

УДК 517.958:532; 512.62

ВКЛАД ВЫСШИХ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В АСИМПТОТИКУ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

д-р техн. наук, доц. С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ, Д.В. ПЯТКИН
(Полоцкий государственный университет)

Плотность вероятности элементарного акта сорбции выражена через начальные моменты распределения случайной величины. В качестве последней фигурирует глубина проникновения примеси в слой сорбента. Показано, что моменты распределения представляют собой семейство рекуррентных временных полиномов. Соотношение между полиномами сведено к соотношению между их коэффициентами. Записано точное решение последнего через числа сочетаний. Определена асимптотика функции распределения при больших временах. Развита итерационная процедура, выражающая поправки к выделенному в качестве главной части нормальному закону через асимметрию, эксцесс и центральные моменты высших порядков.

Считается, что знание всех моментов случайной величины эквивалентно знанию ее функции распределения [1]. Однако в общем виде такая задача не решена, так как нет формулы, выражающей, например, плотность вероятности случайной величины через совокупность ее начальных моментов, подобно тому, как ряд Тейлора связывает функцию с ее производными в некоторой точке. В связи с этим представляется актуальным получение и исследование таких выражений в рамках конкретных моделей, приводящих к той или иной функции распределения. Рассмотрим, в частности, плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции.

Обычно динамика сорбции теоретически исследуется методами математической физики. При этом решают систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих кинетику сорбции и баланс поглощаемой примеси. Для линейных изотерм и стандартных краевых условий такая система сводится к уравнению [2]:

$$-\omega'_\xi = e^{-\tau} \left(e^{-\xi} + \int_0^\tau e^{\tau-d} d\xi \right), \quad (1)$$

в котором ω – приведенная концентрация сорбтива; ξ и τ – соответственно обезразмеренные координата и время [2].

Уравнение (1) имеет единственное решение:

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\xi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left(1 - e^{-\tau} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau^k}{k!} \right) \right), \quad (2)$$

согласно которому эволюция концентрации примеси строго детерминирована.

Вместе с тем совершенно очевидно, что элементарный акт сорбции – существенно случайное событие, которое может произойти или не произойти в данном месте. И как указывалось в [3, 4], возможен теоретико-вероятностный подход к описанию динамики этого явления. В частности, приведенную концентрацию $\omega(\xi, \tau)$ можно интерпретировать как статистическую вероятность проникновения частиц примеси в поглощающий слой на глубину ξ . Соответственно $1 - \omega(\xi, \tau)$ – вероятность поглощения этих частиц таким слоем сорбента, а $f(\xi, \tau)$ – плотность вероятности элементарного акта сорбции в данном месте или дифференциальная функция распределения:

$$f(\xi, \tau) = \frac{\partial(1 - \omega(\xi, \tau))}{\partial \xi} = e^{-\xi - \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n!} (n - \xi) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau^k}{k!}. \quad (3)$$

Ее эволюция, построенная с помощью (3), представлена на рисунке 1. Видно, как экспоненциальное распределение со временем трансформируется в нормальное, по мере удаления фронта сорбции от входа в фильтр. Такое поведение $f(\xi, \tau)$ находится в полном соответствии с законом больших чисел, согласно которому с необходимостью реализуются распределения с максимальной энтропией. На полубесконечном интервале этим свойством обладает экспоненциальный закон, на бесконечном – нормальный [5]. Его параметры (математическое ожидание и дисперсия ξ) являются функциями времени, подлежащими определению.

Оригинальность предлагаемого подхода не вызывает сомнений. Экстремальность энтропии наиболее распространенных в статистике распределений известна в теории информации. Однако глубинная связь наиболее общих следствий конкретных моделей сорбции с основными теоремами теории вероятностей остается не прослеженной. В частности, весьма распространенное утверждение о том, что знание всех моментов распределения $v_n(\tau)$ случайной величины ξ эквивалентно знанию ее плотности вероятности не имеет конкретной реализации в виде формулы, выражающей $f(\xi, \tau)$ через $v_n(\tau)$. С целью ее получения воспользуемся найденным в [4] представлением для $\omega(\xi, \tau)$:

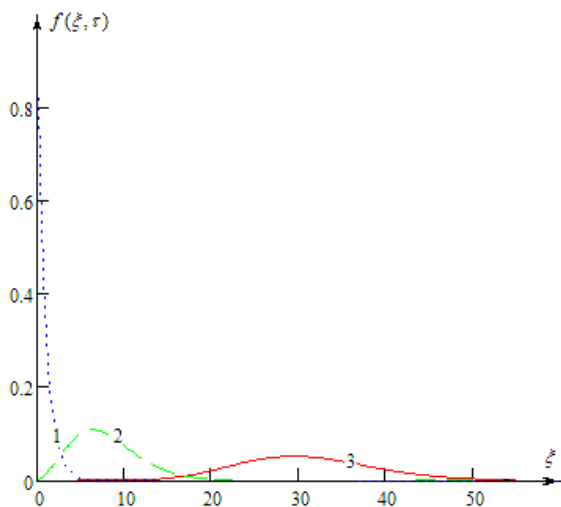


Рис. 1. Эволюция дифференциальной функции распределения координаты элементарного акта сорбции:
1 – $\tau=0$; 2 – $\tau=7$; 3 – $\tau=30$

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} Q_n(\tau), \quad (4)$$

где $Q_n(\tau)$ – некоторые функции, которые можно определить, подставив (4) в (1). В частности,

$$Q_0(\tau) = e^{\tau}, \quad (5)$$

так как согласно (3) и (4)

$$\omega(0, \tau) = 1 = e^{-\tau} Q_0(\tau). \quad (6)$$

Выполнив частное дифференцирование $\omega(\xi, \tau)$ и приравняв выражения при одинаковых степенях ξ в левой и правой частях (1), получим рекуррентное соотношение:

$$Q_{n+1}(\tau) = -Q_n(\tau) + \int_0^{\tau} Q_n(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Вместе с (5) оно позволяет последовательно определить все $Q_n(\tau)$ до какого угодно номера. В [4] это сделано в общем виде:

$$Q_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} Q_{nk} \tau^k, \quad (n=1, 2, 3...), \quad (8)$$

где

$$Q_{nk} = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k C_n^l (-1)^{n-l} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (9)$$

есть числовые коэффициенты фигурирующих в (4), (7), (8) рекуррентных полиномов, а C_n^i – числа сочетаний из n объектов по i .

С другой стороны, опираясь на (1) в [6], удалось получить рекуррентное соотношение:

$$v_n(\tau) = n \cdot \left[v_{n-1}(\tau) + \int_0^{\tau} v_{n-1}(\tau) d\tau \right] \quad (10)$$

между начальными моментами

$$v_n(\tau) = \int_0^{\infty} \xi^n f(\xi, \tau) d\xi \quad (11)$$

координаты ξ элементарного акта сорбции, распределенной с плотностью вероятности (3).

Соотношения (7), (10) имеют сходную структуру, что позволяет установить связь рекуррентных полиномов с начальными моментами:

$$Q_{n+1}(\tau) = \frac{1}{n!} v_n(-\tau) (-1)^{n+1}. \quad (12)$$

В ее справедливости можно убедиться непосредственно, подставив (12) в (7) и получив (10) с помощью тождественных преобразований.

Подставив (4) в (3), получим:

$$f(\xi, \tau) = -e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} Q_{n+1}(\tau). \quad (13)$$

Формулы (12), (13) иллюстрируют утверждение о том, что дифференциальная функция распределения случайной величины определяется своими начальными моментами:

$$f(\xi, \tau) = -e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \frac{v_n(-\tau)}{n!}. \quad (14)$$

В частности, при $\tau = 0$ из (10) следует

$$v_n(0) = n!, \quad (15)$$

что после подстановки в (14) дает

$$f(\xi, 0) = e^{-\xi}, \quad (16)$$

как и должно быть¹.

Однако при больших временах в (14) возникают проблемы со сходимостью. Причина в том, что формула (4) никак не учитывает асимптотику сорбционной активности при больших временах. То есть возникает ситуация, аналогичная той, при которой сходимость стандартных разложений зависит от вида функции, разлагаемой в ряд Тейлора или Фурье.

Чтобы правильно учесть специфику задачи, привлечем дополнительные (не основанные на уравнениях математической физики) соображения для получения асимптотики $f(\xi, \tau)$ при больших временах и ее выделения из (14) с целью улучшения сходимости.

Имея в виду, что с учетом (8), (9), (12) начальные моменты нам известны:

$$v_n(\tau) = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \tau^k \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k C_{n+1}^l (-1)^l, \quad (17)$$

сосчитаем математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, асимметрию и эксцесс ξ :

$$m(\tau) = v_1(\tau), \quad \sigma(\tau) = \sqrt{\mu_2(\tau)}, \quad A(\tau) = \frac{\mu_3(\tau)}{\sigma^3(\tau)}, \quad E(\tau) = \frac{\mu_4(\tau)}{\sigma^4(\tau)} - 3, \quad (18)$$

где $\mu_n(\tau)$ – центральный момент n -го порядка:

$$\mu_n(\tau) = \int_0^{\infty} (\xi - v_1(\tau))^n f(\xi, \tau) d\xi, \quad (19)$$

Выполнив под знаком интеграла в (19) биномиальное разложение, получим после интегрирования по ξ :

$$\mu_n(\tau) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^{n-i} \cdot v_{n-i}(\tau) \cdot v_1(\tau)^i. \quad (20)$$

Подставив в (20) найденные с помощью (17)

$$v_1(\tau) = 1 + \tau, \quad v_2(\tau) = 2 + 4\tau + \tau^2, \quad v_3(\tau) = 6 + 18\tau + 9\tau^2 + \tau^3, \quad v_4(\tau) = 24 + 96\tau + 72\tau^2 + 16\tau^3 + \tau^4, \quad (21)$$

получим искомые центральные моменты:

$$\mu_2(\tau) = 1 + 2\tau; \quad \mu_3(\tau) = 2 + 6\tau; \quad \mu_4(\tau) = 9 + 36\tau + 12\tau^2. \quad (22)$$

¹ Справедливость последнего результата непосредственно подтверждается формулами (1), (3).

Подставив (22) в (18), найдем

$$A(\tau) = \frac{6\tau + 2}{2\tau + 1} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2\tau}}; \quad (23)$$

$$E(\tau) = \frac{24\tau + 6}{2\tau + 1} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{6}{\tau}. \quad (24)$$

Видно, что асимметрия и эксцесс являются бесконечно малыми при $\tau \rightarrow \infty$. Это значит, что при больших временах $f(\xi, \tau)$, как уже упоминалось, трансформируется в нормальное распределение (рис. 2):

$$f(\xi, \tau) = f_N(\xi, \tau) \cdot [1 + \varphi(\xi, \tau)], \quad (25)$$

где

$$f_N(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}} e^{-\frac{\xi - m(\tau)}{2\sigma(\tau)}}, \quad (26)$$

а $f_N(\xi, \tau)\varphi(\xi, \tau)$ – погрешность (рис. 3), возникающая при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом (26). Фигурирующие в нем параметры нами уже определены (см. (18), а также первые формулы в (21), (22))

$$m(\tau) = 1 + \tau, \quad (27)$$

$$\sigma(\tau) = \sqrt{2\tau + 1}. \quad (28)$$

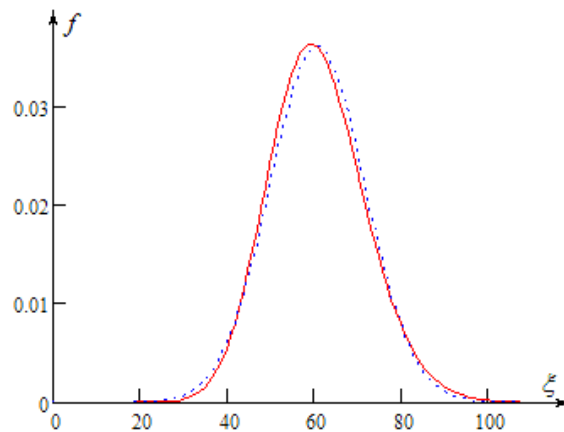


Рис. 2. Асимптотика дифференциальной функции распределения координаты элементарного акта сорбции: $f(\xi, 60)$ – сплошная кривая; $f_N(\xi, 60)$ – пунктир

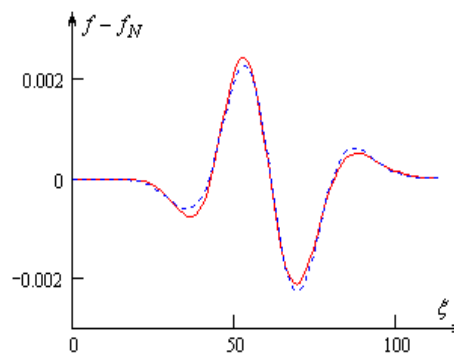


Рис. 3. Отклонение $f(\xi, 60)$ от нормального закона $f_N(\xi, 60)$ (сплошная кривая) и вклад в него асимметрии (пунктир)

Для того чтобы завершить исследование, осталось выразить $\varphi(\xi, \tau)$ (или хотя бы ее главную часть) через числовые характеристики, связанные с центральными моментами высших порядков. С этой целью получим с помощью (1), (3), (25) уравнение относительно $\varphi(\xi, \tau)$. Прежде всего подставим вытекающее из (3) тождество

$$-\frac{\partial \omega(\xi, \tau)}{\partial \xi} = f(\xi, \tau) \quad (29)$$

в (1) и умножим полученное равенство на e^τ :

$$f e^\tau = e^{-\xi} + \int_0^\tau e^\tau d_\tau \omega. \quad (30)$$

Далее выполним с помощью теоремы Барроу дифференцирование (30) по τ и сократим результат на e^τ :

$$f'_\tau + f = \omega'_\tau. \quad (31)$$

С учетом (29) дифференцирование (31) по ξ дает

$$f''_{\xi\tau} + f'_\xi + f'_\tau = 0. \quad (32)$$

Подставив (25) в (32), получим после сокращения на $f_N(\xi, \tau)$ искомое уравнение относительно $\varphi(\xi, \tau)$:

$$\begin{aligned} & \varphi''_{\xi\tau} + \varphi'_\xi \left[1 - \sigma^{-2}(\tau) + \sigma^{-2}(\tau) \xi - m(\tau) + \sigma^{-4}(\tau) \xi - m(\tau)^2 \right] + \\ & + \varphi'_\tau \left[1 - \sigma^{-2}(\tau) \xi - m(\tau) \right] + 1 + \varphi \left[3\sigma^{-4}(\tau) \xi - m(\tau) - \sigma^{-6}(\tau) \xi - m(\tau)^3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Выражения в квадратных скобках таковы, что удобно перейти в систему координат, связанную с работающим слоем сорбента, и в качестве характерного размера использовать среднеквадратическое отклонение:

$$x(\xi, \tau) = (\xi - m(\tau)) / \sigma(\tau). \quad (34)$$

При этом в (33) останется явная зависимость только от x и σ :

$$\varphi''_{\xi\tau} + \varphi'_\xi \left[1 - \sigma^{-2}(\tau) + \sigma^{-1}(\tau)x + \sigma^{-2}(\tau)x^2 \right] + \varphi'_\tau \left[1 - \sigma^{-1}(\tau)x \right] + 1 + \varphi \left[3x - x^3 \right] = 0, \quad (35)$$

т.е. в движущейся системе координат вся эволюция φ обусловлена только изменением σ :

$$\varphi'_\tau = \varphi'_x x'_\tau + \varphi'_\sigma \sigma'_\tau = \varphi'_x (-\sigma^{-1} - x\sigma^{-2}) + \varphi'_\sigma \sigma^{-1}, \quad (36)$$

где последнее равенство записано с учетом (28). Согласно (34) также имеет место равенство:

$$\varphi'_\xi = \varphi'_x x'_\xi = \varphi'_x \sigma^{-1}. \quad (37)$$

Подставив (34), (36) и (37) в (35), получим:

$$-\varphi''_{xx} \left[\sigma^{-2} + x\sigma^{-3} \right] + \varphi''_{\sigma\sigma} \sigma^{-2} + \varphi'_x \left[-2\sigma^{-3} + 2x^2\sigma^{-3} + x\sigma^{-2} \right] + \varphi'_\sigma \left[\sigma^{-1} - x\sigma^{-2} \right] = 1 + \varphi \left[x^3 - 3x \right]. \quad (38)$$

Согласно (23) при больших временах φ убывает, как σ^{-1} . Для дальнейшего удобно выделить эту асимптотику явно:

$$\varphi(x, \sigma) \cong \sigma^{-1} g(x), \quad (39)$$

где мы пренебрегли более слабой (по сравнению с выделенной) зависимостью g от среднеквадратического отклонения². Тогда

$$\varphi'_x = \sigma^{-1} g', \quad \varphi''_{xx} = \sigma^{-1} g'', \quad \varphi'_\sigma = -\sigma^{-2} g, \quad \varphi''_{\sigma\sigma} = -\sigma^{-2} g', \quad (40)$$

² В данном приближении g – нечетная функция x , что обеспечивает отличную от нуля асимметрию при отсутствии эксцесса, являющегося согласно (23), (24) бесконечно малой более высокого порядка малости.

что после подстановки в (38) дает

$$-g''[\sigma^{-3} + x\sigma^{-4}] + g'[-3\sigma^{-4} + 2x^2\sigma^{-4} + x\sigma^{-3}] + g[x\sigma^{-4} - \sigma^{-3}] = 1 + g\sigma^{-1} \sigma^{-3}[x^3 - 3x]. \quad (41)$$

Благодаря фигурирующему в (25) быстро убывающему множителю f_N поведение φ при больших временах³ в соответствии с правилом «3 σ » нас интересует в интервале $|x| < 3$. В нем уравнение (38) при больших временах можно существенно упростить, опустив слагаемые четвертого порядка малости по параметру σ^{-1} :

$$-g'' + xg' - g = x^3 - 3x. \quad (42)$$

Методом неопределенных коэффициентов решение (42) представимо в виде нечетного многочлена третьей степени:

$$g(x) = 0,5x^3 + cx, \quad (43)$$

в котором c – произвольная постоянная. Ее подберем так, чтобы матожидание x тождественно равнялось нулю в соответствии со смыслом этой переменной:

$$0 = M(x) = \int_0^\infty f_N(\xi, \tau) [1 + \sigma^{-1}(0,5x^3 + cx)] x d\xi = \int_{-m(\tau)/\sigma(\tau)}^\infty (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} x + \sigma^{-1}(0,5x^4 + cx^2) dx. \quad (44)$$

При больших временах первое слагаемое не дает вклада в интеграл, так как $m(\tau)/\sigma(\tau) \rightarrow \infty$ (см. (27), (28)) и возникает интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. С учетом этого обстоятельства из (44) следует⁴:

$$c = -0,5 \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x^4 dx / \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x^2 dx = -\frac{3}{2}. \quad (45)$$

Определяемая формулами (39), (43), (45) поправка хорошо описывает отклонение функции распределения $f(\xi, \tau)$ от нормального закона (см. рис. 3, пунктирная кривая). При этом зависимость от x функции $\varphi(x, \sigma)\sigma$, построенная с помощью (3), (25) – (28), (34), практически не меняется со временем, в полном соответствии с (39).

Проскок (приведенная концентрация примеси) связан с плотностью вероятности поглощения соотношением:

$$\omega(\xi, \tau) = 1 - \int_0^\xi f(\xi, \tau) d\xi. \quad (46)$$

Подставив в него (25), получим:

$$\omega(\xi, \tau) = \omega_N(\xi, \tau) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x(0, \tau)}^{x(\xi, \tau)} e^{-x^2/2} g(x) dx, \quad (47)$$

где ω_N – нулевое приближение, отвечающее нормальному закону (26), а второе слагаемое – поправка первого порядка малости по параметру σ^{-1} . После замены $t = x^2/2$ (см. (39), (43), (45)) в (47) можно выполнить интегрирование по частям. Приняв во внимание, что при больших временах $x(0, \tau) \rightarrow -\infty$ (см. (34), (27), (28)) получим поправку первого порядка, убывающую со временем, так же как и асимметрия

$$\omega - \omega_N \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right). \quad (48)$$

³ При этом большими (см. (34)) могут считаться времена, начиная с которых $m(\tau) > 3\sigma(\tau)$. Откуда $\tau \geq 17$ (см. (27), (28)) и $\sigma \geq 6$.

⁴ Заметим, что возникшая в числителе тройка фигурирует в определении эксцесса (18).

Зависимость, построенная с помощью (48), (28), (34), изображена пунктиром на рисунке 4. Она с требуемой точностью «ложится» на сплошную кривую, построенную с использованием двойных рядов (2).

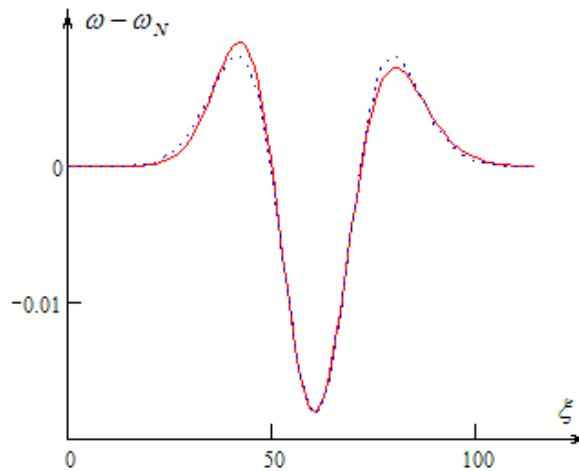


Рис. 4. Отклонение приведенной концентрации примеси от своего нулевого приближения (сплошная кривая) и вклад в него асимметрии (пунктир)

Согласно (48) максимальным отклонением является при $\xi = m(\tau)$. Соответствующее значение может использоваться для оценки ошибки, допускаемой при замене точного решения нормальным законом:

$$|\omega - \omega_N| \approx \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{4\sqrt{\pi\tau}} \approx \frac{0,141}{\sqrt{\tau}}, \quad (49)$$

что хорошо согласуется с оценкой, полученной в [6] из независимых соображений. В частности, при $\tau = 16$ (ранее такие времена определены как большие) получим $|\omega - \omega_N| \leq 0,035$, что вполне приемлемо в инженерных задачах. Напомним, что ω – приведенная величина, причем $\omega_{|x=0} \approx 0,5$ (в соответствии со свойствами нормального распределения), т.е. в данном случае речь идет об относительной погрешности в 7%.

Возвращаясь к $f(\xi, \tau)$, заметим, что правую часть (39) следует рассматривать как первый шаг итерационной процедуры, которую можно развить с помощью (38). Чтобы найти поправки, имеющие порядок эксцесса, будем искать $\varphi(x, \sigma)$ в виде:

$$\varphi(x, \sigma) \cong \sigma^{-1}g(x) + \sigma^{-2}h(x). \quad (50)$$

Подставив (50) в (38) и приняв во внимание (40) (что приведет к взаимному уничтожению слагаемых пропорциональных σ^{-3}), получим:

$$\begin{aligned} x\sigma^{-4}(g - g'') + g'(2x^2 - 3)\sigma^{-4} - h''(\sigma^{-4} + x\sigma^{-5}) + h'x\sigma^{-4} + (2x^2 - 4)\sigma^{-5} + \\ + 2h(x\sigma^{-5} - \sigma^{-4}) = (g\sigma^{-4} + h\sigma^{-5})(x^3 - 3x). \end{aligned} \quad (51)$$

Опустив в (51) слагаемые порядка σ^{-5} и использовав явный вид g , определяемый формулами (41), (45), получим после приведения подобных уравнение для определения h :

$$-h'' + xh' - 2h = 0,5(x^6 - 13x^4 + 33x^2 - 9). \quad (52)$$

Его решение будем искать в виде четного многочлена шестой степени. В результате, опять применив метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$h(x) = \alpha + \beta x^2 + 0,125(x^6 - 11x^4) \quad (53)$$

и уравнение

$$\alpha + \beta = 9/4, \quad (54)$$

связывающее коэффициенты α и β . Дополним (54) следствием из определения дисперсии при $\tau \rightarrow \infty^5$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \alpha x^2 + \beta x^4 + 0,125(x^8 - 11x^6) dx = 0. \tag{55}$$

Фигурирующие в (55) интегралы вычисляются дифференцированием по параметру, что дает искомую связь:

$$\alpha + 3\beta = 15/2. \tag{56}$$

Из (54), (56) следует:

$$\alpha = -3/8, \quad \beta = 21/8. \tag{57}$$

Построенная с помощью (50), (53), (57) пунктирная кривая рисунка 5 адекватно приближает отклонение $\Delta_1 = f - f_N(1 + \sigma^{-1}g)$ первого приближения $f_N(1 + \sigma^{-1}g)$ от $f(\xi, \tau)$.

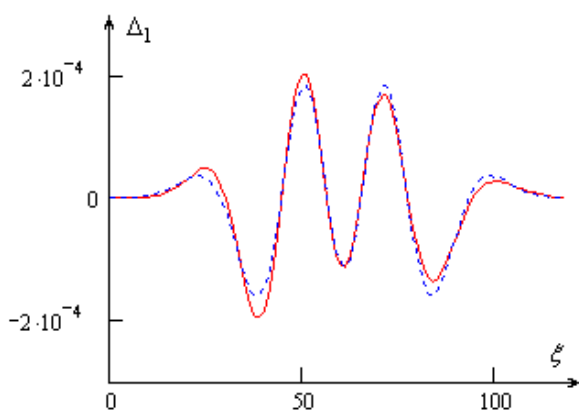


Рис. 5. Отклонение $f(\xi, 60)$ от своего первого приближения (сплошная кривая) и вклад в него эксцесса (пунктир)

Отклонение от f второго приближения $\Delta_2 = f - f_N(1 + \sigma^{-1}g + \sigma^{-2}h)$ представлено на рисунке 6. Достигаемая при этом относительная погрешность для рассматриваемого момента времени порядка 10^{-3} .

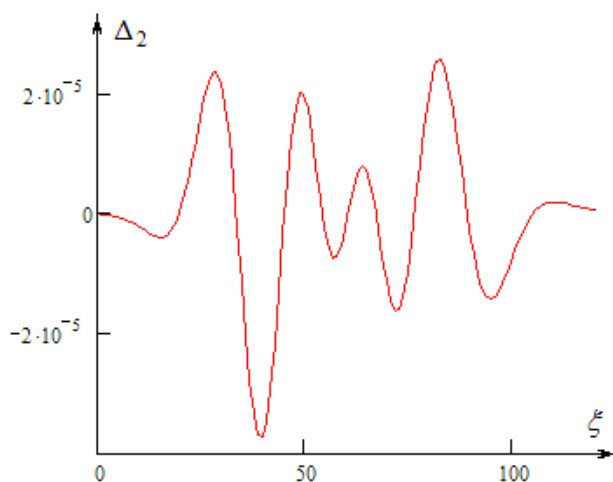


Рис. 6. Отклонение $f(\xi, 60)$ от своего второго приближения

⁵ Нулевое приближение обеспечивает точное значение дисперсии, вклад первого приближения равен нулю в силу нечетности g .

Построенная с помощью (23) – (28), (50), (53), (57) зависимость сливается со сплошной кривой на рисунке 2. При этом временные затраты в актуальном диапазоне аргументов оказываются в $10^3 \dots 10^4$ раз меньше, чем при использовании формулы (3) с той же точностью

Заключение. Согласно проведенному исследованию нечетная часть погрешности при замене $f(\xi, \tau)$ нормальным законом (26) убывает как асимметрия, а четная – как эксцесс:

$$\varphi(\xi, \tau) \approx \frac{A(\tau)}{6}(x^3 - 3x) + \frac{E(\tau)}{96}(-3 + 21x^2 - 11x^4 + x^6), \quad (58)$$

где x определяется соотношением (34).

Продолжая итерационную процедуру, можно связать поправки высших порядков с соответствующими центральными моментами случайной величины⁶.

Таким образом, знание асимптотики $f(\xi, \tau)$ при больших временах многократно улучшает сходимость фигурирующих в (2), (3) двойных рядов. В результате скорость численных экспериментов, как и сами их возможности, выводятся на качественно иной уровень.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
2. Ехилевский, С.Г. О формировании квазистационарного профиля концентрации CO_2 при фильтрации выдыхаемого воздуха через кислородсодержащий продукт регенеративного патрона / С.Г. Ехилевский, С.М. Ткачев // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В. Промышленность. Прикладные науки. – 2008. – № 8. – С. 115 – 120.
3. Ехилевский, С.Г. Регенерация нестационарных потоков воздуха / С.Г. Ехилевский // Изв. Донецк. горного ин-та. – 1998. – № 2. – С. 53 – 58.
4. Ехилевский, С.Г. Рекуррентные полиномы в моделировании динамической сорбционной активности / С.Г. Ехилевский, В.В. Альховко // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 110 – 116.
5. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1969. – 400 с.
6. Ехилевский, С.Г. Моделирование динамической сорбционной активности надпероксидов щелочных металлов (метод моментов) / С.Г. Ехилевский, О.В. Голубева // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2008. – № 6. – С. 119 – 128.

Поступила 27.02.2009

⁶ Напомним, что в качестве последней фигурирует координата элементарного акта сорбции.