УДК 517.544

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ ГИПЕРФУНКЦИЙ САТО

Т.М. УРБАНОВИЧ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Исследуется краевая задача Гильберта в классах гиперфункций Сато. Решение задачи Гильберта строится путём сведения к соответствующей краевой задаче Римана.

Получены явные формулы решения в двух случаях: 1) когда коэффициент задачи Римана удовлетворяет условию Гёльдера на прямой; 2) когда коэффициент задачи Римана имеет конечное число точек разрыва первого рода на прямой. В первом случае решение построено в классе гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности. Во втором случае решение получено в двух классах: а) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых ограничены в окрестности точек разрыва коэффициента и исчезают на бесконечности; б) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых интегрируемы в окрестности точек разрыва коэффициента и исчезают на бесконечности.

1. Постановка краевой задачи Гильберта и её сведение к задаче Римана

Все необходимые сведения из теории гиперфункций Сато приведены в [1], а также в [2, 3].

Введём определения вещественной гиперфункции и уравновешенной гиперфункции.

Определение 1. Гиперфункцию $f(x)$, порождённую парой $\{F^+(z), F^-(z)\}$, где $ImF^+(x) = ImF^-(x) = 0$ в тех точках $x\in\mathbb{R}$, в которых предельные значения $F^+(x)$, $F^-(x)$ существуют, назовём вещественной гиперфункцией.

Определение 2. Гиперфункцию $f(x)$, порождённую парой $\{F^+(z), F^-(z)\}$, где $F^-(z)=\overline{F^+(\bar z)}$, назовём уравновешенной гиперфункцией.

Задача Гильберта. *Найти функцию* $F^+(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, *аналитическую в верхней полуплоскости, по краевому условию*:

$$Re\left[\frac{F^+(x)}{a(x)+ib(x)}\right]=g(x), \tag{1}$$

где $g(x)$ *– вещественная гиперфункция,* $x\in\mathbb{R}$.

В данной работе рассматривается так называемый нормальный случай, т.е. $a^2(x)+b^2(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^2(x)+b^2(x)=1$.

Обозначим

$$\lambda(x)=\frac{1}{a(x)-ib(x)}.$$

Тогда краевое условие (1) примет вид:

$$Re\left[\overline{\lambda(x)}F^+(x)\right]=g(x). \tag{2}$$

Используя равенство

$$2Re\left[\overline{\lambda(x)}F^+(x)\right]=\overline{\lambda(x)}F^+(x)+\overline{\overline{\lambda(x)}F^+(x)},$$

перепишем краевое условие (2) в виде:

$$\overline{\lambda(x)}F^+(x)+\lambda(x)\overline{F^+(\bar x)}=2g(x). \tag{3}$$

Введём вспомогательную функцию $F^-(z)$ с помощью условия комплексного уравновешивания:

$$F^-(z)=\overline{F^+(\bar z)}. \tag{4}$$

Заменяя на основании (4) $\overline{F^{+}(\bar{x})}$ на $F^{-}(x)$, запишем краевое условие (3) в виде:

$$\overline{\lambda(x)}F^{+}(x) = -\lambda(x)F^{-}(x) + 2g(x). \tag{5}$$

Поделим обе части уравнения (5) на $\overline{\lambda(x)} \neq 0,$ получим

$$F^{+}(x) = -\frac{\lambda(x)}{\overline{\lambda(x)}}F^{-}(x) + \frac{2g(x)}{\overline{\lambda(x)}}. \tag{6}$$

Так как $a^2(x) + b^2(x) = 1,$ то $|\lambda(x)| = |\overline{\lambda(x)}| = 1.$

Обозначим коэффициент $\left(-\frac{\lambda(x)}{\overline{\lambda(x)}}\right)$ в правой части равенства (6) через $G(x),$ т.е.

$$G(x) = e^{2i\theta(x)}; \tag{7}$$

$$\theta(x) = \arg(i\lambda(x)). \tag{8}$$

Определение 3. Под решением задачи Гильберта в классе гиперфункций Сато будем понимать верхнюю компоненту уравновешенной гиперфункции $\{F^{+}(z), F^{-}(z)\}$, являющейся решением краевой задачи Римана:

$$F^{+}(x) = -\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}F^{-}(x) + \frac{2g(x)}{a(x)-ib(x)}, -\infty < x < +\infty. \tag{9}$$

2. Решение краевой задачи Гильберта

Случай I. *Коэффициент краевой задачи (9)*

$$G(x) = -\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$$

удовлетворяет условию Гёльдера на $\mathbb{R}$.

Перепишем краевое условие (9) в виде:

$$F^{+}(x) = G(x)F^{-}(x) + \frac{2g(x)}{a(x)-ib(x)}. \tag{10}$$

Из формулы (7) следует, что $\theta(x) = \dfrac{lnG(x)}{2i}$.

Заметим, что $\theta(x)$ – вещественнозначная функция (см. формулу (8)).

Назовём целое число κ, определяемое по формуле:

$$\kappa = \left[\frac{\theta(+\infty) - \theta(-\infty)}{\pi}\right],$$

индексом краевой задачи Римана:

$$F^{+}(x) = G(x)F^{-}(x), -\infty < x < +\infty. \tag{11}$$

Здесь $[\ldots]$ означает целую часть числа.

Каноническую функцию задачи (11) построим следующим образом:

$$X_0^{\pm}(z) = e^{\Gamma^{\pm}(z)},$$

где $\Gamma^{\pm}(z)$ – модифицированный интеграл типа Коши:

$$\Gamma^{\pm}(z) := \frac{z-\zeta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta(x)dx}{(x-\zeta)(x-z)},$$

$z \in \Pi_{\pm}$, точка $\zeta \in \mathbb{R}$ фиксирована. Предельные значения интеграла $\Gamma^{\pm}(z)$ существуют в смысле главного значения, решают задачу о скачке:

$$\Gamma^{+}(x)-\Gamma^{-}(x)=2i\theta(x)$$

и удовлетворяют условию комплексного уравновешивания: $\Gamma^{-}(z)=\overline{\Gamma^{+}(\overline{z})}$ [4].

Следуя [5], подставим в (10) $G(x)=\dfrac{X_0^{+}(x)}{X_0^{-}(x)}$ и запишем краевое условие в виде:

$$\frac{F^{+}(x)}{X_0^{+}(x)}-\frac{F^{-}(x)}{X_0^{-}(x)}=\frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))X_0^{+}(x)}. \tag{12}$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (12):

$$\frac{F^{+}(x)}{X_0^{+}(x)}-\frac{F^{-}(x)}{X_0^{-}(x)}=0. \tag{13}$$

В классе гиперфункций Сато задача (13) равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{F^{+}(z)}{X_0^{+}(z)}=\varphi(z);\\[2mm] \dfrac{F^{-}(z)}{X_0^{-}(z)}=\varphi(z),\end{cases}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в некоторой окрестности прямой.

Порядок функции $X_0^{\pm}(z)$ на бесконечности равен $-\kappa-\eta$, где $\eta=\left\{\dfrac{\theta(+\infty)-\theta(-\infty)}{\pi}\right\}$ (см. [4]).

Здесь $\{\dots\}$ означает дробную часть числа.

Следовательно, в классе уравновешенных гиперфункций $\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}$, компоненты которых исчезают на бесконечности (т.е. $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\Pi_{\pm}}}F^{\pm}(z)=0$), $\varphi(z)=P_{\kappa-1}(z)$, где κ – индекс задачи (11), $P_{\kappa-1}(z)$ – многочлен степени $(\kappa-1)$ с вещественными коэффициентами, причём $P_{\kappa-1}(z)\equiv 0$ при $\kappa<1$.

Другими словами, при $\kappa<1$ однородная задача (13), а следовательно и однородная задача, соответствующая задаче (10), имеет только тривиальное решение.

Таким образом, общим решением однородной краевой задачи, соответствующей задаче (10), в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности, является пара

$$\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}=\{X_0^{+}(z)P_{\kappa-1}(z),X_0^{-}(z)P_{\kappa-1}(z)\}. \tag{14}$$

Обозначим $g_1(x)=\dfrac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))X_0^{+}(x)}$. Пусть $g_1(x)=H.F.\{G_1^{+}(z),G_1^{-}(z)\}$ – уравновешенная гиперфункция, порядок функции $G_1^{\pm}(z)$ на бесконечности меньше $(\kappa+\eta)$.

Тогда пара

$$\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}=\{X_0^{+}(z)G_1^{+}(z),X_0^{-}(z)G_1^{-}(z)\} \tag{15}$$

представляет собой частное решение краевой задачи (10) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности.

Общее решение краевой задачи (10) равно сумме решений (14) и (15). Следовательно, общее решение краевой задачи (10) с коэффициентом, удовлетворяющим условию Гёльдера, в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}=\{X_0^{+}(z)(P_{\kappa-1}(z)+G_1^{+}(z)),X_0^{-}(z)(P_{\kappa-1}(z)+G_1^{-}(z))\}.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G(x) = -\dfrac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$ удовлетворяет условию Гёльдера на $\mathbb{R}$.

Если $\kappa \geq 0$, то общее решение краевой задачи (1) в классе гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$F^{+}(z) = X_0^{+}(z)(P_{\kappa-1}(z) + G_1^{+}(z)).$$

Если $\kappa < 0$, то общее решение краевой задачи (1) имеет вид:

$$F^{+}(z) = X_0^{+}(z)G_1^{+}(z),$$

при соблюдении $(-\kappa)$ условий разрешимости:

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(\tau)\tau^{k-1}d\tau = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, -\kappa).$$

Случай II. *Коэффициент краевой задачи (9)* $G(x) = -\dfrac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$ *имеет конечное число точек разрыва первого рода на* $\mathbb{R}$.

Тогда имеет место представление:

$$G(x) = \tilde{G}(x)\psi(x),$$

где $\tilde{G}(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{2i\theta_0}(x), & \text{если} \quad -\infty < x < x_1; \\ e^{2i\theta_1}(x), & \text{если} \quad x_1 < x < x_2; \\ \ldots & \\ e^{2i\theta_n}(x), & \text{если} \quad x_n < x < +\infty, \end{cases}$$

$$\theta_k(x) = \theta_{k-1}(x) + \lim_{x \to x_k+0}\theta(x) - \lim_{x \to x_k-0}\theta(x), \quad k = \overline{1,n}.$$

Предположим дополнительно, что $\tilde{G}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $\mathbb{R}$.

Запишем краевое условие (9) в виде:

$$\frac{F^{+}(x)}{\tilde{X}^{+}(x)} - \frac{F^{-}(x)}{\tilde{X}^{-}(x)}\psi(x) = \frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^{+}(x)}, \tag{16}$$

где $\tilde{X}(z)$ – каноническая функция однородной краевой задачи Римана с коэффициентом $\tilde{G}(x)$.

Решим задачу (16) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых ограничены в окрестности точек $z = x_k$, $k = \overline{1,n}$ и исчезают на бесконечности.

Обозначим

$$\Lambda_k^{*} = \frac{\theta_{k-1} - \theta_k}{\pi} - \frac{1}{2}\ sign(\theta_{k-1} - \theta_k) - 1\ , \quad k = \overline{1,n}.$$

Введём новые неизвестные функции $F_1^{\pm}(z)$ по формулам:

$$F^{+}(z) = F_1^{+}(z)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z - x_k}{z + i}\right)^{\Lambda_k^{*}}; \tag{17}$$

$$F^{-}(z) = F_1^{-}(z)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z - x_k}{z - i}\right)^{\Lambda_k^{*}}, \tag{18}$$

где $(z - x_k)^{\Lambda_k^{*}}$, $k = \overline{1,\ n}$ – однозначные фиксированные ветви многозначных функций $f_k(z) = (z - x_k)^{\Lambda_k^{*}}$ в плоскости с разрезом по лучам $x < x_k$; $(z - x_k)^{\Lambda_k^{*}} > 0$ при $z = x > x_k$.

Тогда краевое условие (16) перепишем в виде:

$$\frac{F_1^+(x)}{\tilde{X}^+(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x+i}\right)^{\Lambda_k^*}-\frac{F_1^-(x)}{\tilde{X}^-(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x-i}\right)^{\Lambda_k^*}=\frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}. \tag{19}$$

Обозначим

$$m^*=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} sign(\theta_{k-1}-\theta_k)-1$$

и представим краевое условие (19) в виде:

$$\frac{F_1^+(x)(x+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^+(x)}-\frac{F_1^-(x)(x-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^-(x)}=\frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)^{-\Lambda_k^*}.$$

Откуда получим

$$\begin{cases}\dfrac{F_1^+(z)(z+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^+(z)}=\Psi^{*+}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z);\\[2ex] \dfrac{F_1^-(z)(z-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^-(z)}=\Psi^{*-}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z),\end{cases}$$

где $\tilde{\kappa}$ – индекс однородной краевой задачи Римана с коэффициентом $\tilde{G}(x)$; $P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z)$ – многочлен степени $\left(\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1\right)$ с вещественными коэффициентами, причём $P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z)\equiv 0$ при $\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*<1$; $\Psi^*(x)=\dfrac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)^{-\Lambda_k^*}$, $\Psi^*(x)=H.F.\{\Psi^{*+}(z),\Psi^{*-}(z)\}$ – уравновешенная гиперфункция, порядок $\Psi^{*\pm}$ z на бесконечности меньше $\left(\tilde{\kappa}+\tilde{\eta}+\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*\right)$.

С учётом замены (17) и (18) получим общее решение краевой задачи (9):

$$\begin{cases}F^+(z)=\tilde{X}^+(z)\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^*}\left(\Psi^{*+}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z)\right);\\[2ex] F^-(z)=\tilde{X}^-(z)\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^*}\left(\Psi^{*-}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z)\right).\end{cases}$$

Откуда вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициент краевой задачи (9)

$$G(x)=-\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$$

имеет конечное число точек разрыва первого рода на $\mathbb{R}$,

$$G(x)=\tilde{G}(x)\psi(x),$$

где $\tilde{G}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $\mathbb{R}$;

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{2i\theta_0}, \text{ если } -\infty<x<x_1; \\ e^{2i\theta_1}, \text{ если } x_1<x<x_2; \\ \dots \\ e^{2i\theta_n}, \text{ если } x_n<x<+\infty. \end{cases}$$

Здесь $\theta_k(x)=\theta_{k-1}(x)+\lim\limits_{x\to x_k+0}\theta(x)-\lim\limits_{x\to x_k-0}\theta(x), \quad k=\overline{1,n}.$

Если $\tilde{\kappa}+\left[\dfrac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*\geq 0$, то общее решение краевой задачи (1) в классе гиперфункций Сато, компоненты которых ограничены в окрестности точек $z=x_k$, $k=\overline{1,n}$ и исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$F^+(z)=\tilde{X}^+(z)\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^*}\left(\Psi^{*+}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z)\right).$$

Если $\tilde{\kappa}+\left[\dfrac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*<0$, то общее решение краевой задачи (1) имеет вид:

$$F^+(z)=\tilde{X}^+(z)\Psi^{*+}(z)\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^*},$$

при соблюдении $\left(-\tilde{\kappa}-\left[\dfrac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]-m^*\right)$ условий разрешимости:

$$\int \Psi^*(\tau)\tau^{k-1}d\tau=0 \quad \left(k=1,2,\dots,-\tilde{\kappa}-\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]-m^*\right).$$

Решим задачу (16) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых интегрируемы в окрестности точек $z=x_k$, $k=\overline{1,n}$ и исчезают на бесконечности.

Обозначим

$$\Lambda_k^{**}=\frac{\theta_{k-1}-\theta_k}{\pi}-\frac{1}{2}\ sign(\theta_{k-1}-\theta_k)+1\ , k=\overline{1,n}.$$

Введём новые неизвестные функции $F_2^{\pm}(z)$ по формулам:

$$F^+(z)=F_2^+(z)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-x_k}{z+i}\right)^{\Lambda_k^{**}}; \tag{20}$$

$$F^-(z)=F_2^-(z)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-x_k}{z-i}\right)^{\Lambda_k^{**}}, \tag{21}$$

где $(z-x_k)^{\Lambda_k^{**}}$, $k=\overline{1,n}$ – однозначные фиксированные ветви многозначных функций $f_k(z)=(z-x_k)^{\Lambda_k^{**}}$ в плоскости с разрезом по лучам $x<x_k$; $(z-x_k)^{\Lambda_k^{**}}>0$ при $z=x>x_k$.

Тогда придём к задаче Римана:

$$\frac{F_2^+(x)}{\tilde{X}^+(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x+i}\right)^{\Lambda_k^{**}}-\frac{F_2^-(x)}{\tilde{X}^-(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x-i}\right)^{\Lambda_k^{**}}=\frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}. \tag{22}$$

Обозначим

$$m^{**}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} sign(\theta_{k-1}-\theta_k)+1$$

и представим краевое условие (22) в виде:

$$\frac{F_2^+(x)(x+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^+(x)}-\frac{F_2^-(x)(x-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^-(x)}=\frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)^{-\Lambda_k^{**}}.$$

Откуда получим

$$\begin{cases}\dfrac{F_2^+(z)(z+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^+(z)}=\Psi^{**+}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1}(z)\times\prod\limits_{\substack{k=1,\\ sign(\theta_{k-1}-\theta_k)=1}}^{n}\tilde{\delta}(z-x_k);\\[2ex] \dfrac{F_2^-(z)(z-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^-(z)}=\Psi^{**-}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1}(z)\prod\limits_{\substack{k=1,\\ sign(\theta_{k-1}-\theta_k)=1}}^{n}\tilde{\delta}(z-x_k),\end{cases}$$

где $\tilde{\kappa}$ – индекс однородной краевой задачи Римана с коэффициентом $\tilde{G}(x)$; μ – количество x_k, для которых $sign(\theta_{k-1}-\theta_k)=1$; $P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1}(z)$ – многочлен степени $\left(\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1\right)$ с вещественными коэффициентами, причём $P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1}(z)\equiv\mathbf{0}$ при $\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu<1$;

$\Psi^{**}(x)=\dfrac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)^{-\Lambda_k^{**}}$, $\Psi^{**}(x)=H.F.\{\Psi^{**+}(z),\Psi^{**-}(z)\}$ – уравновешенная гипер-функция, порядок $\Psi^{**\pm}$ z на бесконечности меньше $\left(\tilde{\kappa}+\tilde{\eta}+\dfrac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}\right)$; $\tilde{\delta}(z-x_k)$ – уравновешенные δ-функции, т.е. $\tilde{\delta}(z-x_k)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{z-x_k}$, $k=\overline{1,n}.$

С учётом замены (20) и (21) получим общее решение краевой задачи (9):

$$\begin{cases}F^+(z)=\tilde{X}^+(z)\prod\limits_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^{**}}\cdot\left(\Psi^{**+}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1}(z)\prod\limits_{\substack{k=1,\\ sign(\theta_{k-1}-\theta_k)=1}}^{n}\tilde{\delta}(z-x_k)\right);\\[2ex] F^-(z)=\tilde{X}^-(z)\prod\limits_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^{**}}\cdot\left(\Psi^{**-}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1}(z)\prod\limits_{\substack{k=1,\\ sign(\theta_{k-1}-\theta_k)=1}}^{n}\tilde{\delta}(z-x_k)\right).\end{cases}$$

Откуда вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть коэффициент краевой задачи (9)

$$G(x)=-\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$$

имеет конечное число точек разрыва первого рода на $\mathbb{R}$,

$$G(x)=\tilde{G}(x)\psi(x),$$

где $\tilde{G}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на □ ;

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{2i\theta_0},\ \textit{если} -\infty < x < x_1; \\ e^{2i\theta_1},\ \textit{если}\ x_1 < x < x_2; \\ \qquad \dots \\ e^{2i\theta_n},\ \textit{если}\ x_n < x < +\infty. \end{cases}$$

Здесь $\theta_k(x)=\theta_{k-1}(x)+\lim\limits_{x\to x_k+0}\theta(x)-\lim\limits_{x\to x_k-0}\theta(x), \quad k=\overline{1,n}.$

Если $\tilde{\kappa}+\left[\dfrac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu\geq 0$, то общее решение краевой задачи (1) в классе гиперфункций Сато, компоненты которых интегрируемы в окрестности точек $z=x_k$, $k=\overline{1,n}$ и исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$F^{+}(z)=\tilde{X}^{+}(z)\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^{**}}\cdot\left(\Psi^{**+}(z)+P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu-1}(z)\prod_{\substack{k=1,\\ sign(\theta_{k-1}-\theta_k)=1}}^{n}\tilde{\delta}(z-x_k)\right).$$

Если $\tilde{\kappa}+\left[\dfrac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^{**}+\mu<0$, то общее решение краевой задачи (1) имеет вид:

$$F^{+}(z)=\tilde{X}^{+}(z)\Psi^{**+}(z)\prod_{k=1}^{n}(z-x_k)^{\Lambda_k^{**}},$$

при соблюдении $\left(-\tilde{\kappa}-\left[\dfrac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]-m^{**}-\mu\right)$ условий разрешимости:

$$\int_{□}\Psi^{**}(\tau)\tau^{k-1}d\tau=0 \quad \left(k=1,2,\dots,-\tilde{\kappa}-\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]-m^{**}-\mu\right).$$

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук, доценту кафедры теории функции Белорусского государственного университета С.В. Рогозину за плодотворное обсуждение вопросов при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Урбанович, Т.М. О решении в классе гиперфункций задачи о скачке / Т.М. Урбанович // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 38 – 44.
2. Sato, M. Theory of hyperfunctions / M. Sato // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1. Mathematics. Astronomy. Phisics. Chemistry. – 1959. – Vol. 8. – P. 139 – 193.
3. Imai, I. Applied Hyperfunction Theory / I. Imai. – Dordrecht: Kluwer AP, 1992.
4. Безродных, С.И. Сингулярная задача Римана-Гильберта и её приложение: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.И. Безродных. – М., 2006.
5. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977.

Поступила 02.02.2009