УДК 514.763.432

ПОЧТИ ПРИВОДИМЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

канд. физ.-мат. наук Н.А. ГУРЬЕВА, канд. физ.-мат. наук О.В. ГОЛУБЕВА
(Полоцкий государственный университет)

Изучению распределений дифференцируемых многообразий в литературе уделяют значительное внимание. Впервые такие распределения были рассмотрены Уокером. Для их определения вводились проектирующие аффиноры. С помощью последних отыскиваются условия, при которых распределения, параллельные относительно другого распределения, являются геодезическими. Именно такого рода исследования представлены в статье. В работе рассматриваются условия сохранения геодезичности полей распределений почти приводимых римановых пространств при почти конформном отображении и условие параллельности одного поля вдоль другого при этом отображении.

Введение. Задается топологическое произведение $X_n = X_p \times X_q$ двух дифференцируемых многообразий. Оно обладает тем свойством, что в нем существуют два поля дополнительных друг для друга площадок размерностей p и q соответственно.

Эти площадки касаются подмногообразий $X_p \times \{y\}$ и $\{x\} \times X_q$ ($x \in X_p$, $y \in X_q$).

Итак, имеем два дополнительных вполне интегрируемых распределения. Если в некотором дифференцируемом многообразии X_n задать два дополнительных друг для друга дифференцируемых распределения, не требуя их полной интегрируемости, получим многообразие со структурой почти произведения, или π-структурой.

Всякая π-структура однозначно определяется полем аффинора f, удовлетворяющего уравнению:

$$f^2 = 1.$$

При этом собственные векторы, отвечающие корню +1 (–1), составляют площадку первого (второго) распределения.

Почти приводимым римановым пространством, или P_N, называется *N*-мерное пространство почти произведение с римановой метрикой g_{ij}, удовлетворяющей условию:

$$f_j^{\,t} f_i^{\,s} g_{ts} = g_{ji} \ (i, j, k \ldots = 1, \ldots, N). \tag{1}$$

В силу чистоты метрического тензора его матрица в неголономном репере представима в виде:

$$(g_{ji}) = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ 0 & g_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(a, b, c \ldots = 1, \ldots, n; \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \ldots = n+1, \ldots, N; \ \mathrm{Det}(g_{ab}) \neq 0, \ \mathrm{Det}(g_{\bar{a}\bar{b}}) \neq 0).$$

Равенство нулю смешанных компонент тензора g_{ij} есть условие ортогональности площадок распределений пространства P_N в любой его точке.

Результаты исследования и их обсуждение. Зададим независимо друг от друга два почти приводимых римановых пространства с одним и тем же числом измерений.

В каждом из них имеется своя система координат и своя метрика. Пусть этими метриками будут соответственно

$$dS^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{3}$$

и

$$d\tilde{S}^2 = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j. \tag{4}$$

Рассмотрим области заданных пространств D и $\tilde{D}$ и установим между точками этих областей взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое соответствие.

Тогда систему координат X^i в области D можно «перенести» в область $\tilde{D}$, т.е. «приписать» каждой точке $\tilde{M} \in \tilde{D}$ те же координаты X^i, какими обладает точка $M \in D$.

Итак, для соответствующих точек M и $\tilde{M}$ полагаем

$$x^i = \tilde{x}^i .$$

Однако при этом заметим, что метрики обоих пространств остаются, вообще говоря, различными:

$$g_{ij} \neq \tilde{g}_{ij} .$$

С аналитической точки зрения можно считать, что имеем одно многообразие, в котором заданы две квадратичные формы, определяющие две различные римановы метрики.

Будем считать, что многообразия D и $\tilde{D}$ почти конформно отображены друг на друга с сохранением структуры почти произведения.

Это значит, что

$$\tilde{g}_{ab} = \lambda_1 g_{ab} , \ \tilde{g}_{a\bar{b}} = 0 , \ \tilde{g}_{\bar{a}\bar{b}} = \lambda_2 g_{\bar{a}\bar{b}}$$

и матрица тензора $\tilde{g}_{ij}$ имеет вид:

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 g_{ab} & 0 \\ 0 & \lambda_2 g_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Положим, что $\lambda_1 = e^{2p}$, $\lambda_2 = e^{2r}$, где $p = p(x^j)$, $r = r(x^j)$ – непрерывно дифференцируемые функции координат точки. Тогда

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2p} g_{ab} & 0 \\ 0 & e^{2r} g_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В адаптированном неголономном репере $R = \{e_a, e_{\bar{a}}\}$ находятся коэффициенты связности, используя при этом следующие соотношения:

$$\partial_c g_{ab} = \partial_c (e_a, e_b) = (\partial_c e_a, e_b) + (e_a, \partial_c e_b) = (\Gamma^d_{ac} e_d + \Gamma^{\bar{d}}_{ac} e_{\bar{d}}, e_b) + (\Gamma^d_{bc} e_d + \Gamma^{\bar{d}}_{bc} e_{\bar{d}}, e_a) = \Gamma^d_{ac} g_{db} + \Gamma^d_{bc} g_{da} ;$$

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma^d_{ba} g_{dc} + \Gamma^d_{ca} g_{db} ;$$

$$\partial_a g_{ca} = \Gamma^d_{cb} g_{da} + \Gamma^d_{ab} g_{dc} .$$

В силу неголономности репера компоненты объекта связности Γ^k_{ij} несимметричны по i и j, причем

$$\Gamma^k_{[ij]} = \Omega_{ij}{}^k_{\bullet} ,$$

где Ω – объект неголономности репера.

Формальные символы Кристоффеля будут таковыми:

$$\left\{ \begin{matrix} d \\ ab \end{matrix} \right\} = \Gamma^d_{ba} - \Omega_{ba}{}^d_{\bullet} + \Omega^d_{\bullet ba} + \Omega^d_{\bullet ab} .$$

Кроме того,

$$\Gamma^d_{ba} = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{bc} + \partial_a g_{ca} - \partial_c g_{ab}) + \Omega_{ba}{}^d_{\bullet} - \Omega^d_{\bullet ba} - \Omega^d_{\bullet ab} ;$$

$$\Gamma^d_{c\bar{b}} = \frac{1}{2} g^{da} \partial_{\bar{b}} g_{ca} + \Omega_{c\bar{b}}{}^d_{\bullet} - \Omega^d_{\bullet c\bar{b}} - \Omega^d_{\bullet \bar{b}c} ;$$

$$\Gamma_{\bar{c}b}^{\ \ d} = \frac{1}{2} g^{da} \partial_c g_{ab} + \Omega_{\bar{c}b}^{\ \ d}{}_{\bullet} - \Omega_{\bullet\bar{c}b}^{d} - \Omega_{\bullet b\bar{c}}^{d};$$

$$\Gamma_{\bar{c}\bar{b}}^{d} = -\frac{1}{2} g^{da} \partial_a g_{\bar{b}\bar{c}} + \Omega_{\bar{c}\bar{b}}^{\ \ d}{}_{\bullet} - \Omega_{\bullet\bar{b}\bar{c}}^{d} - \Omega_{\bullet\bar{c}\bar{b}}^{d} .$$

Переходя к новой метрике $\tilde{g}_{ij}$, имеем:

$$\tilde{\Gamma}_{ba}^{d} = \Gamma_{ba}^{d} + \delta_b^d \partial_a p + \delta_a^d \partial_b p - g_{ab} \partial^d p;$$

$$\tilde{\Gamma}_{b\bar{a}}^{d} = \Gamma_{b\bar{a}}^{d} + \delta_b^d \partial_{\bar{a}} p; ,$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{b}a}^{d} = \Gamma_{\bar{b}a}^{d} + \delta_a^d \partial_{\bar{b}} p;$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{b}\bar{c}}^{d} = \Gamma_{\bar{b}\bar{c}}^{d} - \frac{1}{2} \partial^d g_{\bar{b}\bar{c}} (e^{2(r-p)} - 1) - e^{2(r-p)} g_{\bar{b}\bar{c}} \partial^d r.$$

Так как заданы базисы распределений e_a и $e_{\bar{a}}$, то любой вектор ξ, касательный к многообразию, представим разложением:

$$\xi = \omega^a e_a + \omega^{\bar{a}} e_{\bar{a}} \ (a, b, \ldots = 1, \ldots, n; \bar{a}, \bar{b}, \ldots = n+1, \ldots, N).$$

Имеют место соотношения:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \omega_{\bar{b}}^a \wedge \omega^{\bar{b}}; ,$$

$$d\omega^{\bar{a}} = \omega_b^{\bar{a}} \wedge \omega^b + \omega_{\bar{b}}^{\bar{a}} \wedge \omega^{\bar{b}},$$

где

$$\omega_b^a = \Gamma_{bc}^a \omega^c + \Gamma_{b\bar{c}}^a \omega^{\bar{c}};$$

$$\omega_{\bar{b}}^{\bar{a}} = \Gamma_{\bar{b}c}^{\bar{a}} \omega^c + \Gamma_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} \omega^{\bar{c}};$$

$$\omega_b^{\bar{a}} = \Gamma_{bc}^{\bar{a}} \omega^c + \Gamma_{b\bar{c}}^{\bar{a}} \omega^{\bar{c}};$$

$$\omega_{\bar{b}}^a = \Gamma_{\bar{b}c}^a \omega^c + \Gamma_{\bar{b}\bar{c}}^a \omega^{\bar{c}}.$$

Кроме того,

$$dg_{ab} = g_{ab,c} \omega^c + g_{ab,\bar{c}} \omega^{\bar{c}};$$

$$dg_{\bar{a}\bar{b}} = g_{\bar{a}\bar{b},c} \omega^c + g_{\bar{a}\bar{b},\bar{c}} \omega^{\bar{c}};$$

$$Dg_{ik} = dg_{ik} - g_{lk} \omega_i^l - g_{il} \omega_k^l.$$

Зададим теперь ортонормированный репер:

$$g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Для новой метрики

$$\tilde{g}_{ab} = e^{2p} \delta_{ab};$$

$$\tilde{g}_{\bar{a}\bar{b}} = e^{2r} \delta_{\bar{a}\bar{b}} ,$$

поэтому

$$\tilde{\Gamma}^d_{cb} = \Gamma^d_{cb} + \delta^d_c \partial_b p + \delta^d_b \partial_c p - \delta_{cb} \partial^d p;$$

$$\tilde{\Gamma}^d_{c\bar{b}} = \Gamma^d_{c\bar{b}} + \delta^d_c \partial_{\bar{b}} p;$$

$$\tilde{\Gamma}^d_{\bar{c}\bar{b}} = \Gamma^d_{\bar{c}\bar{b}} - e^{2(r-p)} \delta_{\bar{c}\bar{b}} \partial^d r.$$

Помимо этого имеем:

$$\omega^k_i + \omega^i_k = 0.$$

При почти конформном отображении возможны случаи:

1) $D\tilde{g}_{ab} = d\tilde{g}_{ab} - \tilde{g}_{cb}\tilde{\omega}^c_a - \tilde{g}_{ac}\omega^c_b = 0,$

откуда следует, что

$$2\delta_{ab} dp - \tilde{\omega}^b_a - \tilde{\omega}^a_b = 0.$$

Так как символ δ_{ab} принимает значения 0 или 1, то

а) пусть $a \neq b$, тогда $\delta_{ab} = 0$, и

$$\tilde{\omega}^b_a + \tilde{\omega}^a_b = 0;$$

б) пусть $a = b$, тогда $\delta_{ab} = 1$, и

$$dp = \tilde{\omega}^a_a = \tilde{\omega}.$$

2) $D\tilde{g}_{a\bar{b}} = d\tilde{g}_{a\bar{b}} - \tilde{g}_{\bar{c}\bar{b}}\tilde{\omega}^{\bar{c}}_a - \tilde{g}_{ac}\omega^c_{\bar{b}} = 0,$

откуда

$$e^{2r}\tilde{\omega}^{\bar{b}}_a + e^{2p}\omega^a_{\bar{b}} = 0.$$

3) $D\tilde{g}_{\bar{a}\bar{b}} = d\tilde{g}_{\bar{a}\bar{b}} - \tilde{g}_{\bar{c}\bar{b}}\tilde{\omega}^{\bar{c}}_{\bar{a}} - \tilde{g}_{\bar{a}\bar{c}}\omega^{\bar{c}}_{\bar{b}} = 0,$

откуда

$$2\delta_{\bar{a}\bar{b}} dr - \tilde{\omega}^{\bar{b}}_{\bar{a}} - \omega^{\bar{a}}_{\bar{b}} = 0.$$

И опять можно рассмотреть подслучаи:

а) $\bar{a} \neq \bar{b}$, тогда $\delta_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ и

$$\omega^{\bar{a}}_{\bar{b}} + \omega^{\bar{b}}_{\bar{a}} = 0;$$

б) $a = b$, тогда $\delta_{\bar{a}\bar{b}} = 1$ и

$$dr = S\,.$$

Теперь следует сосчитать коэффициенты связности $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Gamma}^c_{\bar{b}a} = e^{2(r-p)}\tilde{\Gamma}^{\bar{b}}_{ac} + 2\Omega_{\bar{b}c}{}^{a}{}_{\bullet} - 2\Omega_{a\bar{b}}{}^{c}{}_{\bullet};$$

$$\tilde{\Gamma}^{\bar{b}}_{ca} = -e^{2(p-r)}(e^{2(p-r)}\tilde{\Gamma}^{\bar{b}}_{ac} + 2\Omega_{\bar{b}c}{}^{a}{}_{\bullet} - 2\Omega_{a\bar{b}}{}^{c}{}_{\bullet}).$$

Если $c = a$, то

$$\tilde{\Gamma}_{aa}^{\bar{b}} = 2e^{2(p-r)}\Omega_{a\bar{b}}{}^{a};$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{b}a}^{a} = -2\Omega_{a\bar{b}}{}^{a}.$$

Распределения почти приводимых римановых пространств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поле B называется геодезическим, если геодезическая, проходящая в направлении любого вектора из B, целиком принадлежит полю *B*, т.е. любой касательный вектор этой геодезической принадлежит соответствующей площадке поля *B*.

Необходимым и достаточным условием геодезичности поля B является

$$\Gamma_{(bc)}^{\bar{a}} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Поле B называется параллельным вдоль поля C, если вектор из B после параллельного переноса в направлении, принадлежащим полю C, остается вектором из B.

Необходимое и достаточное условие параллельности поля B вдоль поля C есть условие:

$$\Gamma_{b\bar{c}}^{\bar{a}} = 0.$$

Результаты проведенного исследования сформулируем в виде теорем:

ТЕОРЕМА 1. При почти конформном отображении геодезичность поля $\tilde{B}$ ($\tilde{C}$) сохраняется тогда и только тогда, когда функция $p(r)$ постоянна вдоль поля $\tilde{C}$ ($\tilde{B}$).

ТЕОРЕМА 2. При почти конформном отображении поле $\tilde{B}$ ($\tilde{C}$) параллельно вдоль поля $\tilde{C}$ ($\tilde{B}$) тогда и только тогда, когда функция $p(r)$ постоянна вдоль поля $\tilde{B}$ ($\tilde{C}$).

ТЕОРЕМА 3. Если поле $\tilde{B}$ параллельно вдоль поля $\tilde{C}$, то поле $\tilde{C}$ геодезично при почти конформном отображении.

Заключение. В статье сформулированы необходимое и достаточное условия сохранения геодезичности поля $\tilde{B}$ ($\tilde{C}$), а также параллельности поля $\tilde{B}$ ($\tilde{C}$) вдоль поля $\tilde{C}$ ($\tilde{B}$) при почти конформном отображении. Полученные результаты являются новым вкладом в исследование π-структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйзенхарт, Л.П. Риманова геометрия / Л.П. Эйзенхарт. – М.: ИИЛ, 1948.
2. Шойимкулов, М. О связностях, согласованных со структурой эллиптического типа S_{2n+1} / М. Шойимкулов // Лобачевский и современная геометрия: тез. докл. междунар. науч. конф., Казань, 1992 г. – Казань, 1992. – С. 117.

Поступила 25.06.2008