УДК 512.542

О ДВУХ КЛАССАХ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С *X*-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ВТОРЫМИ И ТРЕТЬИМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Ю.В. ЛУЦЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Пусть G – конечная группа. Подгруппа H группы G называется 2-максимальной (или второй максимальной) подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные, 4-максимальные подгруппы и т.д. Подгруппа H группы G называется X-перестановочной в G, где $\varnothing \neq X \subseteq G$*, если для любой подгруппы T группы G в X найдется такой элемент x, что* $TH^x = H^xT$*. Напомним, что группой Шмидта называется ненильпотентная группа, каждая собственная подгруппа которой является нильпотентной. Будем называть группой Белоногова всякую конечную ненильпотентную разрешимую группу, не являющуюся группой Шмидта, но содержащую только нильпотентные 2-максимальные подгруппы. Работа посвящена исследованию групп Шмидта и групп Белоногова, у которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы X-перестановочны со всеми силовскими подгруппами, где X – подгруппа Фиттинга.*

1. Введение. Все группы в данной статье являются конечными. Напомним, что подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее.

По мере развития теории максимальных подгрупп многими авторами предпринимались попытки изучения и применения n-максимальных подгрупп для $n \geq 2$. Наиболее ранние результаты были получены Редеи [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хуппертом [2], установившим сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. В дальнейшем эти результаты получили развитие в нескольких направлениях. В частности, в работе Аграваля [3], была установлена сверхразрешимость группы при условии, что каждая ее 2-максимальная подгруппа S-квазинормальна (подгруппа H группы G называется *S-квазинормальной* или *S-перестановочной* в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G), а в работе Л.Я. Полякова [4] была доказана сверхразрешимость группы при условии, что каждая ее 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами.

Напомним, что подгруппа H из G называется *X-перестановочной* в G [5], где $\varnothing \neq X \subseteq G$, если для любой подгруппы T группы G в X найдется такой элемент x, что $TH^x = H^xT$. В недавних публикациях [6, 7] упомянутые выше результаты приобрели развитие в другом направлении. В этих работах были получены характеризации сверхразрешимых групп по свойствам X-перестановочности их 2-максимальных подгрупп с выделенными системами групп.

В данной работе мы исследуем группы Шмидта и группы Белоногова при условии, что их 2-максимальные или 3-максимальные подгруппы являются X-перестановочными со всеми силовскими подгруппами (где X – подгруппа Фиттинга основной группы), и даем точную оценку p-длин этих групп.

2. Предварительные результаты. Напомним, что *группой Шмидта* называется ненильпотентная группа, каждая собственная подгруппа которой является нильпотентной. Приведем некоторые известные свойства групп Шмидта (см. [8, гл. VI]), необходимые в наших доказательствах.

ЛЕММА 2.1. *Если G – группа Шмидта, то*

(1) $G = [P]\langle a\rangle$, *где P и $\langle a\rangle$ – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно*;

(2) *G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$*;

(3) *Если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p*.

Сформулируем в виде леммы необходимые нам свойства X-перестановочных подгрупп.

ЛЕММА 2.2. *Пусть A, B, X, K – подгруппы группы G и K нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если A X-перестановочна с B, тогда B X-перестановочна с A* [9];

(2) *если $K \leq A$, то A/K XK/K-перестановочна с BK/K в G/K тогда и только тогда*, *когда A X-перестановочна с B в G* [9];

(3) *если $K \leq A$, то A/K является XK/K-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G/K тогда и только тогда*, *когда A является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G.*

Доказательство. (3) Пусть P – некоторая силовская p-подгруппа группы G. Тогда PK/K является некоторой силовской p-подгруппой группы G/K. Ввиду (2) группа A/K является XK/K-перестановочной с PK/K в G/K тогда и только тогда, когда A является X-перестановочной с P в G. Лемма доказана.

В основе наших доказательств лежат следующие два результата.

ЛЕММА 2.3 [10, теорема 2.1]. *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *G является сверхразрешимой группой Шмидта*;

(2) *каждая* 2-*максимальная подгруппа группы G нормальна*;

(3) *каждая строго* 2-*максимальная подгруппа группы G S-квазинормальна*.

ЛЕММА 2.4 [10, теорема 3.1]. *В том и только в том случае каждая* 3-*максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной в G, когда либо группа G нильпотентна, либо G изоморфна $SL(2, 3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов*:

(1) *G – группа Шмидта*;

(2) *$G = [P]Q$, где $|P| = p$, $|Q| = q^{\beta}$; группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка* 8, *либо изоморфна группе $M_{\beta}(q)$*; $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$;

(3) *$G = [P]Q$, где P – циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$*;

(4) *$G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q – группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта*;

(5) *$G = ([P]Q)R$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q – циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.*

3. Группы Шмидта, в которых каждая вторая или каждая третья максимальная подгруппа *X*-перестановочна со всеми силовскими подгруппами. В данном разделе мы даем полное описание групп Шмидта, в которых каждая вторая или каждая третья максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами, где X – подгруппа Фиттинга рассматриваемой группы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть G – группа Шмидта и $X = F(G)$. В том и только в том случае каждая* 2-*максимальная подгруппа группы G является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G, когда G сверхразрешима.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G – группа Шмидта. Тогда, в силу леммы 2.1(1), $G = [P]Q$, где P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G соответственно.

Предположим вначале, что P – абелева группа. Тогда ввиду леммы 2.1(2) группа G имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы Q и PQ_1, где Q_1 – максимальная подгруппа в Q. Следовательно, представителями 2-максимальных подгрупп группы G являются группы Q_1, PQ_2 и P_1Q_1, где Q_2 – 2-максимальная подгруппа в Q и P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P. Ввиду условия существует элемент $f \in F(G)$ такой, что $(P_1Q_1)^fQ^f$ – подгруппа группы G. Это в свою очередь означает, что $P_1^fQ^f$ также является подгруппой в группе G. Таким образом, $Q^f < P_1^fQ^f < G$, что в силу максимальности подгруппы Q в G влечет $|P| = p$. Следовательно, G является сверхразрешимой группой Шмидта.

Предположим теперь, что P – неабелева группа. Тогда ввиду леммы 2.1(3) группа G имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $\Phi(P)Q$ и PQ_1, где Q_1 – максимальная подгруппа в Q. Следовательно, представителями 2-максимальных подгрупп группы G являются группы $\Phi(P)Q_1$, TQ, PQ_2 и P_1Q_1, где T – некоторая максимальная подгруппа из $\Phi(P)$, Q_2 – 2-максимальная подгруппа в Q и P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P. Ввиду условия существует элемент $f \in F(G)$ такой, что $(P_1Q_1)^fQ^f$ – подгруппа группы G. Это в свою очередь означает, что $P_1^fQ^f$ также является подгруппой в группе G. Таким образом, $\Phi(P)Q^f \leq P_1^fQ^f < G$, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G означает, что P является циклической группой простого порядка. Следовательно, G является сверхразрешимой группой Шмидта.

Достаточность. Пусть G – сверхразрешимая группа Шмидта. Тогда, очевидно, каждая 2-максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, а следовательно, и $F(G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть G – группа Шмидта и $X = F(G)$. В том и только в том случае каждая* 3-*максимальная подгруппа группы G является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G, когда либо G сверхразрешима; либо $G \approx SL(2,3)$; либо $G = [P]Q$, где $|P| = p^2$ и $|Q| = q$ $(p \neq q)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G соответственно (см. лемму 2.1(1)).

Допустим вначале, что $|Q| > q$. Тогда ввиду леммы 2.1(2) группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_1Q_2, где Q_2 – 2-максимальная подгруппа в Q и P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P. Виду условия существует элемент $f \in F(G)$ такой, что $(P_1Q_2)^fQ^f$ – подгруппа группы G. Это в свою очередь означает, что $P_1{}^fQ^f$ также является подгруппой в группе G.

Предположим, что P – абелева группа. Тогда мы имеем $Q^f < P_1{}^fQ^f < G$, что в силу максимальности подгруппы Q в G влечет $|P| = p$.

Предположим теперь, что P не является абелевой группой. Тогда $\Phi(P)Q^f \leq P_1{}^fQ^f < G$, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G (см. лемму 2.1(3)) означает, что P является циклической группой простого порядка. Следовательно, G является сверхразрешимой группой Шмидта.

Теперь допустим, что $|Q| = q$. Тогда группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_2, где P_2 – некоторая 2-максимальная подгруппа в P. Ввиду условия существует элемент $f \in F(G)$ такой, что $P_2{}^fQ^f$ – подгруппа группы G.

Предположим, что P – абелева группа. Тогда мы имеем $Q^f < P_2{}^fQ^f < G$, что в силу максимальности подгруппы Q в G (см. лемму 2.1(2)) влечет $|P| = p^2$. Следовательно, $G = [P]Q$, где $|P| = p^2$ и $|Q| = q$.

Допустим теперь, что P не является абелевой группой. Будем предполагать, что P_2 – такая 2-максимальная подгруппа в P, что $\Phi(P) \leq P_2$. Так как $P_2{}^fQ^f$ – подгруппа группы G для некоторого $f \in F(G)$, то мы имеем $\Phi(P)Q^f \leq P_2{}^fQ^f < G$, что в силу максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в G означает $|P : Z(P)| = |P:\Phi(P)| = p^2$. Следовательно, P является группой Миллера – Морено, и поэтому ввиду [13] $|P'| = |\Phi(P)| = p$. Следовательно, P является неабелевой группой порядка p^3. Тогда ввиду [12, V, теорема 5.1] P изоморфна одной из следующих групп: $M_3(p)$, $M(p)$, D или Q_8, где D – диэдральная группа, Q_8 – группа кватернионов порядка 8, $M_3(p) = \langle\, a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p} \,\rangle$ и $M(p) = \langle\, x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1, [x, z] = [y, z] = 1, [x, y] = z \,\rangle$ (см. [12, с. 190, 191, 203]). Так как $|Q| = q$, то каждая подгруппа порядка p группы P является $F(G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Предположим, что $R \neq \Phi(P)$ – подгруппа порядка p группы P. Тогда R^fQ^f является подгруппой в группе G для некоторого $f \in F(G)$, что противоречит строению группы Шмидта G. Таким образом, $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P, и поэтому $P \approx Q_8$. Так как при этом $|P / \Phi(P)| = 4$, то $4 \equiv 1\ (mod\ q)$. Это влечет $q = 3$ и поэтому группа G изоморфна группе $SL(2,3)$.

Достаточность. Пусть $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G соответственно. Предположим, что G либо сверхразрешима, либо изоморфна группе $SL(2,3)$, либо $|G| = p^2q$. Несложно убедиться, что в этих случаях каждая неединичная 3-максимальная подгруппа группы G является нормальной в G. Следовательно, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является $F(G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Теорема доказана.

4. Группы Белоногова, в которых каждая вторая или каждая третья максимальная подгруппа X-перестановочна со всеми силовскими подгруппами. В данном разделе мы вводим понятие группы Белоногова. Общее описание таких групп было получено в работе [14]. Ниже мы уточняем строение группы Белоногова при условии, что каждая ее 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами, где X – подгруппа Фиттинга рассматриваемой группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Группой Белоногова будем называть всякую конечную ненильпотентную разрешимую группу, не являющуюся группой Шмидта, но содержащую только нильпотентные 2-максимальные подгруппы.*

В следующей лемме мы даем полное описание примитивных групп Белоногова, в которых каждая 2-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами, где X – подгруппа Фиттинга.

ЛЕММА 4.2. *Пусть G – примитивная группа Белоногова, M – максимальная подгруппа группы G с $M_G = 1$ и $X = F(G)$. Тогда в том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа группы G является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G, когда $G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G и M – нильпотентная группа одного из порядков qr или q^2 $(r \neq p \neq q)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G – примитивная группа Белоногова, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G. Поскольку G – ненильпотентная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа нильпотентна, то каждая собственная подгруппа из G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, причем каждая подгруппа Шмидта максимальна в G.

Так как G является примитивной разрешимой группой, то по [11, A, теорема 15.6], $G = [P]M$, где $P = C_G(P) = F(G) = O_p(G) = X$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Предположим вначале, что группа $G/P \approx M$ нильпотентна. Допустим, что каждая максимальная подгруппа группы G, строго содержащая P, нильпотентна. Тогда ввиду нильпотентности M мы имеем $M_G \neq 1$, что противоречит условию. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из G, строго содержащая P, является группой Шмидта. Так как M нильпотентна и ввиду [11, A, теорема 15.6] $O_p(M) = 1$, то p не делит $|M|$. Это влечет, что группа M содержит не более двух силовских подгрупп и $|M|$ делится не более чем на два необязательно различных простых числа. Следовательно, либо $|M| = qr$, либо $|M| = q^2$, либо $|M| = q$.

Допустим, что $|M| = q$. Тогда ввиду условия каждая максимальная подгруппа P_1 из P является P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G. Это означает, что P_1M является подгруппой в G. Так как M максимальна в G и $M \leq MP_1 < G$, то $|P| = p$. В этом случае группа G является группой Шмидта, что противоречит определению группы Белоногова.

Таким образом, в случае, когда $G/P \approx M$ нильпотентна, мы имеем $G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G и M – нильпотентная подгруппа одного из порядков qr или q^2, где p, q, r – различные простые числа.

Теперь предположим, что группа $G/P \approx M$ не является нильпотентной. В этом случае группа $G/P \approx M$, согласно лемме 2.3, является сверхразрешимой группой Шмидта.

Допустим, что M является сверхразрешимой группой Шмидта и p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$, Q и R – силовские q-подгруппа и r-подгруппа в G соответственно. Так как при этом $|Q| = q$ (см. лемму 2.1(2)), то R является 2-максимальной подгруппой в G. Ввиду условия R является P-перестановочной с силовской r-подгруппой R^q для всех $q \in Q$. Это означает, что R^fR^q является подгруппой в G для любого $q \in Q$ и некоторого $f \in P$. Но тогда PR^fR^q также является подгруппой в G, что в силу максимальности PR^f в G влечет $R^q \leq PR^f$. Пусть $x = f_1q_1r_1 \in G$ для некоторых $f_1 \in P$, $q_1 \in Q$ и $r_1 \in R$. Тогда $R^x = R^{q1f1} \leq PR^f$ и поэтому $R^G \leq PR^f$, что невозможно.

Теперь допустим, что M является сверхразрешимой группой Шмидта и p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M, соответственно. Ввиду [11, A, теорема 15.6] $O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, причем $|P_1| = p$. Так как $|Q| = q$, то подгруппа PP_1 является максимальной в G. Пусть T – максимальная подгруппа в силовской p-подгруппе PP_1 группы G и $P_1 \leq T$. Тогда ввиду условия T является P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G, и поэтому TQ – подгруппа в G. Так как $QP_1 \leq QT < G$ и QP_1 максимальна в G, то $P_1 = T$. Это в свою очередь означает, что PP_1 является абелевой группой порядка p^2, что противоречит $C_G(P) = P$.

Достаточность. Пусть $G = [P]M$, где P – минимальная нормальная p-подгруппа в G и $M = Q \times R$ – нильпотентная подгруппа порядка qr. Легко видеть, что группа G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы M, PQ и PR. Так как G – группа Белоногова, то каждая ее максимальная подгруппа является либо нильпотентной, либо группой Шмидта. Понятно, что PQ и PR – подгруппы Шмидта в G. Тогда группа G имеет в точности три класса 2-максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы P, Q и R.

Покажем, что каждая 2-максимальная подгруппа группы G является P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами в G. Для этого достаточно показать, что Q является P-перестановочной с подгруппой R^f для любого $f \in P$. Пусть f – произвольный элемент из P. Тогда в $P = F(G)$ существует элемент $t = (f)^{-1}$ такой, что $Q(R^f)^t = QR = RQ = (R^f)^tQ$. Следовательно, силовская q-подгруппа группы G является $F(G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами в G. Аналогично можно показать, что силовская r-подгруппа группы G является $F(G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами в G.

Случай, когда $|M| = q^2$, рассматривается аналогично. Таким образом, каждая 2-максимальная подгруппа группы G является $F(G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами в G. Лемма доказана.

Базируясь на утверждении леммы 4.2, в следующей теореме мы даем точную оценку p-длины группы Белоногова, при условии, что каждая ее 2-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами, где X – подгруппа Фиттинга.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть G – группа Белоногова и $X = F(G)$. Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G, то $l_p(G) = 1$ для всех простых p.*

Доказательство. Пусть G – группа Белоногова, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Поскольку G – ненильпотентная группа, то в ней существует максимальная ненормальная подгруппа M. Так как при этом G – разрешимая группа и $M \neq M_G$, то мы можем рассмотреть примитивную разрешимую факторгруппу G/M_G. Ввиду [11, A, теорема 15.6] $G/M_G = [F(G/M_G)](M/M_G)$, где $F(G/M_G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G/M_G. Покажем, что $l_p(G/M_G) \leq 1$ для всех простых p.

Если группа G/M_G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, то, очевидно, $l_p(G/M_G) \leq 1$ для всех простых p.

Допустим, что G/M_G – ненильпотентная группа, не являющаяся группой Шмидта. Тогда, очевидно, G/M_G является примитивной группой Белоногова. Ввиду условия и леммы 2.2(3) каждая 2-максимальная подгруппа группы G/M_G является $(F(G)M_G/M_G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G/M_G.

Рассмотрим следующие формально возможные случаи:

a) группа $F(G)$ содержится в M_G. В этом случае, очевидно, каждая 2-максимальная подгруппа группы G/M_G является $F(G/M_G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G/M_G;

b) группа $F(G)$ не содержится в M_G. Так как $F(G)M_G/M_G \approx F(G)/(M_G \cap F(G))$ и $F(G)/(M_G \cap F(G))$ нильпотентна, то $F(G)M_G/M_G \subseteq F(G/M_G)$. С другой стороны, $F(G/M_G)$ является минимальной нормальной погруппой в G/M_G, что влечет $F(G/M_G) = F(G)M_G/M_G$. Следовательно, каждая 2-максимальная подгруппа группы G/M_G является $F(G/M_G)$-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G/M_G.

Таким образом, группа G/M_G удовлетворяет условиям леммы 4.2, и поэтому G/M_G является группой одного из типов, описанных в этой лемме. Легко заметить, что в этом случае группа G/M_G имеет абелевы силовские подгруппы, и поэтому $l_p(G/M_G) = 1$ для всех простых p. Так как $\Phi(G) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных подгрупп группы G, то $l_p(G/\Phi(G)) = max\ \{l_p(G/M_G)\}$ (см. [15, VI, лемма 6.4]). Следовательно, $l_p(G/\Phi(G)) = 1$. Тогда ввиду [15, VI, лемма 6.4] $l_p(G) = l_p(G/\Phi(G)) = 1$ для всех простых p. Теорема доказана.

В следующей лемме мы даем полное описание примитивных групп Белоногова, в которых каждая 3-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами, где X – подгруппа Фиттинга.

ЛЕММА 4.4. *Пусть G – примитивная группа Белоногова, M – максимальная подгруппа группы G с $M_G = 1$ и $X = F(G)$. Тогда в том и только в том случае каждая* 3-*максимальная подгруппа группы G является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G, когда либо $|G| = pqr$, либо $|G| = pq^2$, либо $|G| = p^2q$ $(r \neq p \neq q)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G – примитивная группа Белоногова, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Поскольку G – ненильпотентная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа нильпотентна, то каждая собственная подгруппа из G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, причем каждая подгруппа Шмидта максимальна в G.

Так как G является примитивной разрешимой группой, то, по [11, A, теорема 15.6], $G = [P]M$, где $P = C_G(P) = F(G) = O_p(G) = X$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Предположим вначале, что группа $G/P \approx M$ нильпотентна. Допустим, что каждая максимальная подгруппа группы G, строго содержащая P, нильпотентна. Тогда ввиду нильпотентности M мы имеем $M_G \neq 1$, что противоречит условию. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из G, строго содержащая P, является группой Шмидта. Так как M нильпотентна и ввиду [11, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$, то p не делит $|M|$. Это влечет, что группа M содержит не более двух силовских подгрупп и $|M|$ делится не более чем на два необязательно различных простых числа. Следовательно, либо $|M| = qr$, либо $|M| = q^2$, либо $|M| = q$ $(r \neq p \neq q)$.

Допустим, что $M = Q \times R$, где $|Q| = q$, $|R| = r$. Легко видеть, что в этом случае группа G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы M, PQ и PR. Понятно, что PQ является максимальной подгруппой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, и поэтому Q максимальна в PQ (см. лемму 2.1(2)). Ввиду условия каждая максимальная подгруппа P_1 из P является P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Это означает, что P_1Q является подгруппой в G. Но тогда $Q \leq QP_1 < QP$, что в силу максимальности Q в PQ влечет $|P| = p$. Таким образом, $|G| = pqr$.

Допустим, что $|M| = q^2$. Ввиду условия каждая максимальная подгруппа P_1 из P является P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Это означает, что P_1M является подгруппой в G. Так как M максимальна в G и $M \leq MP_1 < G$, то $|P| = p$. Таким образом, $|G| = pq^2$.

Допустим, что $|M| = q$. Тогда ввиду условия каждая 2-максимальная подгруппа P_2 из P является P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Это означает, что P_2M является подгруппой в G. Так как подгруппа M максимальна в G и $M \leq MP_2 < G$, то $|P| = p^2$. Таким образом, $|G| = p^2q$.

Теперь предположим, что группа $G/P \approx M$ не является нильпотентной. Так как M максимальна в G, то она является группой Шмидта. В этом случае группа $G/P \approx M$ удовлетворяет условиям леммы 2.4, и поэтому либо M сверхразрешима, либо M изоморфна группе $SL(2,3)$.

Допустим, что M является сверхразрешимой группой Шмидта и p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$, Q и R – силовские q-подгруппа и r-подгруппа в G соответственно. Понятно, что M имеет точно два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы R и QR_1, где R_1 – максимальная подгруппа в R. Тогда группа G имеет точно три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $[Q]R$, PR и PQR_1. Если предположить, что подгруппа PR нильпотентна, то $R \subseteq C_G(P) = P$, что невозможно. Следовательно, PR – группа Шмидта. Легко видеть, что тогда $R_1 = 1$ и поэтому $|R| = r$. Так как при этом $|Q| = q$, то ввиду условия каждая максимальная подгруппа P_1 из P является P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Это означает, что P_1R является подгруппой в G. Но тогда $R \leq RP_1 < R[P]$, что в силу максимальности R в PR (см. лемму 2.1(2)) влечет $|P| = p$. Таким образом, $|G| = pqr$.

Теперь допустим, что M является сверхразрешимой группой Шмидта и p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M соответственно. По [11, A, теорема 15.6] $O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, причем $|P_1| = p$. Так как при этом $|Q| = q$, то подгруппа P является 2-максимальной в G. Следовательно, ввиду условия каждая максимальная подгруппа из P является

P-перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы G. Это влечет, что TQ является подгруппой в G для произвольной максимальной подгруппы T из P. Тогда $Q \leq TQ < PQ$. Легко заметить, что $[P]Q$ – максимальная подгруппа Шмидта группы G с абелевыми силовскими подгруппами. Это означает, что подгруппа Q максимальна в PQ (см. лемму 2.1(2)) и поэтому $T = 1$. Следовательно, PP_1 является абелевой группой порядка p^2, что в силу $C_G(P) = P$ приводит к противоречию.

Пусть теперь $M \approx SL(2,3)$ и p не делит $|M|$. Тогда $G = [P]([Q]R)$, где $[Q]R = M$, подгруппа Q изоморфна группе кватернионов порядка 8 и $|R| = 3$. В этом случае $P\Phi(Q)R$ является максимальной подгруппой группы G (см. лемму 2.1(3)). Понятно, что эта подгруппа является нильпотентной и поэтому $\Phi(Q) \subseteq C_G(P) = P$, что невозможно.

Теперь предположим, что $M \approx SL(2,3)$ и p делит $|M|$. Тогда $G = [P]M$, где $M = QP_1$, Q и P_1 – силовские q-подгруппа и p-подгруппа в M соответственно. По [11, A, теорема 15.6], $O_p(M) = 1$ и поэтому $M = [Q]P_1$, где Q изоморфна группе кватернионов порядка 8 и $|P_1| = 3$. Но тогда PQ является максимальной подгруппой в G. Понятно, что PQ ненильпотентна и поэтому PQ – подгруппа Шмидта в G. Но тогда Q является циклической (см. лемму 2.1(1)), противоречие.

Достаточность. Очевидно. Лемма доказана.

Основываясь на утверждении леммы 4.4 и рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 4.3, в следующей теореме мы даем точную оценку p-длины группы Белоногова при условии, что каждая ее 3-максимальная подгруппа является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами, где X – подгруппа Фиттинга.

ТЕОРЕМА 4.5. *Пусть G – группа Белоногова и $X = F(G)$. Если каждая 3-максимальная подгруппа группы G является X-перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G, то $l_p(G) = 1$ для всех простых p.*

В заключение отметим следующие открытые вопросы в рассматриваемом нами направлении.

ВОПРОС 4.6. Каково полное описание групп Белоногова, в которых каждая вторая или каждая третья максимальная подгруппа X-перестановочна со всеми силовскими подгруппами, где X – разрешимая нормальная подгруппа?

ВОПРОС 4.7. Каково полное описание ненильпотентных групп, в которых каждая вторая или каждая третья максимальная подгруппа X-перестановочна со всеми силовскими подгруппами, где X – разрешимая нормальная подгруппа?

ЛИТЕРАТУРА

1. Redei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Redei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129 – 153.
2. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409 – 434.
3. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13 – 21.
4. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75 – 88.
5. Skiba, A.N. H-permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – Vol. 4(19). – P. 37 – 39.
6. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China. Serias A: Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 827 – 841.
7. Guo, W. X-semipermutable Subgroups of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31 – 41.
8. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
9. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull Math. – 2005. – Vol. 29, № 2. – P. 792 – 810.
10. Луценко, Ю.В. Конечные ненильпотентные группы с нормальными или S-квазинормальными n-максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Изв. Гомел. ун-та им. Ф. Скорины. – 2009. – № 1(52). – С. 134 – 138.
11. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
12. Gorenstein, D. Finite groups. – 2nd edn. / D. Gorenstein. – New York: Chelsea, 1980.
13. Miller, G.A. Monabelian groups in which every subgroup is abelian / G.A. Miller, H. Moreno // Trans. Am. Soc. – 1903. – № 4. – P. 398 – 404.
14. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21 – 32.
15. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert; Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.

Поступила 17.04.2009