УДК 511.36

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХИНЧИНА ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЛОСКОСТИ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПОЛИНОМА

канд. физ.-мат. наук Н.В. БУДАРИНА
(Владимирский государственный педагогический университет);
канд. физ.-мат. наук И.А. КОРЛЮКОВА
(Гродненский государственный университет им. Я. Купалы)

Доказывается, что любую точку пространства R^2 можно бесконечно часто с заданной точностью приближать значениями целочисленного полинома. Полученный в работе результат в случаях сходимости и расходимости ряда некоторой монотонно убывающей функции положительного аргумента является обобщением известной метрической теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными. При доказательстве теоремы в случае сходимости используется лемма, полученная В.И. Берником и Н.И. Калошей, а также метод, использующий принцип ящиков Дирихле. Предложенный метод доказательства в случае расходимости использует теорему Минковского о последовательных минимумах, с помощью которой на множестве Π положительной плотности в R^2 строятся $n+1$ линейно-независимых многочленов с большой производной на Π.

Множество иррациональных чисел может быть расклассифицировано в зависимости от степени их приближения иррациональными. Например, для всех $p, q \in I$ выполняется неравенство $\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3}|q|^{-2}$. В то же время существуют иррациональные числа β, для которых при любом $v>0$ выполняется неравенство $\left|\beta-\frac{p}{q}\right| < |q|^{-v}$. Такие числа называются числами Лиувилля. Их несчетное множество, но их мера Лебега и даже размерность Хаусдорфа равна нулю. Точную характеристику действительных чисел по степени приближения их рациональными числами дал А. Хинчин [1].

Пусть $\Psi(x)$ – монотонно убывающая функция положительного аргумента x и μA – мера Лебега измеримого множества $A \subset R$. Обозначим через $K_1(\Psi)$ множество действительных чисел x некоторого интервала $I=[a,b]$, для которых неравенства

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{\Psi(q)}{q}$$

или

$$|qx-p| < \Psi(q) \tag{1}$$

имеют бесконечное число решений в целых числах p и q.

Теорема Хинчина

$$\mu K_1(\Psi)=\begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty}\Psi(q)<\infty, \\ b-a, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty}\Psi(q)=\infty. \end{cases}$$

Обобщение неравенства (1) путем замены многочлена первой степени $qx-p$ на целочисленные многочлены произвольной степени позволяет классифицировать трансцендентные числа. Такая классификация впервые была предложена Малером [2]. Им же была поставлена следующая метрическая проблема.

Пусть $K_n(\Psi)$ – множество действительных чисел, для которых неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-n+1}\Psi(H) \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $H=H(P)=\max\limits_{0\le j\le n}|a_j|$ – высота многочлена $P_n(x)$. При правой части в (2) вида H^{-w}, $w>0$ Малер поставил проблему о мере тех значений $x \in I$, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений.

В.Г. Спринджук [3] доказал, что эта мера равна нулю при $w > n$. А. Бейкер [4] несколько улучшил результат Спринджука, а В.И. Берник [5] и В.В. Бересневич [6] доказали, что

$$\mu K_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ b - a, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Тем самым был получен полный аналог теоремы Хинчина для многочленов.

Настоящая работа посвящена многомерному обобщению результатов [5], [6] на случай неоднородных приближений.

Пусть l_1 и l_2 – произвольные действительные числа, $\bar{l} = (l_1, l_2)$. Обозначим через $S(\xi, \Psi)$ множество действительных векторов $\bar{\xi} = (x, y)$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x) + l_1| < H^{-\frac{n-2}{2}} \Psi^{\frac{1}{2}}(H),\ x \in I_1, \\ |P(y) + l_2| < H^{-\frac{n-2}{2}} \Psi^{\frac{1}{2}}(H),\ y \in I_2 \end{cases} \tag{3}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(t) \in Z[t]$.

Далее μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset R^2$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо следующее равенство*

$$\mu S(\xi, \Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu(I_1 \times I_2), & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Доказательство случая сходимости. В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1 [3, с. 89]. *Пусть* $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ *– полином с целыми коэффициентами, и пусть* $M \in Z,\ M > 0$. *Тогда* $\max\limits_{M \le t \le M+n} |P(t)| = |P(t_0)| > c(n) \max\limits_{1 \le i \le n} |a_i|$.

ЛЕММА 2. *Пусть* P_1 *и* P_2 *– полиномы степени* n_1, n_2 *и высотами* H_1, H_2 *соответственно. Тогда имеет место оценка* $2^{-3n} H_1 H_2 \le H(P_1 P_2) \le (1+n) H_1 H_2$, *где* $n = n_1 + n_2$.

Доказательство левой части данного неравенство приведено в [3]. Правая часть неравенства из утверждения леммы 2 следует из выражения для коэффициентов произведения двух многочленов.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\Psi(H)$ *– неотрицательная монотонно убывающая функция и* $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. *Тогда существует такое* H_0, *что для любого* $H > H_0$ *выполнено условие* $\Psi(H) < H^{-1}$.

Доказательство леммы 3 следует из интегрального признака сходимости числового ряда с положительными членами.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\delta > 0$ *и множество* $E \subset R^2$ *состоит из тех* ω, *для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в целочисленных приводимых полиномах степени не большей, чем* n. *Тогда* $\mu E = 0$.

Лемма 4 доказана в [7, с. 10].

Обозначим через $\wp_n(H)$ класс неприводимых полиномов степени n, для которых $a_n(P) = H(P)$. Пусть далее $\wp_n = \bigcup_{H=1}^{\infty} \wp_n(H)$.

ЛЕММА 5. *Если мера тех* ξ, *для которых (3) имеет бесконечное число решений в неприводимых многочленах степени, не превосходящей* n, *положительная, то мера тех* ξ, *для которых (3) имеет бесконечное число решений в полиномах из* $\wp_n$, *также положительна.*

Заменяя $H^{-\omega}$ в правых частях неравенств в доказательстве замечаний 3а и 3б из [3] на правые части в (3), получаем доказательство данной леммы.

Для доказательства теоремы 1 перейдем от многочлена $P(x)$ к многочленам $L(x) = x^n \ P(x^{-1} + t_0) + \xi$ или $L(y) = y^n \ P(y^{-1} + t_0) + \xi$, где t_0 – фиксированное целое число из леммы 1. В полиноме $L(x)$ берем $\xi = l_1$, а в полиноме $L(y)$ берем $\xi = l_2$. Далее рассуждения будем проводить для полинома $L(x)$, который имеет вид:

$$L(x) = \ P(t_0) + \xi \ x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

где $b_i \in Z, i = \overline{0, n-1}$. По лемме 5 корни полинома L ограничены, так как можно предположить, без потери общности, что $|b_n| = |P(t_0) + \xi| > c(n, \xi)H$ (это следует из леммы 1).

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x)$. Будем считать, что корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ расположены в таком порядке, что $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$. Выберем произвольно пару корней $(\alpha_{11}, \alpha_{21})$, $\alpha_{11}, \alpha_{21} \in R$. Расположим все остальные корни в следующем порядке:

$$|\alpha_{11} - \alpha_{12}| \le |\alpha_{11} - \alpha_{13}| \le \ldots \le |\alpha_{11} - \alpha_{1n}|, \ |\alpha_{21} - \alpha_{22}| \le |\alpha_{21} - \alpha_{23}| \le \ldots \le |\alpha_{21} - \alpha_{2n}|.$$

Обозначим через

$$|\alpha_{11} - \alpha_{1i}| = H^{-\rho_i}, i = \overline{2, n}, \ |\alpha_{21} - \alpha_{2j}| = H^{-\kappa_j}, \ j = \overline{2, n}.$$

Зафиксируем ε. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon d^{-1}$, где $d = d(n)$ – достаточно большое число, $T = [\varepsilon_1^{-1}]$. Определим целые числа k_i, m_i неравенствами

$$\frac{k_i - 1}{T} \le \rho_i < \frac{k_i}{T}, i = \overline{2, n}, \qquad \frac{m_i - 1}{T} \le \kappa_i < \frac{m_i}{T}, i = \overline{2, n}.$$

Пусть $p_i = \dfrac{k_{i+1} + \ldots + k_n}{T}$, $q_i = \dfrac{m_{i+1} + \ldots + m_n}{T}$, $i = \overline{1, n-1}$. Если $\rho_i > n+1$ и $\kappa_i > n+1$, то формально будем считать, что $k_i = \infty$ и $m_i = \infty$.

Легко показать, что $k_i \ge -1, m_i \ge -1$, так как $\ll 1$, $|\alpha_{21} - \alpha_{2i}| \ll 1$ для большого n и $k_2 \ge k_3 \ge \ldots \ge k_n$, $m_2 \ge m_3 \ge \ldots \ge m_n$. Таким образом, числа k_i, m_i могут принимать значения $-1, 0, 1, \ldots, (n+1)T, \infty$.

Пусть

$$B_n(\bar{l}) = \{P_{\bar{l}}(x) : a_n = c(n, \bar{l}) \cdot H, |a_i| < d_1 H, |\alpha_{1i}| << 1, |\alpha_{2i}| << 1, i = \overline{0, n-1}\},$$

где $d_1 = d_1(n)$ – достаточно большая константа, H – высота полинома P, соответствующего P_ξ.

ЛЕММА 6. *Пусть $P \in \wp_n$, тогда все корни многочлена P лежат в круге $|z| < 2$.*

Доказательство леммы 6 приведено в [7, с. 11].

ЛЕММА 7. *Пусть P и V – взаимно простые целочисленные многочлены с* $\deg P \le n$, $\deg V \le n$ *и* $\max \ |H(P)|, |H(V)| \ < H^{\mu}$. *Пусть* $|I_1| = H^{-\eta_1}$, $|I_2| = H^{-\eta_2}$, $\Pi = I_1 \times I_2$ – прямоугольник в R^2 со сторонами I_1 и I_2, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, и для всех $(x, y) \in \Pi$ выполняются неравенства $\max\limits_{x \in I_1}(|P(x)|, |V(x)|) < H^{-\upsilon_1}$, $\max\limits_{y \in I_2}(|P(y)|, |V(y)|) < H^{-\upsilon_2}$, $\upsilon_1 > 0$, $\upsilon_2 > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует $H_0 = H_0(\delta, n, \upsilon_1, \upsilon_2) \in R$ такое, что для всех $H > H_0$

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + 2\mu + 2\max(\upsilon_1 + \mu - \eta_1, 1) + 2\max(\upsilon_2 + \mu - \eta_2, 1) < 2n\mu + \delta.$$

Более общее, чем лемма 7, утверждение доказано в работе [8].

ЛЕММА 8 [3]. Пусть $P(x) \in \wp_n(H)$ и ω_1 – ближайший к $\omega \in R$ корень. Тогда

$$|\omega - \omega_1| << \frac{|P(\omega)|}{|P'(\omega_1)|} \text{ и } |\omega - \omega_1| << \left(|\omega_1 - \omega_2| \ldots |\omega_1 - \omega_j| \frac{|P(\omega)|}{|P'(\omega_1)|} \right)^{\frac{1}{j}}.$$

Леммы 4 и 5 позволяют свести доказательство теоремы 1 к доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\Psi(H)$ – неотрицательная монотонно убывающая функция и* $\sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty$. *Тогда для почти всех $(x, y) \in R^2$ и для любого $\bar{l} = (l_1, l_2) \in R^2$ система неравенств (3) имеет лишь конечное число решений в полиномах из $B_n(\bar{l})$.*

Доказательство теоремы разделим на четыре случая, положив $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{n+1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.

Предложение 1. *Если*

$$k_2T^{-1} + p_1 \le \frac{n+1}{2},\ m_2T^{-1} + q_1 \le \frac{n+1}{2},\ p_1 + q_1 > \frac{n-1}{2} + \delta_1, \tag{4}$$

то $\mu B_n(\bar{l}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим класс многочленов $P_t = \{P(y): 2^t \le H(P) < 2^{t+1}\}$ и область Π. Обозначим $\Sigma_1 = \frac{n+1}{2} + 1 - p_1 + \frac{n+1}{2} + 1 - q_1$.

а) Возьмем такие Π, которым принадлежит не более одного многочлена $P(y)$. Тогда по лемме 8 $|\mu(P)| << H^{-\Sigma_1+\varepsilon_1}$. Число областей Π не превосходит $C \cdot H^{v_1+v_2}$. Тогда для всевозможных классов P_t ряд $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{t\cdot\Sigma_1+v_1+v_2+\varepsilon_2}$ должен сходиться, что возможно при выполнении неравенства $\Sigma_1 + v_1 + v_2 + \varepsilon_2 < 0$. Положим $v_1 = \frac{n+1}{2} + 1 - p_1 + \varepsilon$, $v_2 = \frac{n+1}{2} - q_1 + \varepsilon$.

б) Рассмотрим теперь те области Π, которым принадлежит два или более многочленов. Многочлен $P(x)$ разложим на Π в ряд Тейлора

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2 + \dots,\ P(y) = P(\alpha_2) + P'(\alpha_2)(y-\alpha_2) + \frac{1}{2}P''(\alpha_2)(y-\alpha_2)^2 + \dots.$$

Имеем

$$|P^{(i)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^i < H^{1-p_i} \cdot H^{-ik_2T^{-1}} < H^{1-k_2T^{-1}+p_1}, i \ge 1,\ |P^{(i)}(\alpha_2)||y-\alpha_2|^i < H^{1-q_i} \cdot H^{-im_2T^{-1}} < H^{1-m_2T^{-1}+q_1}, i \ge 1.$$

Учитывая (4), имеем $H^{1-p_1-v_1} > H^{1-p_2-2v_1}$, $H^{1-q_1-v_2} > H^{1-q_2-2v_2}$, т.е.

$$P(x) << H^{1-p_1-v_1} = H^{1-p_1-\lambda_1-\mu-1+p_1+\varepsilon} = H^{-\lambda_1-\mu+\varepsilon},\ P(y) << H^{1-q_1-v_2} = H^{1-q_1-\lambda_2-\mu-1+q_1+\varepsilon} = H^{-\lambda_2-\mu+\varepsilon}.$$

Пусть $x \in I_1, y \in I_2$, тогда из (3) имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} |P(x)| << H^{-\lambda_1-\mu}, \\ |P(y)| << H^{-\lambda_2-\mu}. \end{cases} \tag{5}$$

Применим к (5) лемму 7, полагая $\upsilon_1 = \frac{-n-1}{2}, \upsilon_2 = \frac{-n-1}{2}$, $\eta_1 = v_1, \eta_2 = v_2$. Так как

$$\max(\upsilon_1 + 1 - v_1, 0) = \max(\lambda_1 + \mu + 1 - \lambda_1 - \mu - 1 + p_1, 0) = \max(p_1, 0) = p_1,\ \max(\upsilon_2 + 1 - v_2, 0) = q_1,$$

то имеем $\lambda_1 + \mu + \lambda_2 + \mu + 2\mu + 2p_1 + 2q_1 < 2n\mu + \delta.$ Учитывая (4), имеем

$$n - 2 + 1 + 2 + 2(p_1 + q_1) < 2n + \delta \Leftrightarrow n + 1 + 2(p_1 + q_1) < 2n + \delta \Leftrightarrow 2(p_1 + q_1) < n - 1 + \delta \Leftrightarrow p_1 + q_1 < \frac{n-1}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

Значит, если $p_1 + q_1 < \frac{n-1}{2} + \frac{\delta}{2}$, то согласно лемме 7 многочлены $P(y)$ и $V(y)$ имеют общие корни, т.е. один из многочленов $P(y)$ или $V(y)$ приводим. Это значит, что система неравенств (5) верна в многочленах $P(y)$, $\deg P \le n-1$. Согласно [9] такое может быть только на множестве нулевой меры. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Если*

$$k_2T^{-1} + p_1 > \frac{n+1}{2}, \quad m_2T^{-1} + q_1 > \frac{n+1}{2}, \tag{6}$$

то $\mu B(\bar{l}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим класс многочленов $P_t = \{P(y): 2^t \le H(P) < 2^{t+1}\}$ и область Π. Обозначим $\Sigma_2 = \frac{n+1}{2} - p_2 + \frac{n+1}{2} - q_2$.

а) Возьмем такие Π, которым принадлежит не более одного многочлена $P(y)$. Тогда так как верно (6), то оценка по второй производной лучше, чем по первой, и по лемме 8 $|\mu(P)| << H^{-\frac{1}{2}\Sigma_2+\varepsilon_2}$. Число областей Π не превосходит $C\cdot H^{v_1+v_2}$. Тогда для всевозможных классов P_t ряд $\sum_{t=1}^{\infty} 2^{t\cdot(-\Sigma_2+v_1+v_2+\varepsilon_2)}$ сходится при выполнении неравенства $-\Sigma_2+v_1+v_2+\varepsilon_2<0$. Положим

$$v_1=\frac{n+1-2p_2}{4}+\varepsilon,\ v_2=\frac{n+1-2q_2}{4}+\varepsilon. \tag{7}$$

б) Рассмотрим теперь те области Π, которым принадлежит более одного многочлена. Снова применим к (5) лемму 7, полагая $\upsilon_j=\frac{-n-1}{2}$, $\eta_j=v_j$, $j=\overline{1,2}$. Учитывая (7), имеем

$$\max(\upsilon_1+1-v_1,0)=\frac{-n+1-2p_2}{4},$$

$$\max(\upsilon_2+1-v_2,0)=\frac{-n+1-2q_2}{4}.$$

Учитывая (6), имеем

$$n-2+1+2+n-2+1+2+p_2+q_2<2n+\delta \Leftrightarrow 2n+2+p_2+q_2<2n+\delta \Leftrightarrow 2+p_2+q_2<\delta. \tag{8}$$

Видно, что $\forall\delta>0$ неравенство (8) не выполняется, значит, согласно лемме 7, многочлены $P(y)$ и $V(y)$ имеют общие корни, т.е. один из многочленов $P(y)$ или $V(y)$ приводим. Это значит, что система неравенств (5) верна в многочленах $P(y)$, $\deg P\le n-1$. Согласно [9] такое может быть только на множестве нулевой меры. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Если* $k_2T^{-1}+p_1\le\frac{n+1}{2},\ m_2T^{-1}+q_1>\frac{n+1}{2},\ n+1>k_2T^{-1}+p_1+m_2T^{-1}+q_1\ge n-1+\delta,$ *то* $\mu B(\bar{l})=0$.

Доказательство. Для доказательства применим к неравенству $|x-\alpha_1|$ первую оценку из леммы 8, а для оценки $|y-\alpha_2|$ вторую оценку из леммы 8. Далее поступаем как при доказательстве предложений 1 и 2.

Предложение 4. *Если* $k_2T^{-1}+p_1\le\frac{n+1}{2},\ m_2T^{-1}+q_1\le\frac{n+1}{2},\ 2-\frac{\varepsilon}{2}<k_2T^{-1}+p_1+m_2T^{-1}+q_1<n-1+\delta,$ *то* $\mu B(\bar{l})=0$.

Доказательство. Пусть $\sigma_1=k_2T^{-1}$, $\sigma_2=m_2T^{-1}$. Разложим принадлежащие Π многочлены в ряд Тейлора:

$$P(x)=P(\alpha_1)+P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)+\frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2+\ldots,\ P(y)=P(\alpha_2)+P'(\alpha_2)(y-\alpha_2)+\frac{1}{2}P''(\alpha_2)(y-\alpha_2)^2+\ldots.$$

Из неравенств

$$|P'(\alpha_1)||x-\alpha_1|<H^{1-p_1}\cdot H^{-k_2T^{-1}}<H^{1-k_2T^{-1}-p_1},\ |P''(\alpha_1)||x-\alpha_1|^2<H^{1-p_2}\cdot H^{-2k_2T^{-1}}<H^{1-k_2T^{-1}-p_1},$$

$$|P^{(j)}(\alpha_1)||x-\alpha_1|^j<H^{1-p_j}\cdot H^{-jk_2T^{-1}}<H^{1-k_2T^{-1}-p_1},\ j>2$$

и аналогичных рассуждений для точки y имеем

$$|P(x)|\le H^{1-k_2T^{-1}-p_1},\ |P(y)|\le H^{1-m_2T^{-1}-q_1}. \tag{9}$$

Обозначим $\Sigma_3=p_1+k_2T^{-1}+q_1+m_2T^{-1}$.

а) Рассмотрим только те множества Π, которым принадлежит менее H^{γ_1} полиномов $P(y)$ при некотором γ_1. Суммарная оценка меры на таких множествах Π равна $H^{-\Sigma_3}\cdot H^{k_2T^{-1}+m_2T^{-1}+\gamma_1}$, которая нас устраивает, если

$$-\Sigma_3+k_2T^{-1}+m_2T^{-1}+\gamma_1<0\Leftrightarrow(n+1)+(p_1+k_2T^{-1}+q_1+m_2T^{-1})+\gamma_1<-\varepsilon_4\Leftrightarrow\gamma_1<n+1-\Sigma_3-\varepsilon_4.$$

б) Если же $\gamma_1\ge n+1-\Sigma_3-\varepsilon_4$, то в таких областях Π положим

$$\gamma_2=n+1-\Sigma_3-\varepsilon_4. \tag{10}$$

Введем такое d, что $0 < d < \frac{1}{2}$, $\gamma_3 = \gamma_2 - d$. Запишем γ_3 в виде $\gamma_3 = [\gamma_3] + \{\gamma_3\}$. Воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Тогда существует не менее $m = c(n)H^{\{\gamma_3\}+d}$ полиномов $P_1(y), ..., P_m(y)$, принадлежащих Π, для которых при $(x, y) \in \Pi$ выполняются неравенства (9) и у которых совпадают коэффициенты при $y^i, n - [\gamma_3] + 1 < i \le n$. Рассмотрим полиномы $t_j(y) = P_j(y) - P_1(y),\ j = \overline{2, m}$. Их число равно $m-1$, все они различны и

$$|t_j(x)| < 2 \cdot Q,\ Q = \max\{H^{1-k_2T^{-1}-p_1}, H^{1-m_2T^{-1}-q_1}\},\ \deg(t_j(x))) \le n - [\gamma_3]. \tag{11}$$

Если дробная часть $\{\gamma_3\} \ne 0$, то еще раз воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Разделим значения каждого из коэффициентов $b_j,\ j = \overline{2, n - [\gamma_3]}$ многочленов $t_j(x)$ на равные части величины H^{γ_4}, $\gamma_4 > 0$. Если сейчас

$$\{\gamma_3\} > (1 - \gamma_4)(n - [\gamma_4] - 1), \tag{12}$$

то существует не менее $n_1 = H^d$ полиномов $t_j(x)$, у которых все значения первых $n - [\gamma_3] - 1$ коэффициентов входят в один набор подынтервалов интервала $[-2H; 2H]$ длины H^{γ_4}. Рассмотрим разности $f_j(x) = t_j(x) - t_2(x),\ j = \overline{3, n_1}$. Из (11), (12) следует, что при $(x, y) \in \Pi$ $|f_j(x)| < 4Q,\ j = \overline{3, m_1}$, $\deg(f_j(x)) \le n - [\gamma_3]$, $H(f_j) \le H^{\frac{1-\{\gamma_3\}}{n-[\gamma_3]-1}}$. Тогда $|f_j(x)| \le H^{1-m_{2j}T^{-1}-p_{1j}} \le H(f_j)^{-\frac{1-m_{2j}T^{-1}-p_{1j}}{1-\frac{\{\gamma_3\}}{n-[\gamma_3]-1}}}$. Среди полиномов $f_3(x), ..., f_{n_1}(x)$ найдутся хотя бы два без общих корней. Применим лемму 7. Положим $\upsilon_1 = k_2T^{-1} + p_1 - 1$, $\eta_1 = k_2T^{-1}$, $\upsilon_2 = m_2T^{-1} + q_1 - 1$, $\eta_2 = l_2T^{-1}$, $\deg P_j(x) \le n - [\gamma_3],\ j = \overline{1, 4}$. В неравенстве (5) левая часть примет вид $k_2T^{-1} + p_1 - 1 + m_2T^{-1}q_1 - 1 + 2 + 2p_1 + 2q_1 = \Sigma_3 + 2p_1 + 2q_1$, а правая часть

$$2(n - [\gamma_3])\left(1 - \frac{\{\gamma_3\}}{n - [\gamma_3] - 1}\right) + \delta = \frac{2(n - [\gamma_3])(n - [\gamma_3] - 1 - \{\gamma_3\})}{n - [\gamma_3] - 1} + \delta = \frac{2(n - [\gamma_3])(n - \gamma_3 - 1)}{n - [\gamma_3] - 1} + \delta < 2(n - \gamma_3) + \delta.$$

Учитывая (10), имеем $n - \gamma_3 = n - (\gamma_2 - d) = n - (n + 1 - \Sigma_3 - \varepsilon_4 - d) = \Sigma_3 + \varepsilon_4 + d - 1$. Тогда по лемме 7

$$\Sigma_3 + 2p_1 + 2q_1 < 2\Sigma_3 + 2(\varepsilon_4 + d) + \delta \Leftrightarrow p_1 + q_1 + < k_2T^{-1} + m_2T^{-1} + 2(\varepsilon_4 + d) + \delta + d,$$

что противоречиво при $\varepsilon_4 + d < 1$. Предложение 4 доказано.

Если $k_2T^{-1} + p_1 + m_2T^{-1} + q_1 \le 2 - \frac{\varepsilon}{2}$, то, рассуждая, как при доказательстве предложения 4, от многочленов степени n можно перейти к многочленам второй степени, для которых теорема 2 легко доказывается непосредственно. Ясно, что из этого замечания и предложений 1 – 4 следует доказательство теоремы 2.

Доказательство расходимости. Зафиксируем интервал $I \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

ЛЕММА 9. *Пусть* $P(Q, \delta_\xi)$ *– множество* $(x, y) \in I^2$ таких, что

$$|P(\xi)| < \delta_\xi Q^{-\frac{n-1}{2}},\ H(P) \le Q \tag{13}$$

для некоторого ненулевого многочлена P. *Тогда существует действительное число* Q_1 *такое, что для всех* $Q > Q_1$ *справедливо неравенство* $|P(Q, \delta_\xi)| < \frac{|I|^2}{2}$.

Доказательство леммы 9 аналогично доказательству теоремы в работе [10].

Далее будем считать, что $\xi \in B_0$, где $B_0 = I^2 \setminus P(Q, \delta_\xi)$. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |b_n\xi^n + ... + b_1\xi + b_0| \le Q^{-\frac{n-1}{2}}, \\ |b_1|, |b_2|, ..., |b_n| \le Q. \end{cases}$$

Все решения этой системы $(b_0, b_1, ..., b_n)$ образуют выпуклую центрально симметричную фигуру. Определим ее последовательные минимумы $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{n+1}$. Ясно, что верно неравенство $\tau_1 \le \tau_2 \le ... \le \tau_{n+1}$.

Заметим, что из леммы 9 следует, что $\tau_1 > \frac{1}{d} = \frac{1}{d(c_0)}$. Действительно, если $\tau_1 \le \frac{1}{d}$, то найдется такой многочлен P, для которого

$$|P(\xi)| \ge \tau_1 Q^{-\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{1}{d}\cdot Q\right)^{-\frac{n-1}{2}} d^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $H(P) \le \frac{1}{d}Q$, и (13) будет иметь решение.

Согласно теореме Минковского о последовательных минимумах мы имеем $\tau_1\tau_2\cdot\ldots\cdot\tau_{n+1} \le 2^{n+1}$. Таким образом, мы получили, что $\tau_{n+1} << (\tau_1\tau_2\cdot\ldots\cdot\tau_n)^{-1} << (\tau_1)^{-n} << \left(\frac{1}{d}\right)^{-n} = d^n$. Итак, мы получили множество $n+1$ линейно независимых многочленов

$$P_j(T) = a_n^{(j)}T^n + \ldots + a_1^{(j)}T + a_0^{(j)}, \quad 1 \le j \le n+1$$

степени $\deg(P) \le n$ с целыми коэффициентами $a_i^{(j)}$, удовлетворяющих условию:

$$|P_j(\xi)| \le d^n Q^{-\frac{n-1}{2}}, \; H(P_j) \le d^n Q, \; 1 \le j \le n+1. \tag{14}$$

Рассмотрим следующую систему $n+1$ уравнений от $n+1$ неизвестных θ_j, $j = 1, 2, \ldots, n+1$:

$$\begin{cases} \theta_1 P_1(x) + \theta_2 P_2(x) + \ldots + \theta_{n+1}P_{n+1}(x) + l_1 = 0, \\ \theta_1 P_1(y) + \theta_2 P_2(y) + \ldots + \theta_{n+1}P_{n+1}(y) + l_2 = 0, \\ \theta_1 P_1'(x) + \theta_2 P_2'(x) + \ldots + \theta_{n+1}P_{n+1}'(x) \qquad = Q + \sum_{i=1}^{n+1} |P_i'(x)|, \\ \theta_1 P_1'(y) + \theta_2 P_2'(y) + \ldots + \theta_{n+1}P_{n+1}'(y) \qquad = Q + \sum_{i=1}^{n+1} |P_i'(y)|, \\ \theta_1 a_k^{(1)} + \theta_2 a_k^{(2)} + \ldots + \theta_{n+1}a_k^{(n+1)} = 0, \quad 4 \le k \le n. \end{cases} \tag{15}$$

Преобразуем систему (15) следующим образом: каждый k-й ряд ($4 \le k \le n$) умножим на x^k ', просуммируем этот ряд и вычтем полученный результат из третьего уравнения в (15). Окончательно третье равенство в (15) примет вид:

$$3x^2 \; \theta_1 a_3^{(1)} + \ldots + \theta_{n+1}a_3^{(n+1)} \; + 2x \; \theta_1 a_2^{(1)} + \ldots + \theta_{n+1}a_2^{(n+1)} \; + \; \theta_1 a_1^{(1)} + \ldots + \theta_{n+1}a_1^{(n+1)} \; = 0.$$

Затем мы аналогично преобразуем четвертое уравнение в системе (15). Аналогичным образом (каждый k-й ряд ($4 \le k \le n$) умножим на x^k, просуммируем этот ряд и вычтем полученный результат из первого уравнения в (15)) мы приведем первое уравнение к виду

$$x^3 \; \theta_1 a_3^{(1)} + \ldots + \theta_{n+1}a_3^{(n+1)} \; + x^2 \; \theta_1 a_2^{(1)} + \ldots + \theta_{n+1}a_2^{(n+1)} \; + x \; \theta_1 a_1^{(1)} + \ldots + \theta_{n+1}a_1^{(n+1)} \; + \; \theta_1 a_0^{(1)} + \ldots + \theta_{n+1}a_0^{(n+1)} \; + l_1 = 0.$$

Затем мы проделаем указанные действия для второго уравнения системы (15).

Относительно неизвестных $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n+1}$ мы имеем следующий определитель для системы (15):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{m=0}^{3} a_m^{(1)}x^m & \ldots & \sum_{m=0}^{3} a_m^{(j)}x^m & \ldots & \sum_{m=0}^{3} a_m^{(n+1)}x^m \\ \sum_{m=0}^{3} a_m^{(1)}y^m & \ldots & \sum_{m=0}^{3} a_m^{(j)}y^m & \ldots & \sum_{m=0}^{3} a_m^{(n+1)}y^m \\ \sum_{m=1}^{3} ma_m^{(1)}x^{m-1} & \ldots & \sum_{m=1}^{3} ma_m^{(j)}x^{m-1} & \ldots & \sum_{m=1}^{3} ma_m^{(n+1)}x^{m-1} \\ \sum_{m=1}^{3} ma_m^{(1)}y^{m-1} & \ldots & \sum_{m=1}^{3} ma_m^{(j)}y^{m-1} & \ldots & \sum_{m=1}^{3} ma_m^{(n+1)}y^{m-1} \\ a_4^{(1)} & \ldots & a_4^{(j)} & \ldots & a_4^{(n+1)} \\ a_5^{(1)} & \ldots & a_5^{(j)} & \ldots & a_5^{(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{(1)} & \ldots & a_n^{(j)} & \ldots & a_n^{(n+1)} \end{vmatrix} \tag{16}$$

Так как многочлены P_i линейно независимы, то матрица $a_i^{(j)}$, $1 \le j \le n+1$, $0 \le i \le n$ невырожденная и определитель $|\Delta_1| = |\det(a_{ij})| \ge 1$.

Определитель системы (16) неизвестных $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n+1}$ связан, с учетом (14), с определителем $|\Delta_1|$ равенством $\Delta = (x-y)^4 \Delta_1$.

Пусть $\delta > 0$ – фиксированное действительное число. Удалим из R^2 такие точки (x, y), для которых $|x-y| < \delta$. Мера полученного множества B_1 не превосходит $c_1\delta$. Далее мы будем рассматривать только точки (x, y) из множества $B_2 = B_0 \setminus B_1$. На множестве B_2 $|\Delta| > \delta^4$, т.е. существует единственное решение $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n+1}$ системы (15).

Выберем целые числа $t_1, t_2, ..., t_{n+1}$ так, чтобы выполнялось неравенство $|\theta_j - t_j| \le 1$ для всех $1 \le j \le n+1$ и обозначим

$$b_i = t_1 a_i^{(1)} + t_2 a_i^{(2)} + ... + t_{n+1} a_i^{(n+1)}, 0 \le i \le n.$$

Рассмотрим многочлены

$$P(T) = l_T + b_n T^n + ... + b_1 T + b_0 = l_T + t_1 P_1(T) + ... + t_{n+1} P_{n+1}(T),$$

где $l_T = \{l_1, l_2\}$ соответственно.

Многочлен P удовлетворяет условию

$$P(\xi) = l_T + t_1 P_1(\xi) + ... + t_{n+1} P_{n+1}(\xi),$$

следовательно, учитывая (14) и (15), имеем

$$\begin{gathered}|P(\xi)| \le l_T + \sum_{j=1}^{n+1} |t_j P_j(\xi)| < l_T + \sum_{j=1}^{n+1} |(\theta_j + 1) P_j(\xi)| < l_T + \sum_{j=1}^{n+1} |\theta_j P_j(\xi)| + \\ + \sum_{j=1}^{n+1} |P_j(\xi)| < l_T + \sum_{j=1}^{n+1} |P_j(\xi)| < l_T + (n+1) d^n Q^{-\frac{n-1}{2}} < c_2 Q^{-\frac{n-1}{2}}.\end{gathered} \tag{17}$$

С другой стороны,

$$P'(\xi) = t_1 P_1'(\xi) + ... + t_{n+1} P_{n+1}'(\xi),$$

т.е. с учетом (14) и (15) мы имеем

$$\begin{gathered}|P'(\xi)| \le \sum_{j=1}^{n+1} |t_j P_j'(\xi)| < \sum_{j=1}^{n+1} |(\theta_j + 1) P_j'(\xi)| < \sum_{j=1}^{n+1} |\theta_j P_j'(\xi)| + \sum_{j=1}^{n+1} |P_j'(\xi)| < \\ < Q + \sum_{j=1}^{n+1} |P_j'(\xi)| + \sum_{j=1}^{n+1} |P_j'(\xi)| = Q + 2\sum_{j=1}^{n+1} |P_j'(\xi)| < Q + 2(n+1) n d^n Q < c_3 Q.\end{gathered} \tag{18}$$

С учетом (15) мы получаем, что

$$|P'(\xi)| \ge Q. \tag{19}$$

Рассмотрим коэффициенты b_i, $0 \le i \le n$. Для $i = 4, 5, ..., n$ из условий (14) и (15) имеем

$$|b_i| = \sum_{j=1}^{n+1} |t_j a_i^{(j)}| \le \sum_{j=1}^{n+1} |(\theta_j + 1) a_i^{(j)}| \le \sum_{j=1}^{n+1} |\theta_j a_i^{(j)}| + \sum_{j=1}^{n+1} |a_i^{(j)}| \le \sum_{j=1}^{n+1} |a_i^{(j)}| \le (n+1) d^n Q \le c_4 Q. \tag{20}$$

Определим границы для оставшихся коэффициентов b_i, $0 \le i \le 3$. Имеем

$$P(x) = l_1 + (b_0 + b_1 x + ... + b_3 x^3) + (b_4 x^4 + ... + b_n x^n) = l_1 + S_1 + S_2,$$

$$P'(x) = (b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2) + (4b_4 x^3 + ... + n b_n x^{n-1}) = S_3 + S_4.$$

С учетом условий (20) и (18)

$$|S_1| = |P(x) - l_1 - S_2| \le |P(x)| + |l_1| + |S_2| \ll c_5 Q^{-\frac{n-1}{2}} + Const + c_6 Q \ll Q,$$

а из условий (20) и (19) имеем

$$|S_3| = |P'(x) - S_4| \le |P'(x)| + |S_4| \ll c_7 Q + c_8 Q \ll Q.$$

Аналогичные оценки справедливы для y.

Получим систему

$$\begin{cases} |b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3| < Q, \\ |b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2| < Q, \\ |b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3| < Q, \\ |b_1 + 2b_2 y + 3b_3 y^2| < Q. \end{cases} \tag{21}$$

Так как $|\xi| \le \frac{1}{2}$ и определитель системы $|\Delta| \gg \delta^4 > 0$, то из (21) имеем $|b_i| \ll Q$, $i = 0,1,2,3$. Пусть $|b_i| \le c_9 Q$.

Таким образом, для всех $\xi \in B_2$ существует многочлен P такой, что

$$|P(\xi) + l_T| \le c_{10} Q^{-\frac{n-1}{2}},\ Q \le |P'(\xi)| \le c_{11} Q,\ |H(P)| \le c_{12} Q = \max\{c_{10}, c_{11}\} Q,\ l_T \le D,\ D = Const.$$

Далее мы должны доказать существование корней многочлена P, близких к ξ. Обозначим через $\gamma_{1i}, \ldots, \gamma_{ni}$ корни многочлена P, определенные таким образом, что $|x - \gamma_{1i}| = \min_{1 \le j \le n} |x - \gamma_{ji}|$, $|y - \gamma_{1i}| = \min_{1 \le j \le n} |y - \gamma_{ji}|$. Так как $\left|\frac{P'(x)}{P(x)}\right| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|x - \gamma_{ji}|} \le \frac{n}{|x - \gamma_{1i}|}$, $\left|\frac{P'(y)}{P(y)}\right| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|y - \gamma_{ji}|} \le \frac{n}{|y - \gamma_{1i}|}$, то с учетом (17) и (19) имеем

$$0 < |x - \gamma_{1i}| \le n \left|\frac{P(x)}{P'(x)}\right| \le n c_{13} Q^{-\frac{n+1}{2}},\ 0 < |y - \gamma_{1i}| \le n \left|\frac{P(y)}{P'(y)}\right| \le n c_{14} Q^{-\frac{n+1}{2}},$$

т.е. γ_{ji} – корень многочлена P, близкий к ξ. Далее из векторов $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ построим регулярную систему и как в работе [6] завершим доказательство случая расходимости в теореме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khintchine, A.J. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A.J. Khintchine // Math. Ann. – 1924. – Vol. 92. – P. 115 – 125.
2. Mahler, K. Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Annalen. – 1932. – Vol. 106. – P. 131 – 139.
3. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
4. Baker, A. On a theorem of Sprindžuk / A. Baker // Proc. Royal Soc. – 1966. – Vol. 292. – P. 92 – 104.
5. Берник, В.И. О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – С. 17 – 28.
6. Beresnevich, V.V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V.V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97 – 112.
7. Берник, В.И. Теорема типа Хинчина для целочисленных многочленов комплексной переменной / В.И. Берник, Д.В. Васильев // Труды ин-та математики НАН Беларуси. – 1999. – Т. 3. – С. 10 – 20.
8. Берник, В.И. Приближение нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $R \times C \times Q_p$ / В.И. Берник, Н.И. Калоша // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2004. – № 1. – С. 121 – 123.
9. Желудевич, Ф.Ф. Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов / Ф.Ф. Желудевич. – Минск, 1982. – 30 с. – (Препринт / Ин-т математики, № 29(154)).
10. Берник, В.И. Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник, В.Н. Борбат // Труды математического ин-та им. В.А. Стеклова. Аналитическая теория чисел и приложения. К 60-летию со дня рождения проф. А.А. Карацубы.: сб. ст. / РАН МАИК. – 1997. – С. 58 – 73.

Поступила 20.05.2009