УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

О.В. НЕТБАЙ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Пусть G – конечная группа. Подгруппа A называется X-перестановочной с подгруппой B, если $AB^x=B^xA$ для некоторого x, принадлежащего подмножеству X. Подгруппа A называется наследственно X-перестановочной с подгруппой B, если $AB^x = B^xA$, для некоторого $x \in X \cap \langle A, B\rangle$. Подгруппа A группы G называется (наследственно) X-перестановочной в G, если A (наследственно) X-перестановочна со всеми подгруппами из G. В работе проводится дальнейший анализ некоторых результатов данного направления, используя понятие наследственно X-перестановочной подгруппы. В частности, доказано, что группа G принадлежит насыщенной формации $\mathfrak{I}$, содержащей класс всех сверхразрешимых групп, тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа H в G такая, что $G/H\in\mathfrak{I}$ и подгруппы силовских подгрупп из H наследственно R-перестановочны в G, где R – нормальная разрешимая подгруппа группы G.

1. Введение. Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется перестановочной [1] подгруппой в G.

Перестановочные подгруппы имеют ряд интересных свойств. Так, например, если H – перестановочная подгруппа в некоторой конечно порожденной группе G, то H субнормальна в G [1]. Этот результат является обобщением теоремы Оре [2]: *Каждая перестановочная подгруппа конечной группы субнормальна.* В другом направлении этот результат Оре усилили Ито и Сеп. Они доказали [3], что для каждой перестановочной подгруппы H конечной группы G факторгруппа H/H_G нильпотентна. В дальнейшем Майер и Шмид доказали [4], что при таких условиях верно даже, что $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$.

В работах Кегеля [5] и Дескинза [6] было показано, что подгруппы H, перестановочные со всеми силовскими подгруппами конечной группы G, наследуют ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. В частности, H по-прежнему субнормальна, а факторгруппа H/H_G нильпотентна. Если к тому же G разрешима и H перестановочна с системными нормализаторами группы G, то верно $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$ [7].

После работ [5, 6] многими авторами предпринимались попытки исследования и применений и других типов обобщенно перестановочных подгрупп. Часто встречается такая ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x, для которого имеет место $AB^x = B^xA$. При анализе ситуаций подобного рода удобно пользоваться следующими определениями работы [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть A, B – подгруппы группы G и X – непустая подгруппа из G. Тогда будем говорить, что:

(1) A X-перестановочна с B, если $AB^x=B^xA$ для некоторого $x \in X$.

(2) A наследственно X-перестановочна с B, если $AB^x=B^xA$, для некоторого $x \in X \cap \langle A, B\rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Подгруппа A группы G называется наследственно X-перестановочной в G, если A (наследственно) X-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Значение понятия (наследственной) X-перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X-перестановочных подгрупп [9].

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы в данном направлении.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $\mathtt{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E\in \mathtt{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P группы E содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$(если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие сверхразрешимого добавления, наследственно R-перестановочны в G, где R – разрешимая нормальная в G подгруппа. Тогда $G \in \mathtt{F}$.*

Все рассматриваемые ниже группы конечны.

2. Предварительные результаты. При доказательстве основных результатов мы будем использовать следующую хорошо известную лемму, описывающую общие свойства X-перестановочных подгрупп.

ЛЕММА 2.1 [8, лемма 2.1]. *Пусть A, B – подгруппы группы G и K – нормальная подгруппа в G. Тогда:*

(1) *если A X-перестановочна с B, тогда B X-перестановочна с A;*

(2) *если A X-перестановочна с B, тогда A^y X^y-перестановочна с B^y для всех $y \in G$;*

(3) *если A (наследственно) X-перестановочна с B, тогда AK/K является (наследственно) XK/K-перестановочной с BK/K в группе G/K;*

(4) *пусть K – подгруппа группы A. Тогда A/K является XK/K-перестановочной с BK/K в G/K тогда и только тогда, когда A X-перестановочна с B в группе G;*

(5) *если A, $B \subseteq M \subseteq G$ и A наследственно X-перестановочна с B, то A наследственно $(X \cap M)$-перестановочна с B;*

(6) *если F – перестановочная подгруппа группы G и A (наследственно) X-перестановочна с B, то AF (наследственно) X-перестановочна с B.*

ЛЕММА 2.2 [10, теорема 24.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ является локальной формацией, G – группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда*

(1) *$G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой для некоторого простого p;*

(2) *$G^{\mathfrak{F}} / \Phi(G^{\mathfrak{F}})$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором в G;*

(3) *если $p > 2$, то $G^{\mathfrak{F}}$ является группой экспоненты p; если $p = 2$, то экспонента $G^{\mathfrak{F}}$ не превышает 4;*

(4) *если $G^{\mathfrak{F}}$ – неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают.*

ЛЕММА 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, содержащей все нильпотентные группы и G – группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $P = G^{\mathfrak{F}}$. Допустим, что каждая максимальная подгруппа из G, не содержащая P, принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда P является p-группой для некоторого простого p. Кроме того, если каждая циклическая подгруппа из P простого порядка p или порядка 4 (если $p = 2$ и P – неабелева), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, является X-перестановочной в группе G, тогда $|P/\Phi(P)| = p$.*

ЛЕММА 2.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E – циклическая подгруппа, то $G \in \mathfrak{F}$.*

ЛЕММА 2.5 [11, лемма 2.2] *Пусть $G \in$ группа, p, q – различные простые делители порядка $|G|$, P – нециклическая силовская p-подгруппа группы G и Q – силовская q-подгруппа группы G. Если все максимальные подгруппы группы P (кроме, быть может, одной) имеют q-замкнутое добавление в G, то Q нормальна в G.*

Доказательство основного результата. Предположим, что теорема не верна и рассмотрим контрпример, для которого $|G||E|$ минимально.

(1) *Условие теоремы выполняется в любой холловой подгруппе X группы E (относительно X) и для каждой факторгруппы G/X (относительно E/X), где X – нормальная холлова подгруппа группы E.*

Пусть X – холлова подгруппа E, P – нециклическая силовская подгруппа X. По условию P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H группы P с порядком $|H| = |D|$ или порядком $|H| = 2|D|$(если P – неабелева 2-группа и $|P:D| > 2$) либо имеет сверхразрешимое добавление, либо наследственно R-перестановочна в G . В первом случае $X = X \cap HT = H(X \cap T)$, поэтому $X \cap T$ является сверхразрешимым добавлением к H в X. Во втором случае H является наследственно R-перестановочной в X, по лемме 2.1 (5). Поэтому гипотеза выполняется для (X, X).

Теперь пусть X нормальна в G. Тогда $(G/X)/(E/X) \cong G/E \in \mathfrak{F}$. Пусть P^*/X является нециклической силовской p-подгруппой в G/X, где p делит $|G/X|$, P – силовская p-подгруппа из P^* такая, что $P^* = PX$. Тогда P является нециклической силовской подгруппой в E и поэтому по условию P имеет подгруппу D такую, что $1 <|D| < |P|$ и каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$ либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо наследственно R-перестановочна в G. Пусть H^*/X подгруппа в P^*/X с порядком $|H^*/X| = |D|$. Тогда $H^* = [X]H$, где H является силовской p-подгруппой в H^*. Ясно, что $|H| = |D|$ и $H^*/X = HX/X$ либо имеет сверхразрешимое добавление $TX/X \cong T/T \cap X$ в G/X, либо наследственно RX/X-перестановочна в G/X по лемме 2.1 (3). Таким образом, гипотеза выполняется для G/X (относительно E/X).

(2) *Если X – неединичная нормальная холлова подгруппа группы E, то $X = E$.*

Так как X – характеристическая подгруппа группы E, то она нормальна в G и поэтому ввиду (1), условие теоремы справедливо для G/X (относительно E/X). Значит, по выбору группы G и ее подгруппы E имеет место $G/X \in \mathfrak{F}$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G (относительно X) и поэтому $X = E$.

(3) *Для наименьшего простого делителя p порядка группы E силовская p-подгруппа P группы E не является циклической.*

Действительно, если P – циклическая группа, то ввиду теоремы 2.8 в [12, гл. IV] E – p-нильпотентная группа, если E не является циклической. Тогда из (2) следует, что $E=P$. Так как $G/E \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 2.4 имеем $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы G.

Зафиксируем теперь некоторую силовскую p-подгруппу P группы E, где p – наименьший простой делитель $|E|$. Тогда ввиду (3) P – нециклическая группа и поэтому, по условию, P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$(если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), которая не имеет сверхразрешимого добавления, наследственно R-перестановочна в G.

(4) *Если* $E = G$ *или* $E=P$, *то* $|D| > p$.

Если $E = G$, то ввиду (2) группа G не p-нильпотентна и поэтому согласно теореме 5.4 в [12, гл. IV], G содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта $H = [H_p]H_q$. Значит, если $|D| = p$, то согласно лемме 2.3 имеет место $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что невозможно, поскольку p – наименьший простой делитель порядка группы G.

Пусть теперь $E = P$, $L = G^{\mathbb{F}}$ и $\Phi = \Phi(L)$. Предположим, что $|D| = p$. Понятно, что $L \subseteq E$ и поэтому условие теоремы верно для G относительно L, что в силу выбора группы G и подгруппы E влечет $L = E$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая E. Тогда $G/E \cong M/M \cap E \in \mathbb{F}$ и поэтому, ввиду леммы 2.3, имеет место $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 2.2 $G/\Phi \in \mathcal{F}$. Но тогда $L \subseteq \Phi$ и поэтому $L = \Phi$, противоречие. Следовательно, $|D| > p$.

(5) *Для каждой абелевой минимальной нормальной подгруппы* N *группы* G, *содержащейся в* $P\backslash\Phi(G)$, *имеет место* $|N| \leq |D|$

Предположим, что $|D| < |N|$. Если некоторая подгруппа H группы N порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$(если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) имеет сверхразрешимое добавление T в G, то $TN = G$ и по выбору группы G $T \neq G$. Так как $N = N \cap HT = H(N \cap T)$, то $N \cap T$ – собственная неединичная подгруппа группы N. Но $N \cap T$ – нормальная подгруппа в G, что противоречит минимальности N. Значит, каждая подгруппа H группы N порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$ (если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), наследственно R-перестановочна в G. Так как N не содержится в $\Phi(G)$, то существует максимальная подгруппа M такая, что $G = [N]M$. Тогда MH – подгруппа в группе $MN = G$. Если $MH = M$, то H является подгруппой в M, что невозможно. Тогда $MH = G$. В этом случае $N = N \cap MH = H(N \cap M) = H$, что противоречит выбору группы H. Следовательно, имеет место $|N| \leq |D|$.

(6) *Если* $E = G$ *или* $E = P$ *и* N *– абелева минимальная нормальная подгруппа группы* G, *которая содержится в* E, *то условие теоремы справедливо для* G/N (*относительно* E/N).

Пусть $E = P$. Проверим, что условие теоремы выполняется для G/N в случае, если $|N| < |D|$. По условию P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P с порядком $|H| = |D|$ и с порядком $|H| = 2|D|$(если P – неабелева и $|P : D| > 2$) либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо являются наследственно R-перестановочными в G. Так как $|N| < |D|$, то в P/N существует подгруппа D/N такая, что $1 < |D/N| < |P/N|$. Пусть H^*/N подгруппа в P^*/N с порядком $|H^*/N| = |D/N|$. Ясно, что $|H^*| = |D|$ и поэтому H^*/N либо имеет сверхразрешимое добавление TN/N в G/N, либо является наследственно R/N-перестановочной в G/N, по лемме 1 (4). Предположим теперь, что P/N – неабелева 2-группа и $|P/N : D/N| > 2$. Тогда P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$. Пусть H^*/N подгруппа в P^*/N с порядком $|H^*/N| = 2\ |D/N|$. Ясно, что $|H^*| = 2|D|$ и поэтому H^*/N либо имеет сверхразрешимое добавление TN/N в G/N, либо является наследственно R/N-перестановочной в G/N, по лемме 1 (4).Таким образом, гипотеза выполняется для G/N(относительно E/N).

Аналогично проверяется, что условие теоремы верно для G/N в случае, если $|P : D| = p$.

Пусть теперь $|P : D| > p$ и $|N| = |D|$. Заметим, что ввиду (4) имеет место $|D| > p$ и поэтому подгруппа N, а значит, и каждая подгруппа группы G, содержащая N, нециклична. Пусть $N \subseteq K \subseteq P$, где $|K : N| = p$. Поскольку K – нециклическая группа, то она имеет максимальную подгруппу $L \neq N$. Если подгруппа L имеет сверхразрешимое добавление в G, то K имеет сверхразрешимое добавление в G. Если подгруппа L наследственно R-перестановочна в G, то $K = LN$ наследственно R-перестановочна в G, по лемме 1 (6). Таким образом, если $p > 2$ или P/N – абелева 2-группа, то условие теоремы справедливо для G/N, по (4) и лемме 1 (4). Предположим теперь, что P/N – неабелева 2-группа. Тогда P – неабелева 2-группа и поэтому каждая подгруппа группы P порядка $2|D|$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, является наследственно R-перестановочной в G. Рассуждая, как выше, можно показать, что каждая подгруппа X группы P, которая содержит N и для которой $|X : N| = 4$, либо имеет сверхразрешимое добавление в G, либо является наследственно R-перестановочной в G. Значит, условие теоремы справедливо для G/N (относительно E/N).

Аналогично проверяется, что условие теоремы справедливо для G (относительно G) в случае, когда $E = G$.

(7) *Если* $E = G$, *то одна из максимальных подгруппы группы* P *не имеет сверхразрешимого добавления в* G (это прямо вытекает из (2) и леммы 5).

(8) E *– разрешимая группа*.

По (1) и выбору группы G нам необходимо рассмотреть случай $E = G$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Допустим, что $R = 1$. Предположим, что N – неабелева группа. Пусть p – наименьший простой делитель порядка $|N|$ и N_p – силовская p-подгруппа из N. Ясно, что N_p не является циклической группой [12, гл. IV, теорема 2.8]. Пусть $H = N_G(N_p)$. Так как N неабелева, то $N_p \neq N$ и поэтому $H \neq G$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $H \subseteq M$. Тогда $P \subseteq M$, и поэтому p не делит $|G : M|$. По условию теоремы P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы P_1 группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$(если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) либо имеют сверхразрешимое добавление, либо перестановочны в G. Если подгруппа P_1 имеет сверхразрешимое добавление, то G является сверхразрешимой, по лемме 5. Следовательно, P_1 перестановочна в G. Поэтому для всех $x \in G$ мы имеем $P_1M^x = M^xP_1$. Но p не делит $|G : M^x|$ и поэтому $P_1 \subseteq M^x$ для всех $x \in G$. Это влечет, что $P_1 \subseteq M_G$ и поэтому $N \subseteq M$. По лемме Фраттини $G = HN$ и поэтому $G = M$, противоречие. Поэтому N – p-группа для некоторого простого p. Ввиду (6) $G = E$ разрешимая группа.

Поэтому $R \neq 1$. Допустим, что K – минимальная нормальная подгруппа в R. Тогда $K \subseteq N$ и поэтому по лемме 2.40 в [13] $N= K^{g1} \times \ldots \times K^{gn}$, для некоторых $g1, \ldots gn$, принадлежащих группе R. Так как R разрешимая группа, то K – абелева подгруппа и поэтому K^{gi} также абелева подгруппа. Это влечет, что N является абелевой группой [13, с. 162]. Ввиду (6) $G = E$ разрешимая группа.

(9) *E – q-замкнутая группа, где q – наибольший простой делитель $|E|$.*

По (1) нам лишь необходимо рассмотреть случай $E = G$. Кроме того, ввиду (8) подгруппа E разрешима и согласно (1) условие теоремы справедливо для каждой холловой подгруппы X группы G (относительно X), то мы можем предполагать, что $|G| = p^a q^b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{N}$. Допустим, что группа G не является q-замкнутой. Ввиду (6) и выбора группы G для каждой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в P, факторгруппа G/N сверхразрешима. Следовательно, $N \not\subseteq \Phi(G)$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Покажем, что $N = O_p(G)$.

Действительно, пусть M – такая максимальная подгруппа группы G, что $G = [N]M$. Тогда $O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M)$. Поскольку $O_p(G) \subseteq F(G) \subseteq C_G(N)$, то $O_p(G) \cap M$ нормальна в G и поэтому $O_p(G) \cap M = 1$. Значит, $N = O_p(G)$. Так как для каждой максимальной подгруппы A группы P, которая содержит N, мы имеем $AM = G$, то $M \cong G/N$ – сверхразрешимое добавление к A в G. Пусть M_p – силовская p-подгруппа группы M. Покажем, что в P имеется такая максимальная подгруппа H, что M_p содержится в H и H не имеет сверхразрешимого добавления. Действительно, предположим, что в группе G существует сверхразрешимая подгруппа T такая, что $HT = G$. Так как T – сверхразрешима, то силовская q-подгруппа T_q в группе T является нормальной. Поэтому $T \subseteq N_G(T_q)$. Заметим, что подгруппа T_q является силовской q-подгруппой в G. Значит $T \subseteq M^x$ для некоторого $x \in G$. Так как $HT = G$, то $HM^x = HM = G$. Отсюда следует, что $|G : M| = |H|: |H \cap M| = |H|\,|M_p| < |N|$, что невозможно.

Поэтому P имеет такую максимальную подгруппу H, что M_p содержится в H и H не имеет сверхразрешимого добавления. Предположим, что в H имеется такая подгруппа V порядка, равного порядку подгруппы D, что $P = VN$ и $K = VQ$, где Q – силовская q-подгруппа группы G. По условию V наследственно R-перестановочна в G. Так как $G = PQ$ и $P = VN$, то $G = NVQ = NK$ и $K \cap N = 1$. В противном случае $N \cap K$ является нормальной подгруппой в G и $N \cap K < N$, что противоречит минимальности подгруппы N. Значит, $G = [N]K$ и K является максимальной подгруппой в G. Поэтому $V \cap N = 1$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа из P, которая содержится в $N \cap H$ и V_1 –максимальная подгруппа в V. Тогда $|LV_1| = |V|$ и согласно условию LV_1 является наследственно R-перестаночной подгруппой в G. Значит, LV_1K является подгруппой в G.

Так как K – максимальная подгруппа в G и $L \cap K \subseteq N \cap K = 1$, то $LV_1K = LK = G$. Следовательно, $|G : K| = |L| = |N|$, противоречие. Поэтому $P \neq VN$ для всех подгрупп V из H порядка, равного порядку подгруппы D. По условию теоремы V является наследственно R-перестановочной подгруппой в G. Покажем, что $V \subseteq M$. Допустим, что $|V| > |M_p|$ и поэтому $V \not\subseteq M_p$. Тогда $P = VN$, противоречие. Значит, $|V| \leq |M_p|$. Не теряя общности, можем считать, что $V \subseteq M_p \subseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа в G и $L \cap M \subseteq N \cap M = 1$, то $LV_1M = LM = G$. Следовательно, $|G : M| = |L| = |N|$, что невозможно. Таким образом, мы имеем (9).

(10) *$E=P$.*

Действительно, пусть q – наибольший простой делитель порядка $|E|$ и Q – силовская q-подгруппа группы E. Тогда ввиду (9), Q нормальна в E и поэтому согласно (2), $Q = E = P$.

Заключительное противоречие.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Тогда ввиду (6) и (10), N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P и поэтому $N = O_p(G) = P = E$. Пусть M – такая максимальная подгруппа в G, что $G = [N]M$. Тогда $|G : M| = |N|$. Пусть V – подгруппа из P порядка, равного порядку подгруппы D и порядка 2 $|D|$(если P – неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$). По условию, подгруппа V либо имеет сверхразрешимое добавление, либо является наследственно R-перестановочна в G.

Так как M является максимальной подгруппой в G и $V \cap M = P \cap M = N \cap M = 1$, то $VM = G$ и $|G : M| = |V| < |P| = |N|$, что противоречит (5). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

В заключение отметим, что доказанная в работе теорема может быть использована для установления новых критериев принадлежности группы насыщенной формации, содержащей все сверхразрешимые группы. А также для получения новых характеризаций сверхразрешимых, дисперсивных по Оре подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – Vol. 125. – P. 1 – 16.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431 – 460.
3. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Sz // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168 – 170.
4. Maier, R. The embedding of quasinormal subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 269 – 272.
5. Kegel, O. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 87. – P. 205 – 221.
6. Deskins,W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125 – 132.
7. Schmid, P. Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 182. – P. 285 – 293.
8. Skiba, A.N. H-permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37 – 39.
9. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3(36). – С. 12 – 31.
10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
11. Скиба, А.Н. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / А.Н. Скиба. – Гомель, 2005. – (Препринт / Гом. гос. ун-т; декабрь).
12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
13. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Выш. шк., 2006.

Поступила 24.04.2008