УДК 512.542

О ФАКТОРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПОДГРУППАМИ ФРОБЕНИУСА

П.В. БЫЧКОВ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Рассматриваются вопросы, связанные с факторизациями, как важное направление в теории конечных групп. Наиболее интересны теоремы о строении конечной группы, представимой в виде произведения двух подгрупп с заданными свойствами. Естественным является изучение строения конечной группы, являющейся произведением двух групп Фробениуса. В данной работе изучаются конечные группы, факторизуемые собственными подгруппами Фробениуса. Получены композиционные факторы конечной группы, представимой в виде произведения разрешимых подгрупп Фробениуса взаимно простых порядков. Также описаны композиционные факторы конечной группы, представимой в виде произведения разрешимой подгруппы Фробениуса и неразрешимой подгруппы Фробениуса взаимно простых порядков. Найдены простые неабелевы группы, факторизуемые разрешимыми подгруппами Фробениуса.

Введение. Важным направлением в теории конечных групп являются вопросы, связанные с факторизациями. Наиболее интересны теоремы о строении конечной группы, представимой в виде произведения двух подгрупп с заданными свойствами. Данной тематике посвящены работы таких известных алгебраистов, как Сеп, Н. Ито, Х. Виландт, Ф. Холл, С.А. Чунихин, Л.С. Казарин, В.С. Монахов. Так, В.С. Монаховым [1] было установлено композиционное строение конечной группы, представимой в виде произведения двух групп Шмидта. Естественным является изучение строения конечной группы, являющейся произведением двух групп Фробениуса. Мотивировкой данных исследований является и тот факт, что группа Фробениуса может быть неразрешимой и хорошо известные результаты Е. Фисман и Л.С. Казарина о факторизациях разрешимыми сомножителями здесь не применимы. В данной работе установлены композиционные факторы конечных групп, представимых в виде произведения подгрупп Фробениуса взаимно простых порядков. А также перечислены простые конечные группы, факторизуемые разрешимыми подгруппами Фробениуса.

В работе получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. Пусть *G* – конечная неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных разрешимых подгрупп Фробениуса *A* и *B*, причем $(|A|,|B|)=1$, тогда любой неабелев композиционный фактор группы *G* изоморфен одной из следующих групп: $PSL(2,\ 11)$; $PSL(2,\ 2^n)$, $n\geq 2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть *G* – конечная неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных подгрупп *A* и *B*, причем $(|A|,|B|)=1$ и *A* – неразрешимая группа Фробениуса, *B* – разрешимая группа Фробениуса, тогда любой неабелев композиционный фактор группы *G* изоморфен одной из следующих групп: $PSL(2,5)$; $PSL(2,\ 11)$; $PSL(2,\ 29)$; $PSL(2,\ 59)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть *G* – конечная простая неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных разрешимых подгрупп Фробениуса *A* и *B*, тогда

$$G\in\{PSL(2,\ 2^n), n\geq 2, PSL(2,\ 11)\}.$$

Используемые обозначения и результаты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конечная группа *G* называется группой Фробениуса, если в ней найдется собственная подгруппа *H*, совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая со своими сопряженными подгруппами, отличными от *H*. Последние два условия эквивалентны следующему: $H\cap H^g=E$ для всех $g\in G\setminus H$.

Обозначения в основном стандартны, их можно найти в [2]. $I(G)$ – множество всех инволюций группы *G*, $Syl_p(G)$ – множество всех силовских *p*-подгрупп группы *G*, G_p – некоторая подгруппа из $Syl_p(G)$, $O(G)=O_{2'}(G)$ – наибольшая нормальная подгруппа в *G* нечетного порядка. Если *X* – произвольная группа, то $Z^*(X)$ обозначает полный прообраз в *X* группы $Z(X/O(X))$, $m_p(G)$ – *p*-ранг группы *G*, [X]Y – полупрямое произведение с нормальной подгруппой *X* в [X]Y, *S(G)* – наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы *G*.

Для доказательства основных результатов нам будут необходимы известные факторизационные теоремы, сформулированные в виде следующих лемм.

ЛЕММА 1 [3]. Пусть G – конечная группа, все композиционные факторы которой принадлежат списку известных в настоящее время конечных простых групп. Предположим, что A и B – собственные разрешимые подгруппы в G взаимно простых порядков, причем $G = AB$. Тогда любой композиционный фактор группы G либо имеет простой порядок, либо изоморфен одной из следующих групп: $PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$; $PSL(2, q)$, $q \equiv -1 (\bmod 4)$; $PSL(3, 3)$; M_{11}.

ЛЕММА 2 [4]. В группе $PSL(2, 2^n)$ пусть N – нормализатор силовской p-подгруппы, являющийся группой Фробениуса, D – диэдральная группа порядка $2(2^n+1)$ при $p = 2$ и p^n+1 при $p > 2$, Z – циклическая подгруппа индекса 2 в D, S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL(2, p^n)$ симметрические группы степени 4, A_4 и A_4^*, (A_5 и A_5^*) – несопряженные в $PSL(2, p^n)$ знакопеременные группы степени 4 (соответственно 5).

Группа $PSL(2, p^n)$ допускает только следующие факторизации, с точностью до сопряженных подгрупп:

А. $PSL(2, 2^n) = ND = NZ,\ n \geq 2$.

Б. Пусть $p > 2$. $PSL(2, p^n) = ND$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число.

В. При $p^n \geq 61$ и $p > 2$ группа $PSL(2, p^n)$ не имеет никаких других факторизаций, кроме указанной в Б.

Г. Пусть $p > 2$ и $p^n \leq 59$. Тогда

1) $PSL(2,\ 7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*$.

2) $PSL(2,\ 9) = NA_5 = NA_5^* = S_4A_5 = S_4^*A_5^* = A_5A_5^* = A_4A_5^* = A_4^*A_5$.

3) $PSL(2,\ 11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11}A_5^*$.

4) $PSL(2,\ 19) = ND = NA_5 = NA_5^*$.

5) $PSL(2,\ 29) = NA_5 = NA_5^* = KA_5 = KA_5^*$, где $K \subseteq N$ и $|K| = 7 \cdot 29$.

6) $PSL(2,\ 59) = ND = NA_5 = NA_5^*$.

7) $PSL(2, p^n) = ND$, где $p^n = 23,\ 27,\ 31,\ 43,\ 47,\ 51$.

ЛЕММА 3 [5]. Пусть $G = PSL(3, q)$, тогда

1) если 3 делит $q - 1$, тогда G не имеет факторизаций;

2) если 3 не делит $q - 1$ и $q > 3$, тогда G имеет следующие факторизации:

$G = AB$, где $|A| = (q+1)q^3(q-1)^2$, а $|B| = 3(q^2+q+1)$; и $G = AB_1$, где $|B : B_1| = 3$, A изоморфна подгруппе матриц с элементами $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$;

3) если $G = PSL(3, 2)$, тогда G допускает дополнительно к факторизациям пункта 2) следующую факторизацию $G = SB$, где $|S| = 8$, B такая, как в пункте 2);

4) если $G = PSL(3, 3)$, тогда G допускает дополнительно к факторизациям 2) следующую факторизацию $G = CB$, где $|A : C| = 3$, B такая, как в 2).

ЛЕММА 4 [6]. Пусть G – конечная K-группа, представимая в виде произведения двух разрешимых подгрупп, тогда любой композиционный неабелев фактор группы G принадлежит следующему списку групп: M_{11}; $PSp(4, 3)$; $PSL(2, q)$, $(q > 3)$; $PSL(3,q)$, $(q < 9)$.

ЛЕММА 5 [2, Z^*-теорема]. Пусть G – группа и S – силовская 2-подгруппа в G. Если z – изолированная инволюция в S, то $z \in Z^*(G)$.

Основная часть

В настоящей работе последовательно доказываются 3 теоремы, описывающие строение группы, факторизуемой подгруппами Фробениуса.

Для удобства доказательства сформулируем и докажем следующие три утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть G – конечная простая неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных подгрупп A и B, причем $(|A|, |B|) = 1$ и A, B – разрешимые группы Фробениуса, тогда $G \cong PSL(2,\ 11)$.

Доказательство. Согласно лемме 1 рассмотрим следующие случаи:

1) $G \cong PSL(2,\ 2^n), n \geq 2.$ По лемме 2 возможны следующие две факторизации группы $PSL(2,\ 2^n)$. $PSL(2,\ 2^n) = ND = NZ, n \geq 2.$ Первая факторизация не удовлетворяет условию утверждения, так как факторы не взаимно простых порядков. Во второй факторизации второй фактор Z_{2^n+1} не является группой Фробениуса. Поэтому случай 1) невозможен.

2) $G \cong PSL(2,\ q), q \equiv -1(\mathrm{mod}\,4), q = p^n$. Из леммы 2 следует, что возможны только следующие факторизации группы $PSL(2,\ q)$. Если $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число, или $p^n \geq 61$, то $PSL(2, p^n) = ND$, где $N = [G_p]Z_{\frac{p^n-1}{2}}$, $D = [Z_{\frac{p^n+1}{2}}]Z_2$. Покажем, что данный случай невозможен. Так как $\frac{p^n-1}{2}$ – нечетное число, то $\frac{p^n-1}{2} = 2m+1,\ \ p^n - 1 = 4m+2,\ \ P^n + 1 = 4m+4,\ \ \frac{p^n+1}{2} = 2m+2 = 2(m+1)$ – четное число, следовательно, D не является группой Фробениуса.

Пусть $p^n \leq 59$. Тогда получим следующие возможные группы: $PSL(2,\ 7)$, $PSL(2,\ 9)$, $PSL(2,\ 11)$, $PSL(2,\ 19)$, $PSL(2,\ 29)$, $PSL(2,\ 59)$, $PSL(2, p^n)$ где $p^n = 23,\ 27,\ 31,\ 43,\ 47,\ 51.$ Учитывая условие $p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$, группы $PSL(2, 9)$ и $PSL(2, 29)$ можно не рассматривать. Рассмотрим оставшиеся группы.

$PSL(2,7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*.$ Во всех приведенных факторизациях только сомножитель N является группой Фробениуса, поэтому данный случай невозможен.

$PSL(2,\ 11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11}A_5^*.$ Факторизация $PSL(2,\ 11) = NA_4 = ([Z_{11}]Z_5)([Z_2 \times Z_2]Z_3)$ удовлетворяет условию утверждения.

$PSL(2,19) = ND = NA_5 = NA_5^*.$ Группой Фробениуса в данных факторизациях является только N, поэтому данный случай невозможен.

$PSL(2,59) = ND = NA_5 = NA_5^*.$ Данный случай исключается в точности, как предыдущий.

$PSL(2, p^n) = ND,$ где $p^n = 23,\ 27,\ 31,\ 43,\ 47,\ 51.$ В данных факторизациях одним из факторов являются следующие диэдральные группы: D_{24}, D_{28}, D_{32}, D_{44}, D_{48}, D_{52}, соответственно. Ни одна из них не являются группой Фробениуса, поэтому данный случай невозможен.

3) $G \cong PSL(3,\ 3)$ и $|G| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13.$ Порядок группы G делится на три простых числа, поэтому данная группа не может быть представлена в виде произведения двух подгрупп Фробениуса взаимно простых порядков.

4) $G \cong M_{11}$ и $|G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$ $M_{11} = ([Z_{11}]Z_5)B$, $|B| = 2^4 \cdot 3^2.$ Из строения M_{11} [7] следует, что B не является группой Фробениуса. Случай 4) невозможен. Утверждение (1) доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть G – конечная простая неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных подгрупп A и B, где A – циклическая группа, B – разрешимая группа Фробениуса, причем $(|A|, |B|) = 1$, тогда G изоморфна $PSL(2,\ 2^n),\ n \geq 2.$

Доказательство. Согласно лемме 1 рассмотрим следующие случаи:

1) $G \cong PSL(2,\ 2^n),\ n \geq 2.$ По лемме 2 $PSL(2,\ 2^n) = ND = NZ,\ n \geq 2.$ Первая факторизация не удовлетворяет условию леммы, так как в ней ни один из факторов не является циклической подгруппой. Во второй факторизации $[G_2]Z_{2^n-1}$ – группа Фробениуса, Z_{2^n+1} – циклическая группа. Покажем, что $(2^n+1,\ 2^n-1) = 1.$ Действительно, пусть существует общий делитель $k \neq 1$, тогда $2^n + 1 = km,\ \ 2^n - 1 = kl,$ где $k,\ m,\ l$ – натуральные числа, не делящиеся на 2. Вычтем из первого равенства втрое. Получим $2 = k(m-l).$ Следовательно, $k = 2,\ \ m - l = 1$. Получили противоречие с тем, что k – нечетное число. Поэтому порядки сомножителей взаимно просты и вторая факторизация удовлетворяет условию леммы.

2) $G \cong PSL(2,\ q),\ q \equiv -1(\mathrm{mod}\,4),\ q = p^n$ Из леммы 2 следует, что возможны только следующие факторизации группы $PSL(2,\ q)$.

Если $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число, или $p^n \geq 61$, то $PSL(2, p^n) = ND.$ Ни один из факторов не является циклической подгруппой, поэтому данный случай невозможен.

Пусть $p^n \leq 59$, где $p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$ тогда получим, что необходимо рассмотреть следующие случаи:

- $PSL(2,\ 7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*$. В приведенных факторизациях циклической подгруппой является только один фактор G_7. Однако S_4 не является группой Фробениуса, поэтому данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11}A_5^*$. Циклическим фактором является G_{11}, но поскольку A_5 не является группой Фробениуса, то данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 19) = ND = NA_5 = NA_5^*$. Во всех факторизациях нет циклических сомножителей, следовательно, данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 59) = ND = NA_5 = NA_5^*$. В данных факторизациях нет циклических факторов, и данный случай невозможен;

- $PSL(2, p^n) = ND,$ где $p^n = 23,\ 27,\ 31,\ 43,\ 47,\ 51.$ В данных факторизациях одним из факторов являются следующие диэдральные группы: D_{24}, D_{28}, D_{32}, D_{44}, D_{48}, D_{52} соответственно. Все они не являются циклическими подгруппами, поэтому данный случай невозможен.

3) $G \cong PSL(3,3)$ и $|G| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13.$ Группа G допускает факторизацию $G = G_{13}B$. Так как $m_2(G_2) \ge 2$ и $m_3(G_3) \ge 2,$ то группа порядка $2^4 \cdot 3^3$ не является группой Фробениуса. Случай 3) невозможен.

4) $G \cong M_{11}$ и $G = ([Z_{11}]Z_5)B$, где $|B| = 2^4 \cdot 3^2$. Из строения M_{11} [7] следует, что B не является циклической группой. Случай 4) невозможен. Утверждение 2 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть G – конечная простая неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных подгрупп A и B, где A – разрешимый дополнительный множитель группы Фробениуса, B – разрешимая группа Фробениуса, причем $(|A|,|B|) = 1$, тогда G изоморфна $PSL(2,\ 2^n), n \ge 2.$ или $PSL(2,\ 11)$.

Доказательство. Отметим, что силовские p-подгруппы нечетного порядка из дополнительного множителя Фробениуса циклические, а силовская 2-подгруппа либо циклическая, либо Q_8, либо Q_{16} и $m_2(S_2) = 1$ [8]. Согласно лемме 1 рассмотрим следующие случаи:

1) $G \cong PSL(2,\ 2^n), n \ge 2.$ По лемме 2, $PSL(2,\ 2^n) = ND = NZ,\ n \ge 2.$ Первая факторизация не удовлетворяет условию леммы, так как $(|N|, |D|) = 2$. Во второй факторизации фактор Z_{2^n+1} является дополнительным множителем группы Фробениуса, N – группа Фробениуса, следовательно, данная факторизация удовлетворяет условию утверждения;

2) $G \cong PSL(2,\ q),\ q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4),\ q = p^n$ Из леммы 2 следует, что возможны только следующие факторизации группы $PSL(2,\ q)$.

Если $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число, или $p^n \ge 61$, то $PSL(2,\ p^n) = ND.$ Так как $\frac{p^n+1}{2}$ – четное число, то $D = [Z_{\frac{p^n+1}{2}}]Z_2$ не является группой Фробениуса. Поскольку $m_2(D) = 2,$ то D не может быть дополнительным множителем Фробениуса. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть $p^n \le 59$, где $p^n \equiv -1(\mathrm{mod}\,4)$. Рассмотрим возникающие по лемме 2 следующие случаи:

- $PSL(2,\ 7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*$. В приведенных факторизациях группой Фробениуса является только N. Так как $m_2(D) = 2$, то D не может быть дополнительным множителем группы Фробениуса. Следовательно, данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11}A_5^*$. Факторизация $PSL(2,\ 11) = NA_4$ удовлетворяет условию утверждения 3;

- $PSL(2,\ 19) = ND = NA_5 = NA_5^*$. Диэдральная группа D порядка 20 не является группой Фробениуса и не может быть дополнительным множителем в группе Фробениуса, поскольку ее 2-ранг равен 2. Следовательно, данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 59) = ND = NA_5 = NA_5^*$. Данный случай исключается аналогично предыдущему случаю;

- $PSL(2,\ p^n) = ND,$ где $p^n = 23,\ 27,\ 31,\ 43,\ 47,\ 51.$ В данных факторизациях одним из факторов являются следующие диэдральные группы: D_{24}, D_{28}, D_{32}, D_{44}, D_{48}, D_{52} соответственно. Все они имеют 2-ранг, равный 2, а значит, не будут ни группами Фробениуса, ни дополнительным множителем группы Фробениуса. Поэтому данный случай невозможен.

3) $G \cong PSL(3,3)$ и $|G| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$. Так как $m_2(G_2) \geq 2$ и $m_3(G_3) \geq 2$, то группа порядка $2^4 \cdot 3^3$ не является группой Фробениуса. Случай 3) невозможен.

4) $G \cong M_{11}$ и $|M_{11}| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. $M_{11} = ([Z_{11}]Z_5)B$, где $|B| = 2^4 \cdot 3^2$. Из строения M_{11} [7] получаем, что B не является ни группой Фробениуса, ни дополнительным множителем группы Фробениуса. Случай 4) невозможен. Утверждение 3 доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – конечная неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных разрешимых подгрупп Фробениуса A и B, причем $(|A|,|B|) = 1$, тогда любой неабелев композиционный фактор группы G изоморфен одной из следующих групп: $PSL(2,\ 11)$; $PSL(2,\ 2^n), n \geq 2$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{R} = \{PSL(2,\ 11); PSL(2,\ 2^n), n \geq 2\}$ Если G – простая группа, то по утверждению (1) $G \in \mathfrak{R}$. Следовательно, G не простая группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G.

1) $N \cong Z_p \times \ldots \times Z_p$. Так как $(|A|,|B|) = 1$, то можем считать, что $N \subseteq A = [A_0]A_1$, где A_0 – инвариантный, а A_1 – дополнительный множители группы Фробениуса и $(|A_0|,|A_1|) = 1$. Из свойств групп Фробениуса, $N \subseteq A_0$. Если $N \neq A_0$, тогда $G/N = \overline{A}\overline{B}$, где $\overline{A}, \overline{B}$ – группы Фробениуса, и по утверждению (1) факторы группы $\overline{G}$ принадлежат $\mathfrak{R}$. Если $N = A_0$, тогда $G/N = \overline{A}_1\overline{B}$. Где $\overline{A}_1$ – дополнительный множитель группы Фробениуса, $\overline{B}$ – группа Фробениуса. По утверждению 3 факторы группы G принадлежат $\mathfrak{R}$. Поэтому можем считать, что $S(G) = 1$.

2) $N \cong N_1 \times \ldots \times N_k$ – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Поскольку $G = AB$ и $(|A|,|B|) = 1$, то $N = (N \cap A)(N \cap B)$. Если $N \cap A$ и $N \cap B$ – группы Фробениуса, то по утверждению 1 $N \in \mathfrak{R}$. Если $N \cap A$ и $N \cap B$ – нильпотентные группы, тогда по теореме Кегеля – Виландта группа N – разрешима, что невозможно, так как $S(G) = 1$. Пусть теперь $N \cap A$ – нильпотентная группа, а $N \cap B$ – группа Фробениуса. Так как $(|N \cap A|,|N \cap B|) = 1$, то N_1 содержится в списке групп леммы 1. Так как группы $PSL(3,\ 3)$ и M_{11} не допускают факторизаций нильпотентной подгруппой и подгруппой Фробениуса [7], то $N_1 \cong PSl(2, q)$. Из утверждения 2 следует, что $N_1 \cong PSl(2,\ 2^n) \in \mathfrak{R}$.. Следовательно, $N \in \mathfrak{R}$. Мы показали, что $N \in \mathfrak{R}$. Из утверждений 1 – 3 следует, что неабелевы факторы группы G/N содержатся в $\mathfrak{R}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – конечная неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных подгрупп A и B, причем $(|A|,|B|) = 1$ и A – неразрешимая группа Фробениуса, B – разрешимая группа Фробениуса, тогда любой неабелев композиционный фактор группы G изоморфен одной из следующих групп: $PSL(2, 5)$; $PSL(2, 11)$; $PSL(2, 29)$; $PSL(2, 59)$.

Доказательство. Пусть $A = [U]V$, $B = [S]T$, где $V \subseteq (SL(2,\ 5) \times R)^{\cdot}2$ и $(|R|,|30|) = 1$ [8]. 2-ранг группы G равен 1, поэтому силовская 2-подгруппа в группе G изоморфна группе кватернионов Q_8 или Q_{16}. Пусть $\tau \in I(G)$. Согласно Z^*-теореме Глаубермана [2, теорема 4.95] $\overline{\tau} \in Z(G/O(G))$. Если $O(G) = 1$, то $\tau \in Z(G)$, что невозможно. Следовательно, $O(G) \neq 1$.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/O(G) = AO(G)/O(G) \cdot BO(G)/O(G)$. Если $BO(G) = G$, то G – разрешима. Если $AO(G) = G$, то G имеет неабелев композиционный фактор $PSL(2, 5)$. Будем считать, что $AO(G) \neq G$, $BO(G) \neq G$. Имеет место изоморфизм $G \cong A/A \cap O(G) \cdot B/B \cap O(G)$. Очевидно, что $A \cap O(G) \lhd A$. Если $A \cap O(G) \subset U$, то в силу Z^*-теоремы Глаубермана $O(\overline{G}) \neq 1$, что невозможно. Таким образом, $U \subseteq A \cap O(G) \subseteq O(G)$. Точно так же $S \subseteq O(G)$.

Силовская 2-подгруппа в фактор-группе $\overline{G} = G/Z^*(G)$ либо $Z_2 \times Z_2$, либо D_8. Из результата Уолтера – Горенстейна [2, с. 27, 248] следует, что простая группа с абелевыми или диэдральными силовскими 2-подгруппами является одной из следующих групп: $PSL(2,\ 2^n)$; $PSL(2,\ q)$, где q – степень нечетного простого числа, причем $q \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8)$; J_1; ${}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$; $PSL(2,\ q)$, $q > 3$, q – нечетно; A_7. Так как силовская 2-подгруппа группы $\overline{G}$ имеет наибольшую абелеву подгруппу $Z_2 \times Z_2$, то композиционный неабелев фактор в группе $\overline{G}$ принадлежит списку: $\{ PSL(2,\ 4)$; $PSL(2,\ q)$, $q \equiv 3,\ 5 (\mathrm{mod}\, 8)$; $PSL(2,\ q)$, $q > 3$, q – нечетно; $A_7 \}$.

$\overline{G} = \overline{V}\overline{T}$, причем $\overline{V}$ содержит нормальный в $\overline{V}$ композиционный фактор, изоморфный A_5. Из строения силовской 2-подгруппы группы $\overline{G}$ следует, что группа $\overline{G}$ содержит единственный неразрешимый композиционный фактор $\overline{L}$, нормальный в $\overline{G}$. Так как $S(\overline{G}) = 1$, то $\overline{L} = (\overline{L} \cap \overline{V})(\overline{L} \cap \overline{T})$ – простая неабелева группа, причем $1 \neq \overline{L} \cap \overline{T} \triangleleft \overline{V} \subseteq (\overline{R} \times A_5)^{\cdot}2$ и $\overline{L} \cap \overline{V}$ содержит силовскую 2-подгруппу группы A_5. Отсюда легко заключить, что $A_5 \subseteq \overline{L} \cap \overline{V}$.

Рассмотрим все возможные случаи:

1) $PSL(2,\ 2^n),\ n \geq 2$. Возможны следующие две факторизации группы $PSL(2,\ 2^n)$: $PSL(2,\ 2^n) = ND = NZ$. Ни в одном из факторов не присутствует секции A_5. Поэтому случай 1) невозможен;

2) если $p > 2$ и $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число, или $p^n \geq 61$ и $p > 2$, то $PSL(2, p^n) = ND$. Данный случай также невозможен, поскольку в факторизации отсутствует A_5;

3) пусть $p > 2$ и $p^n \leq 59$. Из леммы 2 следует, что возможны следующие случаи:

- $PSL(2,\ 7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*$. Группа A_5 не входит ни в один из факторов. Поэтому данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 9) = NA_5 = NA_5^* = S_4A_5 = S_4^*A_5^* = A_5A_5^* = A_4A_5^* = A_4^*A_5$. Во всех приведенных факторизациях не выполняется условие взаимной простоты порядков факторов. Следовательно, данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11}A_5^*$. Факторизация $PSL(2,\ 11) = A_5G_{11}$ удовлетворяет условию теоремы 2;

- $PSL(2,\ 19) = ND = NA_5 = NA_5^*$. Поскольку $(|N|, |A_5|) \neq 1$, то данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 29) = NA_5 = NA_5^* = KA_5 = KA_5^*$. В приведенных факторизациях K – разрешимая группа Фробениуса и $(|K|, |A_5|) = 1$, поэтому $PSL(2, 29)$ может являться композиционным фактором группы G;

- $PSL(2,\ 59) = ND = NA_5 = NA_5^*$. В данных факторизациях $N = [Z_{59}]Z_{29}$ – разрешимая группа Фробениуса и $(|N|, |A_5|) = 1$, поэтому $PSL(2, 59)$ может являться композиционным фактором группы G.

- $PSL(2, p^n) = ND$, где $p^n = 23,\ 27,\ 31,\ 43,\ 47,\ 51$. В данных факторизациях одним из факторов являются диэдральные группы: D_{24}, D_{28}, D_{32}, D_{44}, D_{48}, D_{52} соответственно. Поскольку их порядок делится на 4, то данный случай не удовлетворяет условию теоремы.

Если $\overline{G} \cong A_7$, то $|A_7 : A_5| = 6 \cdot 7$ не взаимно прост с A_5, поэтому A_7 не допускает необходимую нам факторизацию. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – конечная простая неабелева группа, представимая в виде произведения двух своих собственных разрешимых подгрупп Фробениуса A и B, тогда

$$G \in \{PSL(2,\ 2^n), n \geq 2, PSL(2,\ 11)\}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4 возможны следующие случаи:

1) $G \cong M_{11}$ и $|M_{11}| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Рассмотрим факторизацию $M_{11} = AB$ и будем считать, что 11 делит $|A|$. Тогда из [7] следует, что $A \subset PSL(2,\ 11)$ и $A \cong Z_{11}$ или $A \cong [Z_{11}]Z_5$. Если $M_{11} = Z_{11}B$, то из [7] следует, что $B \cong M_{10} \cong A_6 \cdot 2$, B не является группой Фробениуса. Пусть $M_{11} = ([Z_{11}]Z_5)B$, $\Delta = ([Z_{11}]Z_5) \cap B$. Если $\Delta = 1$, то $|M_{11} : B| = 55$ и из [7] следует, что $B \cong 3^2 : Q_8 \cdot 2$, B не является группой Фробениуса. Если $\Delta = 5$, то $|B| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ и из [7] следует, что $B \cong M_{10} \cong A_6 \cdot 2$, B не является группой Фробениуса. Если $\Delta = 11$, то $|B| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$ и из [7] следует, что такой подгруппы в группе G не существует. Данный случай невозможен;

2) $G \cong PSp(4,\ 3)$. Тогда $|G| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Из [9] следует, что в любой максимальной факторизации группы $PSp(4,\ 3)$ один из сомножителей является параболической подгруппой и, следовательно, его порядок не делится на 5. Пусть 5 | |A|, тогда (|B|, 5) = 1. Если G_5 содержится в инвариантном множителе подгруппы A, то так как $C_G(G_5) = G_5$ [7], следовательно, $A \cong [Z_5]Z_2$ или $A \cong [Z_5]Z_4$. В группе $PSp(4,\ 3)$ нет подгрупп индекса, не превосходящего 20 [7]. Таким образом, силовская 5-подгруппа содержится в дополнительном множителе подгруппы A. Из [7] следует, что $A \subseteq 2^4 : A_5$ или $A \subseteq S_6$. Если $A \subseteq 2^4 : A_5$, то $A \cong 2^4 : Z_5$. Отсюда получаем, что 3^4 | |B| и, значит, B – борелевская подгруппа в

$PSp(4,\ 3)$, поэтому $B \subseteq N_G(G_3)$ и $B \cong [G_3]Z_2$. Очевидно, $|AB| < |G|$, что невозможно. Так как для всякой разрешимой подгруппы T из S_6 $O_{5'}(T) = 1$ то случай $A \subseteq S_6$ также невозможен;

3) $G \cong PSL(2,\ q),\ (q > 3)$. Рассмотрим все возможные факторизации групп $PSL(2,\ q)$. Согласно лемме 2 возможны случаи.

Если $G \cong PSL(2,\ 2^n),\ n \geq 2$. Тогда $PSL(2,\ 2^n) = ND = NZ$. В первой факторизации оба фактора являются группами Фробениуса, поэтому $PSL(2,\ 2^n)$ удовлетворяют условию теоремы.

Если $p > 2$ и $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ – нечетное число, или $p^n \geq 61$ и $p > 2$, то $PSL(2, p^n) = ND$. Так как D не является группой Фробениуса, то данный случай невозможен.

Если $p > 2$ и $p^n \leq 59$. Тогда по лемме 2 имеют место следующие случаи:

- $PSL(2,\ 7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*$. Во всех факторизациях только сомножитель N является группой Фробениуса, поэтому данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 9) = NA_5 = NA_5^* = S_4A_5 = S_4^*A_5^* = A_5A_5^* = A_4A_5^* = A_4^*A_5$. Группами Фробениуса во всех факторизациях являются N и A_4. Так как $PSL(2,\ 9) \neq NA_4$, то данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5^* = G_{11}A_5^*$. Факторизация $PSL(2,\ 11) = NA_4$ удовлетворяет условию теоремы;

- $PSL(2,\ 19) = ND = NA_5 = NA_5^*$. В данных факторизациях только N является группой Фробениуса, поэтому случай невозможен;

- $PSL(2,\ 29) = NA_5 = NA_5^* = KA_5 = KA_5^*$. Группами Фробениуса в данных факторизациях являются N и K. Так как $PSL(2,\ 29) \neq NK$, то данный случай невозможен;

- $PSL(2,\ 59) = ND = NA_5 = NA_5^*$. В данных факторизациях только N является группой Фробениуса, поэтому случай невозможен;

- $PSL(2, p^n) = ND$, где $p^n = 23,\ 27,\ 31,\ 43,\ 47,\ 51$. В данных факторизациях одним из факторов являются диэдральные группы: D_{24}, D_{28}, D_{32}, D_{44}, D_{48}, D_{52} соответственно. Ни одна из них не является группой Фробениуса, поэтому случай невозможен;

4) $G \cong PSL(3, q)$, $(q < 9)$. Из леммы 3 следует, что группы $PSL(3,\ 4)$ и $PSL(3,\ 7)$ не имеют факторизаций, поэтому рассмотрим следующие группы и их факторизации: $PSL(3,\ 2)$, $PSL(3,\ 3)$, $PSL(3,\ 5)$, $PSL(3,\ 8)$.

$G \cong \mathrm{PSL}(3,\ 2)$. Так как $\mathrm{PSL}(3,\ 2) \cong \mathrm{PSL}(2,\ 7)$, то данная группа уже рассмотрена.

$G \cong \mathrm{PSL}(3,\ 3)$. Из леммы 3 следует, что $G = AB = CB = AB_1$ где $A = 3^2 : 2S_4$, $B = 13 : 3$, $C = 3^2 : G_2$, $B_1 \cong Z_{31}$. Группа A и C не являются группами Фробениуса, поэтому данный случай невозможен.

$G \cong \mathrm{PSL}(3,\ 5)$. Из леммы 3 следует, что $G = AB = AB_1$, где $A = 5^2 :\ GL(2,\ 5)$, $B = 31 : 3$, $B_1 \cong Z_{31}$. Группа A не является группой Фробениуса, поэтому данный случай невозможен.

$G \cong \mathrm{PSL}(3,\ 8)$. Из леммы 3 следует, что $G = AB = AB_1$, где $A = 2^6 : (7 \times PSL(2,\ 8))$, $B = 73 : 3$, $B_1 \cong Z_{73}$. Группы A не являются группой Фробениуса, поэтому данный случай невозможен. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 70 – 100.
2. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
3. Fisman, E. On product of two finite solvable groups / E. Fisman // J. Algebra. – 1983. – Vol. 80, № 2. – P. 517 – 536.
4. Ito, N. On the faktorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ / N. Ito // Acta scient. math. – 1953. – № 15. – P. 79 – 84.
5. Blaum, M. Factorizations of the simple groups $PSL(3,\ q)$ and $PSU(3,\ q^2)$ / M. Blaum // Arch. Math. – 1983. – Vol. 40. – P. 8 – 13.
6. Kazarin, I.S. Product of two finite solvable groups / I.S. Kazarin // Commun. Algebra. – 1986. – Vol. 14, № 6. – P. 1001 – 1066.

7. Conway, J.H. Atlas of Finite Groups / J.H. Conway, [et al.]. – Oxford: Clarendon Press, 1985.
8. Старостин, А.Н. О группах Фробениуса / А.Н. Старостин // Укр. мат. журнал. – 1971. – Т. 28, № 3. – С. 629 – 639.
9. Liebeck, M.W. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J Saxl // Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1 – 151.

Поступила 16.09.2008