УДК 517.51+517.53

СТРОЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н.В. РЯБЧЕНКО, Д.А. РЫКАЧЕВ, А.А. АТВИНОВСКИЙ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Рассматриваются строчные аппроксимации Паде гипергеометрических функций. Выбранное направление исследования является наиболее перспективным в теории аппроксимаций Паде. В работе получены точные асимптотические равенства для уклонений рациональных операторов Паде от функции, для которой они строятся, найдены точные порядки убывания строчных последовательностей таблицы Чебышева $\left[R_{n,m}(f,\bar{D})\right]_{n,m=0}^{\infty}$, *где* $\bar{D}_q$ $\{z:|z|\le q>1\}$. *Поскольку асимптотические характеристики используются в многочисленных приложениях аппроксимаций Паде в современной физике, медицине, компьютерной и вычислительной математики, такого рода исследования особенно актуальны.*

§ 1. Введение

Обозначим через $\Im = \{f_{\alpha,\gamma}\}$ множество функций f, представимых в виде

$$f(z) = f_{\alpha,\gamma}(z) = {}_2F_1(\alpha,1,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n \,, \tag{1}$$

где $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$ при $n \ge 1$. Ряды вида (1) принято называть «*гипергеометрическими рядами*», а их суммы «*гипергеометрическими функциями*». Известно [1, гл. 4, § 4.6], что если $f \in \Im$, то она аналитически продолжается из круга сходимости $D = \{z:|z|<1\}$ ряда (1) в плоскость C с разрезом по $[1;+\infty)$. В дальнейшем ограничимся случаем, когда $\gamma \in R\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, $\gamma > \alpha$ и $\gamma - \alpha \in N$. Заметим, что, например, функция

$$f_{1,2}(z) = z^{-1}\ln(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

имеет на границе круга сходимости особую точку $z_0 = 1$, которая является логарифмической точкой ветвления этой функции.

Обозначим через $\Re_{n,m}$ множество всех рациональных функций вида p_n / q_m, где p_n и q_m – многочлены не выше степени n и m соответственно. Пусть K компакт в C и f – непрерывна на K. Через $R_{n,m}(f;K)$ обозначим наилучшее равномерное приближение f на K элементами из $\Re_{n,m}$, т.е.

$$R_{n,m}(f;K) = \inf\left\{\|f-r\|_k : r \in \Re_{n,m}\right\},$$

где $\|g\|_k = \max\{|g(z)| : z \in K\}$. В частности, $E_n(f;K) := R_{n,0}(f;K)$ – наилучшее полиноминальное приближение f.

Аппроксимацией Паде функции $f \in \Im$ будем называть такую рациональную функцию $\pi_{n,m}(z;f)$ из $\Re_{n,m}$, числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию:

$$q_m(z;f)f(z) - p_n(z;f) = O\left(z^{n+m+1}\right),\ z \to 0.$$

В частности, $\pi_{n,0}(z;f)$ есть $(n+1)$-я частичная сумма ряда (1).

Для мероморфных функций качественные вопросы сходимости $\pi_{n,m}(\cdot;f)$ к f при $n \to \infty$ и фиксированном m детально проработаны (см., например, обзоры [2], [3]). К настоящему времени имеется уже достаточно много примеров целых функций f, для которых исследована сходимость аппроксимаций Паде и найдена асимптотика убывания $f(z) - \pi_{n,m}(z;f)$ для $|z| \le 1$ при фиксированном m и $n \to \infty$ (см. [4, 15]). В данной работе аналогичные исследования предприняты для функций, имеющих логарифмические точки ветвления. В частности, для $f \in \Im$ найдем точные порядки убывания строчных последовательностей таблицы Чебышева $\left[R_{n,m}(f,\bar{D})\right]_{n,m=0}^{\infty}$, где $\bar{D}_q = \{z:|z| \le q < 1\}$.

Перейдем к формулировке основных результатов работы. В дальнейшем будем говорить, что бесконечно малые величины $(\alpha)_n$ и $(\beta)_n$ имеют одинаковый порядок малости $(\alpha_n \underset{\cap}{\overset{\cup}{\ }} \beta_n)$ при $n \to \infty$, если для некоторых положительных чисел A *и* B $A\alpha_n \le \beta_n \le B\alpha_n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* f *представима рядом (1). Тогда для любого фиксированного* $m \in N \cup 0$ *локально равномерно по* $z \in D$ *при* $n \to \infty$

$$f\;\; z\;\; -\pi_{n,m}\;\; z; f\;\; = L_{n,m} \frac{\psi_{n,m}\;\; z}{1-z\;\;^{m}} z^{n+m+1}\;\; 1+o\;\; 1\;\;\;,$$

где

$$L_{n,0} = \frac{\alpha\;\;_{n+1}}{\gamma\;\;_{n+1}},\ L_{n,m} = m!\frac{\alpha\;\;_{n+1}}{\gamma\;\;_{n+1}} \prod_{k=1}^{m} \frac{\gamma-\alpha+k-1}{\gamma+n+k-1\;\;_{2}} \text{ при } m \ge 1,$$

а

$$\psi_{n,m}\;\; z\;\; = \frac{n+m+1\;\;^{m+\gamma-\alpha}}{m+\gamma-\alpha-1\;\;!} \int_0^{\infty} t^{m+\gamma-\alpha-1} \frac{e^{-\;\;n+m+1\;\;t}}{1-ze^{-t}} dt\ .$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть представима рядом (1). Тогда для любого фиксированного* $m \in N \cup 0$ *при* $n \to \infty$

$$\frac{1-|o(1)|}{(1+q)^{2m+1}} \le \frac{R_{n,m}(f;\overline{D_q})}{q^{n+m+1}L_{n,m}} \le \frac{1+|o(1)|}{(1-q)^{2m+1}},$$

$$R_{n,m}(f;\overline{D_q}) \underset{\cap}{\overset{\cup}{\ }} \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}} \underset{\cap}{\overset{\cup}{\ }} \frac{q^m}{n^{2m}} E_n\;\; f;\overline{D_q}\;\;\ .$$

При $\alpha = 1$ и $\gamma = 2$ теоремы 1 и 2 ранее доказаны в [16]. В этом случае из теоремы 2 получаем, что

$$R_{n,m}\;\; f;\overline{D_q}\;\; \underset{\cap}{\overset{\cup}{\ }} \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+1}} \underset{\cap}{\overset{\cup}{\ }} \frac{q^m}{n^{2m}} E_n\;\; f_{1,2};\overline{D_q}\;\;\ .$$

Доказательству теорем 1 и 2 посвящен § 2; в § 3 работы рассматриваются некоторые обобщения теорем 1 и 2.

§ 2. Доказательство основных результатов

Обозначим через $f_n = (\alpha)_n/(\gamma)_n$ коэффициенты Тейлора ряда (1), рассмотрим определители Адамара функции $f \in \mathfrak{I}$

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \ldots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \ldots & f_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_n & f_{n+1} & \ldots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}.$$

Многочлены Паде $p_n(z;f)$ и $q_m(z;f)$ (см. [1]) определяются с точностью до постоянного множителя. Будем называть стандартной такую их нормировку, при которой $q_m(0;f) = D_{n,m}$. Рассмотрим также определители

$$D_{n,m,k} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \ldots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \ldots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f_n & f_{n+1} & \ldots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \ldots & f_{n+m+k-1} & f_{n+m+k} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 1. *Если* $n \ge m \ge 2$, *то*

$$D_{n,m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{(\alpha)_{n-m+i}}{(\gamma)_{n-m+i}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m-1} (\gamma-\alpha+i-1)^{m-i}(m-i)!}{\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{i=j}^{m-1} (\gamma+n-i+2j-2)_2}, \qquad (2)$$

$$D_{n,m,k}=\prod_{i=0}^{m}\frac{(\alpha)_{n+k+i}}{(\gamma)_{n+k+i}}\prod_{i=1}^{m}(k+i-1)\frac{(\gamma+n-m+i+1)_{m+k-2}}{(\alpha+n-m+i)_{m+k}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\gamma-\alpha)^{m}\prod_{i=1}^{m-1}(\gamma-\alpha+i-1)^{m-i}(m-i)!}{\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{i=j}^{m-1}(\gamma+n-i+2j-2)_{2}}. \tag{3}$$

Равенства (2) доказаны в [1] (см. [1, § 2.1, формула (1.6)]). Доказательство равенств (3) проводится аналогично. При $\alpha=1$ и $\gamma=2$ соотношения (2) и (3) установлены в [16] с помощью леммы Коши. По определению полагаем $D_{n,0}=1$, $D_{n,1}=f_n$, $D_{n,0,k}=f_{n+k}$ и заметим, что $D_{n,m,1}=D_{n+1,m+1}$. Равенства (3) справедливы также и при $m=1$, если считать в них последний множитель равным $\gamma-\alpha$.

Из (2) и (3) с помощью элементарных преобразований получаем, что

$$L_{n,m}=\frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}}=m!\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}}\prod_{i=1}^{m}\frac{\gamma-\alpha+i-1}{(\gamma+n+i-1)_{2}}, \tag{4}$$

$$\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}=\frac{(k)_m}{m!}\frac{(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}. \tag{5}$$

Рассмотрим аналитическую в D функцию (см. [17, глава 5, § 2.3, равенство 1])

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+n+1)^{m+\gamma-\alpha}}=\frac{1}{(m+\gamma-\alpha-1)!}\int_0^{\infty}t^{m+\gamma-\alpha-1}\frac{e^{-(n+1)t}}{1-ze^{-t}}dt .$$

Нетрудно показать, что при $z\in D$

$$\varphi^{(m)}(z)=\frac{m!}{(m+\gamma-\alpha-1)!}\int_0^{\infty}t^{m+\gamma-\alpha-1}\frac{e^{-(n+m+1)t}}{\left(1-ze^{-t}\right)^{m+1}}dt=\sum_{k=1}^{\infty}(k)_m\frac{z^{k-1}}{(k+n+m)^{m+\gamma-\alpha}}, \tag{6}$$

а

$$\Psi_{n,m}(z)=\frac{(n+m+1)^{m+\gamma-\alpha}}{m!}\varphi^{(m)}(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(k)_m}{m!}\left(\frac{n+m+1}{n+m+k}\right)^{m+\gamma-\alpha}z^{k-1}. \tag{7}$$

Так как

$$\int_0^{\infty}t^{m+\gamma-\alpha-1}e^{-(n+m+1)t}dt=\frac{(m+\gamma-\alpha-1)!}{(n+m+1)^{m+\gamma-\alpha}}$$

то из (6) и (7) получаем, что для $z\in D$

$$\frac{1}{(1+|z|)^{m+1}}\le\left|\psi_{n,m}(z)\right|\le\frac{1}{(1-|z|)^{m+1}}. \tag{8}$$

ЛЕММА 2. *Если* $f\in\Im$, *то для любого фиксированного* $m\in N\cup\{0\}$ *локально равномерно по* $z\in D$ *при* $n\to\infty$

$$q_m(z;f)f(z)-p_n(z;f)=D_{n,m,1}\psi_{n,m}(z)z^{n+m+1}\{1+o(1)\}.$$

Доказательство. Согласно теореме Паде (см. [1], глава 1, §1), при выбранной нормировке многочленов Паде

$$q_m(z;f)f(z)-p_n(z;f)=\sum_{k=1}^{\infty}D_{n,m,1}z^{n+m+1}=D_{n,m,1}z^{n+m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}z^{k-1}.$$

Заметим, что при $\gamma-\alpha\in N$

$$\frac{(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}=\prod_{j=1}^{m+\gamma-\alpha}\frac{\alpha+n+j}{\alpha+n+k+j-1}.$$

Поэтому, принимая во внимание равенства (5), получим

$$\psi_{n,m}(z)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}z^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k)_m}{m!}\alpha_{n,m,k}z^{k-1}, \tag{9}$$

где
$$\alpha_{n,m,k}=\left(\frac{n+m+1}{n+m+k}\right)^{m+\gamma-\alpha}-\prod_{j=1}^{m+\gamma-\alpha}\frac{\alpha+n+j}{\alpha+n+k+j-1}.$$

Аналогично, как и в [16] при доказательстве теоремы 1, устанавливается, что

$$\left|\alpha_{n,m,k}\right|\le c\frac{m^2}{n},$$

где $c=c(\alpha,\gamma)$ – положительная постоянна. Отсюда из (8), (9) и легко проверяемого неравенства $(k)_m/m!\ \le\ k^m$ получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}}z^{k-1}=\psi_{n,m}(z)(1+\beta_{n,m,k}(z)),$$

где
$$\left|\beta_{n,m,k}(z)\right|\le c\frac{2^{m+1}m^2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left|z\right|^{k-1}.$$

Из равенства (см. [17, глава 5, § 2.2, равенство 3])

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left|z\right|^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left|z\right|^{k-1}}{(1-\left|z\right|)^{k+1}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^jC_j^k j^m\right],$$

где C_j^k – биноминальные коэффициенты, следует, что при $z\in D$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left|z\right|^{k-1}\le\frac{2^m m^{m+1}}{(1-\left|z\right|)^{m+1}}.$$

Поэтому

$$\left|\beta_{n,m,k}(z)\right|\le c\frac{2^{2m+1}m^{m+3}}{n(1-\left|z\right|)^{m+1}}. \tag{10}$$

Из (10) при фиксированном m и $n\to\infty$ получаем, что $\left|\beta_{n,m,k}(z)\right|=o(1)$ для каждого фиксированного $z\in D$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Если* $f\in\Im$, *то для любого фиксированного* $m\in N\cup\{0\}$ *локально равномерно по* $z\in D$ *при* $n\to\infty$

$$q_m(z;f)=D_{n,m}(1-z)^m(1+o(1)).$$

Доказательство. Представим многочлен $q_m(z;f)$ в виде

$$q_m(z;f)=\sum_{j=0}^{\infty}l_j z^j.$$

Учитывая равенство (1.8) из [1], при $j\ge1$ получим:

$$(-1)^j l^j=D_{n,m}C_j^m\prod_{i=1}^{j}\frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i}.$$

Тогда, принимая во внимание, что $l_0=D_{n,m}$, для любого $z\in D$

$$D_{n,m}(1-z)^m-q_m(z;f)=D_{n,m}\sum_{j=1}^{m}C_j^m(-z)^j\left\{1-\prod_{i=1}^{j}\frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i}\right\}.$$

Поскольку

$$0 \le 1 - \prod_{i=1}^{j} \frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i} \le 1 - \left(\frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i} \right)^{j} \le j\left(1 - \frac{\alpha + n - j + 1}{\gamma + n + m - j}\right) \le c\frac{m^2}{n},$$

то, учитывая предыдущее равенство, будем иметь

$$\left| D_{n,m}(1-z)^m - q_m(z; f) \right| \le c D_{n,m} \frac{m^2}{n} \sum_{j=0}^{m} C_j^m |z|^j .$$

Отсюда для любого $z \in D$

$$q_m(z; f) = D_{n,m}(1-z)^m (1 + b_{n,m}(z)) ,$$

где

$$| b_{n,m}(z) | \le c \frac{m^2}{n} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^m .$$

Из последних двух соотношений и следует утверждение леммы 3.

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 1 и 2. Заметим, что теорема 1 является очевидным следствием лемм 2, 3 и равенства 4. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим функцию $\varphi(z) = f(z) - \pi_{n,m}(z; f)$. Из теоремы 1 следует, что при достаточно больших n функция $\varphi(z)$ является аналитической внутри круга $D_{q_1} = \{z : |z| < q_1\}$, $0 < q < q_1 < 1$ и имеет в D_q нуль кратности $n+m+1$.

Учитывая неравенства (8), для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\min_{|z|=q} |\varphi(z)| \le R_{n,m}(f; \overline{D_q}) \le \max_{|z|=q} |\varphi(z)| . \quad (11)$$

Поскольку правое неравенство в (11) вполне очевидно, остановимся на доказательстве левого неравенства. Для этого нам необходима следующая лемма Гончара – Дзядыка (см. [18, лемма 3.1]).

ЛЕММА 4. *Если функция* φ *аналитическая в односвязной области* G *и непрерывная на* $\overline{G}$ *имеет в* G *с учетом кратности, по крайней мере,* $n+1$ *нуль, то при произвольном* $m \ge 0$ *справедливо неравенство*

$$R_{n,m}(\varphi; \overline{G}) \ge \min_{|z| \in \partial G} |\varphi(z)|.$$

Пусть $r_{n,m}^* \in \Re_{n,m}$ и является рациональной функцией наилучшего равномерного приближения f в круге $\overline{D_q}$. Тогда

$$R_{n,m}(f; \overline{D_q}) = \left\| f - r_{n,m}^* \right\|_{\overline{D_q}} = \left\| f - \pi_{n,m} - (r_{n,m}^* - \pi_{n,m}) \right\|_{\overline{D_q}} = \left\| \varphi - \overset{\approx}{r}_{n+m,2m} \right\|_{\overline{D_q}} \ge R_{n+m,2m}(\varphi; \overline{D_q}).$$

Отсюда с помощью леммы 4 получаем, что

$$R_{n+m,2m}(\varphi; \overline{D_q}) \ge \min_{|z|=q} |\varphi(z)|.$$

Тем самым левое неравенство в (11) доказано.

§ 3. Некоторые обобщения

По определению полагаем $\Im^{-} = \ f(-z) : f \in \Im$. Далее, если $l_n = dn + l_0, \quad n = 1, 2, \ldots$ – арифметическая прогрессия, где $d \in N, \quad l_0 \in N \cup \{0\}$ – фиксированные числа, то будем говорить, что функция g принадлежит $\Im(d, l_0)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $g(z) = z^{l_0} f(z^d)$, где $f \in \Im$. Аналогично по определению полагаем

$$\Im^{-}(d, l_0) = \ g(z) : g(z) = z^{l_0} f(-z^d), f \in \Im \ .$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция f принадлежит* $\mathfrak{I}^{-}$. *Тогда для любого фиксированного* $m \in N \cup \{0\}$ *локально равномерно по* $z \in D$ *при* $n \to \infty$

$$f(z) - \pi_{n,m}(z; f) = L_{n,m} \frac{\psi_{n,m}(-z)}{(1+z)^m} (-z)^{n+m+1} (1 + o(1)),$$

$$R_{n,m}(f;\overline{D_q}) \asymp \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}} \asymp \frac{q^m}{n^{2m}} E_n(f;\overline{D_q}) \ .$$

Теорема 3 является элементарным следствием теорем 1 и 2.

Пусть $g \in \mathfrak{I}(d, l_0)$ и $g(z) = z^{l_0} f(z^d)$, где $f \in \mathfrak{I}$. Обозначим через $\pi_{n,m}(\xi; f)$ аппроксимацию Паде функции $f(\xi)$. Тогда

$$f(\xi) - \pi_{n,m}(\xi; f) = O(\xi^{n+m+1}), \ \xi \to 0.$$

Полагая в последнем равенстве, $\xi = z^d$, а затем, умножая его на z^{l_0}, получим

$$z^{l_0} f(z^d) - z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f) = O(z^{d(n+m+1)+l_0}), \quad z \to 0\,.$$

Отсюда следует, что при $0 \le i + j \le d - 1$

$$\pi_{l_{n+i}, d_{m+j}}(z; g) = z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f)$$

и

$$g(z) - \pi_{l_{n+i}, d_{m+j}}(z; g) = z^{l_0} \{ f(z^d) - \pi_{n,m}(z^d; f) \}\,. \tag{12}$$

Используя равенство (12), легко получить аналоги теорем 1, 2 для классов $\mathfrak{I}^{\pm}(d; l_0)$. В частности, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функция* g *принадлежит* $\mathfrak{I}(d; l_0)$. *Тогда для любого фиксированного* $m \in N \cup \{0\}$ *локально равномерно по* $z \in D$ *при* $n \to \infty$

$$g(z) - \pi_{l_{n+i}, d_{m+j}}(z; g) = L_{n,m} \frac{\psi_{n,m}(z^d)}{(1 - z^d)^m} z^{l_n + d_m + d} (1 + o(1))\,,$$

$$\frac{1 - |o(1)|}{(1 + q^d)^{2m+1}} \le \frac{R_{l_{n+i}, d_{m+j}}(g; \overline{D_q})}{q^{l_n + d_m + d} L_{n,m}} \le \frac{1 + |o(1)|}{(1 - q^d)^{2m+1}}\,,$$

где $$0 \le i + j \le d - 1\,.$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ и $\gamma = 2$ теоремы 3 и 4 ранее доказаны в [16].

Авторы благодарят научного руководителя профессора А.П. Старовойтова за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, Дж. П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи мат. наук. – 2002. – Т. 57, вып. 1. – С. 45 – 142.
3. Гончар, А.А. Об аппроксимации Паде мероморфных функций / А.А. Гончар, С.П. Суетин // Современные проблемы математики. – 2004. – С. 68.
4. Braess, B. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z/ B. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – V. 40, № 4. – P. 375 – 379.

5. Lubinsky, D.S. Pade tables of entire functions of very slow and smooth growth / D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1985. – V. 1. – P. 349 – 358.
6. Lubinsky, D.S. Uniform convergence of rows of the pade table for functions widh smooth Maclaurin series coefficients / D.S. Lubinsky //Constr. Approx. – 1987. – V. 3. – P. 307 – 330.
7. Lubinsky, D.S. Pade tables of entire functions of very slow and smooth growth,II/ D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1988. – V. 4. – P. 321 – 339.
8. Levin, A.L. Best rational approximation of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidle and smoothly / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. –V. 293. – P. 533 – 545.
9. Levin, A.L. Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // Constr. Approx. – 1990. – V. 6. – P. 257 – 286.
10. Березкина, Л.Л. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / Л.Л. Березкина, В.Н. Русак // Весці АН БССР. Сер. Фіз.-мат.навук. – 1990. – № 4. – С. 27 – 32.
11. Русак, В.Н. Асимптотика параболических звеньев рациональной таблицы Чебышева для аналитических функций / В.Н. Русак, Та Хонг Куанг // ДАН БССР. –1990. – Т. 34, № 10. – С. 868 – 871.
12. Старовойтов, А.П. Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышева для суммы экспонент/ А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Математический сб. – 1996. – Т. 187, № 2. – С. 141 – 157.
13. Русак, В.Н. Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора / В.Н. Русак, А.П. Старовойтов // Математический сб. – 2002. – Т. 193, № 9. – С. 63 – 92.
14. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде одного класса целых функций / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 6. – С. 28 – 30.
15. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сб. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109 – 122.
16. Старовойтов А.П. Об асимптотике строк таблицы Паде аналитических функций с логарифмическими точками ветвления / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Математические заметки. – 2008. – Т. 4, № 3. – С. 409 – 419.
17. Брычков, Ю.А Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981.
18. Дзядык, В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций sinz, cosz, shz, chz / В.К. Дзядык // Математический сб. – 1979. – Т. 108(150), № 2. – С. 247 – 267.

Поступила 23.05.2009