме. В этом случае принятый сигнал X длиной N может быть представлен в виде вектора $X = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$, а сигнальная матрица C – в виде матрицы-циркулянта, строками которой являются все циклические сдвиги синхропоследовательности $\{c_i\}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & \dots & c_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Формальной сущностью устройства синхронизации является вычисление вектора

$$Y = C \times X = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$$

и определение в полученном векторе номера максимальной компоненты.

Задача декодирования кода методом максимального правдоподобия сводится к определению номера максимальной компоненты вектора $B = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1})^T$, который является результатом вычисления произведения матрицы кодовых слов G размером $m \times N$ (N – мощность кода, m – длина кода) на принятое слово. При этом матрица кодовых слов имеет вид:

$$G = \begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \dots & g_{0,m-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \dots & g_{1,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N-1,0} & g_{N-1,1} & \dots & g_{N-1,m-1} \end{bmatrix}.$$

При вычислении дискретной свертки и корреляционной функции бинарных сигналов операции умножения отсутствуют, и основная задача

заключается в уменьшении количества сложений/вычитаний. Использование дискретного преобразования Фурье позволяет существенно сократить количество операций типа сложение/вычитание, однако во многих случаях этого оказывается недостаточно. Поэтому для обработки бинарных сигналов представляют интерес методы прямого вычисления векторно-матричного произведения.

Традиционный метод вычисления векторно-матричного произведения требует значительных вычислительных затрат. Уменьшение сложности вычисления возможно путем разложения (факторизации) исходной матрицы на ряд слабозаполненных матриц-сомножителей и последовательного умножения входного вектора на каждую из матриц.

Таким образом, использование факторизации матриц при умножении вектора на матрицу позволяет разрабатывать ускоренные алгоритмы вычисления векторно-матричного произведения и на их основе синтезировать высокоэффективные устройства цифровой обработки бинарных сигналов.

3.2. Факторизация матриц Адамара при обработке бинарных сигналов

Важным классом бинарных матриц, получивших широкое практическое применение, являются матрицы Адамара, которые строятся на основе функций Уолша и нашли широкое применение в радиотехнике: на основе матриц Адамара строится семейство кодов Адамара с большим кодовым расстоянием, к матрицам Адамара можно свести ряд матриц линейных сигналов (M -последовательности и коды на их основе).

Функции Уолша образуют полную ортонормированную систему с количеством функций 2^l , $l = 1, 2, \dots$, и значениями ± 1 . Адамар показал, что эти матрицы принадлежат классу матриц с максимально возможным определителем. Поэтому они получили название матриц Адамара.

Матрицей Адамара называется ортогональная квадратная матрица порядка N , элементами которой являются действительные числа ± 1 . Матрица Адамара порядка N обозначается H_N .

Простейшей матрицей Адамара является матрица второго порядка

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для простейших матриц порядка $N = 2^l$, $l = 1, 2, \dots$, используется следующая теорема.

Теорема 3. Если H_N – матрица Адамара порядка N , то матрица

$$H_{2N} = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

является матрицей Адамара порядка $2N$.

Например, матрицы четвертого и восьмого порядка имеют соответственно следующий вид:

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & | & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

В более компактном виде $H_4 = H_2 \otimes H_2$, $H_8 = H_2 \otimes H_4$. Пронумеруем строки и столбцы матрицы Адамара двоичными числами от 0 до $N - 1$. Пусть k – двоичный номер строки, а n – двоичный номер столбца. Тогда элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером k и столбца с номером n , вычисляется по формуле

$$\text{had}(k, n) = (-1)^{(k \times n)},$$

где $(k \times n) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i n_i$ – скалярное произведение векторов k и n .

Например, для матрицы H_8 получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{pmatrix} = n^l$$

$$k = (k_2 \quad k_1 \quad k_0)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \left[\begin{array}{c} | \\ | \\ - - - - - \\ | \\ | \\ - - - - - \\ | \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ (k \times n) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \Bigg] = \\
& = \begin{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} \text{had}(000, n) \\ \text{had}(001, n) \\ \text{had}(010, n) \\ \text{had}(011, n) \\ \text{had}(100, n) \\ \text{had}(101, n) \\ \text{had}(110, n) \\ \text{had}(111, n) \end{matrix} \end{matrix}
\end{aligned}$$

Строки $\text{had}(000, n)$, $\text{had}(001, n)$, ..., $\text{had}(111, n)$ можно рассматривать как функции дискретных переменных n и k , определенные в целочисленных точках $0, 1, 2, \dots, N - 1$ интервала $[0, N)$. Эти функции являются дискретными функциями Уолша. Первая переменная k обозначает номер функции, вторая переменная n – дискретное время. В качестве номера функции берется номер соответствующей строки матрицы Адамара. При этом говорят, что функции упорядочены по Адамару. Дискретные функции можно рассматривать как результат дискретизации непрерывных функций Уолша $\text{had}(k, t)$.

В практических приложениях используется и другая нумерация функций, что соответствует другому способу ранжирования обобщенных гармоник. Наиболее употребительными из них являются упорядочения по Пэли и по Уолшу.

Система Пэли образуется из системы Адамара двоичной инверсией номеров функций, т. е. путем записи разрядов двоичного представления номера k в обратном порядке. Система Уолша располагает функцией в порядке возрастания числа смен знака на интервале (по «частотам» следования), что соответствует расположению их номеров в двоично-инверсном коде Грея. Для $N = 8$ в рассмотренных способах упорядочения строки расположены следующим образом:

Упорядочение по Адамару	Упорядочение по Пэли	Упорядочение по Уолшу
000	000	000
001	100	100
010	010	110
011	110	010
100	001	011
101	101	111
110	011	101
111	111	001

Соответствующие матрицы при упорядочении по Пэли и по Уолшу равны

$$P = \{\text{pal}(k, n)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$W = \{\text{wal}(k, n)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Важнейшими свойствами функции Уолша являются:

– ортогональность
$$\sum_{n=0}^{N-1} \text{had}(k_1, n) \text{had}(k_2, n) = \begin{cases} N, k_1 = k_2; \\ 0, k_1 \neq k_2; \end{cases}$$

или в матричной записи

$$H_N H_N^T = NI,$$

где I – единичная матрица;

– симметричность

$$H_N = H_N^T.$$

Используя свойства ортогональности и симметричности легко получить $H^{-1} = N^{-1}H$;

– мультипликативность по номеру функции

$$\text{had}(k_1, n)\text{had}(k_2, n) = \text{had}(k_1 \oplus k_2, n)$$

и номеру отсчета

$$\text{had}(k, n_1)\text{had}(k, n_2) = \text{had}(k, n_1 \oplus n_2).$$

Хотя эти свойства записаны для системы Адамара, они справедливы и для систем Пэли и Уолша. Постоянная функция и функции меандрового типа с одной ненулевой позицией в двоичной записи номера называются функциями Радемахера. Для $N = 8$ они равны

$$R_0 = \text{had}(000, n); \quad R_2 = \text{had}(010, n);$$

$$R_1 = \text{had}(100, n); \quad R_3 = \text{had}(001, n).$$

Из свойства мультипликативности следует, что любая функция Уолша может быть получена перемножением функций Радемахера. Например:

$$\text{had}(011, n) = R_2 R_3;$$

$$\text{had}(110, n) = R_1 R_2.$$

Сравнивая функции Уолша с дискретными экспоненциальными функциями, можно заметить, что они совпадают при $N = 2$.

В общем случае матрица Адамара размером $2^n \times 2^n$ задается как n -ная кронекеровская степень матрицы размером 2×2 :

$$H_{2^n} = E_2^{[n]},$$

где

$$E_2^{[n]} = E_2^{[1]} \times E_2^{[2]} \times \dots \times E_2^{[i]} \times \dots \times E_2^{[n]};$$

$$E_2^{[i]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, для факторизации матриц Адамара могут быть использованы теоремы Гуда.

Матрица Адамара размером 8×8 имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 1. Согласно теореме 1 матрица A раскладывается на произведение трех слабозаполненных сомножителей

$$A = B_3 \times B_2 \times B_1 = B^3,$$

где

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Согласно теореме 2 матрица A факторизуется следующим образом:

$$A = C_8^{(1)} \cdot C_8^{(2)} \cdot C_8^{(3)},$$

где

$$C_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_8^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_8^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & 1 & & & & -1 \\ & & & & 1 & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Вычисление векторно-матричного произведения при использовании рассмотренных методов факторизации матриц Адамара требует выполнения 24 операций типа сложение/вычитание. Прямой метод умножения вектора на матрицу A предполагает 56 вычислений.

Анализ структуры матрицы Адамара позволяет осуществить факторизацию еще одним способом, если учесть то, что первые три строки матрицы Адамара A_4

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

отличаются лишь одним элементом от вектора $\bar{e}(1, 1, 1, -1)$, а четвертая строка аналогично отличается от вектора $-\bar{e}$. Используя это свойство, матрицу A_4 можно представить в виде произведения следующих слабозаполненных сомножителей:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Умножение на факторизованную таким образом матрицу Адамара потребует выполнения 7 операций типа сложение/вычитание. Возможность использования данной факторизации в матрицах Адамара большей размерности основана на следующей теореме:

Теорема 4. Матрица Адамара ($n > 4$) может быть представлена в виде произведения:

$$H_{2^{2k+1}} = \begin{bmatrix} E_{2^{2k}} & E_{2^{2k}} \\ E_{2^{2k}} & -E_{2^{2k}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{2^{2k}} & \\ & H_{2^{2k}} \end{bmatrix}$$

$$H_{2^{2k+2}} = ABAC$$

где: A, B, C – квадратные матрицы порядка 2^{2k+2} , причем

$$C = \text{diag}(H_{2^{2k}}, H_{2^{2k}}, H_{2^{2k}}, H_{2^{2k}}),$$

$$B = \text{diag}(H_4, H_4, \dots, H_4),$$

$$A = \begin{bmatrix} e_{2^{2k}}^{11} & e_{2^{2k}}^{21} & e_{2^{2k}}^{31} & e_{2^{2k}}^{41} \\ e_{2^{2k}}^{12} & e_{2^{2k}}^{22} & e_{2^{2k}}^{32} & e_{2^{2k}}^{42} \\ e_{2^{2k}}^{13} & e_{2^{2k}}^{23} & e_{2^{2k}}^{33} & e_{2^{2k}}^{43} \\ e_{2^{2k}}^{14} & e_{2^{2k}}^{24} & e_{2^{2k}}^{34} & e_{2^{2k}}^{44} \end{bmatrix},$$

где $e_{2^{2k}}^{ij} = \text{diag}(e^{ij}, e^{ij}, \dots, e^{ij})$, а матрица e^{ij} – матрица порядка 4×4 , у которой на позиции ij стоит единица, а остальные элементы равны нулю.

Пример 3. Согласно теореме 4 матрица Адамара H_8 может быть представлена следующим образом:

$$H_8 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_4 & E_4 \\ E_4 & -E_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_4 & \\ & H_4 \end{bmatrix}$$

Пример 4. Согласно теореме 4 матрица Адамара H_{16} факторизуется следующим образом:

$$H_{16} = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 & H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 & H_4 & -H_4 \\ H_4 & H_4 & -H_4 & -H_4 \\ H_4 & -H_4 & -H_4 & H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{11} & e^{21} & e^{31} & e^{41} \\ e^{12} & e^{22} & e^{32} & e^{42} \\ e^{13} & e^{23} & e^{33} & e^{43} \\ e^{14} & e^{24} & e^{34} & e^{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_4 & & & \\ & H_4 & & \\ & & H_4 & \\ & & & H_4 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} e^{11} & e^{21} & e^{31} & e^{41} \\ e^{12} & e^{22} & e^{32} & e^{42} \\ e^{13} & e^{23} & e^{33} & e^{43} \\ e^{14} & e^{24} & e^{34} & e^{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_4 & & & \\ & H_4 & & \\ & & H_4 & \\ & & & H_4 \end{bmatrix}$$

Выигрыш в сокращении операций определяется из выражений

$$\frac{\sum 2k}{S_{2k}} = \frac{7k \cdot 2^{2k-2}}{2k \cdot 2^{2k}} = \frac{7}{8};$$

$$\frac{\sum 2k+1}{S_{2k+1}} = \frac{7k \cdot 2^{2k-1} + 2^{2k+1}}{(2k+1) \cdot 2^{2k+1}} = \frac{7k+4}{8k+4} \approx \frac{7}{8}.$$

В процентном соотношении выигрыш составляет величину 12,5 %. Однако для ряда матриц перспективных нелинейных сигналов неизвестна связь с матрицами Адамара. Потому при обработке таких сигналов используются другие методы факторизации сигнальных матриц.

3.3. Факторизация матриц методами Пойда и Ярославского

Методы факторизации матриц Пойда и Ярославского являются обобщающими, т. е. могут применяться к гораздо более широкому классу сигналов и растровых матриц по сравнению с методами факторизации на основе теорем Гуда.

Методы Пойда основываются на следующих теоремах:

Теорема 5. Любую невырожденную матрицу A размером $2^a \times 2^a$ можно представить в виде произведения из a блочно-диагональных матриц

$$A = A_a A_{a-1} \dots A_k \dots A_1,$$

где

$$A_k = \left[\begin{array}{ccc|cc} EZ_1(k) & & & & \\ EZ_2(k) & & & & \\ & EZ_3(k) & & & \\ & EZ_4(k) & & & \\ \hline & & & EZ_{2^k-1}(k) & \\ & & & EZ_{2^k}(k) & \end{array} \right].$$

Размерность блоков E и $Z_i(k)$ равна $n/2^k \times n/2^k$. Причем при $k = a$ матрица A_a состоит из элементов первого и второго столбцов исходной матрицы и имеет вид:

$$A_a = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ & & a_{31} & a_{32} & & \\ & & a_{41} & a_{42} & & \\ \hline & & & & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} \\ & & & & a_{n1} & a_{n2} \end{array} \right].$$

Теорема 6. Любую невырожденную матрицу размерности $p^a \times p^a$ можно разложить на произведения блочно-диагональных матриц вида:

$$A_k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} EZ_{11}(k) \dots Z_{1,p-1}(k) & & & & & \\ EZ_{21}(k) \dots Z_{2,p-1}(k) & & & & & \\ \dots & & & & & \\ EZ_{p1}(k) \dots Z_{p,p-1}(k) & & & & & \\ & EZ_{p+1,1}(k) \dots Z_{p+1,p-1}(k) & & & & \\ & EZ_{p+2,1}(k) \dots Z_{p+2,p-1}(k) & & & & \\ \dots & & & & & \\ & EZ_{2p,1}(k) \dots Z_{2p,p-1}(k) & & & & \\ \hline & & & EZ_{p^k-p+1,1}(k) \dots Z_{p^k-p+1,p-1}(k) & & \\ & & & EZ_{p^k-p+2,1}(k) \dots Z_{p^k-p+2,p-1}(k) & & \\ \dots & & & & & \\ & & & EZ_{p^k,1}(k) \dots Z_{p^k,p-1}(k) & & \end{array} \right].$$

Матрица A_a для произвольного p имеет вид:

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} \dots a_{1p} & & & & & \\ \dots & & & & & \\ a_{p1} \dots a_{pp} & & & & & \\ & a_{p+1,1} \dots a_{p+1,p} & & & & \\ & \dots & & & & \\ & a_{p+p,1} \dots a_{2p,p} & & & & \\ \hline & & & a_{p^a-p+1,1} \dots a_{p^a-p+1,p} & & \\ & & & \dots & & \\ & & & a_{p^a-p+p,1} \dots a_{p^a,p} & & \end{array} \right].$$

Использование данного метода факторизации матриц ограничивается размерами информационных матриц, которые должны быть равны степени простого числа.

Возможность факторизации матриц методом Ярославского основана на следующих теоремах:

Теорема 7.

$$M_{r,s} \otimes N_{p,g} = (M_{r,s} \otimes I_p) (I_s \otimes N_{p,g}),$$

где \otimes – знак кронекеровского произведения двух матриц;

I_p, I_s – единичная матрица размера $p \times p, s \times s$.

Теорема 8.

$$\left| \bigoplus_{k=0}^{n-1} \left(G_{g_k}^{(k)} \otimes M_{r_k, s_k}^{(k)} \right) \right| = \left(\bigoplus_{k=0}^{n-1} M_{r_k, s_k}^{(k)} \right) \left(\left| \bigoplus_{k=0}^{n-1} G_{g_k}^{(k)} \otimes I_{s_k} \right| \right),$$

где $\left| \bigoplus_{k=0}^{n-1} \right|$ – знак вертикальной суммы n матриц нумеруемых по k сверху вниз;

\oplus – знак прямой суммы двух матриц.

Анализ представленных теорем свидетельствует, что использование метода Ярославского возможно лишь для матриц определенных размеров и структуры.

3.4. Универсальный алгоритм факторизации произвольных бинарных матриц

Универсальный подход к построению алгоритмов факторизации произвольных бинарных матриц основан на следующих утверждениях:

Лемма 1. Любую матрицу $A = [a_{ij}]$ размером $N \times m$, состоящую из $\pm 1, 0$ можно представить в виде произведения

$$A = D \times B,$$

где B – матрица размером $N_1 \times m$, $N_1 \leq N$, полученная из матрицы A после вычеркивания повторяющихся и инверсных строк;

D – матрица размером $N \times N_1$ с элементами

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_j = a_i \\ -1, & \text{если } b_j = -a_i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Теорема 9. Любая матрица A , состоящая из $\pm 1, 0$ размером $N \times m$ может быть представлена в виде:

$$A = D \times Q,$$

причем матрица Q имеет блочно-диагональную структуру.

Теорема 10. Любую матрицу A , состоящую из ± 1 , размером $N \times m$ можно представить в виде произведения h слабозаполненных сомножителей, причем каждый из сомножителей содержит не более двух единиц в строке и $h = \lceil \log_2 m \rceil$, где $\lceil x \rceil$ наименьшее целое большее или равное x .

Факторизация произвольных бинарных матриц с использованием данного математического аппарата осуществляется на основе следующего алгоритма:

1. Матрица A разбивается на блоки A_j , которые состоят из попарно соседних столбцов (в общем случае). При этом если $m = 0 \pmod 2$, то один из блоков (пусть последний) состоит из одного столбца. Число блоков P равно

$$P = \begin{cases} \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{m}{2} & \text{если } m \equiv 0 \pmod 2 \\ \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1 & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod 2 \end{cases}.$$

2. Для каждого из блоков A_j образуется вспомогательная матрица B_j , которую получим путем вычеркивания в блоке повторяющихся и инверсных строк. Составив блочно-диагональную матрицу

$$Q_1 = \text{diag } B_j,$$

получим первый сомножитель факторизации.

3. Матрица D с блоками D_j образуется из вспомогательных матриц B_j и блоков матрицы A_j . Для этого каждая строка блока A_j сравнивается со строками B_j и находится элемент d_{ij} по следующему правилу:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_j = a_i \\ -1, & \text{если } b_j = -a_i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

4. Попарно объединяются соседние блоки D_j и в результате получается новое разбиение матрицы D на блоки с числом ненулевых элементов в блоке не более 2. После этого, если число предыдущих шагов меньше h , переходим к п. 2.

Например, матрица A вида:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

после факторизации по данному алгоритму может быть представлена следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

При факторизации произвольных бинарных матриц по данному алгоритму верхняя граница сложности вычисления векторно-матричного произведения определяется из формулы

$$S_{алг.} \approx \begin{cases} 3 + \frac{N}{4} & \text{если } N \leq 128 \\ 19 + \frac{N}{8} & \text{если } 128 \leq N \leq 2^{15} \end{cases}.$$

Анализ данного алгоритма факторизации показал следующее:

1. Оценка верхней границы вычислений на основе данного алгоритма значительно превышает теоретически рассчитанный нижний предел сложности ($S = 0.5 \log_2 N$).

2. Реальная вычислительная сложность для ряда бинарных сигналов с хорошими корреляционными свойствами (квадратично-вычетные коды, характеристические последовательности, коды Якоби) значительно превышает нижний предел сложности.

Выводы. Вычисление векторно-матричного произведения лежит в основе многих процедур цифровой обработки бинарных сигналов. Использование традиционного метода векторно-матричного умножения связано со значительными вычислительными затратами. Сокращение объема вычислений возможно за счет разложения исходной матрицы на ряд слабозаполненных матриц-сомножителей (факторизации) и последовательного умножения вектора на каждую из матриц. Рассмотренные алгоритмы факторизации бинарных матриц позволяют проводить обработку сигналов любой длины и структуры, однако оценка верхней границы сложности вычислений на основе данных алгоритмов и реальная вычислительная сложность для ряда конкретных сигналов, существенно превышает нижний предел сложности. Поэтому для сокращения вычислительных затрат при обработке таких сигналов необходима оптимизация алгоритмов факторизации произвольных бинарных матриц.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Факторизация матриц Адамара при обработке бинарных сигналов

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 3.1 – 3.3, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Построить матрицу Адамара и провести ее факторизацию двумя способами.

2. Провести факторизацию матрицы методом Пойда.
3. Провести факторизацию матрицы методом Ярославского.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4
Универсальный алгоритм факторизации
произвольных бинарных матриц

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 3.4, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Провести факторизацию матрицы и построить граф вычисления векторно-матричного произведения.
2. Определить вычислительные сложности процесса (аддитивную, мультипликативную, тотальную).

РАЗДЕЛ 4. ОПТИМИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ФАКТОРИЗАЦИИ БИНАРНЫХ МАТРИЦ

4.1. Факторизация бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения

4.1.1. Оптимизация размера блока при факторизации матриц

Для квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ размером $N \times N$ с элементами $a_{ij} = \pm 1$ алгоритм вычисления векторно-матричного произведения на основе факторизации требует поэтапного разбиения матрицы на блоки (подматрицы) B размером $N \times m$. Для вычисления произведения подматрицы B размером $N \times m$ ($N \gg m$) на отрезок вектора входного сигнала H разделим последний на две части $H = (H1, H2)$. Длина $H1$ и $H2$ определяется как

$$\begin{aligned} H1 = H2 = m / 2, & \quad \text{если } m = 0 \bmod 2; \\ H1 = (m + 1) / 2 \text{ и } H2 = (m - 1) / 2, & \quad \text{если } m \neq 0 \bmod 2. \end{aligned}$$

Разбиение подматрицы B на блоки проводим аналогичным образом. Тогда процедуру умножения отрезка вектора H на подматрицу B можно представить в виде:

$$B \cdot H = \begin{bmatrix} B_0 1 & B_0 2 \\ B_1 1 & B_1 2 \\ \vdots & \vdots \\ B_N 1 & B_N 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ \dots \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 1 \cdot H_1 + B_0 2 \cdot H_2 \\ B_1 1 \cdot H_1 + B_1 2 \cdot H_2 \\ \dots \\ B_N 1 \cdot H_1 + B_N 2 \cdot H_2 \end{bmatrix}.$$

Если известны произведения $B \times H1$ и $B \times H2$ то для вычисления $B \times H$ с учетом исключения повторяемости частных сумм и инверсий требуется выполнить не более 2^{m-1} операций типа сложение/вычитание. Для вычисления произведений $B \times H1$ и $B \times H2$ применим подобную процедуру. Ограничим деление отрезка вектора H случаем, когда первая часть отрезка будет содержать два ненулевых элемента.

Пример 1. Определим необходимое количество операций для вычисления произведения отрезка входного вектора на подматрицу V размером 20×5 :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Подматрицу V можно представить в виде произведения следующих матриц сомножителей:

Таким образом, техника вычисления векторно-матричного произведения может быть представлена в виде выполнения внутренней (умножение входного вектора на матрицы-блоки) и внешней (сложение результатов внутренних вычислений) процедур.

Суммирование результатов вычисления произведения отрезков входного вектора на матрицы-блоки потребует не более чем $N \cdot \left(\left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor - 1 \right)$ операций сложения/вычитания, ($\lfloor * \rfloor$ – наибольшее ближайшее целое, N – количество строк (столбцов) исходной квадратной матрицы, m – количество столбцов в матрице-блоке). Общее число операций типа сложение/вычитание, необходимых для вычисления векторно-матричного произведения с учетом выражения $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < m < n$ можно определить как

$$C \approx K \cdot \frac{N}{m} + \left(N \cdot \left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor - 1 \right),$$

где $n = \log_2 N$.

Вычислительная сложность определяется как отношение общего числа операций C к числу строк N сигнальной матрицы

$$S = \frac{C}{N} = \frac{K}{m} + \left(\left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor - 1 \right).$$

Из выражения видно, что вычислительная сложность для фиксированных размеров матриц в значительной степени зависит от величины m . Для определения оптимального значения m представим графики зависимости сложности вычисления от различных значений m для фиксированных размеров квадратных матриц $N = 2^n$ (рис. 4.1).

Анализ представленного графика показывает, что минимальный уровень сложности вычислений достигается при разбиении квадратной матрицы размером $2^n \times 2^n$ на блоки размером $(n - 1)$ и уменьшение верхней границы сложности составляет величину 20 – 25 %.

Однако ряд перспективных сигналов имеет размеры, отличные от степени 2. В связи с этим для определения оптимального значения m проведем аналогичные графики для матриц размером $N \times N$ ($2^n < N < 2^{n+1}$) (для квадратично-вычетных кодов – рис. 4.2, для характеристических последовательностей – рис. 4.3). По результатам анализа графиков для длин $2^n < N < 2^{n+1}$ оптимальный размер блока может быть определен из выражения

$$m = \lceil \log_2 N + 0.5 \rceil - 1,$$

где $\lceil * \rceil$ – наименьшее ближайшее целое.

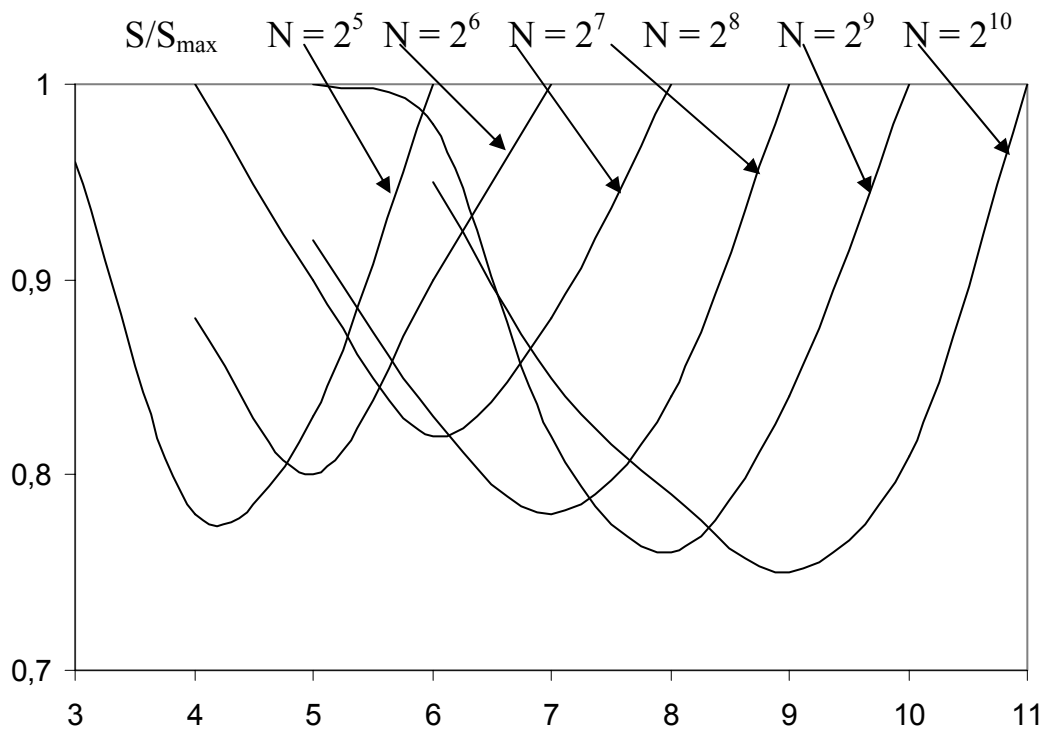


Рис. 4.1. Зависимость отношения текущей к максимальной сложности вычисления векторно-матричного произведения для матриц $N \times N$ ($N = 2^n$) от количества столбцов в подматрицах

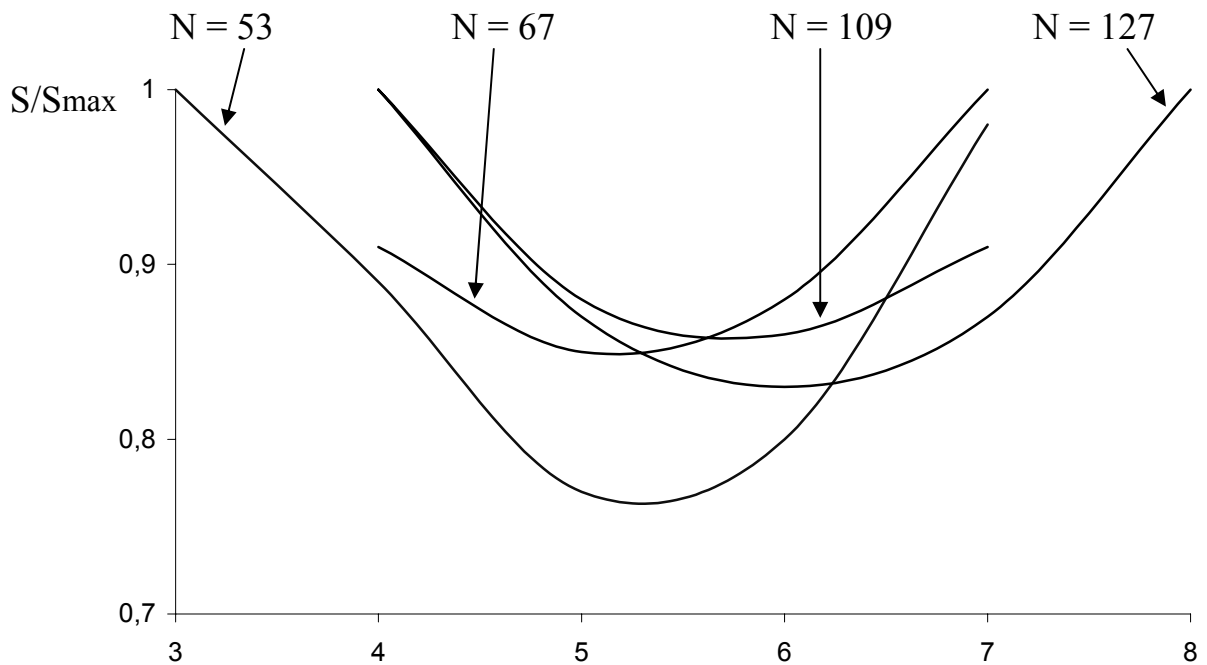


Рис. 4.2. Зависимость отношения текущей к максимальной сложности вычисления векторно-матричного произведения для циркулянтов квадратично-вычетных кодов от количества столбцов в подматрицах

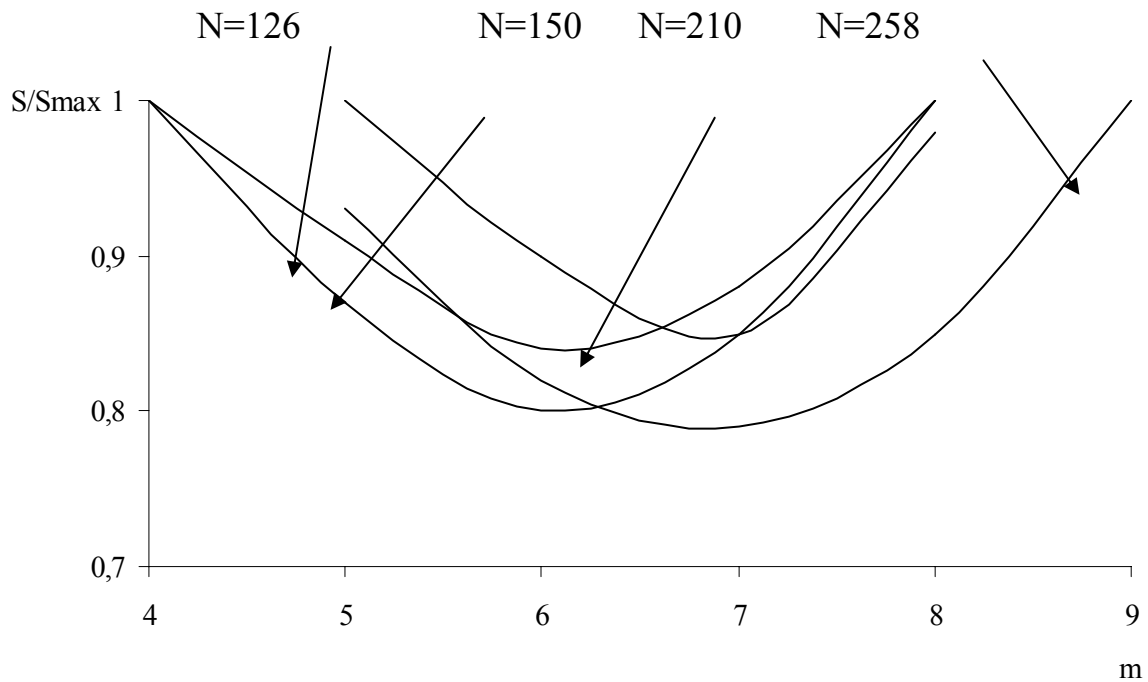


Рис. 4.3. Зависимость отношения текущей к максимальной сложности вычисления векторно-матричного произведения для циркулянтов характеристических последовательностей от количества столбцов в подматрицах

4.1.2. Алгоритм факторизации бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения

Алгоритм факторизации бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения состоит из следующих этапов:

1. Разбиение исходной матрицы на подматрицы. Исходная матрица A размером $N \times N$ делится на подматрицы B размером $N \times m$. Количество столбцов m в подматрице определяется как:

$$m = \lceil \log_2 N + 0.5 \rceil - 1$$

Число подматриц t равно:

$$t = \begin{cases} \left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil = \frac{N}{m} & \text{если } N \equiv \text{mod } m \\ \left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil + 1 & \text{если } N \not\equiv \text{mod } m \end{cases}.$$

Если $N \neq 0 \pmod{m}$, то последняя из подматриц содержит число столбцов меньше числа m .

2. Формирование блочно-диагональной матрицы B^* . Для каждой из подматриц B_i формируем вспомогательную матрицу V_i путем вычеркива-

ния повторяющихся и инверсных строк из подматриц. На основе вспомогательных матриц V_i строим блочно-диагональную матрицу

$$B^* = \text{diag} V_i.$$

3. Формирование промежуточной матрицы U . Матрицу U получаем путем сравнения строк подматриц B_i с матрицами V_i по правилу [1]:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j = b_i \\ -1, & \text{если } v_j = -b_i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Каждая строка блока U_i содержит не более одного ненулевого элемента.

4. Факторизация матриц B^* (внутренняя факторизация).

4.1. Деление матриц на блоки. Разбиваем каждую матрицу B^* на блоки согласно правилу:

$$b_{i-1}^* = b_{i+1}^* = m / 2 \text{ если } m = 0 \bmod 2 \\ b_{i-1}^* = (m + 1) / 2 \text{ и } b_{i+1}^* = (m - 1) / 2 \text{ если } m \neq 0 \bmod 2$$

Дальнейшее разбиение матриц B_{i-1}^* , B_{i+1}^* проводим аналогичным образом. Ограничим разбиение подматриц случаем, когда первый блок будет содержать два ненулевых элемента.

4.2. Формирование первого сомножителя факторизации. Для каждого из блоков подматриц путем вычеркивания повторяющихся и инверсных строк образуем вспомогательную матрицу F_i . На основе данных матриц составляется блочная диагональная матрица L_1 , которая и является первым сомножителем факторизации

$$L_1 = \text{diag } F_i.$$

4.3. Формирование второго сомножителя. Второй сомножитель D с блоками D_i образуем из вспомогательных матриц F_i и подматриц B_i путем сравнения каждой строки матриц B_i^* со строками матриц F_i . Элементы матрицы D определяются согласно условию выше.

4.4. Факторизация матрицы D . Объединяем блоки D_i , учитывая правила разбиения подматриц и контролируя числа шагов h_i факторизации подматриц. Если число предыдущих шагов $h_i < \lfloor \log_2 m \rfloor$, то выполняем п. 4.2. алгоритма факторизации. В противном случае процесс разложения подматриц на слабозаполненные сомножители завершен.

5. Факторизация матрицы (внешняя факторизация).

5.1. Формирование первого сомножителя внешней факторизации W_1 . Объединяем попарно соседние блоки U_i и для каждой пары объединенных

блоков путем вычеркивания повторяющихся и инверсных строк образуем вспомогательную матрицу E_i . На основе данных матриц составляется блочно-диагональная матрица W_1 , которая и является первым сомножителем процедуры внешней факторизации

$$W_1 = \text{diag } E_i.$$

5.2. Формирование второго сомножителя внешней факторизации W_2 . Второй сомножитель факторизации W_2 формируется путем сравнения строк попарно объединенных блоков с соответствующими матрицами E_i . Элементы матрицы W_2 определяются согласно условию выше.

5.3. Факторизация второго сомножителя. Объединяем попарно соседние блоки W_{2j} и переходим к п. 5.2, осуществляя контроль числа шагов внешней факторизации. Если число предыдущих шагов меньше $\lfloor \log_2(t) \rfloor$, то выполняем п. 5.1 алгоритма, иначе процесс факторизации завершен.

Оптимизация блочного разбиения при факторизации матриц позволяет представить вычисление векторно-матричного произведения в виде выполнения внутренней (умножение входного вектора на подматрицы) и внешней (сложение результатов внутренних вычислений) процедур. Уменьшение объема вычислений достигается за счет оптимизации блочного разбиения при выполнении внутренней и внешней процедур. В табл. 4.2 приведены значения коэффициентов верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения на основе оптимального блочного разбиения и без разбиения (S_1 и S_2 соответственно) для средних длин (N) векторов:

Таблица 4.2

Оценка верхней границы сложности

N	60	64	84	120	128	210	256
S_2	17	18	23	31	34	44	50
S_1	15.8	16.8	20.8	26.3	28.3	40.7	47.3

Анализ таблицы свидетельствует, что использование оптимизации блочного разбиения при факторизации бинарных матриц позволяет уменьшить аддитивную сложность вычисления векторно-матричного произведения.

Очевидно, что дальнейшее сокращение сложности вычисления векторно-матричного произведения возможно путем уменьшения количества

операций при выполнении внутренней процедуры. Оптимизация блочного разбиения предполагает деление сигнальной матрицы размером $2^n \times 2^n$ (в общем случае) на подматрицы размером $2^n \times (n - 1)$. Структура сигнальных матриц с хорошими корреляционными свойствами предполагает наличие в каждой подматрице всех строк полного кода (за исключением некоторых инверсных строк). Из этого следует, что строки подматриц (за исключением повторяющихся и инверсных) можно расположить таким образом, чтобы две соседние отличались не более чем в одной позиции, т. е. переупорядочить по коду Грея. Для матриц, построенных таким образом, существует более эффективный алгоритм вычисления векторно-матричного произведения, чем итеративный. При этом используются структурные свойства матриц, строки которых переупорядочены по коду Грея, и обеспечивается выигрыш в числе операций при умножении вектора на матрицу по сравнению с итеративным алгоритмом.

Таким образом, использование переупорядочивания строк по коду Грея при внутренней факторизации приведет к уменьшению объема вычислений в целом при векторно-матричном умножении.

4.2. Факторизация бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения и переупорядочения строк подматриц по коду Грея

Матрица полного кода имеет размер $2^n \times n$ и содержит в качестве строк (в алфавите 1, -1) все двоичные числа от 0 до $2^n - 1$.

Определение. Пусть $W_n(n)$ – матрица полного кода размером $2^n \times n$. Переупорядочим строки по коду Грея и исключим из нее слова, представляющие инверсию других слов. При этом получим новую матрицу $W(n)$ размером $2^{n-1} \times n$.

Пример 1. Матрица полного кода для $n = 3$ имеет вид:

$$W_n(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Упорядочив строки матрицы по коду Грея и исключив инверсные строки получим новую матрицу $W(3)$:

$$W(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Лемма 2. Любую матрицу вида $W(n)$ можно представить в виде произведения 2^{n-1} слабозаполненных матриц:

$$W(n) = \prod_k V(n, k), \quad (k = 2^{n-1} - 1, 2^{n-1} - 2 \dots 0),$$

где матрица $V(n, k)$ имеет размер

$$\begin{cases} n \times n, & \text{если } k = 0, \\ (n+k) \times (n+k-1), & \text{если } 0 < k < 2^{n-1} - 1, \\ 2^{n-1} \times (n+k-1), & \text{если } k = 2^{n-1} - 1, \\ 2^{n-1} \times 2^{n-1} & \text{если } k > 2^{n-1} - 1, \end{cases}$$

и элементы матрицы определяются как

$$V(n, k)_{i, j} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, i = 0, \\ 2, & \text{если } k = 0, j = i > 0, \\ 1, & \text{если } k > 0, j = i < k, \\ 1, & \text{если } k > 0, j + 1 = i = k, \\ \left(W(n)_{k, (j-k+1)} - W(n)_{(k-1), (j-k+1)} \right) / 2 & \text{если } k > 0, i = k, j > k, \\ 1, & \text{если } k > 0, j + 1 = i > k, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}.$$

Примечание:

Если $k > 2^{n-1} - 1$ то $V(n, k) = I$ (I – единичная матрица).

Пример 2. Матрица $W(3)$ раскладывается на произведение четырех множителей

$$W(3) = V(3, 3) \cdot V(3, 2) \cdot V(3, 1) \cdot V(3, 0).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь матрицу C , которая составлена из матриц $W(n)$ и $W(l)$ ($l < n$) и имеет блочно-диагональную структуру. Заметим, что матрицы $W(n)$ и $W(l)$ сформированы согласно определению.

$$C = \begin{bmatrix} W(n) & & & \\ & W(n) & & \\ & & \dots & \\ & & & W(n) \\ & & & & W(l) \end{bmatrix}.$$

Используя лемму 2, матрицу C можно представить в виде произведения слабозаполненных 2^{n-1} матриц, которые составлены из матриц $V(n, b)$ и имеют блочно-диагональную структуру

$$C = \prod_b \begin{bmatrix} V(a,b) & & & \\ & V(a,b) & & \\ & & \dots & \\ & & & V(a,b) \\ & & & & V(l,b) \end{bmatrix}.$$

$(b = 2^{a-1} - 1, 2^{a-1} - 2 \dots 0)$

Пример 3. Пусть матрица C имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} W(3) & & & \\ & W(3) & & \\ & & \dots & \\ & & & W(2) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 1 & -1 & -1 & & & \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Для произвольной бинарной матрицы A размером 8×8 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Положим $n = 3$, тогда $l = 2$.

Строим матрицу C :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & & & & & \\ 1 & -1 & -1 & & & & & & & \\ 1 & -1 & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & -1 & & & & \\ & & & 1 & -1 & -1 & & & & \\ & & & 1 & -1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & -1 & \end{bmatrix}.$$

Матрица B будет иметь вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Лемма 4. Матрицу B (см. пример 4.) можно разложить на $t = \lfloor \log_2(M/n) \rfloor$ слабозаполненных сомножителей.

$$B = \prod_t B(h).$$

Пример 5. Для матрицы В разложение имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя леммы 1 – 4 можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 11.

Любую матрицу A размером $M \times N$, состоящую из 1, -1, 0 можно представить в виде произведения

$$A = \prod_t B(t) \cdot \prod_b \begin{bmatrix} V(a,b) & & & \\ & V(a,b) & & \\ & & \dots & \\ & & & V(a,b) \\ & & & & V(l,b) \end{bmatrix},$$

$$(b = 2^{a-1} - 1, 2^{a-1} - 2 \dots 0)$$

где: $t = \lfloor \log_2(M/n) \rfloor$;

$$l = M - \lceil M/n \rceil \cdot n;$$

Пример 6. Согласно теореме матрицу квадратную матрицу A можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
A = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 0 & 2 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Рассмотренные выше математические утверждения позволяют сформулировать алгоритм факторизации бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения и переупорядочивания строк подматриц по коду Грея. Алгоритм требует выполнения следующих шагов:

1. Разбиение исходной матрицы на подматрицы. Деление на подматрицы D_j осуществляется согласно п. 1 выше представленного алгоритма факторизации бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения.

2. Формирование блочно-диагональной матрицы C . Для каждой из подматриц размером $N \times m$ формируем матрицы $W(m)$ ($W(l)$ – для остаточного блока) согласно определению размером $2^{m-1} \times m$. Из сформированных матриц образуем блочно-диагональную матрицу C :

$$C = \text{diag } W_i(m).$$

3. Внутренняя факторизация. Используя лемму, представляем матрицу C в виде произведения 2^{m-1} матриц, которые составлены из матриц $V(n, b)$ и имеют блочно-диагональную структуру.

4. Внешняя факторизация.

4.1. Формирование матрицы B . Для образования матрицы B с блоками B_j каждую строку подматрицы сравниваем со строками соответствующей матрицы $W_i(m)$. Элементы матрицы определяются согласно условию

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j = d_i, \\ -1, & \text{если } w_j = -d_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} .$$

4.2. Формирование первого сомножителя внешней факторизации. Объединяем попарно соседние блоки B_j и для каждого из объединенных блоков путем вычеркивания повторяющихся и инверсных строк образуем вспомогательную матрицу F_i . На основе данных матриц составляется блочно-диагональная матрица B_1 , которая и является первым сомножителем процедуры внешней факторизации

$$B_1 = \text{diag } F_i.$$

4.3. Формирование второго сомножителя внешней факторизации. Второй сомножитель факторизации B_2 формируется путем сравнения строк попарно объединенных блоков с соответствующими матрицами F_i .

4.4. Факторизация второго сомножителя. Объединяем попарно соседние блоки B_{2j} и переходим к п. 4.2, осуществляя контроль числа шагов внешней факторизации. Если число предыдущих шагов меньше $\lfloor \log_2(N/m) \rfloor$, то выполняем п. 4.2 алгоритма, иначе процесс факторизации завершен.

4.3. Оценки верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения

Определим необходимое количество операций типа сложение/вычитание при умножении вектора на матрицу $W(m)$, строки которой упорядочены по коду Грея. Матрица $W(m)$ согласно лемме 1 раскладывается на 2^{m-1} слабозаполненных сомножителей. Умножение вектора на первую матрицу-сомножитель потребует выполнения $m - 1$ операций типа сложение/вычитание. Следует отметить, что умножение на 2 может осуществляться с помощью поразрядного сдвига и в случае аппаратной реализации производится за счет перестановки (сдвига) связей между элементами устройства. Поэтому такая операция не требует временных затрат. Вычисле-

ние векторно-матричного произведения на последующих итерациях потребует одной операции типа сложение/вычитание при умножении вектора на каждый из оставшихся сомножителей. Таким образом, вычисление произведения вектора на факторизованную матрицу $W(m)$ потребует выполнения не более $m + 2^{m-1} - 2$ операций.

Количество операций для вычисления векторно-матричного произведения на факторизованную матрицу $W(m)$ для различных значений n представлено в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Зависимость количества операций типа сложение/вычитание K от размера подматрицы n

M	3	4	5	6	7	8	9
K	5	10	19	36	69	134	263

Исходная матрица размером $N \times N$ содержит $\lceil N/m \rceil$ подматриц, которые путем вычеркивания повторяющихся и инверсных строк могут быть приведены к матрицам типа матриц $W(m)$. Кроме того, может быть оставшийся блок-матрица типа $W(l)$, где $l = N - \lceil N/m \rceil$. Учитывая вышеизложенное, максимальное количество операций для вычисления векторно-матричного произведения на все факторизованные матрицы $W(n)$ и на остаточную матрицу $W(l)$ можно выразить как

$$C_w = (m + 2^{m-1} - 2) \cdot \left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil + (l + 2^{l-1} - 2).$$

Выполнение внешней процедуры векторно-матричного умножения потребует не более чем

$$C_B = N \cdot \left(\left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil - 1 \right)$$

операций типа сложения/вычитания.

Общее число операций типа сложение/вычитание, необходимых для вычисления векторно-матричного произведения, можно определить как

$$C = C_w + C_B = (m + 2^{m-1} - 2) \cdot \left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil + (l + 2^{l-1} - 2) + N \cdot \left(\left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil - 1 \right).$$

Вычислительная сложность определяется как отношение общего количества операций C к числу строк матрицы N :

$$S = \frac{C}{N} = \frac{(m + 2^{m-1} - 2) \cdot \left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil + (l + 2^{l-1} - 2)}{N} + \left(\left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor - 1 \right).$$

Учитывая, что $\frac{(l + 2^{l-1} - 2)}{N} \ll 1$, оценку верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения можно проводить согласно выражению

$$S = \frac{(m + 2^{m-1} - 2)}{m} + \left(\left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor - 1 \right) = \frac{2^{m-1} - 2}{m} + \left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor.$$

В табл. 4.4 представлены значения коэффициентов верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения на основе рассмотренного алгоритма и универсального алгоритма (S и $S1$ соответственно).

Таблица 4.4

Верхняя граница сложности векторно-матричного умножения

N	32	64	84	120	128	180	210	256	360	512	1024
$S1$	11	19	24	33	35	41	45	51	64	83	147
S	9.5	15.7	18.8	25	26.9	31.7	38.8	45.7	60.7	79.7	142
$W, \%$	14	17	21	25	24	23	14	11	6	4	4

На рис. 4.4 приведен график зависимости W от числа столбцов матрицы. Анализ табл. 4.4 свидетельствует, что использование алгоритма факторизации произвольных бинарных матрицы на основе оптимального блочного разбиения и переупорядочивания строк подматриц по коду Грея при векторно-матричном умножении обеспечивает уменьшение верхней границы сложности. Представленный график позволяет сделать заключение, что при увеличении размера исходной факторизируемой матрицы

уменьшение коэффициента верхней границы сложности носит нелинейный характер с точкой излома при $N = 120$.

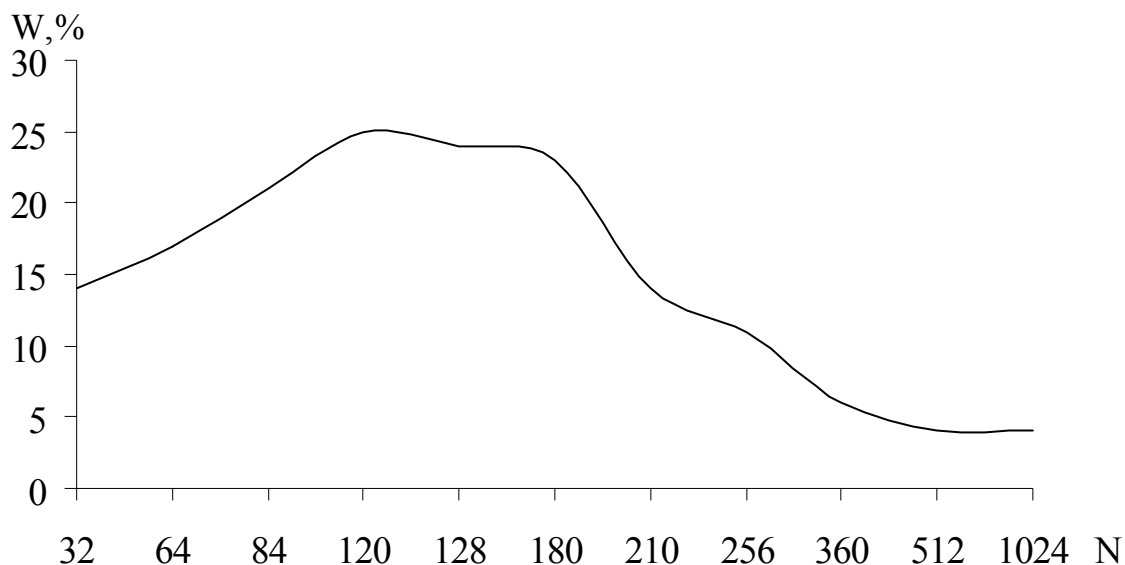


Рис. 4.4. График сокращения вычислительных затрат для разных длин по сравнению с универсальным алгоритмом вычисления векторно-матричного произведения

Основные результаты и выводы:

1. В алгоритме факторизации произвольных бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения умножение вектора на матрицу осуществляется в виде выполнения внутренней (умножение входного вектора на матрицы-блоки) и внешней (сложение результатов внутренних вычислений) процедур. Анализ выражения оценки верхней границы сложности вычисления векторно-матричного произведения показывает, что использование алгоритма факторизации гарантирует уменьшение вычислительных затрат при выполнении векторно-матричного умножения.

2. Дальнейшее уменьшение сложности вычисления векторно-матричного произведения достигается за счет сокращения вычислительных затрат при выполнении внутренней процедуры. При этом необходимо использовать структурные свойства сигнальных матриц, позволяющие переупорядочивать строки подматриц по коду Грея. Анализ выражения для вычисления верхней границы сложности векторно-матричного умножения свидетельствует, что использование данного алгоритма гарантирует уменьшение верхней оценочной границы до 25 %.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

Факторизация бинарных матриц на основе оптимального блочного разбиения

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 4.1, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Сформировать матрицу, провести ее факторизацию и построить граф вычисления векторно-матричного произведения.
2. Определить вычислительные сложности процесса (аддитивную, мультипликативную, тотальную).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Факторизация бинарных матриц на основе переупорядочения строк подматриц по коду Грея

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 4.2, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Провести факторизацию матрицы и построить граф процесса вычисления векторно-матричного произведения, используя переупорядочение строк подматриц по коду Грея.
2. Определить вычислительные сложности процесса (аддитивную, мультипликативную, тотальную).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Оценка верхней границы сложности векторно-матричного произведения

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 4.3, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Провести анализ верхней границы сложности факторизованных в предыдущих заданиях матриц.
2. Определить верхние границы вычислительных сложностей процессов (аддитивную, мультипликативную, тотальную).

РАЗДЕЛ 5. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ

5.1. Преобразования Уолша – Адамара

Пусть $\{s(n)\} = \{s(0), s(1), \dots, s(N-1)\}$ – совокупность равноотстоящих отсчетов сигнала. Выражения

$$b(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)(-1)^{(k \cdot n)}, k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$s(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} b(k)(-1)^{(k \cdot n)}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

образуют пару дискретного преобразования Уолша – Адамара в показательной форме (прямое и обратное преобразование в базисе Уолша).

Используя матрицу Адамара порядка N , можно записать преобразование в матричной форме:

$$B = Hs;$$

$$s = N^{-1}HB,$$

где $s = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$, $B = [b(0), b(1), \dots, b(N-1)]^T$ – векторы-столбцы отсчетов сигнала и спектральных коэффициентов.

Основными свойствами преобразования являются:

1) линейность. Если $\{x(n)\}$ и $\{y(n)\}$ – две последовательности со спектрами $\{b_x(k)\}$ и $\{b_y(k)\}$ соответственно, то спектр их взвешенной суммы $\{z(n)\} = \{A_x(n)\} + \{B_y(n)\}$ равен

$$\{b_z(k)\} = \{Ab_x(k)\} + \{Bb_y(k)\};$$

2) инвариантность к диадному сдвигу. Рассмотрим функцию $s(n)$ дискретной переменной n . Функция $S(n \oplus \tau)$ называется диадным сдвигом функции $s(n)$. Сущность диадного сдвига заключается в перестановке отсчетов исходной функции. В частности, на место отсчета с номером n ставится отсчет с номером $(n \oplus \tau)$. Например, пусть $\{s(n)\} = \{00111100\}$ и $\tau = 4$. Значения $(n \oplus \tau)$ для $n = 0, 1, \dots, 7$ равны

n	$n \oplus \tau$
000 \oplus 100 =	100
001 \oplus 100 =	101
010 \oplus 100 =	110
011 \oplus 100 =	111
100 \oplus 100 =	000
101 \oplus 100 =	001
110 \oplus 100 =	010
111 \oplus 100 =	011

Из этой записи следует, что отсчет с номером нуль ставится на четвертое место, отсчет с номером один – на пятое место и т. д. В результате получим

$$\begin{aligned} \{s(n)\} &= \{00111100\}; \\ \{s(n \oplus \tau)\} &= \{11000011\}. \end{aligned}$$

Из свойств мультипликативности следует, что при фиксированном τ

$$\text{had}(k, n \oplus \tau) = \text{had}(k, n) \text{had}(k, \tau) = \pm \text{had}(k, n),$$

т. е. спектральные составляющие исходного и диадно-сдвинутого сигналов могут отличаться только знаком. Амплитудный спектр при диадном сдвиге не меняется;

3) теорема о свертке и корреляции. Понятие диадного сдвига позволяет обобщить понятия свертки и корреляционной функции. Так как суммирование и вычитание по модулю два совпадают, то диадная свертка совпадает с диадной корреляцией и определяется выражением

$$y(n) = r(n) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l)s(n \oplus l), \quad n = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Теорема о свертке утверждает, что спектр свертки равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей:

$$b_y(k) = b_h(k)b_s(k).$$

Это позволяет для вычисления диадной свертки и корреляционной функции использовать преобразование Адамара

$$R = H^{-1}(B_h B_s) = N^{-1} H(B_h B_s).$$

Вычисление преобразования по рассмотренным формулам требует выполнения $N(N-1)$ операций сложения. Существуют быстрые алгоритмы, которые требуют только $M \log_2 N$ операций.

Для построения быстрого алгоритма рассмотрим матричное равенство $B = H_N S$.

Запишем в виде:

$$\begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ b(\frac{N}{2}-1) \\ b(N/2) \\ \cdot \\ \cdot \\ b(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ s(\frac{N}{2}-1) \\ s(N/2) \\ \cdot \\ \cdot \\ s(N-1) \end{bmatrix},$$

что позволит отдельно вычислить первую и вторую половины спектра. Получим

$$\begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ b(\frac{N}{2}-1) \end{bmatrix} = H_{N/2} \begin{bmatrix} s(0)+s(N/2) \\ s(1)+s(N/2+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ s(\frac{N}{2}-1)+s(N-1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b(N/2) \\ b(\frac{N}{2}-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ b(N-1) \end{bmatrix} = H_{N/2} \begin{bmatrix} s(0)-s(N/2) \\ s(1)-s(N/2) \\ \cdot \\ \cdot \\ s(\frac{N}{2}-1)-s(N-1) \end{bmatrix}.$$

Из этих выражений следует, что вычисление N -точечного преобразования сводится к предварительному суммированию (вычитанию) входных данных последующему вычислению двух $N/2$ -точечных преобразований.

Так как $N = 2^l$, то процедуру снижения размерности преобразованиями можно продолжить до получения двухточечного преобразования. Для этого потребуется $\log_2 N$ шагов. На каждом шаге производится N сложений, поэтому общее количество операций сложения равно $N \log_2 N$. Рассмотренный алгоритм называется быстрым преобразованием Адамара (БПА).

На рис. 5.1. приведен граф вычислительного процесса для $N = 8$. Аналогично преобразованию Фурье БПА можно трактовать как разложение (факторизацию) матрицы Адамара в произведение слаботыпленных сомножителей. Непосредственно по графу для $N = 8$ можно записать

$$H_8 = C_1 C_2 C_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & \\ 1 & & & -1 & & & & \\ & 1 & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & 1 \\ & & & & & 1 & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & & & & & -1 & & \\ & 1 & & & & & -1 & \\ & & 1 & & & & & -1 \\ & & & 1 & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Существуют и другие формы факторизации, в частности

$$H_8 = C_3 C_2 C_1; H_8 = C^3,$$

где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

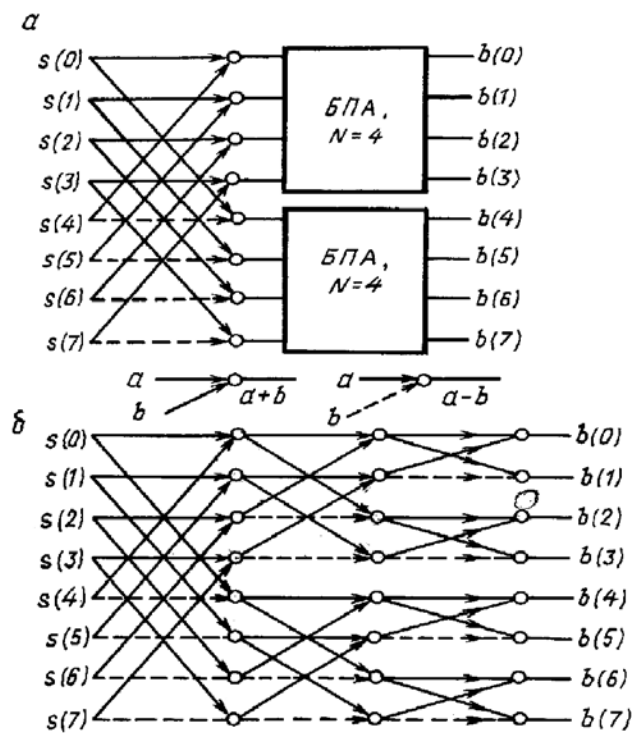


Рис. 5.1. Быстрое преобразование Уолша – Адамара

5.2. Преобразования в базисе ДЭФ

Система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) определяется следующим выражением:

$$\text{def}(k, n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) = \cos \frac{2\pi}{N} kn - j \sin \frac{2\pi}{N} kn,$$

где k, n – номер функции и номер отсчета соответственно, причем обе переменные принимают целочисленные значения $k, n = (0, 1, 2, \dots, N-1)$ так, что число функций в системе равно числу отсчетов каждой функции.

ДЭФ является комплексной функцией. Ее модуль равен 1, а фаза $\varphi(k, n) = (2\pi/N)kn$ полностью определяет все свойства функции.

Основные свойства ДЭФ:

1. Ортогональность:

$$\sum_{n=0}^{N-1} w^{kn} w^{-ln} = \begin{cases} N, & \text{если } (k-l) \equiv 0 \pmod{N}; \\ 0, & \text{если } (k-l) \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Свойство ортогональности показывает, что скалярное произведение любых двух строк матрицы ДЭФ – V , одна из которых взята с комплексно сопряженными элементами, равно нулю, если строки различны, и равно N , если они совпадают. Матричная запись этого свойства имеет следующий вид:

$$V(V^T)^* = NI,$$

где знак $*$ означает взятие комплексного сопряжения для всех элементов матрицы: I – единичная матрица.

2. Периодичность. Если $kn = Nl + r$, то $W^{kn} = W^{Nl}W^r = W^r$, т. е. ДЭФ периодическая функция с периодом N , что позволяет записать элементы матрицы V с минимальными степенями (фазами).

3. Симметричность:

$$V = V^T.$$

Свойство симметричности позволяет легко найти обратную матрицу для матрицы V . Матричное выражение для ортогональности запишется так: $VV^* = NI$. Умножив обе части этого равенства справа на V^{-1} , получим

$$V^{-1} = N^{-1}V^*.$$

4. Мультипликативность:

$$\begin{aligned} \text{def}(k_1, n)\text{def}(k_2, n) &= \text{def}(k_1 + k_2, n); \\ \text{def}(k, n_1)\text{def}(k, n_2) &= \text{def}(k, n_1 + n_2). \end{aligned}$$

Свойство означает, что при умножении любых двух строк (столбцов) матрицы V получается соответственно строка (столбец) той же матрицы, номер строки (столбца) равен сумме номеров сомножителей.

Введем обозначение

$$W = \exp(-j\frac{2\pi}{N}),$$

тогда $\text{def}(k, n) = W^{kn}$.

Величина W^{kn} называется поворачивающимся множителем, т. к. подобно обычным комплексным экспоненциальным функциям ДЭФ можно изобразить на плоскости в виде вращающегося вектора единичной длины. Проекции данного вектора на оси абсцисс и ординат дают действительную и мнимую части функций. Разница заключается в том, что у обычных функций этот вектор вращается непрерывно, а в случае ДЭФ – дискретно, проходя при изменении n на единицу угол $2\pi k / N$ рад. В общей сложности на интервале n вектор проходит угол $2\pi k$ рад, т. е. совершает ровно k оборотов.

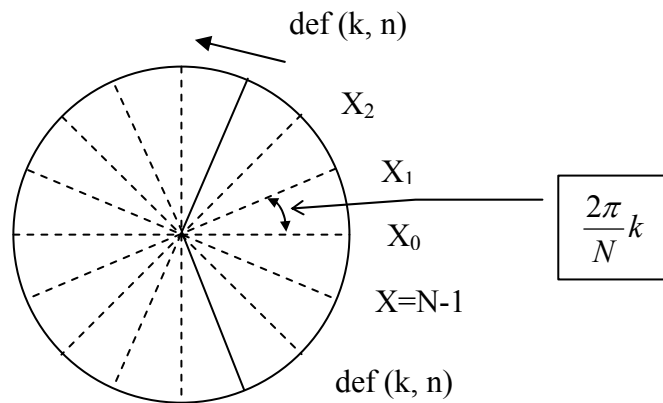


Рис. 5.2. Размещение поворачивающихся множителей на единичной окружности

Всю систему ДЭФ можно записать в виде матрицы V , строки которой нумеруются переменной k , столбцы переменной n , а в пересечении k -той строки и n -ного столбца записана величина W^{kn} :

$$V = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & W^{kn} & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Например, для $N = 8$ матрица V имеет следующий вид:

$$V_8 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^0 & W^2 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\ W^0 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ W^0 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}.$$

Такое представление называется матричным представлением ДЭФ.

Система ДЭФ может определяться на любом интервале N , как четном, так и нечетном. Например, при $N = 5$ матрица ДЭФ с минимальными фазами имеет вид:

$$V_5 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^3 & W^1 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}.$$

При четном N система ДЭФ состоит из двух действительных функций $\text{def}(0, n)$ и $\text{def}(N/2, n)$, и $N/2 - 1$ пар комплексно сопряженных функций. При нечетном N она содержит только одну действительную функцию $\text{def}(0, n)$, а остальные $N - 1$ функций образуют $(N - 1)/2$ комплексно-сопряженных пар. Во всех случаях комплексно-сопряженные функции $\text{def}(k, n)$ и $\text{def}(k^*, n)$ расположены симметрично на интервале N , а именно $k^* = N - k$. Числа k и k^* являются противоположными по модулю N . Следовательно, фаза ДЭФ является нечетной функцией на интервале N .

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) устанавливает связь между временными и частотным представлениями сигнала при разложении его в ряд по гармоническим функциям. Пара дискретного преобразования Фурье последовательности $\{s(n)\} = \{s(0), s(1), \dots, s(N - 1)\}$ определяется следующими равенствами:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)W^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$s(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)W^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Последовательность $\{s(n)\}$ представляет собой отсчеты сигнала, а последовательность $\{f(k)\}$ – дискретный спектр. Означенные равенства представляют собой экспоненциальную форму записи ДПФ. Соответствующее матричное представление имеет вид:

$$F = VS;$$

$$S = N^{-1}V^*F,$$

где $S = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$; $F = [f(0), f(1), \dots, f(N-1)]^T$ – векторы-столбцы отсчетов сигнала и спектральных коэффициентов соответственно.

Пример 1. Вычислить спектр сигнала $S = [1, 1, -1, 1]^T$ на основе ДПФ и обратное преобразование Фурье для полученного спектра.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$S = 4^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 4^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Основные свойства ДПФ.

1. Периодичность. В силу периодичности ДЭФ функции $f(k)$ и $s(n)$ также периодичны, т. е.

$$f(Nl \pm k) = f(\pm k); \quad s(Nl \pm n) = s(\pm n).$$

2. Связь с коэффициентами ряда Фурье. Если частота дискретизации выбрана в соответствии с теоремой Котельникова, то при дискретизации периодической аналоговой функций $s(t)$ ДПФ позволяет по выборкам $s(n)$ найти спектр $f(k)$, который на интервале $0 \leq k \leq N-1$ равен спектру исходной функции $s(t)$. При этом первые $(N/2 - 1)$ точек функции $f(k)$ соответствуют спектральным линиям на положительных частотах, а последние $(N/2 - 1)$ точек $f(k)$ – спектральным линиям на отрицательных частотах. В обратном преобразовании первые $(N/2 - 1)$ линий функции $s(n)$ соответствуют области положительных времен, а последние $(N/2 - 1)$ линий – области отрицательных времен (рис. 5.3).

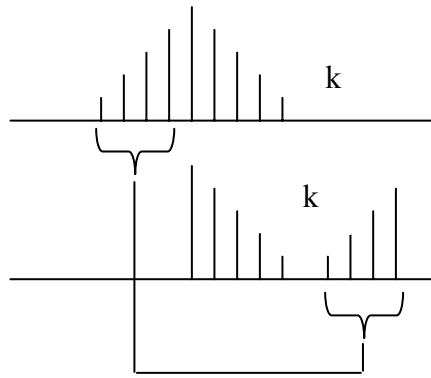


Рис. 5.3. Соотношение между коэффициентами ряда Фурье (а) и ДПФ (б)

3. Линейность. Пусть даны последовательности $x(n)$ и $y(n)$, для которых ДПФ равны соответственно $f_x(k)$ и $f_y(k)$.

Рассмотрим взвешенную сумму этих последовательностей $z(n) = ax(n) + by(n)$. Спектр последовательности $z(n)$ равен аналогичной взвешенной сумме спектров последовательностей $x(n)$ и $y(n)$, т. е.

$$f_z(k) = af_x(k) + bf_y(k).$$

4. Инвариантность относительно сдвига по времени и частоте. Пусть последовательность $z(n)$ образована сдвигом по времени последовательности $s(n)$, т. е. $z(n) = s(n \pm h)$. Тогда

$$f_z(k) = W^{\mp kh} f_s(k).$$

При сдвиге по времени амплитудный спектр (величина амплитуд отдельных гармоник) не меняется. Изменениям подвергаются только фазы гармонических составляющих (фазовый спектр).

Аналогичное свойство справедливо и для обратного преобразования, а именно: если $l(k) = f(k \pm h)$, то

$$s_F(n) = W^{\pm nh} s_1(n).$$

5. Теорема о свертке. Рассмотрим две последовательности $\{s(n)\}$ и $\{h(n)\}$ Циклической сверткой этих последовательностей называется последовательность $\{y(n)\}$, значения которой определяются следующими равенствами:

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l)s(n-l), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где номера отсчетов берутся по модулю N . Последнее эквивалентно тому, что последовательности $\{s(n)\}$ и $\{h(n)\}$ периодические. Поэтому $s(-n) = s(N-n)$, $h(-n) = h(N-n)$.

Это равенство можно записать и в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(N-1) \\ h(1) & h(2) & \dots & \dots & \dots & h(0) \\ h(2) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(N-1) & h(0) & \dots & \dots & \dots & h(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(N-1) \\ s(N-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ s(1) \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $N = 4$. Тогда

$$y(0) = h(0)s(0) + h(1)s(3) + h(2)s(2) + h(3)s(1);$$

$$y(1) = h(1)s(0) + h(2)s(3) + h(3)s(2) + h(0)s(1);$$

$$y(2) = h(2)s(0) + h(3)s(3) + h(0)s(2) + h(1)s(1);$$

$$y(3) = h(3)s(0) + h(0)s(3) + h(1)s(2) + h(2)s(1).$$

Пусть $\{f_s(k)\}$ и $\{f_h(k)\}$ – спектры последовательностей $\{s(n)\}$ и $\{h(n)\}$ соответственно. Теорема о свертке утверждает, что спектр свертки равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей, т. е.

$$f_y(k) = f_s(k)f_h(k).$$

Теорема позволяет вычислить свертку при помощи ДПФ по формуле

$$\{y(n)\} = \text{ДПФ}^{-1} (\text{ДПФ}\{s(n)\} \text{ДПФ}\{h(n)\}).$$

Так как для вычисления ДПФ существуют быстрые алгоритмы, то этот способ оказывается более экономичным, чем прямое вычисление.

6. Теорема о корреляции. Периодическая корреляционная функция двух последовательностей $\{s(n)\}$ и $\{h(n)\}$ равна

$$r(n) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l)s(n+l), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где аналогично номера отсчетов берутся по модулю N . Соответствующее матричное представление имеет вид:

$$\begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & h(N-1) \\ h(N-1) & h(0) & \dots & h(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(1) & h(2) & \dots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s(N-1) \end{bmatrix}.$$

Корреляционную функцию можно рассматривать как свертку, в которой одна из последовательностей обращена во времени, т. е. прочитана в обратном порядке, за исключением нулевого отсчета.

Спектр корреляционной функции последовательностей $\{h(n)\}$ и $\{s(n)\}$ равен произведению их спектров, причем один из спектров берётся в комплексном сопряжении, т. е.

$$f_r(k) = f_h^*(k)f_s(k) = f_h(k)f_s^*(k).$$

Аналогично предыдущему для вычисления корреляционной функции на основе рассмотренного равенства можно использовать ДПФ, что часто оказывается более эффективным, чем прямое вычисление.

7. ДПФ вещественных последовательностей. Во многих случаях преобразуемая последовательность $\{s(n)\}$ вещественная. Ее ДПФ равно

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - j \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right).$$

Понятие ДПФ можно обобщить, если вместо последовательности $\{s(n)\}$ рассматривать многомерный массив. В частности, для случая двух измерений преобразуется массив

$$S = \{s(n_1, n_2)\} = \begin{bmatrix} s(0,0) & s(0,1) & \dots & s(0, N_2 - 1) \\ s(1,0) & s(1,1) & \dots & s(1, N_2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s(N_1 - 1, 0) & s(N_1 - 1, 1) & \dots & s(N_1 - 1, N_2 - 1) \end{bmatrix}.$$

Его ДПФ равно

$$f(k_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_2^{n_2 k_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} s(n_1, n_2) W_1^{n_1 k_1},$$

где $W_1 = \exp(-j\frac{2\pi}{N_1})$, $W_2 = \exp(-j\frac{2\pi}{N_2})$.

Матричная форма этого выражения запишется так:

$$F = V_1 S V_2,$$

где V_1 , V_2 – матрицы одномерных ДПФ с числом отсчётов N_1 и N_2 соответственно, а

$$F = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0, N_2 - 1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1, N_2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(N_1 - 1, 0) & f(N_1 - 1, 1) & \dots & f(N_1 - 1, N_2 - 1) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно увидеть, что для получения двухмерного преобразования сначала выполняется преобразование V_1 столбцов массива S , а затем преобразование V_2 строк массива $V_1 S$.

Вычисление ДПФ прямым методом требует выполнения N^2 операций умножения и $N(N-1)$ операций сложения комплексных чисел. Квадратичная зависимость объема вычислений от размера входной реализации является существенным препятствием при практическом использовании ДПФ. Известны более эффективные алгоритмы, чем прямой счет по указанным формулам. Они позволяют снизить вычислительную сложность до величины порядка $M \log_2 N$ и даже N . Эти алгоритмы получили название быстрого преобразования Фурье (БПФ). Существует много алгоритмов БПФ. Рассмотрим алгоритм с прореживанием по времени.

Пусть $\{s(n)\} = \{s(0), s(1), \dots, s(N-1)\}$ – последовательность отсчетов, содержащая $N = 2^v$ элементов (v – целое). Разобьем ее на две части, выделив отдельно четные и нечетные отсчеты, т. е.

$$\begin{aligned} \{s(2n)\} &= \{s(0), s(2), \dots, s(N-2)\}; \\ \{s(2n+1)\} &= \{s(1), s(3), \dots, s(N-1)\}. \end{aligned}$$

Дискретное преобразование Фурье этой последовательности равно

$$\begin{aligned} f(k) &= \sum_{l=0}^{N/2-1} s(2l)W^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/2-1} s(2l+1)W^{(2l+1)k} = \sum_{l=0}^{N/2-1} s(2l) \cdot (W^2)^{lk} + \\ &+ W^k \sum_{l=0}^{N/2-1} s(2l+1)(W^2)^{lk} = G(k) + W^k H(k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{l=0}^{N/2-1} s(2l)(W^2)^{lk}, \\ H(k) &= \sum_{l=0}^{N/2-1} s(2l+1)(W^2)^{lk} \end{aligned}$$

дискретные преобразования Фурье четных и нечетных отсчетов.

Пусть функция $f(k)$ содержит по N точек и имеет период N . В то же время функции $G(k)$ и $H(k)$ содержат по $N/2$ точек и имеют период $N/2$. Для вычисления спектральных коэффициентов при $k < N/2$ можно непосредственно воспользоваться выражением для G и H . Для $k \geq N/2$ на основании периодичности ДПФ и ДЭФ получим

$$\begin{aligned} G(k) &= G(k + \frac{N}{2}); \quad H(k) = H(k + \frac{N}{2}); \\ W^{(k + \frac{N}{2})} &= -W^k. \end{aligned}$$

С учетом этого можно записать:

$$f(k) = G(k) + W^k H(k), \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1;$$

$$f(k) = G(k) - W^k H(k), \quad N/2 \leq k \leq N - 1.$$

Следовательно, все значения $f(k)$ получаются вычислением двух $N/2$ точечных преобразований с последующим их весовым сложением. Эта процедура показана на рис. 5.2, а для $N = 8$.

Заметим, что вычисление $G(k)$ и $H(k)$ прямым методом требует только $(N/2)^2$ операций умножения. Еще $N/2$ операций выполняются при умножении на поворачивающие множители W^k , $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$. Общее количество операций уменьшается, таким образом, до величины $N^2/2 + N/2 < N^2$. Дальнейшее сокращение количества операций происходит, если для вычисления $G(k)$ и $H(k)$ опять «разрядить» их входные последовательности и продолжать этот процесс до тех пор, пока размер ДПФ не станет равным двум и дальнейшее прореживание будет невозможным (рис. 5.1, б). Очевидно, что число шагов (итераций) этого процесса равно $\log_2 N$. На рис. 5.2, в показана процедура снижения размерности преобразования и общий граф вычислительного процесса для $N = 8$.

Отметим следующие важные особенности вычислительного процесса.

1. Граф содержит $M \log_2 N$ узлов, в каждом из которых происходит суммирование или вычитание данных. Поэтому общее количество операций сложения (вычитания) равно $\log_2 N$. Половина исходных данных на каждой итерации умножается на поворачивающие множители, поэтому общее количество комплексных умножений не превышает величины $0,5 M \log_2 N$. Более подробное исследование показывает, что часть этих умножений тривиальна (умножения на $\pm 1, \pm j$).

2. Процедура многократного прореживания приводит к тому, что исходные данные располагаются не в естественном, а в двоично-инверсном порядке.

Например, для $N = 8$ естественный и двоично-инверсный порядок расположения отчетов запишется следующим образом:

Естественный порядок	Двоично-инверсный порядок
000(0)	000(0)
001(1)	100(1)
010(2)	010(2)
011(3)	110(6)
100(4)	001(1)
101(5)	101(5)
110(6)	011(3)
111(7)	111(7)

3. Граф алгоритма имеет регулярную структуру и строится из пары базовых операций, которая получила название «бабочка». «Крылья» такой бабочки увеличиваются вдвое на каждой последующей итерации.

4. Регулярность графа позволяет производить вычисления с замещением (с оставлением на местах), т. е. записывать промежуточные результаты каждой итерации на место исходных. Действительно, на первой итерации каждая пара входных узлов воздействует только на соответствующую пару узлов, находящихся непосредственно справа за ними. Поэтому если вычисления производятся одновременно двумя узлами, то результаты могут быть записаны в те ячейки, откуда взяты исходные данные.

На второй итерации эта ситуация сохраняется с той лишь разницей, что работающая пара узлов разделена одним промежуточным узлом. На третьей итерации работающая пара разделена тремя промежуточными узлами и т. д.

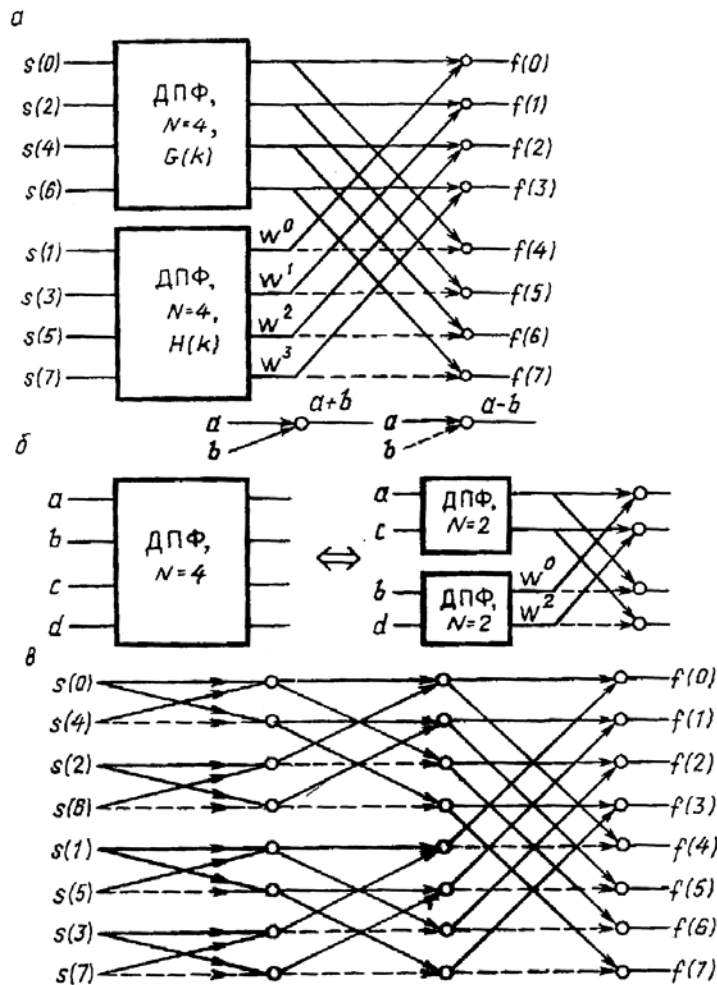


Рис. 5.4. БПФ с прореживанием по времени

Построенный алгоритм имеет и матричную трактовку. В частности, для рассмотренного примера простой проверкой легко убедиться, что вычисляется матричное выражение

$$F = VS = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 pS,$$

где p – матрица двоичной перестановки исходных данных, а Φ_1, Φ_2, Φ_3 – матрицы вычислительного процесса на итерациях.

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 1 & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & & & \\ & 1 & & W & & & \\ & & 1 & & & & W^2 \\ & & & 1 & & & \\ 1 & & & -1 & & & W^3 \\ & 1 & & & -W & & \\ & & 1 & & & -W^2 & \\ & & & 1 & & & -W^3 \end{bmatrix} \cdot \\
\Phi_2 &= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & & W^2 & & & \\ & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & & -W^2 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & W^2 \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & -W^2 \end{bmatrix} \cdot \Phi_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix} \cdot
\end{aligned}$$

Каждая из этих матриц имеет в строке и столбце только два ненулевых элемента, т. е. является слабозаполненной. Благодаря большому количеству нулевых элементов умножение на слабозаполненные матрицы требует меньших вычислительных затрат, чем на полные матрицы. Таким образом, с матричной точки зрения алгоритм БПФ является просто следствием факторизации матрицы дискретного преобразования Фурье.

Другим вариантом применения быстрого преобразования Фурье является алгоритм с прореживанием по частоте. Разделим исходную последовательность $\{s(n)\}$ на две части по $N/2$ отсчетов в каждой. Первый $N/2$ отсчетов обозначим $\{q(n)\}$, вторые – $\{h(n)\}$, т. е.

$$q(n) = s(n), \quad h(n) = s\left(\frac{N}{2} + n\right), \quad n = 0, 1, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right).$$

Теперь ДПФ можно записать так:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (q(n)W^{kn} + h(n)W^{(n+\frac{N}{2})k}) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (q(n) + (-1)^k h(n))W^{kn}.$$

Рассмотрим отдельно четные и нечетные отсчеты функций $f(k)$:

$$f(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (q(n) + h(n))(W^2)^{kn}, \quad f(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (q(n) - h(n))W^n (W^2)^{kn}.$$

Эти выражения являются $N/2$ -точечными ДПФ от функций $q(n) + h(n)$ и $[q(n) - h(n)] W^n$. Поэтому вычисление спектра можно производить по схеме, показанной на рис. 5.5 а (для $N = 8$). Аналогично предыдущему алгоритму, процедуру последовательного деления входных отсчетов на две части можно продолжить дальше до получения двухточечных преобразований (рис. 5.5, б). Для этого потребуется $\log_2 N$ шагов. Результирующий граф преобразования при этом будет содержать $M \log_2 N$ узлов. Для $N = 8$ он приведен на рис. 5.5, в.

Как и в алгоритме с прореживанием по времени, в данном алгоритме вычислительные затраты составляют $M \log_2 N$ операций сложения и $0,5 M \log_2 N$ операций умножения, а вычисления можно выполнять с замещением. Однако исходные отсчеты при этом располагаются в естественном порядке, а спектральные коэффициенты – в двоично-инверсном. Величина «бабочки» по мере продвижения к концу вычислений уменьшается. В соответствующем матричном представлении матрицы-сомножители имеют вид

$$F = VS = P' \Phi_1' \Phi_2' \Phi_3' S,$$

что дает другой вариант факторизации матрицы V .

Поскольку алгоритмы БПФ вычисляют ДПФ за $M \log_2 N$ операций вместо N^2 , то практический выигрыш в числе операций может быть очень большим. Например, для 1024 – точечного ДПФ $N = 2^{10}$ и прямое вычисление требует 2^{20} комплексных умножений. Алгоритмы БПФ вычисляют это преобразование только за $5 - 2^{10}$ операций умножения, что примерно в 200 раз быстрее. Дополнительная экономия получается, если учесть, что умножения на ± 1 и $\pm j$ тривиальны.

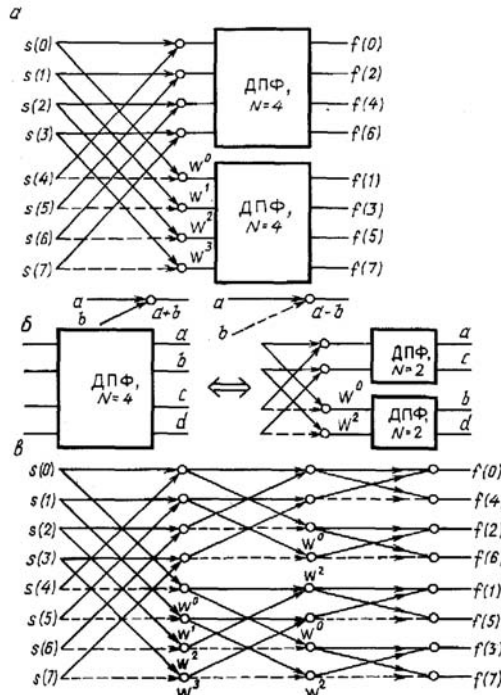


Рис. 5.5. БПФ с прореживанием по частоте

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

Преобразования Уолша – Адамара

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 5.1, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Выполнить преобразования Адамара и построить граф вычислительного процесса.
2. Определить вычислительные сложности процесса (аддитивную, мультипликативную, тотальную).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

Преобразования в базисе ДЭФ

Теория и методы решений для практического занятия представлены в разделе 5.2, исходные данные для выполнения задания выдаются преподавателем.

Практические задания:

1. Выполнить преобразования в базисе ДЭФ и построить граф вычислительного процесса.
2. Определить вычислительные сложности процесса (аддитивную, мультипликативную, тотальную).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосев В.В., Бродская Е.Б., Коржик В.И. Поиск и декодирование сложных дискретных сигналов / Под. ред. В.И. Коржика. – М.: Радио и связь, 1988. – 244 с.
2. Лосев В.В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: Учеб. пособие для вузов. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 132 с.
3. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
4. Ярославский Л.П. Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Сов. радио, 1979. – 220 с.
5. Хорн Р., Джосон Ч. Матричный анализ / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 665 с.

Учебное издание

ОСНОВЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
для студентов специальности 1-39 01 01 «Радиотехника»

Составитель
МАЛЬЦЕВ Сергей Васильевич

Редактор Ю.М. Казакевич

Подписано в печать 17.10.05. Формат 60×84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,41. Уч.-изд. л. 2,11. Тираж 80. Заказ 1109

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29