Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

О. В. Голубева

С. Г. Ехилевский

Н. А. Гурьева

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс для студентов специальностей
1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»,
1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети»

Новополоцк
ПГУ
2011

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.1я73
Г62

Рекомендовано к изданию методической комиссией
факультета информационных технологий в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 5 от 12.04.2011)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра математики и методики преподавания математики
УО «МГПУ им. И.П. Шамякина»
(зав. каф., канд. пед. наук, доц. В.В. ПАКШТАЙТЕ;
канд. физ.-мат. наук, доц. М.И. ЕФРЕМОВА);
канд. техн. наук, доц. каф. технологий программирования УО «ПГУ»
А.Ф. ОСЬКИН

Голубева, О. В.

Г62 Дискретная математика : учеб.-метод. комплекс для студентов специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети» / О. В. Голубева, С. Г. Ехилевский, Н. А. Гурьева. – Новополоцк : ПГУ, 2011. – 188 с.

ISBN 978-985-531-225-4.

Изложены теоретические и практические основы изучаемого предмета. Представлены типовые задачи с решениями, задания для практических занятий, домашняя контрольная работа, вопросы к экзамену, рекомендуемая литература.

Предназначен для студентов технических специальностей.

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-531-225-4

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс «Дискретная математика» для студентов специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети» соответствует учебной программе по дисциплине «Дискретная математика» для технических специальностей высших учебных заведений, утвержденной Министерством образования РБ, и ориентирован на семестровый лекционно-практический курс.

В комплекс включены:

– лекционный курс, состоящий из трех разделов: «Множества. Логика Буля», «Графы», «Элементы комбинаторики»;

– практикум, содержащий решения типовых задач по каждому разделу и задания для самостоятельной аудиторной и домашней работы;

– домашняя контрольная работа (20 вариантов);

– экзаменационные вопросы;

– литература.

Структура УМК следующая. Лекционный курс состоит из трех тематических разделов, каждый из которых включает в себя до шести лекций. Они содержат основные понятия, определения и свойства, теоремы, алгоритмы, а также поясняющие примеры.

В лекционном курсе УМК используется следующая система ссылок и нумераций. Каждая лекция имеет свою нумерацию теорем, рисунков, ссылок. Практикум также состоит из трех, соответствующих лекциям, разделов. Каждый раздел разбит на отдельные практические занятия, которые представлены стандартным набором – решенные типовые задачи; задачи для самостоятельного решения в аудитории и дома (в основном они приводятся с ответами).

Коллектив авторов выражает глубокую благодарность рецензентам за ряд ценных советов и замечаний, способствовавших улучшению содержания рукописи.

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

РАЗДЕЛ I. МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА БУЛЯ

ЛЕКЦИЯ 1. МНОЖЕСТВО И СПОСОБЫ ЕГО ЗАДАНИЯ

Введение. Математика, в которой нет понятия непрерывности, предельного перехода, бесконечности, дифференцируемости и т.п., называется *дискретной*. Однако понятия «множество», «отношение», «функция» и близкие к ним являются основными как в классической «непрерывной», так и в дискретной математике.

Обычно к дискретной математике относят комбинаторику, теорию чисел, математическую логику, теорию алгебраических структур, теорию графов и сетей, теорию автоматов и некоторые другие области математических знаний. Эта дисциплина является математическим обеспечением для современных компьютерных и информационных технологий, к тому же составляет базу многих узкоспециализированных дисциплин, таких как «Комбинаторный анализ», «Методы и алгоритмы принятия решений», «Функциональное программирование», «Структуры и организация данных в ЭВМ», «Конструирование программ и языки программирования», «Методы оптимизации» и др.

Дискретная математика дает представление о новейших тенденциях в развитии математического инструментария, который помогает правильно мыслить, но ровно настолько, насколько учит этому, например, аналитическая геометрия: оба предмета дисциплинируют ум, однако не дают гарантированных алгоритмов проникновения в неизведанную реальность.

Понятие множества. Отношение между элементом и множеством. Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

Под *множеством* понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или мыслью. Так описал множество основатель теории множеств Георг Кантор[1].

►**Пример.** Множеством являются различные символы на этой странице. Кофейник, сахарница, чашки, блюдца образуют множество под на-

[1] Георг Кантор (1845, Санкт-Петербург – 1918, Галле) – немецкий математик. Создатель теории множеств, ввел понятия бесконечного и вполне упорядоченного множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных. Теорема Кантора фактически утверждает существование «бесконечности бесконечностей». Определил понятия кардинальных и порядковых чисел и их арифметику.

званием «сервиз». Сложение, умножение есть множество основных арифметических операций. ◄

Понятие множества принадлежит к числу первичных, фундаментальных понятий математики и поэтому не имеет строгого определения.

Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*.

►**Пример.** Буквы *а*, *б*, *в*, *г*, … являются элементами множества «алфавит». Числа 1, 2, 3, 4, 5, … – элементы множества натуральных чисел. ◄

Множества обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, … . Если нужно, используют индексы: A_1, C_3, … . Элементы множеств обозначаются малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, …, также при необходимости с индексами: b_1, c_4, … . Некоторые множества имеют общепринятые обозначения, например, **N** – множество натуральных чисел, **Z** – множество целых чисел, **Q** – множество рациональных чисел, **R** – множество действительных чисел, **C** – множество комплексных чисел.

Элемент x может находиться в отношении *принадлежности* со множеством X, то есть входить во множество X. Обозначается это так: $x \in X$ (x *принадлежит* X). Если x не является элементом множества X, то пишут $x \notin X$ (x *не принадлежит* X).

►**Пример.** Пусть A – множество делителей числа 12. Тогда $2 \in A$, а $5 \notin A$. ◄

Обычно множество имеет лишь один экземпляр одного и того же элемента. Если во множестве есть несколько экземпляров элемента, оно называется *мультимножеством*.

Сами множества могут быть элементами других множеств. Множество, элементами которого являются другие множества, называется *классом* или *семейством*. Семейства множеств обозначают большими «рукописными» буквами латинского алфавита: $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{I}$, ….

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается символом ∅.

►**Пример.** Множество людей, чей рост составляет 15 м, является пустым. ◄

Обычно в конкретных рассуждениях элементы всех множеств берутся из некоторого одного, достаточно широкого множества U (своего для каждого случая), которое называется *универсальным множеством* или *универсумом*.

Если число элементов множества конечно, то множество называется *конечным*, в противном случае – *бесконечным*.

►**Пример.** Множество персонажей сказок А.С. Пушкина – конечное, а множество натуральных чисел – бесконечное. ◄

<u>*Задание множеств.*</u> Чтобы задать множество X, нужно указать, какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать:

1) *перечислением элементов*: $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Например, список студентов группы. Порядок перечисления элементов может быть произвольным. Если элементов много, то перечислять их громоздко (множество рыб в океане конечно, но перечислить их трудно) или вообще невозможно (например, невозможно составить список всех четных чисел). Тогда множество X можно задать

2) *общим свойством* $P(x)$ *всех его элементов* x (или общим условием, которому должны удовлетворять все элементы множества): $X = \{x \mid P(x)\}$[2]. Свойство $P(x)$ называется *предикатом*. Оно выражено логическим утверждением, формулой или процедурой, возвращающей логическое значение, и позволяет распознать элементы данного множества из нескольких объектов любого происхождения.

Например, $X = \{x \mid x \in N,\ x + 5 = 1\}$ – множество натуральных чисел, удовлетворяющих условию $x + 5 = 1$ (пустое);

3) *порождающей процедурой*[3]: $X = \{x \mid x = f\}$. Она при запуске порождает некоторые объекты, являющиеся элементами X.

►**Пример.** Множество первых девяти натуральных чисел, заданное перечисленными способами:

$$M_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};$$

$$M_9 = \{n \mid n \in N \wedge n < 10\};$$

$$M_9 = \{n \mid \text{for } n \text{ from } 1 \text{ to } 9 \text{ yield } n\}. ◄$$

---

[2] Запись читается так: множество X состоит из элементов x, обладающих свойством $P(x)$. Такой же смысл имеет аналогичное обозначение $X = \{x : P(x)\}$.

[3] Этот способ лежит в основе конструктивизма – направления в математике, в рамках которого рассматриваются только те объекты, для которых известны процедуры (алгоритмы) их порождения. В конструктивной математике исключаются из рассмотрения некоторые понятия и методы классической математики, чреватые возможными парадоксами.

Замечания: 1. Множество целых чисел в диапазоне от m до n обозначают так: $m..n$, то есть $m..n = \{k \in Z \mid 0 \le k \wedge k \le n\}$.

2. Перечислением можно задавать только *конечные* множества. *Бесконечные* множества задаются предикатом или порождающей процедурой. Например, множество натуральных чисел задается порождающей процедурой так:

$$N = \{n \mid n := 0;\ \text{while true}\ \ n := n+1\ \ \text{do yield}\ n\ \ \text{endwhile}\}.$$

*Подмножества.* Множество A *содержится* во множестве B (множество B *включает* множество A), если каждый элемент A есть элемент B:

$$A \subset B.$$

В этом случае A называется *подмножеством* B, B – *надмножеством* A.

►**Пример.** Пусть задана некоторая совокупность предметов, которую после пересчета обозначим так:

$$V = \{1, 2, ..., 11\}.$$

Пусть несколько из этих предметов, например, 1, 2, 4, 6 имеют круглую форму, другие – 2, 3, 4, 8, 9 окрашены в белый цвет. Тогда множество V имеет два подмножества:

$$A = \{1, 2, 4, 6\} \quad \text{и} \quad B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$$

круглых и белых предметов.

Получается, что каждый элемент из V:

– либо не обладает ни одним из названных свойств: $C_0 = \{5, 7, 10, 11\}$;

– либо обладает только свойством A: $C_1 = \{1, 6\}$;

– либо обладает только свойством B: $C_2 = \{3, 8, 9\}$;

– либо обладает двумя свойствами A и B: $C_3 = \{2, 4\}$. ◄

Для изображения полученных множеств C_i $(i = 0, ..., 3)$ воспользуемся *диаграммой Эйлера*[4]*–Венна*[5] (рис. 1).

---

[4] Леонард Эйлер (1707, Швейцария – 1783, Российская империя) – швейцарский, немецкий и российский математик, автор более 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.

[5] Джон Венн (1834, Йоркшир – 1923, Кембридж) – английский математик и логик, автор частотного подхода к теории вероятностей, знаменитых диаграмм Венна, обоснования обратных операций в булевой логике. Диаграммы Венна применяются в современной теории «формальных нейронных сетей».

На этой диаграмме обычно универсальное множество U изображают прямоугольником, подмножества U – замкнутыми линиями.

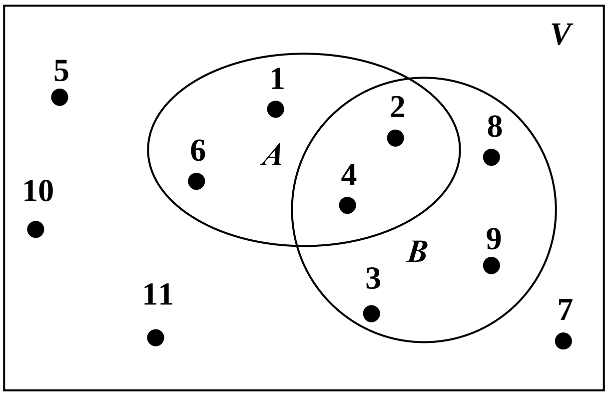


Рис. 1. Подмножества множества V

Два множества *равны,* если они состоят из одних и тех же элементов, то есть являются подмножествами друг друга:

$$A = B.$$

►**Пример.** Множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 2, 1\}$ равные. Множества $C = \{1, 2\}$ и $D = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ равные. ◄

Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным* подмножеством B. То, что подмножество A может совпадать с множеством B, обозначают так: $A \subseteq B$. В этом случае A называется *несобственным* подмножеством B.

►**Пример.** Рассмотрим универсальное множество U, состоящее из трех элементов $\{a, b, c\}$. Собственные подмножества U – это множества, которые содержат некоторые, но не все элементы U: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$. Пустое множество Ø и множество U называются несобственными подмножествами множества U. ◄

Для конечных множеств число его элементов называется *мощностью*. Мощность множества A обозначается как $|A|$. Например, $|\varnothing| = 0$, $|\{\varnothing\}| = 1$. Если $|A| = |B|$, множества называются *равномощными*.

Множество всех подмножеств множества M называется *булеаном* и обозначается 2^M:

$$2^M = \{A \mid A \subset M\}.$$

Теорема. Для конечного множества M справедливо равенство

$$\left|2^M\right| = 2^{|M|}.$$

►**Пример.** Булеан множества $A = \{1, \{1, 2\}\}$ имеет вид: $2^A = \{1, \{1, 2\}, \varnothing, \{1, \{1, 2\}\}\}$. Его мощность равна: $\left|2^A\right| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$. ◄

ЛЕКЦИЯ 2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ОПЕРАЦИИ ЛОГИКИ БУЛЯ

Способы образования новых множеств из имеющихся называются *операциями над множествами*.

Объединением множеств A *и* B называется множество $A \cup B$ элементов, принадлежащих либо A, либо B (либо обоим): $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (читается «объединение A и B»), где $\vee$ – символ логической связки «или», которая называется *дизъюнкцией*.

На диаграмме (рис. 1) заштриховано объединение трех подмножеств C_1, C_2 и C_3 множества $V = \{1, 2, ..., 11\}$, рассмотренного в примере лекции 1.

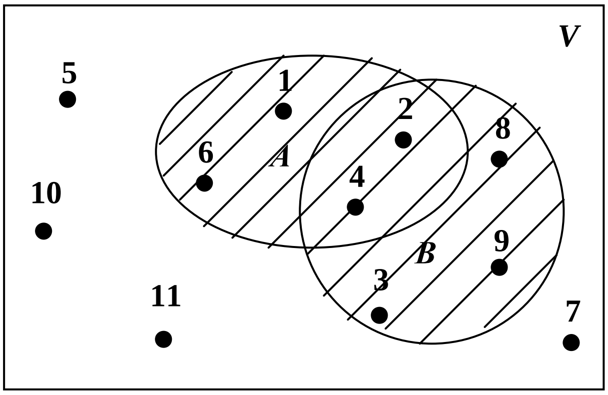


Рис. 1. Объединение множеств A и B

Принадлежность элемента x множеству $A \cup B$ можно задать с помощью двух логических переменных x_1 и x_2. Областью определения этих переменных являются не числа натурального ряда, как у предметной переменной x, а два логических значения: 1 – для истины, 0 – для лжи.

Допустим, $x = 7$. Это число не принадлежит ни A, ни B. В этом случае $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Эта комбинация соответствует C_0. Пусть $x = 4$. Это число принадлежит и A, и B. Поэтому $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, что отвечает C_3. Для $x = 6$ имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, для $x = 8$ имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Эти наборы значений логических переменных соответствуют C_1 и C_2.

Переменные x_1 и x_2 определяют логическую функцию $y = f(x_1; x_2)$ (называется *булевой* в честь английского математика Джорджа Буля[1]), которая в случае дизъюнкции имеет вид $y = x_1 \vee x_2$.

---

[1] Джордж Буль (1815, Англия – 1864, Ирландия) – английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка (ныне Университетский колледж в Корке). Основополагатель математики в логике.

Понятно, что при $x=7$ $y=0$, а при $x=4$, $x=6$, $x=8$ (эти числа – из заштрихованной области диаграммы, рис. 1) $y=1$. Это удобно записывать в виде таблицы, которая называется *таблицей истинности* (табл. 1).

Таблица 1

x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Между таблицей истинности и диаграммой Эйлера – Венна существует взаимно-однозначное соответствие. Поэтому число единиц для y всегда совпадает с числом заштрихованных областей на диаграмме. Четыре комбинации аргументов x_1 и x_2 будут отвечать четырем областям C_i. Кроме того, ясно, что число комбинаций нулей и единиц для функции y, а значит, и число операций на двух множествах равно 16.

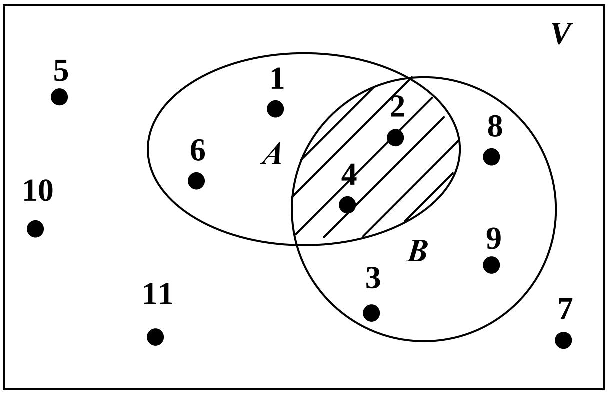


Рис. 2. Пересечение множеств *A* и *B*

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$ элементов, принадлежащих и A, и B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (читается «пересечение A и B»), где $\wedge$ – символ логической связки «и», которая называется *конъюнкцией*.

В примере с множеством $V = \{1, 2, ..., 11\}$ пересечением является одно множество C_3 (заштриховано на диаграмме, рис. 2).

Если в табл. 1 все нули заменить единицами, а все единицы – нулями, то получим таблицу истинности конъюнкции (табл. 2). Это отражает взаимную двойственность дизъюнкции и конъюнкции.

Таблица 2

x_1	x_2	$y = x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В общем, для любой логической операции существует двойственная. Представим, например, операцию, в результате которой оказались заштрихованными области C_1 и C_3, образующие A (рис. 3). Затем – другую операцию, охватывающую множества C_0 и C_2, не входящие в A (на рис. 4 это обозначено $\overline{A}$). Если объединить заштрихованные области обеих диаграмм, получим множество V, если их пересечь – множество $\varnothing$:

$$A \cup \overline{A} = V,\ A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

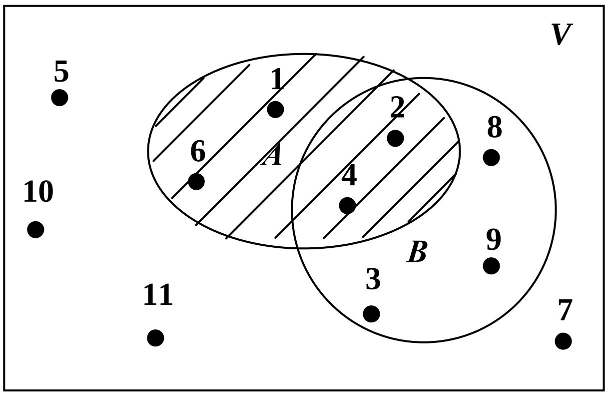


Рис. 3. Результат выделения множеств C_1 и C_3

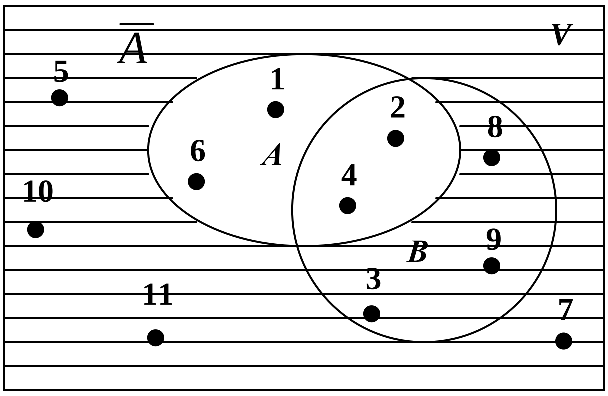


Рис. 4. Результат выделения множеств C_0 и C_2

Аналогичные равенства выполняются и для логических функций:

$y = x \vee \overline{x} = 1$ – *тавтология* (всегда истинное выражение);

$y = x \wedge \overline{x} = 0$ – *противоречие* (всегда ложное выражение).

Дополнением к множеству A называется множество $\overline{A}$ элементов, не содержащихся в A: $\overline{A} = \{\overline{x} \mid x \notin A\}$ (читается «дополнение множества A к U»). где $^{-}$ – символ логической связки «не», которая называется отрицанием. Дополнение к логической переменной x, то есть $\overline{x}$ (читается «не x»), называется *отрицанием* x.

Таблица 3

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Таблица истинности отрицания имеет вид табл. 3.

Все четыре области C_i теперь можно выразить так:

$$C_0 = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad C_1 = A \cap \overline{B}, \quad C_2 = \overline{A} \cap B, \quad C_3 = A \cap B.$$

Путем объединения соответствующих областей C_i можно представить любую множественную операцию, в том числе и само объединение:

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B).$$

Аналогично в логике:

$$y = x_1 \vee x_2 = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

Дополнения операций объединения и пересечения до универсального множества называются соответственно *стрелкой Пирса*[2] и *штрихом Шеффера*[3] (рис. 5, 6).

---

[2] Чарльз Сандерс Пирс (1839 – 1914, США) – американский философ, логик, математик, основоположник прагматизма и семиотики. Ввел в философию термин «фанерон», в логику – «стрелка Пирса», в картографию «проекция Пирса».

[3] Георг Шеффер (1779, Германия – 1836, Бразилия) – немецкий путешественник, натуралист, медик, авантюрист.

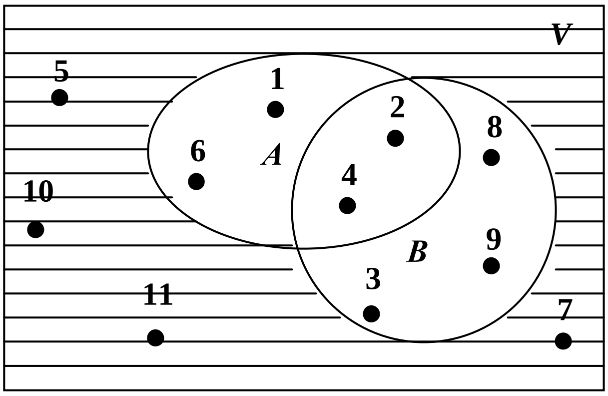


Рис. 5. Стрелка Пирса

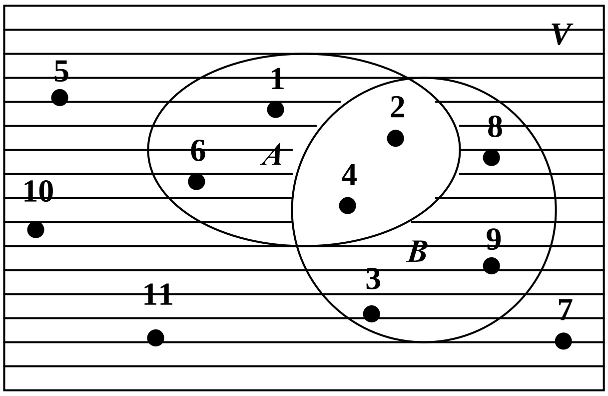


Рис. 6. Штрих Шеффера

Эти определения можно записать с помощью логических формул так:

для стрелки Пирса – $(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \downarrow x_2) = 1$, $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \downarrow x_2) = 0$;

для штриха Шеффера – $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \mid x_2) = 1$, $(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \mid x_2) = 0$.

Таблицы истинности этих операций имеют вид табл. 4 (стрелка Пирса) и табл. 5 (штрих Шеффера).

Таблица 4

x_1	x_2	$y = x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Таблица 5

x_1	x_2	$y = x_1 \mid x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Из таблиц истинности этих операций видно, что

$$y = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} = (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2});$$

$$y = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}).$$

Разностью множеств A *и* B называется множество $A \setminus B$ элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (читается «разность A и B»).

Например, для множеств $A = \{1, 2, 4, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ разность $A \setminus B$ есть множество $C_1 = \{1, 6\}$.

Диаграмма Эйлера – Венна разности приведена на рис. 7, таблица истинности разности – в табл. 6.

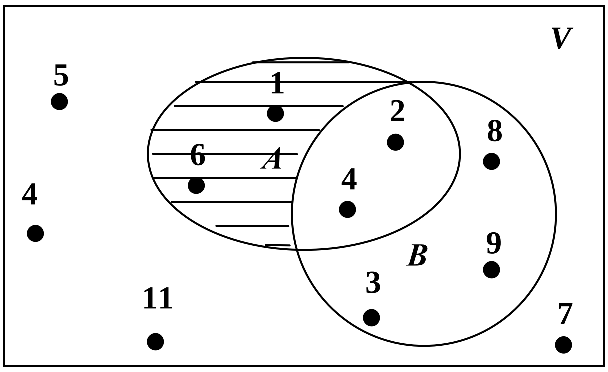


Рис. 7. Разность множеств *A* и *B*

Таблица 6

x_1	x_2	$y = x_1 \setminus x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Импликацией $A \to B$ называется дополнение операции разности множеств A и B до универсального множества (читается «если A, то B»).

Это определение можно записать с помощью логических формул так:

$$(x_1 \setminus x_2) \vee (x_1 \to x_2) = 1;$$

$$(x_1 \setminus x_2) \wedge (x_1 \to x_2) = 0.$$

Таблица истинности импликации имеет вид табл. 7.

Таблица 7

x_1	x_2	$y = x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Из нее видно, что

$$y = x_1 \to x_2 = \overline{x_1 \setminus x_2} = \overline{x_1} \vee x_2 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}).$$

Диаграмма Эйлера – Венна импликации приведена на рис. 8.

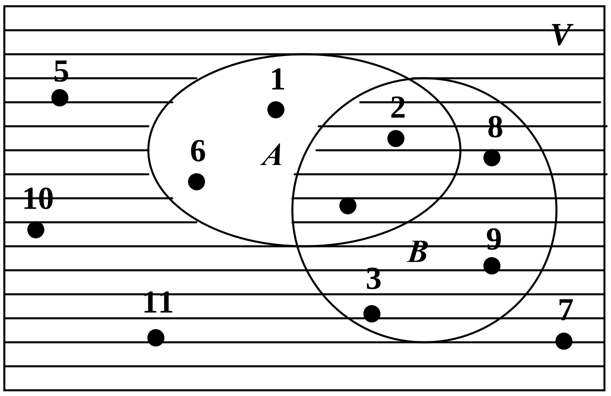


Рис. 8. Импликация *A* в *B*

Существуют еще две взаимно дополняющие операции над множествами.

Симметрической разностью множеств A и B называется объединение разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$: $A \oplus B = \{x \mid x \in ((A \setminus B) \vee (B \setminus A))\}$.

При $A = \{1, 2, 4, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ имеем:

$$A \oplus B = \{1, 6\} \cup \{3, 8, 9\} = C_1 \cup C_2 = \{1, 3, 6, 8, 9\}.$$

Эквивалентность определяется теми элементами множеств A и B, которые для них являются общими. Элементы, не входящие ни в A, ни в B, также считаются эквивалентными:

$$A \leftrightarrow B = \{x \mid x \in ((A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}))\}.$$

То есть $A \oplus B = C_0 \cup C_3 = \{2, 4, 5, 7, 10, 11\}$.

Из условия дополнительности операций вытекают следующие соотношения:

$$(x_1 \oplus x_2) \vee (x_1 \leftrightarrow x_2) = 1; \quad (x_1 \oplus x_2) \wedge (x_1 \leftrightarrow x_2) = 0;$$

$$y = x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \wedge x_2) \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}).$$

На рис. 9, 10 выделены штриховкой симметрическая разность и эквивалентность соответственно.

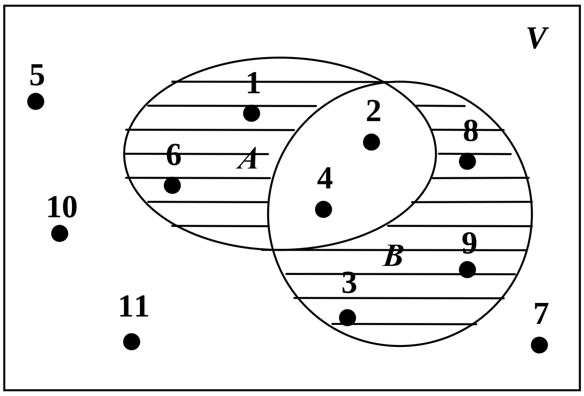


Рис. 9. Симметрическая разность *A* и *B*

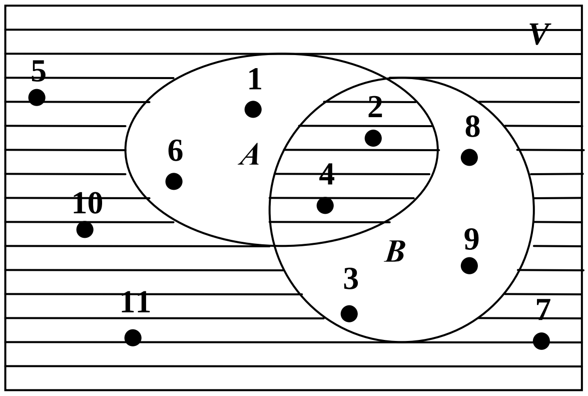


Рис. 10. Эквивалентность *A* и *B*

Табл. 8, 9 – таблицы истинности этих операций.

Таблица 8

x_1	x_2	$y = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблица 9

x_1	x_2	$y = x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Замечание. Симметрическая разность имеет несколько названий: *строгая дизъюнкция*, *исключающая альтернатива*, *сумма по модулю два*, *антиэквивалентность*. Эту операцию можно передать словами «либо A, либо B», то есть это логическая связка «или», но без включенной в нее связки «и».

ЛЕКЦИЯ 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Элементарные булевы функции. Логическая переменная x, принимающая одно из двух возможных значений, 0 или 1, называется *булевой*. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *n булевых переменных* называется *булевой*. Ее областями определения и значения является множество $\{0, 1\}$.

Любую булеву функцию можно задать *таблицей* (*истинности*), в которой перечисляются все наборы возможных значений переменных и для каждого такого набора указывается соответствующее значение функции.

Две булевы функции, принимающие одинаковые значения при одних и тех же наборах значений переменных, называются *равными*.

Набор значений переменных, на котором булева функция принимает значение 1, называется *единичным*.

Построим таблицу истинности булевой функции одной переменной (табл. 1).

Таблица 1

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Как видно из таблицы, булевых функций одной переменной – четыре.

Функции $f_1(x)$ и $f_4(x)$ называются *константами*, соответственно, 0 и 1.

Функция $f_2(x)$ совпадает с переменной x и называется *тождественной*:

$$f_2(x) = x.$$

Функция $f_3(x)$ принимает значения, противоположные значениям аргумента x, и называется *отрицанием* x, обозначается $\overline{x}$:

$$f_3(x) = \overline{x}.$$

Построим таблицу истинности булевых функций двух переменных $f_i(x_1; x_2) = f_i$, $i = 1, \ldots, 16$ (табл. 2).

Таблица 2

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Всего булевых функций двух переменных – шестнадцать, трех переменных – тридцать две и так далее. Понятно, что число булевых функций n переменных равно 2^{2^n}.

Как видно из табл. 2, к функциям двух переменных относятся и такие, которые зависят от одной переменной.

Функции $f_1 = 0$ и $f_{16} = 1$ есть *константы* 0 и 1.

Функции f_4, f_6, f_{11}, f_{13} существенно зависят только от одной переменной: $f_4 = x_1$, $f_6 = x_2$ – *тождественные* функции, $f_{11} = \overline{x_2}$, $f_{13} = \overline{x_1}$ – *отрицания*.

Остальные функции имеют следующие обозначения:

$f_2 = x_1 \wedge x_2$ – *конъюнкция*;

$f_8 = x_1 \vee x_2$ – *дизъюнкция*;

$f_{10} = x_1 \leftrightarrow x_2$ – *эквивалентность*;

$f_7 = x_1 \oplus x_2$ – *сумма по модулю два* или *сумма Жегалкина*;

$f_{12} = x_2 \to x_1$ – *конверсия*;

$f_{14} = x_1 \to x_2$ –*импликация*;

$f_{15} = x_1 \mid x_2$ – *штрих Шеффера*;

$f_9 = x_1 \downarrow x_2$ – *стрелка Пирса*;

функции f_3 и f_5 логически несовместимы с импликацией и конверсией, называются *функциями запрета*.

Булевы функции одной и двух переменных называются *элементарными*.

Свойства операций над множествами, свойства элементарных булевых функций

1. Идемпотентность объединения, пересечения:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A,$$

в частности,

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup U = U, \quad A \cap U = A.$$

Идемпотентность дизъюнкции, конъюнкции:

$$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x,$$

в частности,

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \wedge 1 = x.$$

2. Коммутативность объединения, пересечения:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативность дизъюнкции, конъюнкции:

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x.$$

Коммутативность показывает, что порядок записи переменных в дизъюнкции, конъюнкции может быть любым (аналог в алгебре чисел – сумма, произведение не зависят от порядка записи сомножителей, слагаемых). Коммутативными операциями также являются сумма по модулю два, стрелка Пирса, штрих Шеффера.

3. Ассоциативность объединения, пересечения:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Ассоциативность дизъюнкции, конъюнкции:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z;$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

Ассоциативность показывает, что порядок выполнения конъюнкции и дизъюнкции может быть произвольным. Ассоциативной также является операция сумма по модулю два.

4. Дистрибутивность объединения относительно пересечения и наоборот:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции и наоборот:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Дистрибутивность определяет правила раскрытия скобок. В алгебре чисел умножение дистрибутивно относительно сложения. Сумма по модулю два дистрибутивна.

5. Поглощение пересечения, объединения:

$$(A \cap B) \cup A = A, \quad (A \cup B) \cap A = A.$$

Поглощение конъюнкции, дизъюнкции:

$$(x \wedge y) \vee y = y, \quad (x \vee y) \wedge y = y.$$

Законы поглощения позволяют упрощать булевы функции.

6. Инволютивность (закон двойного дополнения):

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

7. Законы де Моргана[1] (двойственности):

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}, \qquad \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}.$$

Законы де Моргана устанавливают связь между дизъюнкцией и конъюнкцией.

8. Закон дополнения:

$$A \cup \overline{A} = U, \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Тавтология или закон исключения третьего (закон склеивания):

$$x \vee \overline{x} = 1.$$

Непротиворечивость:

$$x \wedge \overline{x} = 0.$$

Операции над булевыми функциями имеют следующий приоритет: наиболее сильная операция – отрицание, затем следует конъюнкция, потом – дизъюнкция, затем – импликация, затем – эквивалентность. Порядок выполнения других операций указывают скобки. Для упрощения записи знак конъюнкции можно не записывать по аналогии со знаком умножения в алгебре чисел. Например, законы де Моргана записываются так: $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$.

Чтобы доказать законы 1 – 8 и другие теоретико-множественные равенства, можно:

– *нарисовать диаграммы Эйлера – Венна левой и правой частей равенства и убедиться в том, что они совпадают;*

– *воспользоваться таблицей истинности;*

– *провести формальное рассуждение* по следующей схеме.

Пусть требуется доказать теоретико-множественное равенство $M = N$, где M и N – некоторые множества.

Первая часть доказательства состоит в том, чтобы показать, что если некоторый элемент принадлежит множеству M, то он также принадлежит множеству N. Этим будет доказана справедливость отношения $M \subset N$.

[1] Огастес де Морган (1806, Мадура, Индия – 1871, Лондон) – шотландский математик и логик; профессор математики университетского колледжа в Лондоне; первый президент Лондонского математического общества. Основные труды – по математической логике и теории рядов; к своим идеям в алгебре логики пришел независимо от Дж. Буля; изложил элементы логики высказываний и логики классов, дал первую развитую систему алгебры отношений; с его именем связаны известные теоретико-множественные соотношения (законы де Моргана).

Во второй части доказательства нужно показать, что если некоторый элемент принадлежит множеству N, то он также принадлежит множеству M. Этим будет доказана справедливость соотношения $N \subset M$. Тогда из того, что $M \subset N$ и $N \subset M$, следует, что $M = N$.

►**Пример.** Доказать включение $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$.

Решение. Изобразим диаграммы Эйлера – Венна для левой и правой частей (рис. 3, 4).

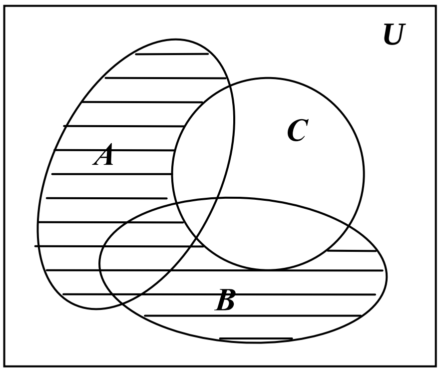


Рис. 3. Множество $(A \cup B) \setminus C$ выделено штриховкой

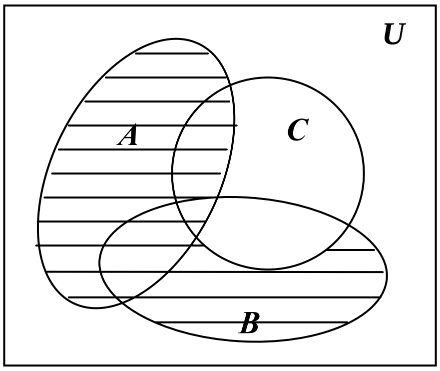


Рис. 4. Множество $A \cup (B \setminus C)$ выделено штриховкой

►**Пример.** Докажите справедливость тождества

$$(a \oplus b) \oplus (c \oplus d) = ((a \leftrightarrow b) \to (c \oplus d)) \wedge ((a \oplus b) \mid (c \oplus d))$$

с помощью таблицы истинности. Аналогично докажите коммутативность суммы по модулю два, стрелки Пирса, штриха Шеффера; ассоциативность суммы по модулю два.

Решение. Пусть

$$f_1 = a \oplus b;$$
$$f_2 = c \oplus d;$$
$$f_L = f_1 \oplus f_2;$$
$$f_3 = a \leftrightarrow b;$$
$$f_4 = f_3 \to f_2;$$
$$f_5 = f_1 \mid f_2;$$
$$f_R = f_4 \wedge f_5.$$

Таблица истинности имеет вид табл. 4.

Таблица 4

a	b	c	d	f_1	f_2	f_L	f_3	f_4	f_5	f_R
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Наборы значений из нулей и единиц для левой части f_L совпали с наборами правой части f_R, значит, исходное тождество верное.

В правильности тождества можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

На рис. 5, 6 изображены две операции – $a \oplus b$ и $c \oplus d$ из левой части тождества. В качестве исходных областей выберем эллипсы, тогда диаграмма будет содержать 16 областей (если выбрать круги, то диаграмма будет содержать 14 областей и будет неполной).

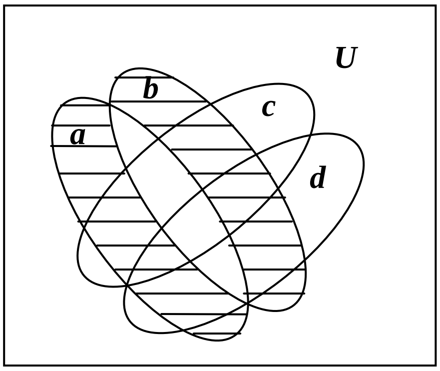


Рис. 5. $a \oplus b$

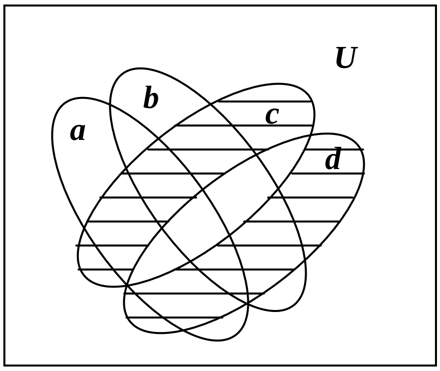


Рис. 6. $c \oplus d$

На рис. 7, 8, 9, 10 изображены диаграммы (последняя – результирующая), соответствующие операциям правой части тождества.

Такая же результирующая диаграмма получится при сложении по модулю 2 двух первых диаграмм: $(a \oplus b) \oplus (c \oplus d)$. Результирующие диаграммы левой и правой частей одинаковые, поэтому тождество – верное.

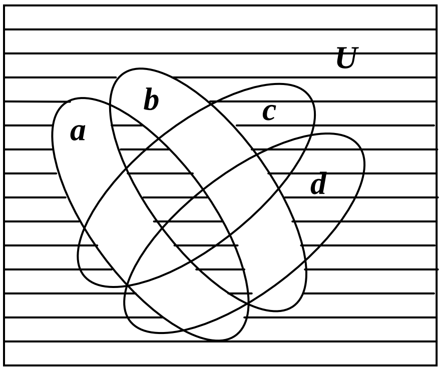


Рис. 7. $a \leftrightarrow b$

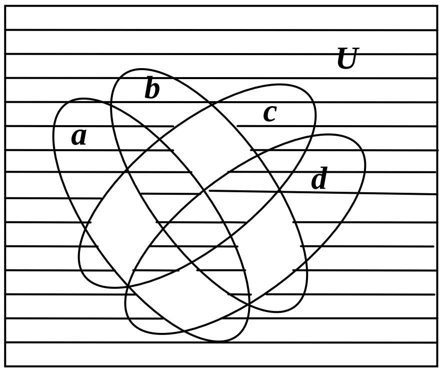


Рис. 8. $(a \oplus b) \,|\, (c \oplus d)$

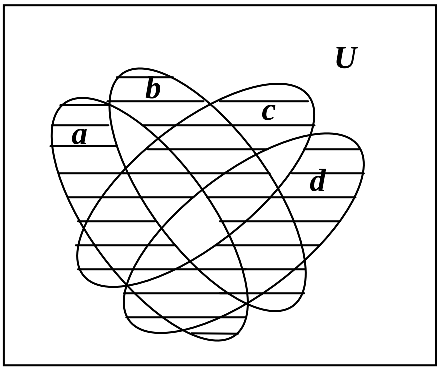


Рис. 9. $(a \leftrightarrow b) \to (c \oplus d)$

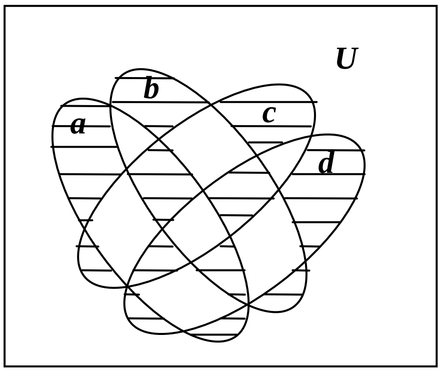


Рис. 10.
$(a \leftrightarrow b) \to (c \oplus d) \wedge ((a \oplus b) \,|\, (c \oplus d))$

Можно ставить обратную задачу, то есть по известной диаграмме находить отвечающее ей компактное аналитическое выражение.◄

►**Пример.** Дана диаграмма, изображенная на рис. 11. Найдем соответствующее ей аналитическое выражение.

Запишем аналитические выражения, соответствующие заштрихованным областям:

$$C_1 = a \wedge b \wedge \overline{c}, \quad C_2 = \overline{a} \wedge b \wedge c.$$

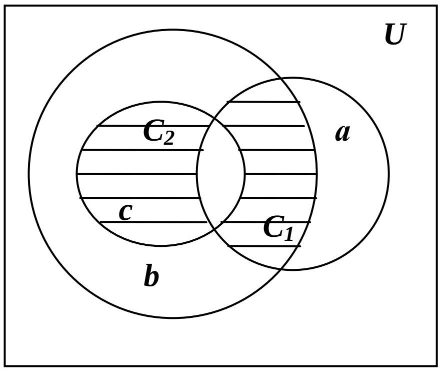


Рис. 11

Искомое выражение получается при объединении C_1 и C_2:

$$x = C_1 \vee C_2 = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \overset{\substack{\text{по законy} \\ \text{дистрибутивности}}}{=}$$

$$= b \wedge ((a \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge c)) \overset{\substack{\text{по определению} \\ \text{операции} \\ \text{антиэквивалентность}}}{=} b \wedge (a \oplus c). ◄$$

►**Пример.** Докажем первое равенство в законе 1 формальными рассуждениями:

$$A \cup A = A.$$

Решение. Возьмем элемент x такой, что $x \in A \cup A$. По определению операции объединения имеем $x \in A \vee x \in A$. В любом случае $x \in A$. Взяв произвольный элемент из множества в левой части равенства, обнаружим, что он принадлежит множеству в правой части. Отсюда по определению включения множеств получаем, что $A \cup A \subset A$.

Пусть теперь $x \in A$. Тогда, очевидно, $x \in A \vee x \in A$. Отсюда по определению операции объединения имеем $x \in A \cup A$. Таким образом, $A \subset A \cup A$. Следовательно, по определению равенства множеств $A \cup A = A$.◄

Аналогичные рассуждения нетрудно провести и для остальных свойств операций над множествами.

►**Пример.** Докажем один из законов де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. По определению операции дополнения имеем $x \notin A \cup B$, но $x \in U$. Следовательно, $x \notin A$ и вместе с тем $x \notin B$. Таким образом, $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B}$. Из определения операции пересечения получаем, что $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Учитывая произвольность элемента $x \in \overline{A \cup B}$, имеем

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Пусть теперь $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Тогда, очевидно, $x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}$. Таким образом, $x \notin A$ и $x \notin B$. Поэтому $x \notin A \cup B$.

Следовательно, $x \in U \setminus (A \cup B) = \overline{A \cup B}$. Поскольку x – произвольный элемент из $\bar{A} \cap \bar{B}$, то окончательно получаем

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Приходим к выводу, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Закон де Моргана $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ можно доказать иначе. «Умножим» обе части равенства справа (или слева) на скобку $x \vee y$:

$$(\overline{x \vee y}) \wedge (x \vee y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (x \vee y).$$

Так как $x \wedge \bar{x} = 0$, левая часть равенства равна нулю. Раскрывая скобки в правой части, также получаем нуль.

Замечание. По аналогии с этим доказательством «докажем» закон поглощения:

$$(x \vee y) \wedge y = y.$$

Обе части тождества «умножим» справа на скобку $x \vee y$:

$$((x \vee y) \wedge y) \wedge (x \vee y) = y \wedge (x \vee y).$$

Используя коммутативность конъюнкции и закон идемпотентности, получаем равенство

$$y \wedge (x \vee y) = y \wedge (x \vee y).$$

Однако такое доказательство ошибочно, так как произвольное «умножение» в логике недопустимо. Возможно только такое «умножение» и «сложение», которое отвечает законам нуля и единицы, то есть $x \wedge \bar{x} = 0$, $x \vee \bar{x} = 1$.

Возьмем, например, ложное равенство

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z).$$

Воспользуемся законом поглощения в виде

$$x = (x \wedge z) \vee x.$$

«Сложив» его с исходным выражением, получим

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee x = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee x,$$

что должно доказывать справедливость исходного выражения. Однако с помощью таблицы истинности (табл. 5) легко установить, что это не так.

Истинным равенством является

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z).$$

Таблица 5

x	y	z	$f_1 = x \wedge y$	$f_2 = \bar{x} \wedge z$	$f_3 = x \wedge z$	$f_R = f_1 \vee f_2$	$f_L = f_1 \vee f_2 \vee f_3$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

◄

ЛЕКЦИЯ 4. КОММУТАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

В 1938 году Клод Шеннон[1] заметил связь между электрическими цепями и таблицами истинности.

Рассмотрим схему переключения на рис. 1, состоящую из источника питания (рис. 2) и электрической лампочки (рис. 3).

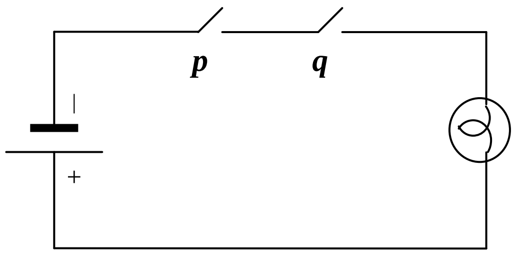


Рис. 1

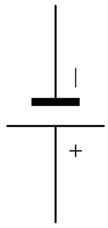


Рис. 2

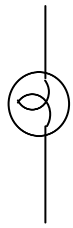


Рис. 3

Присвоим значение 1 переключателям p и q, если они замкнуты (то есть через них проходит электрический ток). В обратном случае присвоим им значение 0. Присвоим схеме значение 1, когда лампа светится (через нее проходит электрический ток). Заметим, что при последовательном соединении элементов цепи p и q (как на рис. 1) лампочка загорается только в случае, когда оба переключателя замкнуты, то есть схема имеет значение 1, если оба переключателя имеют значение 1. Таким образом, схема на рис. 1 соответствует конъюнкции $p \wedge q$ и называется *логическим элементом* p *и* q (схемой логического умножения). Этот логический элемент обозначается символом, показанным на рис. 4.

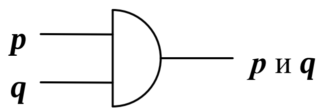


Рис. 4

[1] Клод Элвуд Шеннон (1916 – 2001, США) – американский инженер и математик, его работы – синтез математических идей с конкретным анализом сложных проблем их технической реализации. Основатель теории информации. Внес огромный вклад в теорию вероятностных схем, теорию автоматов, теорию систем управления в области наук, входящих в кибернетику.

Рассмотрим схему параллельного соединения переключателей p и q (рис. 5).

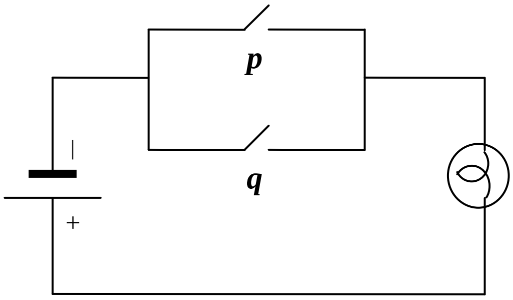


Рис. 5

Теперь лампочка загорается, а значение схемы равно 1, когда один из двух переключателей замкнут или в случае, когда оба переключателя замкнуты, то есть когда переключатели имеют наборы значений 10, 01, 11. Эта схема соответствует дизъюнкции $p \vee q$ и называется *логическим элементом* p *или* q (схемой логического сложения). Логический элемент p или q обозначается символом, показанным на рис. 6.

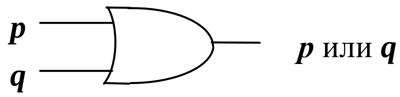


Рис. 6

Схема, состоящая из одного переключателя p такого, что лампа горит, когда он разомкнут, и не горит, когда он замкнут, соответствует отрицанию $\overline{p}$ и называется *логическим элементом не* или инвертором (рис. 7).

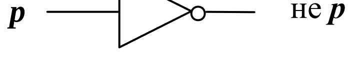


Рис. 7

►**Пример.** Схема на рис. 8 содержит логический элемент p *и* q, за которым следует *инвертор* так, что схема соответствует выражению $\overline{p \wedge q}$. Инвертор отрицает всю предшествующую ему схему.

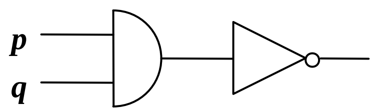


Рис. 8

◀

►**Пример.** Схема на рис. 9 содержит соединение логического элемента p *или* q с логическим элементом *не* r посредством логической схемы умножения. Значит, схеме соответствует выражение $(p \vee q) \wedge \overline{r}$.

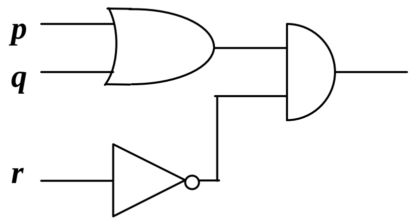


Рис. 9

◀

►**Пример.** Булево выражение, соответствующее схеме на рис. 10, имеет вид $(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{(p \wedge \overline{r})}$.

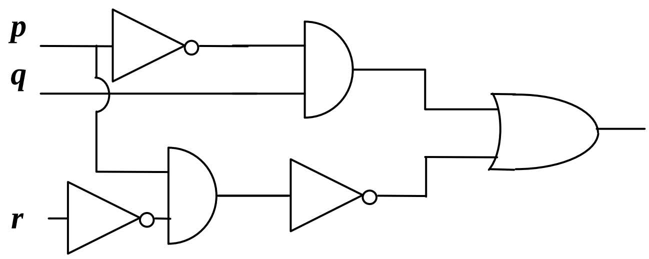


Рис. 10

◀

►**Пример.** Булево выражение, соответствующее схеме на рис. 11, имеет вид $(\overline{p} \wedge q) \vee r$.

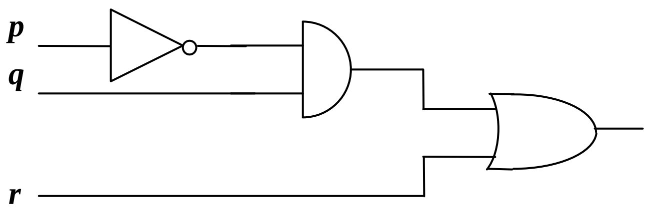


Рис. 11

◀

►**Пример.** Булево выражение, соответствующее схеме на рис. 12, имеет вид $((\overline{p \vee q}) \wedge (p \vee r)) \vee \overline{r}$.

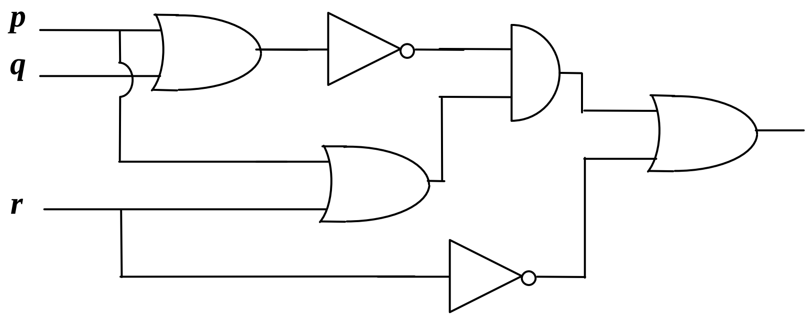


Рис. 12

◄

►**Пример.** Построим схему трехклавишного переключателя, при помощи которого свет включается тремя различными двухпозиционными переключателями. Рассмотрим сначала соответствующее булево выражение. Свет должен включаться, когда все три переключателя замкнуты, то есть нужно иметь $p \wedge q \wedge r$. Если один из переключателей разомкнут, то свет должен быть выключен. Однако если разомкнуть другой переключатель, то свет должен включиться. Следовательно, искомое выражение имеет вид

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r).$$

Для простоты вместо схемы на рис. 13 для выражения $p \wedge q \wedge r$ будем использовать схему, представленную на рис. 14.

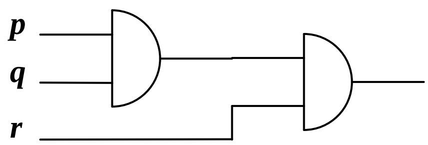


Рис. 13

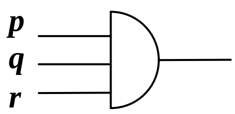


Рис. 14

А для выражения $p \vee q \vee r$ вместо схемы на рис. 15 будем использовать схему, представленную на рис. 16.

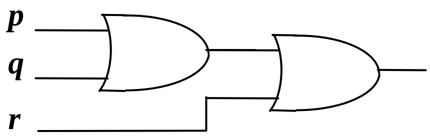


Рис. 15

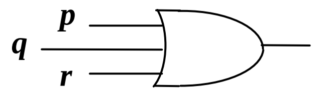


Рис. 16

Тогда искомая схема имеет вид, показанный на рис. 17.

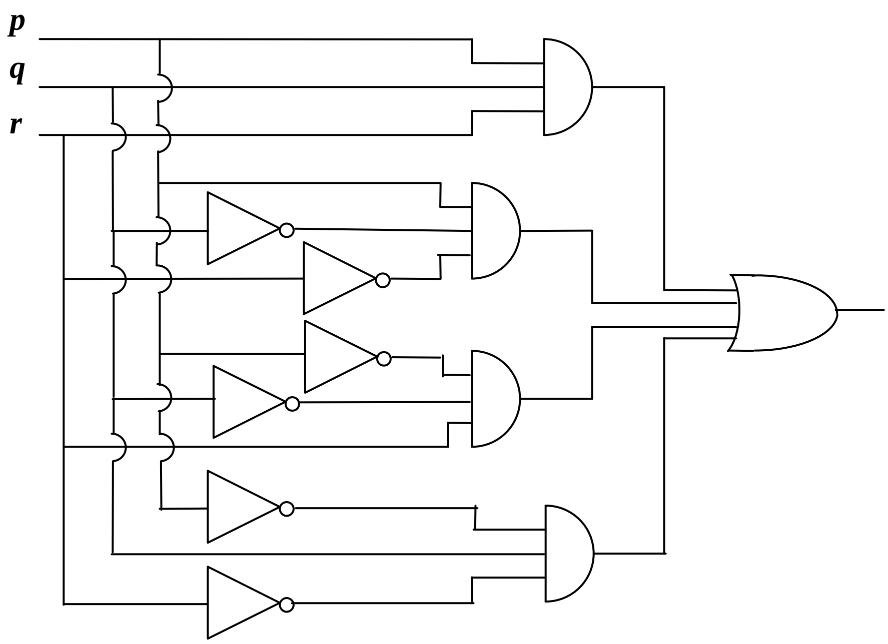


Рис. 17

◀

Из определения функции «штрих Шеффера» следует, что $p \mid q = \overline{p \wedge q}$. Поэтому штрих Шеффера называется логической связкой «*не и*». Из определения функции «стрелка Пирса» следует, что $p \downarrow q = \overline{p \vee q}$. Поэтому стрелка Пирса называется логической связкой «*не или*». Логические элементы «не и» и «не или» обозначаются символами, изображенными на рис. 18, 19 соответственно.

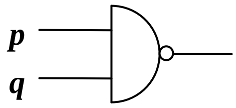


Рис. 18

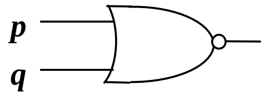


Рис. 19

Выражению $(p \mid q) \downarrow (p \mid r)$ соответствует схема, приведенная на рис. 20.

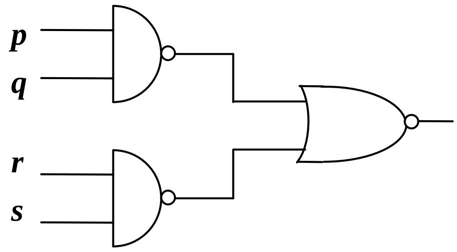


Рис. 20

►**Пример.** Полусумматор находит сумму двух двоичных чисел 1 и 0 согласно таблице сложения:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}.$$

Свое название полусумматор получил в связи с тем, что при сложении двоичных чисел с более чем одним разрядом суммируются только низшие разряды, поскольку нет возможности учесть в сумме число, которое «переносится». Для удобства суммирования одноразрядных двоичных чисел таблица, приведенная выше, преобразована к виду

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 00 & 01 \\ 1 & 01 & 10 \end{array}.$$

Пусть p и q означают числа, которые нужно сложить, а d_1 и d_0 – первый и второй разряд суммы, тогда получим следующие таблицы истинности:

случай	p	q	d_0	d_1
1	0	0	0	0
2	0	1	1	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1

Следовательно, $d_0 = (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) = (p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$, $d_1 = p \wedge q$. Коммутационная схема для полусумматора приведена на рис. 21.

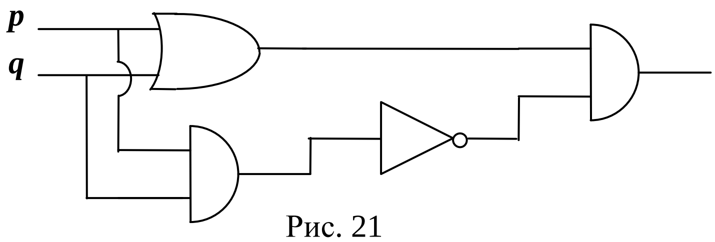


Рис. 21

Поскольку полусумматор дает сумму двух чисел, он обозначается символом, показанным на рис. 22.

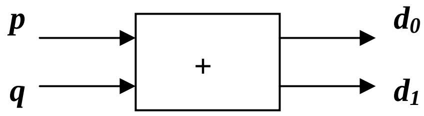


Рис. 22

◀

►**Пример.** Полный сумматор складывает три одноразрядных двоичных числа. Следовательно, он может сложить два двоичных числа с тем, которое «переносится». Пока это необходимо рассматривать как сложение трех одноразрядных двоичных чисел. Если предположить, что p, q и r обозначают числа, которые нужно сложить, а d_1' и d_0' – первый и второй разряды их суммы, то получим следующие таблицы истинности:

случай	p	q	r	d_1'	d_0'
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	1	0	1	0
8	1	1	1	1	1

;

d_0' – результат сложения d_0 с r, где d_0 – второй разряд суммы p и q.

Следовательно, схему сумматора легко описать. Значение d_1' проще получить с помощью полученной таблицы истинности:

$$d_1' = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) =$$

$$= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) =$$

$$= (p \wedge q) \vee ((p \vee q) \wedge r).$$

Соответствующая схема изображена на рис. 23.

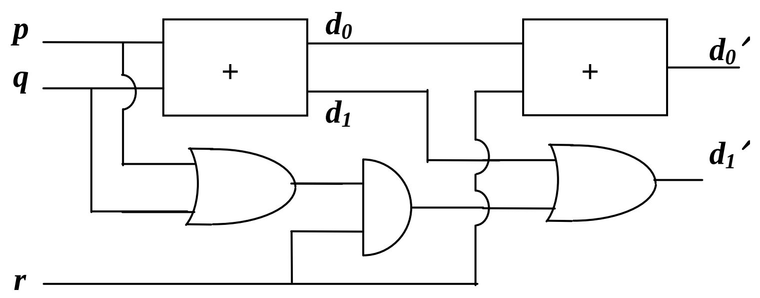


Рис. 23

Самостоятельно постройте подробную схему, соответствующую рис. 23. ◄

Поскольку полный сумматор складывает три числа, его обозначение имеет вид, показанный на рис. 24.

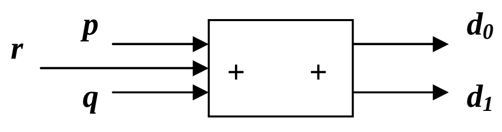


Рис. 24

ЛЕКЦИЯ 5. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Формы представления булевых функций двух переменных. Любую булеву функцию $y = f(x_1, x_2)$ можно представить как некоторую комбинацию областей (см. лекцию 1):

$$C_0 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}, \quad C_1 = x_1 \wedge \overline{x_2}, \quad C_2 = \overline{x_1} \wedge x_2, \quad C_3 = x_1 \wedge x_2.$$

Например,

$$f_7(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = C_1 \cup C_2 = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2);$$

$$f_5(x_1, x_2) = x_1 \setminus x_2 = C_1 = x_1 \wedge \overline{x_2}.$$

Наличие той или иной области C_i, $i = 0, 1, 2, 3$ (они называются «*конституентами*») в представлении функции зависит от значения функции:

$$y = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge f(0,0)) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge f(1,0)) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge f(0,1)) \vee$$
$$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge f(1,1)).$$

Такая форма представления булевой функции называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*СДНФ*).

В логике Буля действует *принцип двойственности*: при замене символов «$\wedge$» на «$\vee$» и «1» на «0» все логические равенства остаются в силе (см., например, лекцию 2, п. «Свойства операций над множествами, свойства булевых функций»). Поэтому СДНФ можно записать следующим образом:

$$y = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee f(1,1)) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee f(0,1)) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee f(1,0)) \wedge$$
$$\wedge (x_1 \vee x_2 \vee f(0,0)).$$

Эта форма представления булевой функции называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*СКНФ*). Здесь конституенты представлены не в виде *конъюнктов*, а в виде *дизъюнктов*, соединенных конъюнкцией (отсюда и соответствующее название).

СДНФ (СКНФ) обладает следующими свойствами:

1. Не содержит двух одинаковых конъюнкций (дизъюнкций).
2. Ни одна конъюнкция (дизъюнкция) не содержит одновременно двух одинаковых переменных.
3. Ни одна конъюнкция (дизъюнкция) не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание.
4. Каждая конъюнкция (дизъюнкция) содержит либо переменную x_i, либо ее отрицание $\overline{x_i}$ для всех переменных, входящих в формулу.

Если в СДНФ сделать замены

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2, \quad \overline{x_1} = 1 \oplus x_1,$$

то получим *совершенную полиномиальную нормальную форму* (*СПНФ*) представления булевых функций. Запишем ее, учитывая, что конституенты не пересекаются ($C_i C_j = 0$):

$$y = ((1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) f(0,0)) \oplus (x_1(1 \oplus x_2) f(1,0)) \oplus ((1 \oplus x_1) x_2 f(0,1)) \oplus$$
$$\oplus (x_1 x_2 f(1,1)) =$$
$$= f(0,0) \oplus x_1(f(0,0) \oplus f(1,0)) \oplus x_2(f(0,0) \oplus f(0,1)) \oplus$$
$$\oplus x_1 x_2 (f(0,0) \oplus f(1,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,1)).$$

Совершенные формы представления позволяют записать булеву функцию аналитически по ее известной таблице истинности.

►**Пример.** Записать СДНФ, СКНФ, СПНФ функции трех переменных, заданной таблицей истинности (табл. 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$f_1(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Решение. Выписывая соответствующие конъюнкты против единичных значений *f*, мы получим СДНФ:

$$f_{СДНФ} = x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\, \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Если выпишем дизъюнкты против нулевых значений *f*, то получим СКНФ:

$$f_{СКНФ} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

СПНФ образуем заменой в СДНФ «$\vee$» на «$\oplus$» и $\overline{x}$ на «$1 \oplus x$»:

$$f_{СПНФ} = x_1(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 (1 \oplus x_3) \oplus (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) x_3.$$

В последнем выражении раскроем скобки и взаимно сократим все одинаковые слагаемые, входящие в формулу четное число раз:

$$f_{СПНФ} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_2 x_3. \blacktriangleleft$$

В табл. 2 записаны все три совершенные формы всех элементарных функций двух переменных.

Таблица 2

$y=f(x_1,x_2)$	СДНФ	СКНФ	СПНФ
$f_1=0$	–	$(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(x_1\vee\overline{x_2})\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})$	0
$f_2=x_1\wedge x_2$	–	$(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(x_1\vee\overline{x_2})$	x_1x_2
$f_3=x_2\setminus x_1$	–	$\overline{x_1}\wedge x_2=(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})$	$x_2\oplus x_1x_2$
$f_4=x_1$	$(\overline{x_1}\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2)$	$(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee x_2)$	x_2
$f_5=x_1\setminus x_2$	–	$x_1\wedge\overline{x_2}=(x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee\overline{x_2})\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})$	$x_1\oplus x_1x_2$
$f_6=x_2$	$(x_1\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge x_2)$	$(x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee\overline{x_2})$	x_1
$f_7=x_1\oplus x_2$	$(x_1\wedge\overline{x_2})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2)$	$(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})$	$x_1\oplus x_2$
$f_8=x_1\vee x_2$	$(x_1\wedge\overline{x_2})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2)$	$x_1\vee x_2$	$x_1\oplus x_2\oplus x_1x_2$
$f_9=x_1\downarrow x_2$	–	$\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}=(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})$	$1\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_1x_2$
$f_{10}=x_1\Leftrightarrow x_2$	$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge x_2)$	$(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(x_1\vee\overline{x_2})$	$1\oplus x_1\oplus x_2$
$f_{11}=\overline{x_2}$	$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2)$	$(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})$	$1\oplus x_1$
$f_{12}=x_2\Rightarrow x_1$	$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2)$	–	$1\oplus x_1\oplus x_1x_2$
$f_{13}=\overline{x_1}$	$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge\overline{x_2})$	$(x_1\vee\overline{x_2})\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})$	$1\oplus x_2$
$f_{14}=x_1\Rightarrow x_2$	$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge x_2)=x_1\vee\overline{x_2}$	–	$1\oplus x_2\oplus x_1x_2$
$f_{15}=x_1\mid x_2$	$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge\overline{x_2})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2)$	–	$1\oplus x_1x_2$
$f_{16}=1$	$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge\overline{x_2})\vee(\overline{x_1}\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2)$	–	1

<u>*Полиномиальные представления.*</u> Булевы функции с операциями сложения по модулю 2 и конъюнкцией изучал русский математик Жегалкин[1]. Поэтому многочлен, являющийся суммой по модулю 2 константы и различных одночленов, в которые каждая из переменных входит не выше чем в первой степени, называется м*ногочленом Жегалкина*.

Многочлен Жегалкина константы равен самой константе; *многочлен Жегалкина булевой функции одной переменной* имеет вид

$$f(x) = a_0 \oplus a_1 x;$$

многочлен Жегалкина булевой функции двух переменных имеет вид

$$f(x_1; x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2;$$

многочлен Жегалкина булевой функции трех переменных имеет вид

$$f(x_1; x_2; x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus$$
$$\oplus a_{123} x_1 x_2 x_3$$

и так далее.

Коэффициенты $a_{1,\,2,\,\ldots,\,i}$ и свободный член a_0 принимают значения 0 или 1, а число слагаемых в формуле равно 2^n, где n – число переменных.

Используя соотношения

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1;$$
$$x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3;$$
$$x \oplus x = 0;$$
$$x \oplus 0 = x;$$
$$\overline{x} = 1 \oplus x,$$

можно записать булеву функцию в виде многочлена Жегалкина и затем упростить эту запись.

►**Пример.** Известно, что $f(0{,}0{,}0) = f(0{,}1{,}1) = f(1{,}0{,}1) = f(1{,}1{,}0) = 1$. Найти $f_{СПНФ}$.

Решение. СДНФ этой функции имеет вид

$$f_{СДНФ}(x_1; x_2; x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}.$$

Тогда

$$f_{СПНФ}(x_1; x_2; x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \oplus \overline{x_1} x_2 x_3 \oplus x_1 \overline{x_2} x_3 \oplus x_1 x_2 \overline{x_3} =$$
$$= (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus (1 \oplus x_1) x_2 x_3 \oplus x_1 (1 \oplus x_2) x_3 \oplus x_1 x_2 (1 \oplus x_3) =$$
$$= 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3. ◄$$

[1] Иван Иванович Жегалкин (1869, Российская империя – 1947, СССР) – российский и советский математик, логик. Самое известное его открытие – полином Жегалкина. Получил алгоритмическое решение проблемы разрешимости в некоторых важных случаях.

Теорема Жегалкина. Любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить в виде многочлена Жегалкина.

Сформулируем два алгоритма построения многочлена Жегалкина.

Любую функцию, отличную от константы 0, можно представить в виде СДНФ. Таблицы истинности дизъюнкции и суммы по модулю 2 отличаются только последней строкой, то есть на наборе 11. Так как в СДНФ на каждом наборе только одна конъюнкция равна 1, то все дизъюнкции можно заменить суммами по модулю 2. Кроме того, известно, что $\overline{x} = x \oplus 1$. На этом и основан
первый алгоритм построения многочлена Жегалкина:

1. Находим множество тех двоичных наборов, на которых функция принимает значение 1.
2. Составляем СДНФ.
3. В СДНФ каждый знак дизъюнкции меняем на знак суммы по модулю 2.
4. Упрощаем, если можно, полученное выражение, используя тождество $\overline{x_i} \oplus x_i = 1$.
5. В полученной формуле каждое отрицание $\overline{x_i}$ заменяем на $x_i \oplus 1$.
6. Раскрываем скобки в полученной формуле, содержащей только функции $\wedge$ и $\oplus$ и константу 1.
7. Приводим подобные члены, используя тождество $x_i \oplus x_i = 0$.

Используя метод неопределенных коэффициентов, получаем
второй алгоритм определения многочлена Жегалкина.

Составляем систему линейных уравнений относительно 2^n неизвестных коэффициентов, содержащую 2^n уравнений, решением которой являются коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_{1,2,...,n}$ многочлена Жегалкина.

►**Пример.** Для булевой функции трех переменных

$$f(x_1; x_2; x_3) = \overline{x_2} \wedge \left((x_1 \vee x_3) \mid \overline{(\overline{x_2} \mid \overline{x_3})}\right):$$

а) построить таблицу истинности, найти двоичную форму F булевой функции и привести функцию к СДНФ и СКНФ;

б) найти двумя способами многочлен Жегалкина.

Решение:

а) Обозначим $x_1 \vee x_3 = \varphi_1$; $\overline{x_2} \mid \overline{x_3} = \varphi_2$; $\overline{(\overline{x_2} \mid \overline{x_3})} = \overline{\varphi_2} = \varphi_3$,

$(x_1 \vee x_3) \mid \overline{(\overline{x_2} \mid \overline{x_3})} = \varphi_4 = \varphi_1 \mid \varphi_3$; $\overline{x_2} \wedge \left((x_1 \vee x_3) \mid \overline{(\overline{x_2} \mid \overline{x_3})}\right) = \overline{x_2} \wedge \varphi_4$.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Двоичная форма имеет вид:

$$F = 11000100.$$

Наборы, на которых $f(x_1;x_2;x_3)=1$, следующие:

$$(0;0;0),\ (0;0;1),\ (1;0;1).$$

Значит, СДНФ функции имеет вид:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3})\vee(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3).$$

Наборы, на которых $f(x_1;x_2;x_3)=0$, следующие:

$$(0;1;0),\ (0;1;1),\ (1;0;0),\ (1;1;0),\ (1;1;1).$$

СКНФ функции имеет вид:

$$f(x_1;x_2;x_3)=(x_1\vee\overline{x_2}\vee x_3)\wedge(x_1\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3})\wedge(\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3)\wedge$$
$$\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee x_3)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}).$$

б) Построим многочлен Жегалкина первым способом: в СДНФ функции

$$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3})\vee(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3)$$

заменяем знак дизъюнкции знаком суммы Жегалкина:

$$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3})\oplus(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge x_3)\oplus(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3),$$

из первой и второй конъюнкции выносим за скобки выражение $\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}$:

$$(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\wedge(\overline{x_3}\oplus x_3)\oplus(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge x_3)=(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})\oplus(x_1\wedge\overline{x_2}\wedge x_3);$$

делаем замены:

$$\overline{x_1}=x_1\oplus 1,\qquad \overline{x_2}=x_2\oplus 1.$$

Тогда

$$((x_1\oplus 1)\wedge(x_2\oplus 1))\oplus((x_1\wedge(x_2\oplus 1)\wedge x_3).$$

Далее раскрываем скобки:

$$x_1\wedge x_2\oplus x_2\oplus x_1\oplus 1\oplus x_1\wedge x_2\wedge x_3\oplus x_1\wedge x_3=$$
$$=x_1\wedge x_2\wedge x_3\oplus x_1\wedge x_2\oplus x_1\wedge x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1.$$

Многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f(x_1;x_2;x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$$

Построим многочлен Жегалкина методом неопределенных коэффициентов. Составляем восемь уравнений:

$f(0;0;0) = a_0 = 1,$ $\qquad a_0 = 1.$

$f(0;0;1) = a_0 \oplus a_3 = 1,$ $\qquad 1 \oplus a_3 = 1,$ $\qquad a_3 = 0.$

$f(0;1;0) = a_0 \oplus a_2 = 0,$ $\qquad 1 \oplus a_2 = 0,$ $\qquad a_2 = 1.$

$f(0;1;1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 0,$ $\qquad 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{23} = 0,$ $a_{23} = 0.$

$f(1;0;0) = a_0 \oplus a_1 = 0,$ $\qquad 1 \oplus a_1 = 0,$ $\qquad a_1 = 1.$

$f(1;0;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1,$ $\qquad 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13} = 1,$ $a_{13} = 1.$

$f(1;1;0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 0,$ $\qquad 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{12} = 0,$ $a_{12} = 1.$

$f(1;1;1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 0,$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123} = 0, \qquad a_{123} = 1.$$

Многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f(x_1;x_2;x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1. \blacktriangleleft$$

Линейные и нелинейные булевы функции. Многочлен Жегалкина называется *нелинейным*, если он содержит конъюнкции переменных, а если он не содержит конъюнкции переменных, то он называется *линейным*.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *линейной*, если ее многочлен Жегалкина имеет вид

$$f(x_1;x_2;...;x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n,$$

и *нелинейной* в противном случае.

Из определения многочлена Жегалкина следует, что для любой булевой функции коэффициенты при переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и свободный член вычисляются по формулам:

$$a_0 = f(0;0;...;0);$$

$$a_1 = f(0;0;...;0) \oplus f(1;0;...;0);$$

$$a_2 = f(0;0;...;0) \oplus f(0;1;0;...;0);$$

$$\ldots;$$

$$a_n = f(0;0;...;0) \oplus f(0;0;...;0;1).$$

На этом основан *алгоритм определения линейности (или нелинейности) булевой функции.*

1. По таблицам истинности функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и вышеуказанным формулам находим коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$.

2. Выписываем многочлен $\Phi(x_1; x_2; ...; x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n$ и проверяем, задает ли он эту функцию. Для этого строим таблицу истинности многочлена $\Phi(x_1; x_2; ...; x_n)$ и сравниваем ее с таблицей истинности функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если таблицы истинности совпадают, то функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ линейная и $\Phi(x_1; x_2; ...; x_n)$ – ее многочлен Жегалкина. Иначе функция нелинейная.

►**Пример.** Проверить на линейность функцию $f(x_1; x_2; x_3)$ с двоичным набором

$$F = 11100001.$$

Решение:

1. Применяем к функции $f(x_1; x_2; x_3)$ алгоритм проверки на линейность.

Вычислим коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 многочлена Жегалкина для этой функции:

$$a_0 = f(0;0;0) = 1;$$

$$a_1 = f(0;0;0) \oplus f(1;0;0) = 1 \oplus 0 = 1;$$

$$a_2 = f(0;0;0) \oplus f(0;1;0) = 1 \oplus 1 = 0;$$

$$a_3 = f(0;0;0) \oplus f(0;0;1) = 1 \oplus 1 = 0.$$

2. Вычисляем многочлен

$$\Phi(x_1; x_2; x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 = x_1 \oplus 1.$$

Очевидно, что двоичный набор $F = 11110000$ многочлена $\Phi(x_1; x_2; x_3) = x_1 \oplus 1$ не совпадает с двоичным набором булевой функции $F = 11100001$, следовательно, функция $f(x_1; x_2; x_3)$ нелинейна. ◄

ЛЕКЦИЯ 6. КЛАССЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

<u>*Классы булевых функций.*</u> Представление функций в СДНФ и СКНФ образовано тремя операциями – дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, а в СПНФ – сложением по модулю два, конъюнкцией и единицей как операцией. Возникает вопрос, через какие еще системы логических операций можно выразить произвольную булеву функцию? Чтобы ответить на него, определим пять классов функций.

Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *сохраняет константу* 0, если

$$f(0, 0, ..., 0) = 0.$$

Множество всех таких функций образует 0-*класс* (в частности, функции $f_1(x_1, x_2)$, …, $f_8(x_1, x_2)$ из табл. 2 лекции 2).

►**Пример.** Определить, принадлежит ли функция $f = x \oplus y$ 0-классу.

Решение. Так как $f(0, 0) = 0 \oplus 0 = 0$, то функция $f = x \oplus y$ принадлежит 0-классу. ◄

Булева функция f *сохраняет константу* 1, если

$$f(1, 1, ..., 1) = 1.$$

Множество всех таких функций образует 1-*класс* (в частности, функции с четным индексом $f_2(x_1, x_2)$, $f_4(x_1, x_2)$, … из табл. 2).

►**Пример.** Определить, принадлежит ли функция $f = x \vee y$ 1-классу.

Решение. Так как $f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$, то функция $f = x \vee y$ принадлежит 1-классу. ◄

Булева функция f называется *линейной*, если ее можно записать в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus ... \oplus c_n x_n,$$

где $c_k \in \{0, 1\}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Множество всех линейных булевых функций образует 2-*класс* (в частности, функция эквивалентность $f_{10}(x_1, x_2)$ линейная, так как $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$, а стрелка Пирса за счет нелинейного слагаемого $x_1 \wedge x_2$ нелинейная: $f_9(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \wedge x_2$).

Функция $g(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$ называется *двойственной к функции* f и обозначается f^*.

Например, $(x_1 \wedge x_2)^* = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = x_1 \vee x_2$. То есть, функция $x_1 \vee x_2$ – двойственная к $x_1 \wedge x_2$.

Таблицы истинности этих двойственных функций имеют вид:

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

x_1	x_2	$\overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Легко заметить, что для получения значения двойственной функции нужно «перевернуть» столбец значений исходной функции, а затем заменить в нем 0 на 1, а 1 – на 0.

►**Пример.** Найти двойственную функцию для f, имеющей двоичный набор $F = 0010$.

Решение. Так как $\overline{F} = 1101$, то двойственная функция равна $f^* = 1011$. ◄

Булева функция f называется *самодвойственной*, если она совпадает с двойственной себе функцией, то есть $f = f^*$.

Множество всех таких функций образует З-*класс* (например, функции $f_3(x_1, x_2)$, $f_4(x_1, x_2)$ из табл. 2 (лекция 2), функции $f = x$, $f = xy \vee xz \vee yz$).

Для самодвойственных функций необходимо и достаточно, чтобы на любых двух противоположных наборах значений переменных функция принимала разные значения.

►**Пример.** Определить, является ли функция f, имеющая двоичный набор:

а) $F = 10101110$;

б) $F = 01110001$,

самодвойственной.

Решение:

а) Так как значения на третьем месте в начале строки и на третьем месте в конце строки одинаковые (1), то функция f – не самодвойственная.

б) На первых местах в начале и в конце строки находятся противоположные числа (0 и 1), на вторых – противоположные числа (1 и 0), на третьих – противоположные числа (1 и 0), на четвертых – противоположные числа (1 и 0). Поэтому функция f – самодвойственная. ◄

Класс *монотонных функций* (4-*класс*) определяется неравенством $f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ при $x_1 \le x'_1$, $x_2 \le x'_2$, …, $x_n \le x'_n$.

Например, пусть $x_1 = 0$, $x'_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x'_2 = 1$, тогда для дизъюнкции имеем:

$$(x_1 \vee x_2 = 1) \le (x_1' \vee x_2' = 1).$$

Какие бы наборы x_1, x'_1, x_2, x'_2 мы ни брали, если выполняются условия $x_1 \le x'_1$, $x_2 \le x'_2$, то для дизъюнкции всегда $f \le f'$. Значит, дизъюнкция – функция монотонная.

►**Пример.** Определить, является ли монотонной функция, заданная двоичным набором $F = 01011001$.

Решение. Так как $(1, 0, 0) \le (1, 0, 1)$, а $f(1, 0, 0) = 1 > f(1, 0, 1) = 0$, то функция не является монотонной. ◄

Принадлежность элементарной функции к тому или иному классу отмечена единицей в табл. 1.

Таблица 1

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
4	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Базисные системы булевых функций. В логике Буля действует *принцип суперпозиции*: вместо аргументов любой булевой функции можно подставить другие булевы функции, в частности, аргументы.

►**Пример.** Суперпозиции функции «штрих Шеффера» $x_1 \mid x_2$ имеют следующий вид: $x_1 \mid x_1$, $x_1 \mid (x_1 \mid x_2)$, $x_1 \mid (x_2 \mid x_3)$ и так далее. Таким образом, суперпозиция функций одного аргумента порождает функции одного аргумента. *Суперпозиция функций двух аргументов дает возможность строить функции любого числа аргументов*. ◄

Множество булевых функций называется *замкнутым*, если в результате суперпозиции функций этого множества получаются функции из этого же множества.

Теорема 1. Каждый из классов булевых функций, а также множество всех булевых функций являются замкнутыми.

Система булевых функций называется *базисной (функционально полной)*, если в результате суперпозиции функций этой системы можно получить любую булеву функцию.

Теорема Поста[1]**.** Для того чтобы система булевых функций была базисной, необходимо и достаточно, чтобы она включала в себя хотя бы одну функцию, не принадлежащую 0-, 1-, 2-, 3- и 4- классам.

Другими словами, система функций является базисной, если она перекрывает нулями все строки 0-, 1-, 2-, 3- и 4- классов в табл. 2. Например, системы функций f_2, f_7, f_{16}; f_2, f_{11}; f_8, f_{11} – базисные.

Таким образом, ответом на поставленный выше вопрос является следующее утверждение*: для представления любой булевой функции достаточно использовать базисную систему элементарных булевых функций (например, систему из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции).*

►**Пример.** Проверить систему функций $\{\wedge, \bar{\ }\}$ на полноту.

Решение. Функция $\overline{x_1}$ не принадлежит 0-классу.

Функция $\overline{x_1}$ не принадлежит 1-классу.

[1] Эмиль Леон Пост (1897, Августов, Царство Польское (ныне Польша) – 1954, Нью-Йорк) – американский математик и логик; один из основателей многозначной логики; основные труды по математической логике – алгебра Поста, классы Поста функций алгебры логики; предложил абстрактную вычислительную машину – машину Поста.

Так как $0<1$, но $\overline{0}=1>\overline{1}=0$, то функция $\overline{x_1}$ не монотонная.

Функция $x_1 \wedge x_2$ не линейная.

Функция $x_1 \wedge x_2$ не самодвойственная.

Поэтому система функций $\{\wedge, \overline{\ }\}$ не содержится целиком ни в одном из пяти классов, следовательно, по теореме Поста $\{\wedge, \overline{\ }\}$ – полная система функций. ◄

►**Пример.** Проверить систему, состоящую из одной функции $\{|\}$, на полноту.

Решение. Так как $f(0,0)=0\,|\,0=1$, то функция $f(x_1, x_2)=x_1\,|\,x_2$ не принадлежит 0-классу.

Так как $f(1,1)=1|1=0$, то функция $f(x_1, x_2)=x_1\,|\,x_2$ не принадлежит 1-классу.

Так как $f(0,1)=0|1=1|0=f(1,0)$, то функция $f(x_1, x_2)=x_1\,|\,x_2$ не самодвойственная.

$(0, 0)\le(1,1)$, но $f(0,0)=0\,|\,0=1> f(1,1)=1|1=0$, поэтому функция $f(x_1, x_2)=x_1\,|\,x_2$ не монотонная.

Построим полином Жегалкина для штриха Шеффера методом неопределенных коэффициентов. Двоичная форма имеет вид F = 1110. Наборы, на которых $f(x_1,x_2)=1$, следующие: $(0, 0)$, $(0,1)$, $(1, 0)$. Составляем четыре уравнения:

$f(0,0)=a_0=1,$		$a_0=1.$
$f(0,1)=a_0\oplus a_2=1,$	$1\oplus a_2=1,$	$a_2=0.$
$f(1,0)=a_0\oplus a_1=1,$	$1\oplus a_1=1,$	$a_1=0.$
$f(1,1)=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_{12}=0,$	$1\oplus 0\oplus 0\oplus a_{12}=0,$	$a_{12}=1.$

Многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f(x_1,x_2)=1\oplus x_1x_2.$$

Поэтому функция «штрих Шеффера» не линейная. Из теоремы Поста следует, что штрих Шеффера образует полную систему функций. ◄

►**Пример.** Проверить систему функций $\{\vee, \oplus\}$ на полноту.

Решение. Так как обе функции принадлежат 0-классу ($0\vee=0,\ 0\oplus 0=0$), то система функций $\{\vee, \oplus\}$ не является полной.◄

РАЗДЕЛ II. ГРАФЫ

ЛЕКЦИЯ 7. ГРАФ И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ. ИЗОМОРФНОСТЬ ГРАФОВ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Во многих прикладных задачах рассматриваются связи между объектами – железнодорожное сообщение между городами, сети в электротехнике, различные промышленные и экономические системы и структуры. Условия и решения этих задач удобно представлять точками и линиями, их связывающими.

Граф и его элементы. Изоморфные графы. Множество V точек v_1, v_2, … и множество E линий $e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_2,v_3)$, …, которые соединяют эти точки, называется *графом* $G(V,E)$ или G.

На рис. 1 изображено множество точек V и множество линий E, соединяющих эти точки, которые все вместе образуют граф G.

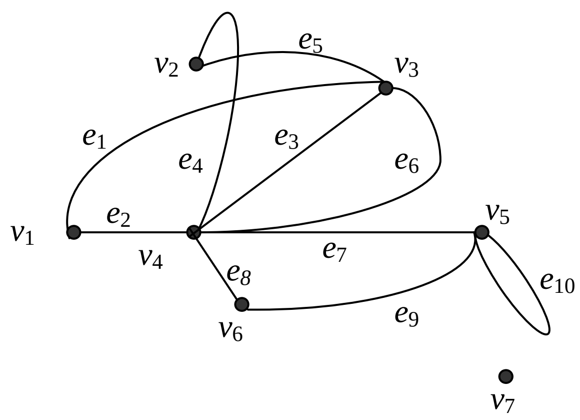


Рис. 1. Пример графа

Если линии имеют стрелки, то граф G' называется *ориентированным* или *орграфом* (рис. 2), иначе – *неориентированным* или *неорграфом*.

Линии в неориентированном графе G называются *ребрами*, а линии с направлениями в ориентированном графе G' – *дугами*. Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей* (ребро e_{10} на рис. 1). Ребра с одними и теми же концевыми вершинами называются *кратными* (например, ребра e_3 и e_6 на рис. 1).

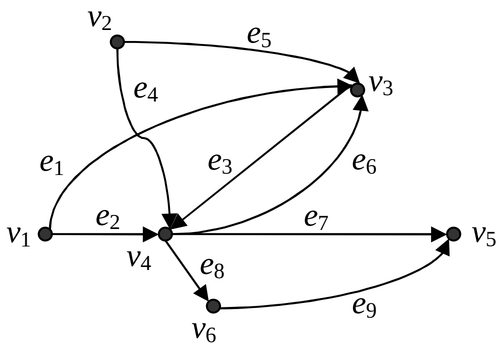


Рис. 2. Пример орграфа

Граф называется *помеченным*, если его вершины (ребра) отличаются друг от друга какими-либо пометками (графы на рис. 1, 2 – помеченные).

Вершины графа можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму линий, их соединяющих, один и тот же граф можно изобразить по-разному. В этом проявляется свойство *изоморфизма* графов.

Два графа G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если между множеством их вершин существует такое соответствие, что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только в том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. У изоморфных орграфов должны совпадать направления дуг.

Алгоритм распознавания изоморфизма двух графов $G_1(X, E)$ и $G_2(Y, E)$

1. Подсчитать число вершин каждого графа (если число вершин графов не совпадает, графы не изоморфны).

2. Выписать все элементы $x \in X$ и $y \in Y$ обоих графов по порядку и определить пары (x_i, x_j) и (y_i, y_j) для каждого элемента, где x_i, y_i – число выходов для каждой вершины графов $G_1(X, E)$ и $G_2(Y, E)$, а x_j, y_j – число входов для каждой вершины этих графов.

3. Для каждого элемента x графа $G_1(X, E)$ ищем такой элемент у графа $G_2(Y, E)$, для которого выполняется следующее условие: число выходов x совпадает с числом выходов y и число входов x совпадает с числом входов y. Найденные элементы x и y соединяем ребром, т.е. строим граф соответствия (если соответствия нет, то графы не изоморфны).

4. Выписываем подстановку, которая переводит граф $G_1(X, E)$ в граф $G_2(Y, E)$.

►**Пример.** Установите, изоморфны ли графы $G_1(X, E)$ и $G_2(Y, E)$, изображенные на рис. 3.

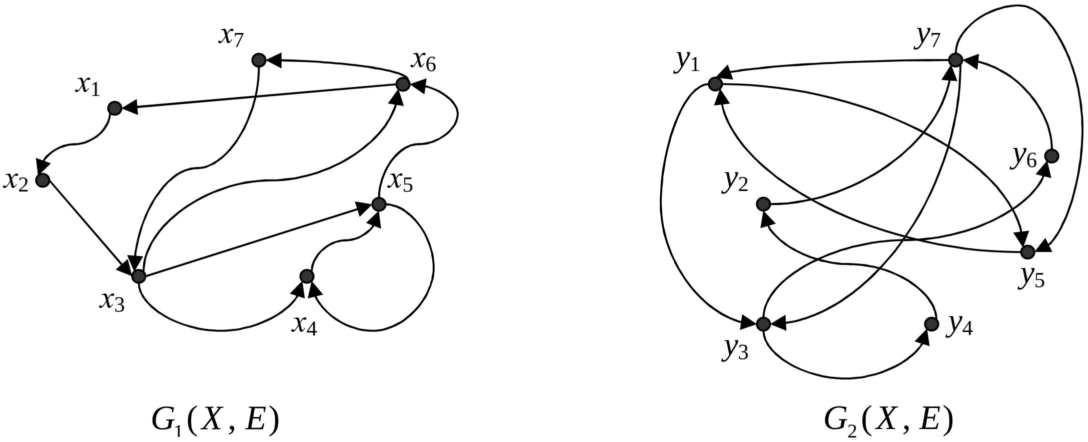


Рис. 3

Решение. Доказательством изоморфности графов является наличие перестановки, переводящей один граф в другой.

Запишем элементы $x \in X$ и $y \in Y$ с соответствующими им парами чисел, где первое число – количество выходов из вершины, второе – количество входов в вершину. Далее определим частичную подстановку, соединяя вершины x_i и y_i с одинаковыми числами (рис. 4).

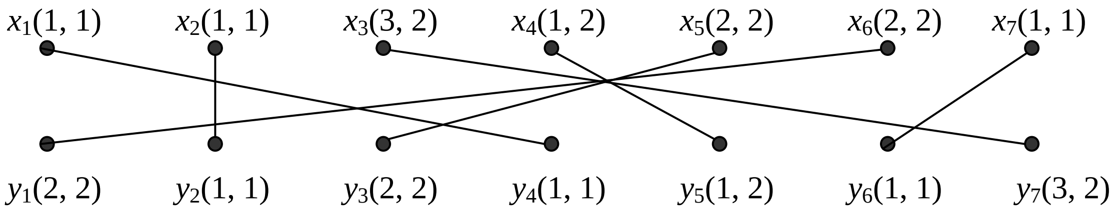


Рис. 4

В результате получим подстановку

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ y_4 & y_2 & y_7 & y_5 & y_3 & y_1 & y_6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, графы G_1 и G_2 изоморфны. ◄

Граф называется *псевдографом*, если в нем допускаются петли (ребро e_{10} на рис. 1) и кратные ребра (на рис. 1 ребра e_3 и e_6, соединяющие вершины v_3 и v_4). Псевдограф без петель называется *мультиграфом*.

Если вершины v_1 и v_2 соединены ребром $e = (v_1, v_2)$, то говорят, что вершины v_1, v_2 *смежные*, а ребро e *инцидентно* вершинам v_1 и v_2.

Два ребра, инцидентные одной вершине, также называются *смежными*. Если вершина не инцидентна никакому ребру, то она называется *изолированной* (вершина v_7 на рис. 1). Таким образом, смежность есть отношение между однородными элементами графа, а инцидентность – между разнородными.

Количество ребер, инцидентных вершине v, называется *степенью* вершины v и обозначается $d(v)$. Найдите степени вершин графа, изображенного на рис. 1.

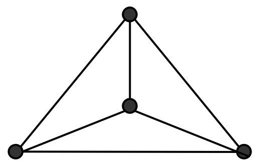


Рис. 5. Регулярный граф третьей степени

Степень изолированной вершины равна нулю. Если $d(v)=1$, то вершина v называется *висячей*. Если степени всех вершин равны k, то граф называется *регулярным* степени k. На рис. 5 изображен регулярный граф степени 3.

Одна и та же вершина орграфа может служить началом для одних дуг и концом для других, поэтому различают две степени вершины v орграфа: *степень выхода* $d^{-}(v)$ (число выходящих из вершины ребер) и *степень входа* $d^{+}(v)$ (число входящих в вершину ребер).

►**Пример.** Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый участник должен сыграть с остальными по одному разу). Покажите, что в любой момент найдутся два шахматиста, сыгравшие одинаковое число партий.

Решение. Поставим каждому шахматисту в соответствие вершину графа (их будет девять). Попарно соединим ребрами вершины, соответствующие шахматистам, уже сыгравшим между собой партию. Степень вершины равна числу партий, сыгранных шахматистом. Покажем, что во всяком графе с девятью вершинами всегда найдутся хотя бы две одинаковой степени.

Каждая вершина графа с девятью вершинами может иметь степень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Предположим, что существует граф G, все вершины которого имеют разную степень, то есть каждое из чисел последовательности 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 является степенью одной и только одной из его вершин. Но этого не может быть, так как если в графе есть вершина v_i степени 0, то в нем найдется вершина v_j со степенью 8. Эта вершина v_j должна быть соединена ребрами со всеми остальными вершинами графа, в том числе и с v_i, поэтому степень вершины v_i не может равняться 0. Таким образом, в графе с девятью вершинами не могут быть одновременно вершины степени 0 и 8.

Следовательно, найдутся хотя бы две вершины, степени которых равны между собой. Таким образом, доказано, что всегда найдутся хотя бы два шахматиста, сыгравшие одинаковое число партий. ◄

<u>*Способы задания графа.*</u> Существуют различные способы задания графа. Каждый из этих способов имеет свои преимущества и недостатки. Различные способы имеют различные области применения: в теоретических исследованиях, при представлении графов на компьютере, для решения некоторых классов задач и т.д. В аналитической форме графы чаще всего представляют либо *матрицей смежности*, либо *матрицей инцидентности*.

Матрицей смежности вершин орграфа G' с n вершинами называется квадратная матрица $A(G')$ n-ного порядка, у которой строки и столбцы соответствуют вершинам орграфа. Элементы a_{ij} матрицы $A(G')$ равны числу дуг, направленных из i-той вершины в j-тую. Если орграф состоит из однократных дуг, то элементы матрицы равны либо 0, либо 1.

У неорграфа ребра (v_i, v_j) и (v_j, v_i) не различаются, поэтому его матрица смежности вершин $A(G)$ симметрична относительно главной диагонали. Этим пользуются при компьютерном представлении графа, задавая только правую верхнюю половину матрицы смежности. Матрица смежности орграфа не симметрична относительно главной диагонали.

Неорграф G, изображенный на рис. 1, имеет следующую матрицу смежности вершин:

$$A(G)=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Для орграфа G', изображенного на рис. 2, матрица смежности вершин имеет вид:

$$A(G')=\left(\begin{array}{c|cccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Матрицей смежности дуг орграфа G' *с* m *дугами* называется квадратная матрица $B(G')$ m-ного порядка, у которой строки и столбцы соответствуют дугам орграфа. Элементы b_{ij} матрицы $B(G')$ равны 1, если дуга e_i непосредственно предшествует дуге e_j, и 0 в остальных случаях.

Матрицей смежности ребер неорграфа G *с* m *ребрами* называется квадратная матрица $B(G)$ m-ного порядка, у которой строки и столбцы матрицы соответствуют ребрам неорграфа. Элементы b_{ij} матрицы $B(G)$ равны 1, если ребра e_i и e_j имеют общую вершину, и 0 в остальных случаях.

Для неорграфа G (рис. 1) матрица смежности ребер имеет вид:

$$B(G)=\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для орграфа G' (рис. 2) матрица смежности имеет вид:

$$B(G')=\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матрицей инцидентности неориентированного помеченного графа G с n вершинами и m ребрами называется матрица $C(G)$ размерности $n\times m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элементы c_{ij} матрицы $C(G)$ равны 1, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и 0 в противном случае.

Для неориентированного графа G, изображенного на рис. 1, матрица инцидентности имеет вид:

$$C(G)=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В матрице инцидентности сумма единиц строки равна степени вершины v_i. Расположение вершин и ребер в этой матрице можно менять местами (транспонировать).

Для ориентированного помеченного графа G' с n вершинами и m ребрами элементы c_{ij} матрицы инцидентности $C(G')$ равны:

1, если в графе имеется дуга $e_j=(v_i,v_k)$, в которой вершина v_i – начальная;

–1, если в графе имеется дуга $e_j=(v_k,v_i)$, в которой вершина v_i – конечная;

0 – во всех других случаях.

Для орграфа G' (рис. 2) матрица инцидентности имеет вид:

$$C(G')=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

ЛЕКЦИЯ 8. ПОТОКИ В СЕТЯХ

Основные определения. Многие прикладные задачи связаны с транспортировкой объектов различной природы. Например, перевозка груза, пассажиров по транспортным магистралям; перекачивание воды, нефти, газа по трубопроводам; передача электричества по электросетям, информации – по каналам связи. Возникает вопрос, какова максимальная величина потока (машин, сообщений, жидкости и тому подобного), который может пропускать сетевая система в единицу времени.

Определим основные понятия.

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин существует соединяющая их последовательность ребер (дуг).

Сетью называется связный ориентированный граф без петель, каждой дуге которого поставлено в соответствие натуральное число – пропускная способность дуги – максимальное количество объектов, пропускаемых дугой в единицу времени.

Заметим, что на практике пропускная способность дуги необязательно выражается натуральном числом. Ограничение на тип числа, равного пропускной способности дуги, вызвано необходимостью математического моделирования реальной ситуации.

В сети выделим особые вершины: *источник* I – из него дуги только выходят и *сток* S – в него дуги только входят. Остальные вершины – *транзитные*.

Потоком назовем распределение по дугам объектов, пересылаемых от источника к стоку. Очевидно, что число объектов, пересылаемых по дуге (*расход*), ограничено ее пропускной способностью.

Величиной потока F является количество объектов, пересылаемых от источника к стоку в единицу времени.

На рис. 1 изображена сеть, имеющая источник I, сток S, транзитные вершины a, b, c, d; каждой дуге сети соответствует пропускная способность – число в скобках; некоторым дугам соответствует возможный расход – число без скобок.

Алгоритм решения задачи о максимальном потоке по сети с одним источником и одним стоком. Рассмотрим задачу о нахождении потока максимальной величины по сети с одним источником и одним стоком (рис. 1).

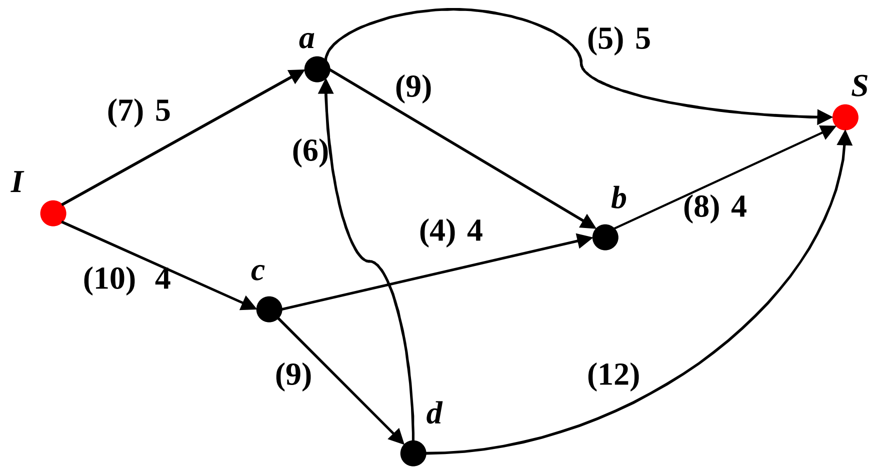


Рис. 1. Сеть с одним источником и одним стоком

Из закона сохранения материи следует:

– сумма расходов дуг, выходящих из источника, равна сумме расходов дуг, входящих в сток;

– для транзитной вершины сумма расходов дуг, входящих в вершину, равна сумме расходов дуг, выходящих из нее;

– максимальный расход последовательно соединенных дуг равен наименьшей из их пропускных способностей.

Если расход по дуге равен ее пропускной способности, *дуга* называется *насыщенной*. Любой *путь* от источника к стоку, в который включена такая дуга, называется *насыщенным*. *Поток* называется *насыщенным*, если все формирующие его пути из I в S – насыщенные.

Первая часть решения вышеназванной задачи как раз и состоит в нахождении насыщенного потока. Но насыщенный поток не всегда является максимальным. Поток в сети будет *максимальным*, если его величина $F_{\max}$ больше величины любого другого потока по этой сети. В таком случае величина $F_{\max}$ равна пропускной способности $C_{\min}$ минимального разреза сети, отделяющего источник от стока.

В связи с последним замечанием определим разрез сети. *Разрезом* называется множество R дуг сети, удаление которых блокирует все пути из источника в сток.

Пропускной способностью разреза $C(R)$ называется сумма пропускных способностей $c(x;y)$ входящих в него дуг: $C(R)=\sum\limits_{(x;y)\in R} c(x;y)$.

На рис. 2 сплошной кривой обозначен разрез сети R, состоящий из дуг $(a;S)$, $(b;S)$, $(d;S)$ и имеющий пропускную способность $C(R)=25$.

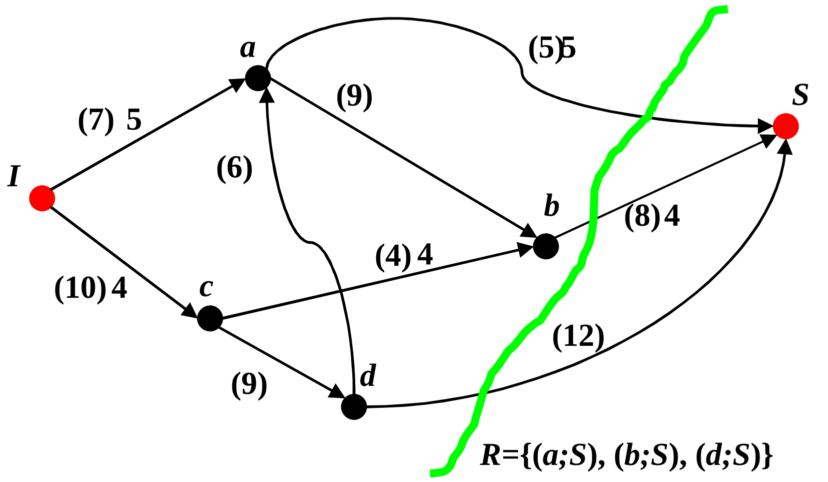


Рис. 2. Разрез сети

Разрез с наименьшей пропускной способностью $C_{\min}$ называется *минимальным*.

Сформулируем **теорему Форда[1]–Фалкерсона**: величина максимального потока по сети равна пропускной способности минимального разреза:

$$F_{\max} = C_{\min} .$$

Доказательство этой теоремы будем использовать в качестве *алгоритма нахождения величины максимального потока по данной сети с одним источником и одним стоком*.

Алгоритм состоит из двух частей:

1. *Насыщение потока:*

1.1. Формируем произвольный начальный поток.

1.2. Находим оставшиеся пути из I в S, имеющие только ненасыщенные дуги. Если такие пути найдены, то переход к п. 1.3, иначе – переход к п. 1.4.

1.3. Поток по найденному пути увеличим так, чтобы одна из дуг стала насыщенной.

1.4. Поток насыщен.

2. *Перераспределение потока:*

2.1. Рекурсивно помечаем все вершины сети. Вершину I пометим $-I$.

[1] Лестер Рэндольф Форд (младший) (1927, США) – американский математик, специализирующийся на вопросах потоков в сетях. Совместно с Д.Р. Фалкерсоном сформулировал и доказал теорему о величине максимального потока и минимальном разрезе, также совместно с Р. Беллманом придумал алгоритм поиска минимального остова графа с отрицательными весами дуг.

2.2. Пусть m – любая из уже помеченных вершин; n – произвольная непомеченная вершина, смежная с вершиной m. Вершину n пометим $+m$, если эти вершины соединены дугой с направлением $m \to n$, и пометим $-m$, если соединены *непустой* дугой с направлением $m \leftarrow n$. После пометки вершин вершина S окажется либо помеченной, либо непомеченной.

2.3. Вершина S оказалась помеченной. Значит, существует последовательность помеченных вершин от I к S. В этой последовательности каждая последующая вершина помечена буквой предыдущей вершины. На дугах последовательности определим новый поток следующим образом.

Вычислим наименьшую разницу δ между пропускной способностью и расходом дуг, входящих в последовательность. Увеличим на δ расход дуг, имеющих направление от I к S, и уменьшим на δ расход дуг, имеющих обратное направление.

Заметим, что поток можно увеличивать (уменьшать) по прямым (обратным) дугам до тех пор, пока одна из дуг не станет насыщенной (пустой). Далее снова переход к пометке вершин (п. 2.1).

Описанное перераспределение потока сохраняет все его свойства и увеличивает поток в вершину S на δ единиц.

2.4. Вершина S осталась непомеченной. Пусть A – множество всех помеченных вершин, B – множество всех непомеченных вершин. Тогда дуги, входящие в вершины множества B, насыщенные (они определяют разрез), а выходящие – пустые.

Таким способом находятся поток и разрез, удовлетворяющие условию теоремы Форда – Фалкерсона.

►**Пример.** Для данной сети (рис. 3) найти величину максимального потока и минимальный разрез.

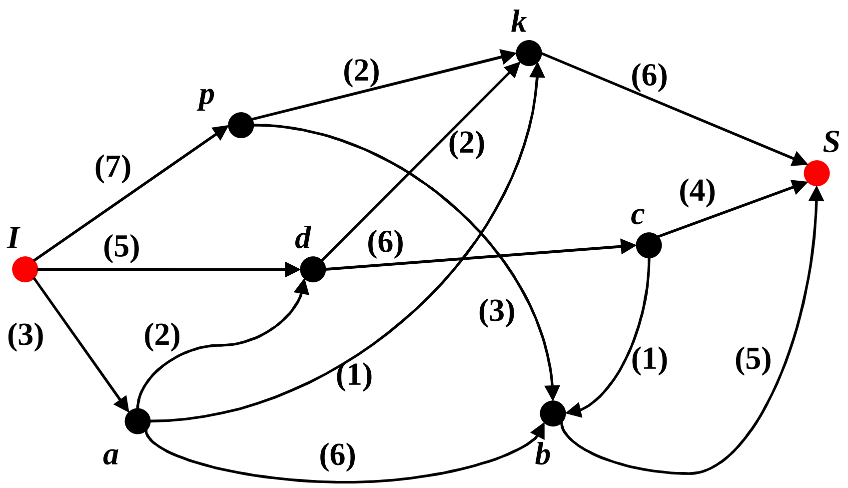


Рис. 3. Сеть

Решение. Сформируем насыщенный поток.

По пути $I \to p \to k \to S$ пропускаем 2 единицы, так как min {7; 2; 6}=2;
по пути $I \to d \to c \to S$ пропускаем 4 единицы, так как min {5; 6; 4}=4;
по пути $I \to a \to b \to S$ пропускаем 3 единицы, так как min {3; 6; 5}=3;
по пути $I \to p \to b \to S$ пропускаем 2 единицы, так как min{7-2;3;5-3}=2;
по пути $I \to d \to k \to S$ пропускаем 1 единицу, так как min {5-4;2;6-2}=1.

Выясним, является ли построенный насыщенный поток (обозначен числами без скобок на рис. 4) максимальным.

Пометим вершины в соответствии с п. 2.2 вышеприведенного алгоритма (рис. 4).

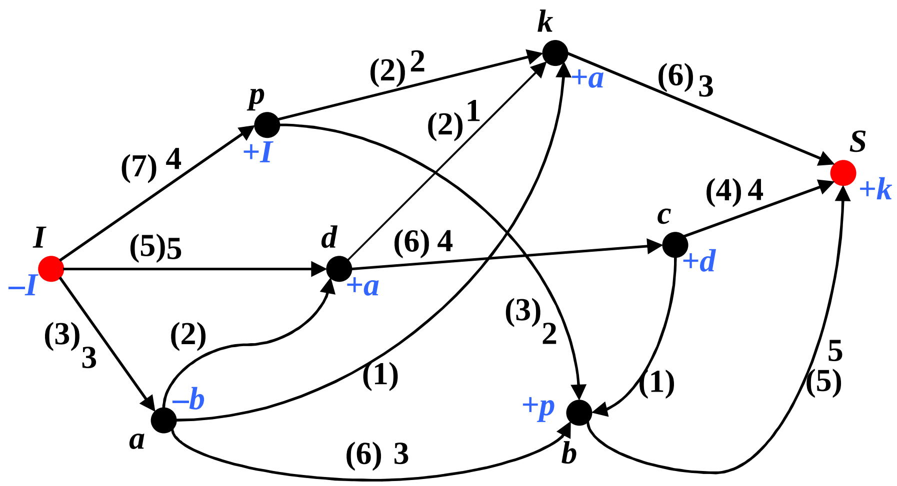


Рис. 4. Сеть с насыщенным потоком и помеченными вершинами

Вершина S оказалась помеченной. Последовательность помеченных вершин от I к S имеет вид: $I \to p \to b \leftarrow a \to k \to S$. Перераспределим поток на этом пути. Сначала вычислим число δ:

$$\delta = \min\{7-4;\ 3-2;\ 6-3;\ 1;\ 6-3\} = 1.$$

Увеличиваем на единицу расход дуг, имеющих направление от I к S: $(I;p)$, $(p;b)$, $(a;k)$, $(k;S)$. Уменьшаем на единицу расход дуг, имеющих обратное направление: $(a;b)$. Получаем сеть с новым сформированным по ней потоком (рис. 5).

Вновь помечаем вершины. Вершину I пометим $-I$. Смежную ей вершину p помечаем $+I$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I \to p$ (см. рис. 5). Все остальные вершины, в том числе и S, остаются непомеченными. Значит, поток на рис. 5 максимальный.

Помеченные вершины образуют множество $A=\{I;p\}$, непомеченные – множество $B=\{a;d;k;c;b;S\}$. Тогда минимальный разрез образуют насыщенные дуги $(p;k)$, $(p;b)$, $(I;d)$, $(I;a)$ (см. рис. 5).

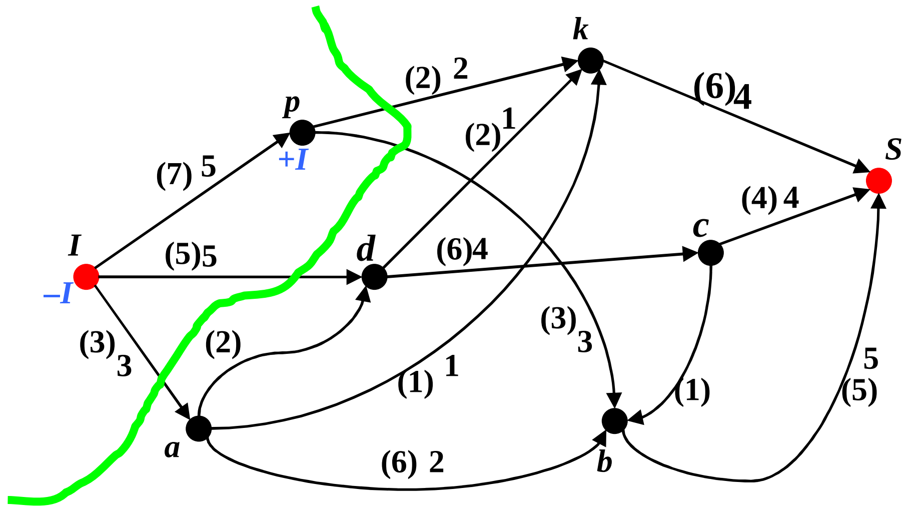


Рис. 5. Сеть с потоком максимальной величины и минимальным разрезом

Определим величину максимального потока по данной сети:

$$F_{\max}=C_{\min}=2+5+3+3=13. \blacktriangleleft$$

<u>Задача о максимальном потоке по сети с несколькими источниками и стоками.</u> Применить описанный выше алгоритм к сети с несколькими источниками и стоками непосредственно невозможно. Вначале сведем такую сеть к сети с одним источником и одним стоком. Для этого добавим к множеству имеющихся вершин две фиктивные – *субисточник* I_0 и *гиперсток* S_{n+1}.

Из субисточника I_0 выпустим по одной фиктивной дуге, соединяющей его с каждым фактическим источником I_1, …, I_l соответственно. Пропускная способность каждой такой фиктивной дуги должна быть равной сумме пропускных способностей фактических дуг, исходящих из соответствующего источника.

Аналогично поступаем в случае гиперстока S_{n+1}. Из каждого фактического стока S_{m+1}, …, S_n выпустим одну фиктивную дугу, входящую в гиперсток. Ее пропускная способность должна быть равной сумме пропускных способностей фактических дуг, входящих в соответствующий сток.

Такое формальное расширение сети не изменяет величину пропускаемого по ней потока, так как эту величину по-прежнему определяют пропускные способности ее исходных дуг.

Таким образом, задача о максимальном потоке по сети с несколькими источниками и стоками сводится к аналогичной задаче для сети с одним источником и одним стоком.

Рассмотрим практический пример, иллюстрирующий предложенную схему решения подобных задач.

►**Пример.** Места добычи нефти расположены в трех географических пунктах. Из мест добычи нефть транспортируется на четыре нефтеперерабатывающих завода через пять транзитных пунктов. Совокупность пунктов с соединяющими их коммуникациями изображена на рис. 6, дуги соответствуют трубопроводам, вершины – отдельным пунктам (местам добычи – I_1, I_2, I_3, станциям перекачки или железнодорожным станциям – T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, заводам – S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}). Пропускная способность коммуникаций обозначена числами в круглых скобках.

Требуется определить, какое максимальное количество нефти в единицу времени можно транспортировать из мест добычи на нефтеперерабатывающие заводы.

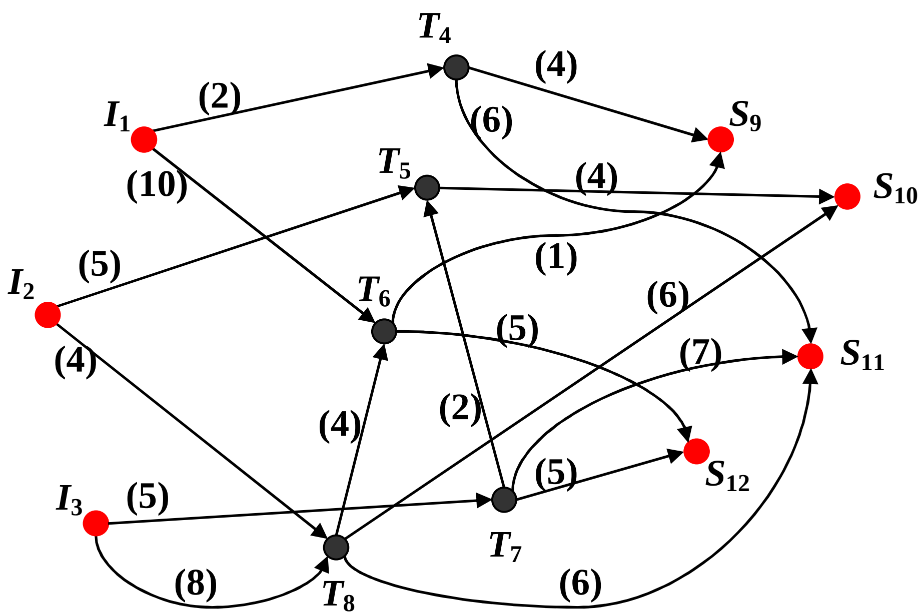


Рис. 6. Совокупность пунктов с соединяющими их коммуникациями

Решение. Решим эту задачу в три этапа. Первый – расширение сети, второй – создание насыщенного потока, третий – исследование полученного насыщенного потока на максимальность, определение минимального разреза и его пропускной способности, а, следовательно, и величины максимального потока.

Первый этап. Вводим фиктивную вершину – субисточник I_0. Соединяем I_0 с источником I_1 фиктивной дугой $(I_0;I_1)$ с пропускной способностью

$$c(I_0;I_1)=c(I_1;T_4)+c(I_1;T_6)=2+10=12.$$

Далее соединим I_0 с источником I_2 фиктивной дугой $(I_0;I_2)$ с пропускной способностью

$$c(I_0;I_2)=c(I_2;T_5)+c(I_2;T_8)=5+4=9.$$

Аналогично получаем фиктивную дугу $(I_0;I_3)$ с пропускной способностью

$$c(I_0;I_3)=c(I_3;T_7)+c(I_3;T_8)=5+8=13.$$

Фиктивные дуги на сети обозначим пунктиром (рис. 7).

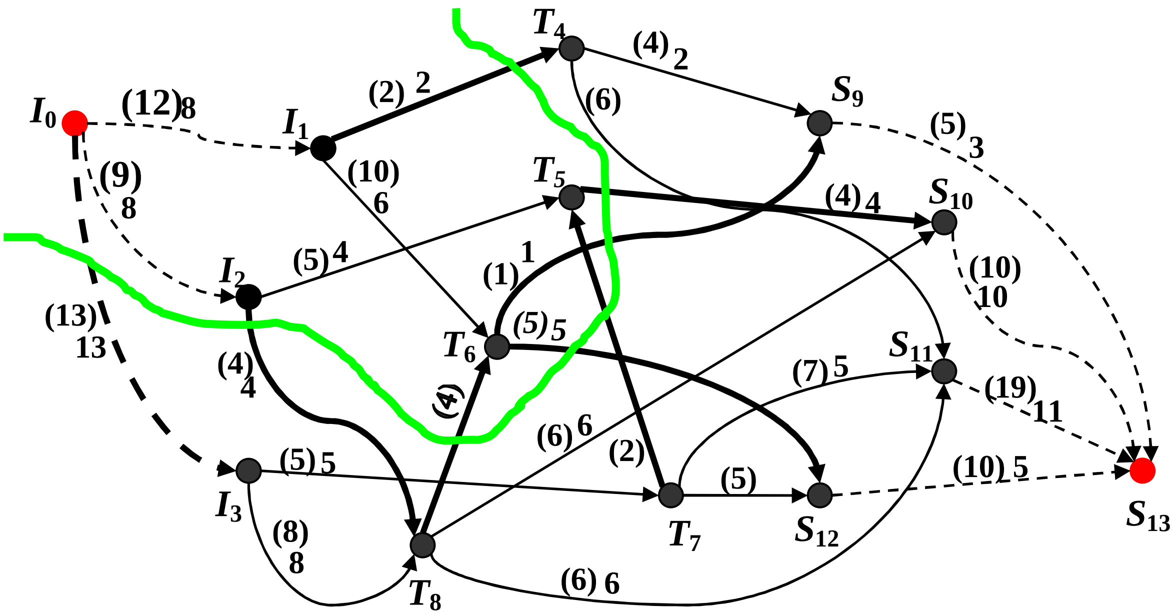


Рис. 7. Расширенная сеть с минимальным разрезом

Вводим еще одну фиктивную вершину – гиперсток S_{13}. Фиктивная дуга $(S_9;S_{13})$ имеет пропускную способность

$$c(S_9;S_{13})=c(T_4;S_9)+c(T_6;S_9)=4+1=5.$$

Пропускная способность фиктивной дуги $(S_{10}; S_{13})$ равна

$$c(S_{10}; S_{13}) = c(T_5; S_{10}) + c(T_8; S_{10}) = 4 + 6 = 10.$$

Аналогично,

$$c(S_{11}; S_{13}) = c(T_4; S_{11}) + c(T_7; S_{11}) + c(T_8; S_{11}) = 6 + 7 + 6 = 19;$$

$$c(S_{12}; S_{13}) = c(T_6; S_{12}) + c(T_7; S_{12}) = 5 + 5 = 10.$$

Второй этап. Формируем начальный поток.

По пути $I_0 \to I_1 \to T_4 \to S_9 \to S_{13}$ пропускаем поток, равный

$\min\{12;\, 2;\, 4;\, 5\} = 2$ единицам.

По пути $I_0 \to I_1 \to T_6 \to S_9 \to S_{13}$ пропускаем поток, равный

$\min\{12 - 2;\, 10;\, 1;\, 5 - 2\} = 1$ единице.

По пути $I_0 \to I_1 \to T_6 \to S_{12} \to S_{13}$ пройдет поток, равный

$\min\{12 - 2 - 1;\, 10 - 1;\, 5;\, 10\} = 5$ единицам.

По пути $I_0 \to I_2 \to T_5 \to S_{10} \to S_{13}$ пустим поток, равный

$\min\{9;\, 5;\, 4;\, 10\} = 4$ единицам.

По пути $I_0 \to I_2 \to T_8 \to S_{10} \to S_{13}$ – поток, равный

$\min\{9 - 4;\, 4;\, 6;\, 10 - 4\} = 4$ единицам.

По пути $I_0 \to I_3 \to T_7 \to S_{11} \to S_{13}$ – поток, равный

$\min\{13;\, 5;\, 7;\, 19\} = 5$ единицам.

По пути $I_0 \to I_3 \to T_8 \to S_{10} \to S_{13}$ – поток, равный

$\min\{13 - 5;\, 8;\, 6 - 4;\, 10 - 4 - 4\} = 2$ единицам.

По пути $I_0 \to I_3 \to T_8 \to S_{11} \to S_{13}$ – поток, равный

$\min\{13 - 5 - 2;\, 8 - 2;\, 6;\, 19 - 5\} = 6$ единицам.

Сформированный поток (на рис. 7 обозначен числами без скобок) – насыщенный, так как каждый путь содержит насыщенную дугу.

Третий этап. Чтобы выяснить, является ли насыщенный поток максимальным, изобразим сеть, на которой отметим все вершины и ненасыщенные дуги (рис. 8). На этой сети разность пропускной способности дуги и проходящего по ней потока обозначим числом в квадратных скобках.

Видим, что вершины I_0 и S_{13} связаны дугами. Выясним, можно ли перераспределить поток и этим его увеличить. Пометим вершины. Вершину I_0 пометим $-I_0$ (рис. 8). Смежную ей вершину I_1 пометим $+I_0$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_0 \to I_1$.

Вершину T_6 помечаем $+I_1$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_1 \to T_6$. Пометка вершины T_8 невозможна, так как дуга $T_6 \leftarrow T_8$, имеющая направление, обратное потоку, пустая. Вершину I_2 помечаем $+I_0$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_0 \to I_2$, вершину T_5 помечаем $+I_2$, так как дуга $I_2 \to T_5$ – ненасыщенная. Дальнейшая пометка вершин невозможна, так как дуга $T_5 \leftarrow T_7$, входящая в вершину T_5, пустая.

Вершина S_{13} оказалась непомеченной, поэтому поток на рис. 7 максимальный. Найдем его величину $F_{\max}$. Для этого нужно вычислить пропускную способность минимального разреза данной сети $C_{\min}$.

Сначала определим дуги, образующие минимальный разрез сети. Для этого все имеющееся вершины, включая фиктивные, разобьем на два непересекающихся множества: помеченные вершины

$$A = \{I_0; I_1; I_2; T_5; T_6\}$$

и непомеченные вершины

$$B = \{I_3; T_4; T_5; T_7; T_8; S_9; S_{10}; S_{11}; S_{12}; S_{13}\} \text{ (рис. 8).}$$

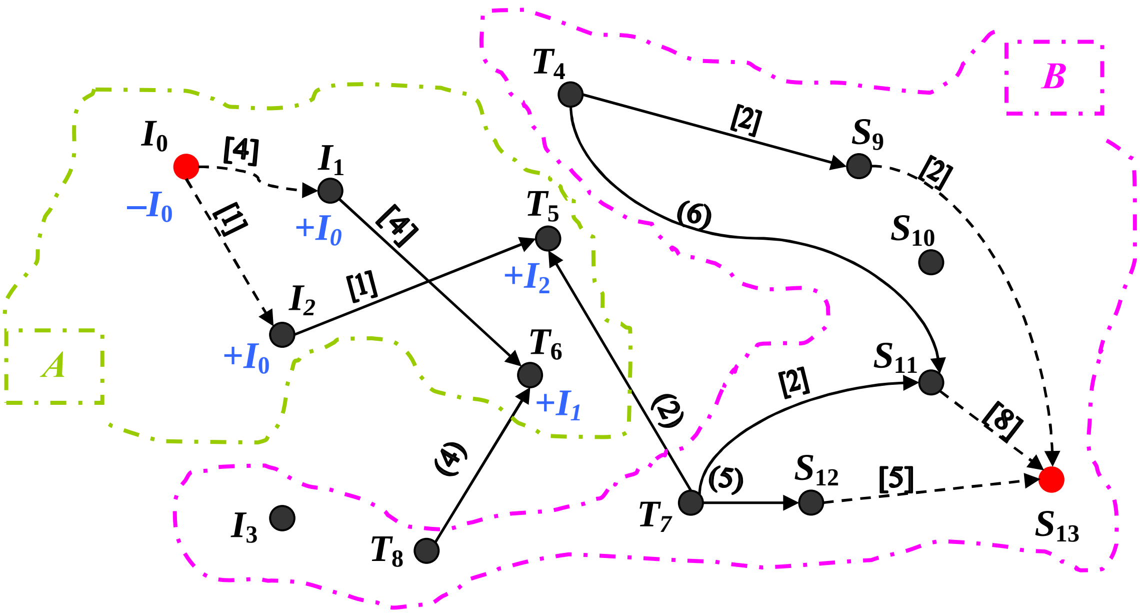


Рис. 8. Помеченные вершины сети, пустые и ненасыщенные дуги

Минимальный разрез образуют дуги, исходящие из вершин множества A и входящие в вершины множества B, а также дуги, исходящие из вершин множества B и входящие в вершины множества A:

$$R = \{(I_0; I_3), (I_1; T_4), (I_2; T_8), (T_5; S_{10}), (T_6; S_9), (T_6; S_{12}), (T_7; T_5), (T_8; T_6)\}$$

(на рис. 7 эти дуги выделены жирными линиями, минимальный разрез обозначен жирной кривой).

Минимальный разрез найден для расширенной сети, в него попала фиктивная дуга $(I_0;I_3)$. В минимальном разрезе исходной сети ей соответствуют две фактические дуги – $(I_3;T_7)$ и $(I_3;T_8)$.

Заметим также, что в минимальный разрез попали две дуги с началом в вершинах множества B и концом в вершинах множества A – $(T_8;T_6)$, $(T_7;T_5)$. В общем случае при вычислении пропускной способности минимального разреза $C_{\min}$ величина потока, проходящего по таким дугам, берется со знаком «минус». В нашем случае $c(T_8;T_6) = c(T_7;T_5) = 0$.

С учетом вышесказанного имеем:

$$F_{\max} = C_{\min} = 5+8+2+4+4+1+5 = 29.$$

Обозначим полученный максимальный поток по исходной сети и ее минимальный разрез на рис. 9.

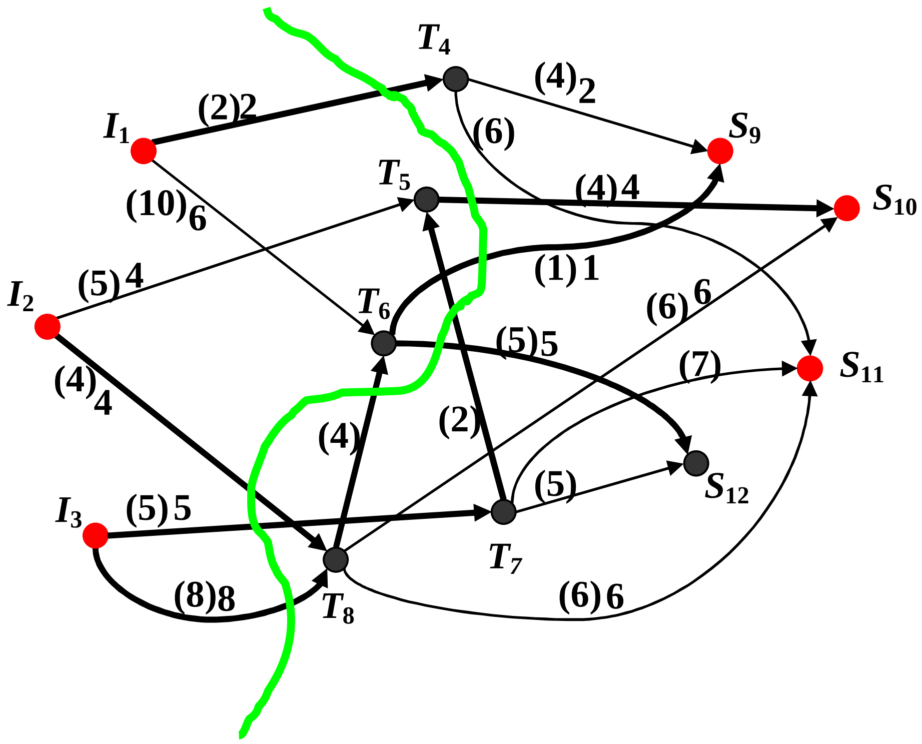
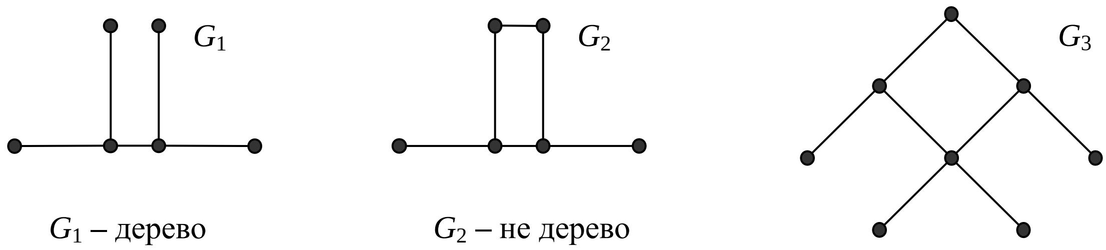


Рис. 9. Максимальный поток по сети, минимальный разрез сети

ЛЕКЦИЯ 9. ДЕРЕВЬЯ

<u>*Основные определения.*</u> Чередующаяся последовательность v_1, e_1, v_2, e_2, …, v_k, e_k, v_{k+1} вершин и неповторяющихся ребер графа, такая, что $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = \overline{1,k}$ и $v_1 = v_{k+1}$, называется *циклом*.

Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом* (рис. 1).



G_1 – дерево

G_2 – не дерево

G_3 – не дерево

Рис. 1

Как правило, дерево-граф выглядит как дерево «вверх ногами» (рис. 2).

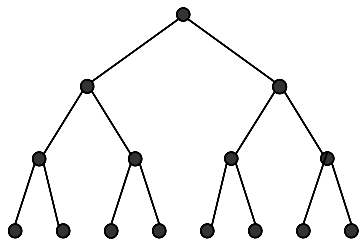


Рис. 2

Дерево на рис. 2 демонстрирует результаты трехкратного подбрасывания монеты.

Любой граф без циклов называется *лесом*. Таким образом, деревья являются элементами леса (рис. 3).

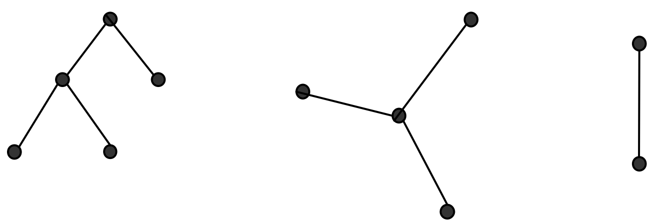


Рис. 3. Лес

Следующие утверждения эквивалентны:

1. G – дерево.

2. G – связный граф и в нем число ребер m всегда на единицу меньше числа вершин n: $m = n - 1$.

3. Любые две несовпадающие вершины дерева соединяет единственный путь без повторений ребер и вершин.

4. G – ациклический граф, и если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то G будет содержать единственный цикл.

На рис. 4 изображены все шесть неизоморфных деревьев, которые могут быть построены на шести вершинах.

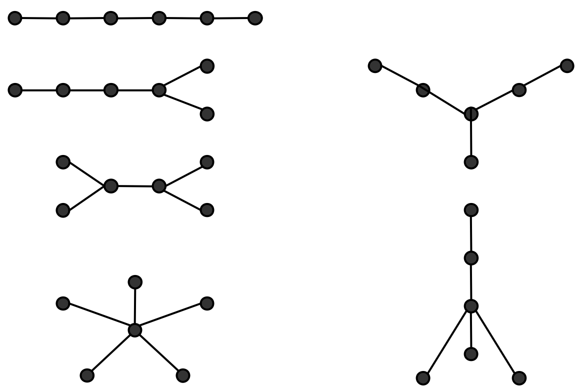


Рис. 4

Ориентированным (или *корневым*) *деревом* называется орграф без циклов и петель, удовлетворяющий условиям:

– имеется ровно одна вершина (*корень*), в которую не входит ни одна дуга (то есть существует ровно одна вершина, степень которой равна нулю);

– в каждую вершину, кроме корня, входит ровно одна дуга (то есть степень вершин, кроме корня, равна единице);

– из корня в каждую вершину идет ровно один путь (рис. 5).

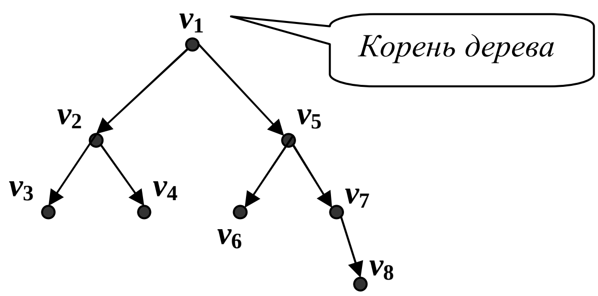


Рис. 5

Из неориентированного дерева можно получить ориентированное, если в качестве корня выбрать произвольную вершину.

Если в дереве имеется путь (последовательность смежных дуг, среди которых нет повторяющихся) из вершины v в вершину ω, то v называется *предком* вершины ω, а ω – *потомком* вершины v. Более того, если маршрут (v, ω) является дугой графа, то v называется *подлинным предком* вершины ω, а ω – *подлинным потомком* вершины v. Вершина без подлинных потомков называется *листом* (например, вершины v_3, v_4, v_6, v_8 на рис. 5 – листья).

Двоичным (*бинарным*) называется дерево (см. рис. 2, рис. 5), в котором:

– каждый потомок является либо левым, либо правым;

– каждая вершина имеет не более одного левого подлинного потомка и не более одного правого подлинного потомка.

Остовы. Граф G' называется *подграфом* (*суграфом*) графа G, если множества их вершин совпадают, а множество ребер G' образовано некоторыми ребрами G.

Остовом (*каркасом, остовным деревом*) графа G называется его связный и без циклов суграф G'.

Понятно, что любой остов содержит $n-1$ ребро (n – число вершин графа).

Теорема 1 (Кирхгофа[1]). Число различных остовов в связном графе G с n вершинами ($n \geq 2$) равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа $K(G)$, состоящей из элементов

$$k_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если } v_i \text{ и } v_j \text{ смежные;} \\ 0, \text{ если } v_i \text{ и } v_j \text{ несмежные и } i \neq j; \\ d(v_i), \text{ если } i = j. \end{cases}$$

►**Пример.** Найти число различных остовов графа G, изображенного на рис. 6.

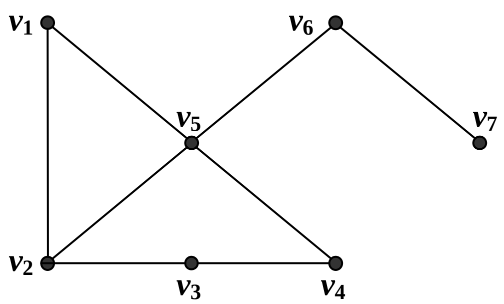


Рис. 6

[1] Густав Роберт Кирхгоф (1824, Кенигсберг, Восточная Пруссия – 1887, Берлин, Германия) – один из великих физиков XIX века.

Решение. Матрица Кирхгофа данного графа имеет вид:

$$K(G)=\left(\begin{array}{c|rrrrrrr} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ \hline v_1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ v_5 & -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычислим алгебраическое дополнение элемента k_{11}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{6+6}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{5+5}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 8 & -3 & -1 \end{vmatrix}=11.$$

Значит, граф G, изображенный на рис. 6, имеет 11 различных остовов (рис. 7).

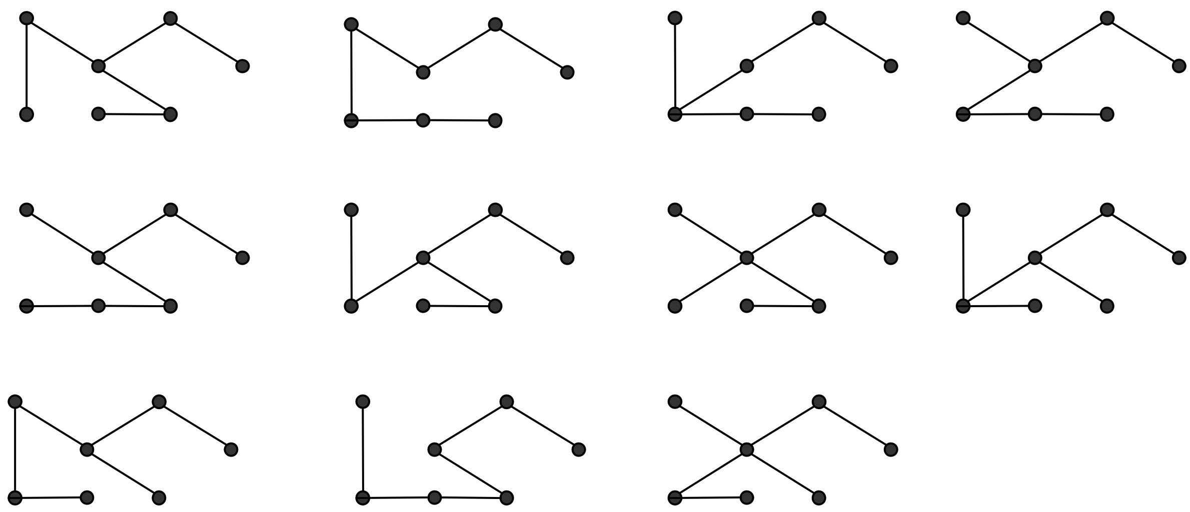


Рис. 7

◀

Теорема 2. Число ребер произвольного неориентированного графа G, которые нужно удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m-n+k$, где m – число ребер, n – число вершин, k – число компонент связности графа G.

Доказательство. Рассмотрим i-тую компоненту связности G_i графа G. Пусть G_i содержит n_i вершин. Тогда остов G_i^* графа G_i, являясь деревом, содержит n_i-1 ребро. Следовательно, для получения остова G_i^* из графа G_i нужно удалить $m_i-(n_i-1)$ ребер, где m_i – число ребер в G_i.

Просуммируем удаляемые ребра по всем компонентам связности, получим

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = m; \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n;$$

$$\sum_{i=1}^{k} (m_i - n_i + 1) = m - n + k.$$

Число $\nu(G) = m-n+k$ называется *цикломатическим числом* или *циклическим рангом графа* G, число $\nu'(G) = n-k$ – коциклическим рангом или корангом графа G.

$\nu'(G)$ равно числу ребер, входящих в любой остов графа G, поэтому $\nu(G)+\nu'(G)=m$.

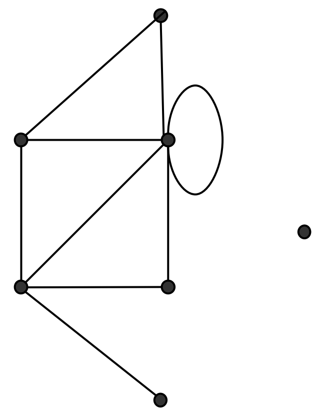


Рис. 8

Для графа на рис. 8 $\nu(G) = 9-7+2 = 4$.

Следствие 1. Неориентированный граф G является лесом тогда и только тогда, когда $\nu(G)=0$.

Следствие 2. Неориентированный граф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G)=1$.

Алгоритмы нахождения остова минимального веса. Связный граф может иметь много остовов. Часто остов требуется выбрать из оптимальных соображений – его минимального или максимального веса.

Пусть некоторый граф G является моделью железнодорожной сети (рис. 9), соединяющей пункты v_1, v_2, …, v_n. Числа $\omega(v_i,v_j)$ – расстояния между пунктами v_i и v_j (вес ребра (v_i,v_j)). Требуется проложить сеть телеграфных линий вдоль железнодорожной сети так, чтобы все пункты v_1, v_2, …, v_n были связаны между собой телеграфной сетью, а общая протяженность линий телеграфной сети была наименьшей.

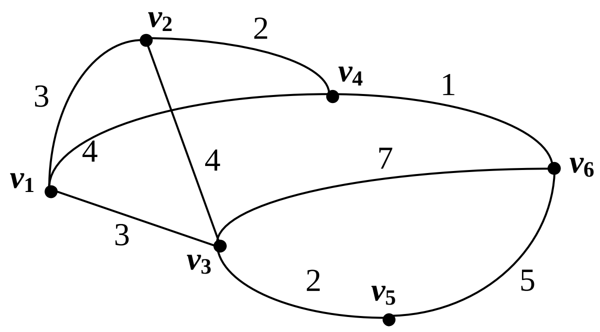


Рис. 9

Другими словами, в этой задаче нужно найти остов графа минимального веса. Для этого можно использовать *алгоритм Прима*[2] (алгоритм ближайшего соседа) или *алгоритм Краскала*[3].

Алгоритм Прима

Разобьем множество вершин V графа на два подмножества V' и V'' таких, что $V'\subset V$, $V''\subset V$, $V'\cup V''=V$, $V'\cap V''=\varnothing$.

[2] Роберт Клей Прим (1921, Техас, США) – американский математик и программист. Во время работы в лаборатории Белла придумал алгоритм поиска остова графа минимального веса. Этот алгоритм был, однако, ранее открыт Войтехом Ярником, а после Прима – Едсгером Дейкстрой. Поэтому алгоритм Прима известен также под названием алгоритма Ярника или как DJP-алгоритм.

[3] Джозеф Крускал (1928, Нью-Йорк, США – 2010, США) – американский математик, программист, статистик.

Назовём число $d(V',V'') = \min\{\,\omega(v_i,v_j)\,|\,v_i \in V',\,v_j \in V''\}$ *пошаговым расстоянием между множествами* V' *и* V''.

Шаг 1. *Присвоение начальных значений*. Пусть $V' = \{v_1\}$ (v_1 – произвольная вершина), $V'' = V \setminus V'$, $U' = \varnothing$.

Шаг 2. *Обновление данных*. Найдем ребро $(v_i;v_j)$ такое, что $v_1 \in V'$, $v_2 \in V''$ и $d(V',V'') = \min\{\,\omega(v_i,v_j)\,|\,v_i \in V',\,v_j \in V''\}$. Полагаем $V' = V' \cup \{v_j\}$, $V'' = V \setminus V'$, $U' = U' \cup \{(v_i;v_j)\}$.

Шаг 3. *Проверка на завершение*. Если $V' = V$, то $G' = (S',U')$ – искомый остов. В противном случае переходим ко второму шагу.

►**Пример.** Найдем остов минимального веса графа, данного на рис. 9, с помощью алгоритма Прима.

Решение

Шаг 1. Пусть $V' = \{v_1\}$, $V'' = \{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $U' = \varnothing$.

Первая итерация

Шаг 2. $d(V',V'') = \omega(v_1,v_2) = \omega(v_1,v_3) = 3$, (выберем, например, вершину v_1): $V' = \{v_1\}$, $V'' = \{v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $U' = \{(v_1;v_2)\}$.

Шаг 3. $V' \neq V$, переходим ко второму шагу.

Вторая итерация

Шаг 2.

$d(V',V'') = \omega(v_2,v_4) = 2$, $V' = \{v_1,v_2,v_4\}$, $V'' = \{v_3,v_5,v_6\}$, $U' = \{(v_1;v_2),(v_2;v_4)\}$.

Шаг 3. $V' \neq V$, переходим ко второму шагу.

Третья итерация

Шаг 2.

$d(V',V'') = \omega(v_4,v_6) = 1$, $V' = \{v_1,v_2,v_4,v_6\}$, $V'' = \{v_3,v_5\}$, $U' = \{(v_1;v_2),(v_2;v_4),(v_4;v_6)\}$.

Шаг 3. $V' \neq V$, переходим ко второму шагу.

Четвёртая итерация

Шаг 2

$$d(V',V'') = \omega(v_1,v_3) = 3, \quad V' = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}, \quad V'' = \{v_5\},$$

$$U' = \{(v_1;v_2),(v_1;v_3),(v_2;v_4),(v_4;v_6)\}.$$

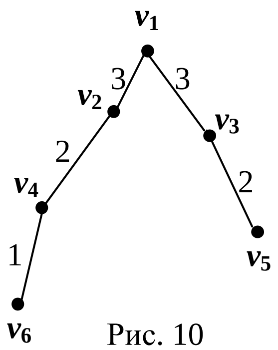


Рис. 10

Шаг 3. $V' \neq V$, переходим ко второму шагу.

Пятая итерация

Шаг 2. $d(V',V'') = \omega(v_3,v_5) = 2$, $V' = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $V'' = \varnothing$, $U' = \{(v_1;v_2),(v_1;v_3),(v_2;v_4),(v_3;v_5),(v_4;v_6)\}$.

Шаг 3. $V' = V$, получен остов G' (рис. 10) минимального веса

$$\omega = 1+2+3+3+2 = 11. \blacktriangleleft$$

Алгоритм Краскала

Из всех ребер выбирают одно с наименьшим весом. Затем из оставшихся рассматривают наименьшее по весу ребро. Если оно не образует цикла с ранее выбранными ребрами графа, то вводится в остов. Построение прекращается после $n-1$ шагов.

►**Пример.** Найдем остов минимального веса графа, показанного на рис. 9, с помощью алгоритма Краскала.

Решение. В графе выбираем ребро с минимальным весом. В нашем случае это ребро, соединяющее вершины v_4 и v_6, с весом 1. Пусть, например, вершина v_4 будет корнем остова. Далее выбираем ребра, инцидентные вершинам v_4, v_6, имеющие минимальный вес и не образующие с ними циклов. Таким является ребро с весом 2, соединяющее вершины v_4 и v_2. Включаем его в строящийся остов. Затем к вершине v_2 присоединяем ребро с весом 3, соединяющее вершины v_2 и v_1 (оно не образует цикла с ребрами, выбранными ранее). К вершине v_1 присоединяем ребро с весом 3, соединяющее вершины v_1 и v_3 (оно не образует цикла с ребрами, выбранными ранее). И в заключение к вершине v_3 присоединяем ребро с весом 2, соединяющее вершины v_3 и v_5 (оно не образует цикла с ребрами, выбранными ранее). Выполнено 5 шагов, поэтому алгоритм закончен. Остов минимального веса, включающий все вершины данного графа, изображен на рис. 11. Найдем его вес:

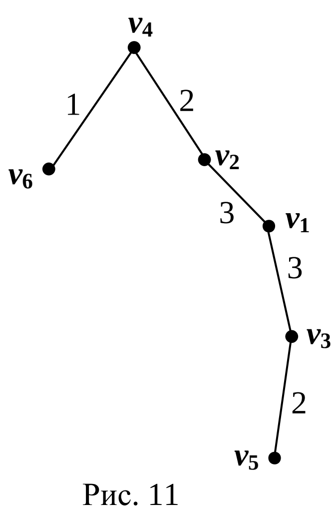


Рис. 11

$$\omega = 1+2+3+3+2 = 11. \blacktriangleleft$$

ЛЕКЦИЯ 10. ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

Эйлеровы графы. Классической в теории графов является задача о кенигсбергских мостах (Л. Эйлер, 1736 г.). Имеются два острова, соединенных семью мостами с берегами реки и друг с другом (рис. 1). Нужно осуществить прогулку таким образом, чтобы, пройдя по каждому мосту один раз, вернуться обратно.

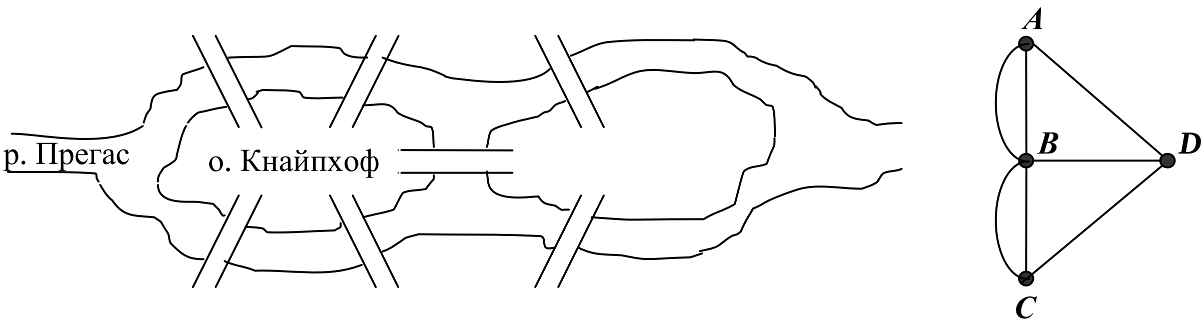


Рис. 1

Плану расположения суши и мостов соответствует мультиграф (граф, имеющий кратные ребра), в котором каждой части суши соответствует вершина, а каждому мосту – ребро, соединяющее соответствующие вершины. Поэтому задачу о мостах можно сформулировать так: найти цикл в мультиграфе, содержащий все его ребра по одному разу.

Цикл, содержащий все ребра графа по одному разу, называется *эйлеровым*. Эйлеров цикл содержит не только все ребра графа (по одному разу), но и все его вершины (возможно, по нескольку раз).

Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется *эйлеровым*.

Иначе говоря, эйлеров граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одному и тому же ребру.

На рис. 2, 3 изображены эйлеров и неэйлеров графы соответственно.

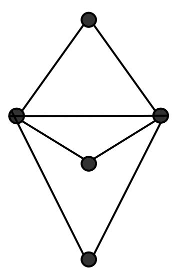


Рис. 2

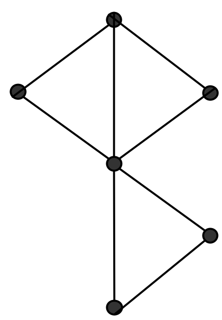


Рис. 3

Теорема 1. Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связный и степень каждой его вершины четная.

Для построения эйлерова цикла в связном графе со всеми вершинами четной степени применяется *алгоритм Флери*[1]:

1. Выйти из произвольной вершины v_i. Каждое пройденное ребро зачеркнуть. Если путь l_1 замыкается в v_i и проходит через все ребра графа, то получим искомый эйлеров цикл.

2. Если остались непройденные ребра, то должна существовать вершина v_2, принадлежащая l_1 и ребру, не вошедшему в l_1.

3. Так как v_2 – четная, то число ребер, которым принадлежит v_2 и которые не вошли в путь l_1, тоже четное. Начнем новый путь l_2 из v_2 и используем только те ребра, которые не принадлежат l_1. Этот путь закончится в l_2.

4. Объединим оба цикла: из v_i пройдем по пути l_1 к v_2, затем по l_2 и, вернувшись в v_2, пройдем по оставшейся части l_1 обратно в v_i.

5. Если снова найдутся ребра, которые не вошли в путь, то найдем новые циклы. Так как число ребер и вершин конечно, то процесс закончится.

Таким образом, замкнутую фигуру, в которой все вершины четные, можно начертить одним росчерком без повторений и начиная с любой точки.

На практике эйлеровым графом может быть план выставки. Расстановка указателей маршрута так, чтобы посетитель мог пройти по каждому залу только один раз, и есть построение эйлерова цикла плана выставки.

►**Пример.** Найти эйлеров цикл в графе на рис. 4 с помощью алгоритма Флери.

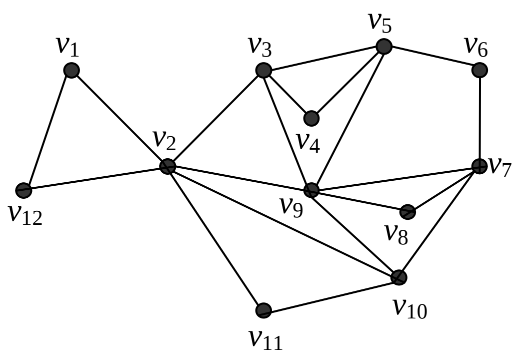


Рис. 4

◄

[1] Эрнест Жюль Фредерик Ламе-Флери (1823 – 1903) – французский инженер и юрист.

Гамильтоновы графы. Задачу о кенигсбергских мостах можно преобразовать в задачу о коммивояжере, которому нужно посетить ряд городов и вернуться в исходный. Понятно, что такое путешествие может иметь ограничения во временных, денежных или каких-то других ресурсах. Также ясно, что бывать в одном и том же городе более одного раза ему крайне невыгодно. Поэтому нужно найти цикл графа, содержащего все его вершины-города по одному разу, причем суммарные затраты при прохождении цикла должны быть минимальными.

Цикл графа, проходящий через каждую его вершину по одному разу, называется *гамильтоновым*.

Граф, в котором имеется гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*.

Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа. На рис. 5, 6 представлены соответственно эйлеров и гамильтонов графы.

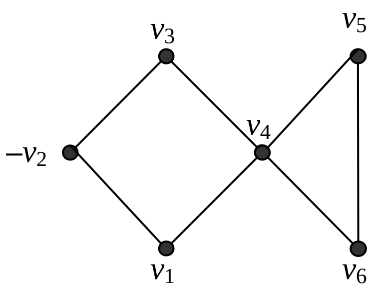


Рис. 5

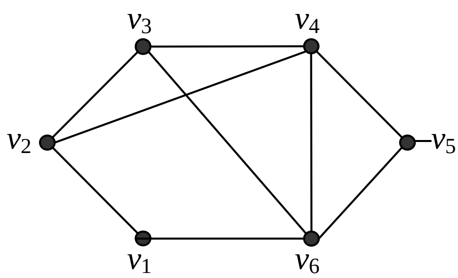


Рис. 6

Критерий существования в графе эйлерова цикла описывается теоремой 1. Аналогичный общий критерий существования гамильтонова цикла в графе пока не найден. Известны лишь некоторые его частные случаи:

1. Всякий полный[2] граф является гамильтоновым.
2. Если для любой пары x и y несмежных вершин графа G с числом вершин $n \geq 3$ выполняется неравенство $d(x)+d(y) \geq n$, то G – гамильтонов граф.
3. Если для любой вершины x графа G с числом вершин $n \geq 3$ выполняется неравенство $d(x) \geq \frac{n}{2}$, то G – гамильтонов граф.

Задача поиска способа построения гамильтонова цикла – одна из важных задач теории графов.

[2] Граф называется *полным*, если каждые две различные его вершины соединены одним и только одним ребром.

<u>Задача коммивояжера (развозчика продукции или бродячего торговца).</u> Вернемся к задаче о коммивояжере. Сэр Гамильтон[3] задал ее своим детям в следующем виде: совершите путешествие по столицам мира, находящимся в вершинах додекаэдра (рис. 7), и вернитесь домой.

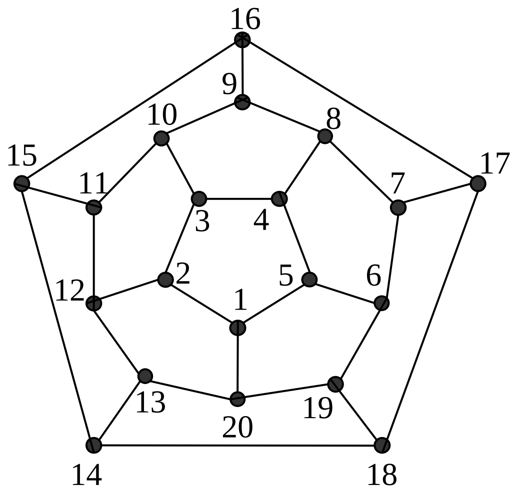


Рис. 7

Классическая формулировка задачи коммивояжера следующая. Пусть имеется $n \geq 1$ населенных пунктов с заданными между ними расстояниями c_{ij} $(i,\ j = 1, \ldots, n)$. Ясно, что $c_{ii} = \infty$. В общем случае $c_{ij} \neq c_{ji}$.

Требуется найти такой маршрут, начинающийся в данном населенном пункте, проходящий через все остальные по одному разу и заканчивающийся в исходном, чтобы его длина была минимальной.

Задачу можно решить перебором, но при большом n число возможных маршрутов огромное. Уменьшить количество переборов позволяет *метод ветвей и границ* (*алгоритм Литтла*).

Пусть $C = [c_{ij}]$ – матрица расстояний между городами. Неизвестные величины

$$x_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если коммивояжер из города } i \text{ непосредственно} \\ & \text{приезжает в город } j; \\ \mathbf{0} - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Модель задачи коммивояжера имеет вид:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = \overline{1,n}); \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = \overline{1,n}). \tag{3}$$

---

[3] Вильям Роуэн Гамильтон (1805, Дублин, Ирландия – 1865, Ирландия) – великий ирландский математик и астроном; одновременно с Г. Грассманом дал точное формальное изложение теории комплексных чисел; построил систему кватернионов; один из основоположников векторного исчисления; впервые применил вариационный метод (принцип наименьшего действия) в механике.

Система ограничений (2) обеспечивает построение маршрута, при котором коммивояжер въезжает в каждый город только один раз, а система (3) – маршрута, когда он выезжает из каждого города только один раз.

Если считать города вершинами графа, а коммуникации $(i; j)$ – его ребрами, то нахождение минимального пути, проходящего один и только один раз через каждый город с возвращением в исходную точку, можно рассматривать как нахождение на графе цикла минимальной длины.

Рассмотрим алгоритм поиска гамильтонова цикла минимальной длины на графе с n вершинами (алгоритм Литтла). Если между вершинами i и j нет ребра, то ставится символ ∞. Этот же символ ставится на главной диагонали, что означает запрет на возвращение в вершину, через которую уже проходил цикл. Основная идея метода состоит в том, что сначала строят нижнюю границу длин множества гамильтоновых циклов Ω^0. Затем множество циклов Ω^0 разбивается на два подмножества, таких, что первое подмножество Ω^1_{ij} состоит из гамильтоновых циклов, содержащих некоторое ребро $(i; j)$, а другое подмножество $\Omega^1_{\overline{ij}}$ не содержит этого ребра.

Для каждого из подмножеств определяются нижние границы по тому же правилу, что и для первоначального множества гамильтоновых циклов. Полученные нижние границы подмножеств Ω^1_{ij} и $\Omega^1_{\overline{ij}}$ оказываются не меньше нижней границы для всего множества гамильтоновых циклов, т.е.

$$\varphi(\boldsymbol{\Omega^0}) \le \varphi(\boldsymbol{\Omega^1_{ij}}) \equiv \varphi^{\mathbf{1}}_{ij}; \qquad \varphi(\boldsymbol{\Omega^0}) \le \varphi(\boldsymbol{\Omega^1_{\overline{ij}}}) \equiv \varphi^{\mathbf{1}}_{\overline{ij}}.$$

Сравнивая нижние границы $\varphi^{\mathbf{1}}_{ij}$ и $\varphi^{\mathbf{1}}_{\overline{ij}}$ подмножеств Ω^1_{ij} и $\Omega^1_{\overline{ij}}$, можно выделить среди них то, которое с большей вероятностью содержит гамильтонов цикл минимальной длины.

Затем одно из подмножеств Ω^1_{ij} или $\Omega^1_{\overline{ij}}$ по аналогичному правилу разбивается на два новых Ω^2_{ij} и $\Omega^2_{\overline{ij}}$. Для них снова отыскиваются нижние границы $\varphi^{\mathbf{2}}_{ij}$ и $\varphi^{\mathbf{2}}_{\overline{ij}}$ и так далее. Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не отыщется единственный гамильтонов цикл. Его называют *первым рекордом*.

Затем просматривают оборванные ветви. Если их нижние границы больше длины первого рекорда, то задача решена. Если же есть ветви, у которых нижние границы меньше, чем длина первого рекорда, то подмножество с наименьшей нижней границей подвергают дальнейшему ветвлению, пока не убеждаются в том, что оно не содержит лучшего гамильтонова цикла. Если же такой найдется, то анализ оборванных ветвей продолжается относительно нового значения длины цикла. Его называют *вторым рекордом*. Процесс решения заканчивается тогда, когда будут проанализированы все подмножества.

Пусть известна матрица весов некоторого псевдоорграфа[4], вершины которого пронумеруем числами от 1 до n:

$$C = \left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ \hline 1 & \infty & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ 2 & C_{21} & \infty & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & C_{n1} & C_{n2} & \dots & \infty \end{array}\right),$$

где C_{ij} – вес дуги, соединяющей вершины i, $j = 1, 2, ..., n$.

Символ ∞ ставится для блокировки дуг графа, которые явно не включаются в гамильтонов цикл ($C_{ii} = \infty$). Первоначально в расчет не берутся дуги l_{ii}. Можно показать, что оптимальность решения не меняется от прибавления некоторого числа к строке или столбцу матрицы C.

Алгоритм Литтла состоит из трех шагов.

Шаг 1. *Приведение исходной матрицы*

В каждом столбце и в каждой строке матрицы C нужно получить хотя бы один нуль. Для этого, например, в первом столбце выбираем минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов первого столбца. Аналогично поступаем с остальными столбцами. Если при этом в некоторых строках не появляются нули, то для них осуществляем ту же процедуру.

После этого вычисляем константу приведения φ – сумму минимальных элементов столбцов и строк, которые вычитались. Получаем приведенную матрицу C_0 с константой приведения φ_0 (φ_0 – оценка маршрута снизу).

Шаг 2. *Определение степеней нулей*

Определим дугу, исключение которой максимально увеличило бы полученную оценку. С этой целью заменяем поочередно каждый из нулей на ∞ и вычисляем сумму наименьших элементов строки i_1 и столбца j_1, содержащих этот новый элемент ∞.

Нуль с максимальной степенью определяет дугу $l(i_1; j_1)$, которая вероятнее всего войдет в гамильтонов цикл. Например, если нуль с макси-

[4] Граф, имеющий петли и кратные ребра, называется *псевдографом*.

мальной степенью находится на пересечении второй строки и третьего столбца, то дуга $l(2;3)$, вероятнее всего, войдет в гамильтонов цикл.

Шаг 3. *Ветвление*

На самом деле дуга, соответствующая максимальной степени нуля (∞), может как входить в гамильтонов цикл, так и не входить в него. Поэтому дальше нужно рассмотреть два случая.

Первый случай. Возможно, дуга $l(i_1; j_1)$ вошла в гамильтонов цикл. Блокируем ее, полагая $C_{j_1,\, i_1} = \infty$. Строку i_1 и столбец j_1 вычеркиваем. Если требуется, приводим полученную матрицу меньшего порядка $C_1(i_1; j_1)$ с константой приведения $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta_1$.

Второй случай. Дуга $l(i_1; j_1)$ не вошла в гамильтонов цикл. Полагаем $C_{i_1,\, j_1} = \infty$. Если требуется, приводим полученную матрицу $\tilde{C}_1(i_1;\ j_1)$ с константой приведения $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \tilde{\Delta}_1$.

Если $\varphi_1 < \tilde{\varphi}_1$, то шаги 2, 3 повторяем с матрицей $C_1(i_1; j_1)$.

Если $\varphi_1 > \tilde{\varphi}_1$, то шаги 2, 3 повторяем с матрицей $\tilde{C}_1(i_1;\ j_1)$. И так до тех пор, пока не дойдем до матрицы второго порядка, содержащей два нуля:

$$C_{n-2}(i_{n-2}; j_{n-2}) = \begin{pmatrix} & \vline & j_{n-1} & j_n \\ \hline i_{n-1} & \vline & 0 & A \\ i_n & \vline & B & 0 \end{pmatrix},$$

где A и B – некоторые числа или ∞. Эти нули соответствуют двум последним дугам гамильтонова цикла: $l(i_{n-1}; j_{n-1})$, $l(i_n; j_n)$. При этом $\varphi = \varphi_{n-2}$.

Если $\varphi_{n-2} \le \tilde{\varphi}_k$, где $k = 1, 2, ..., n-2$, то задача решена. Если же для некоторого k_0 получается $\varphi_{n-2} > \tilde{\varphi}_{k_0}$, то всю процедуру следует провести с матрицей $\tilde{C}_{k_0}(i_{k_0};\ j_{k_0})$. На последнем этапе получим новое значение функции φ: φ'_{n-2}. Это значение сравниваем с φ_{n-2}, то есть новый процесс продолжается до тех пор, пока новые $\varphi'_k \le \varphi_{n-2}$.

►**Пример.** На одном и том же оборудовании предприятие должно выпускать партиями пять видов продукции. Издержки от переналадок оборудования при переходе от производства одного вида продукции к производству другого представлены матрицей $A = [a_{ij}]$, где a_{ij} – затраты на переналадку оборудования при переходе от выпуска i-того вида продукции к выпуску j-того вида продукции. С помощью алгоритма Литтла найти последовательность запуска партий продукции в производство, при которой суммарные потери от переналадок будут минимальными.

$$\begin{pmatrix} \infty & 10 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & \infty & 11 & 9 & 12 \\ 12 & 13 & \infty & 12 & 11 \\ 11 & 12 & 13 & \infty & 13 \\ 11 & 10 & 12 & 10 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение. Получим приведенный вид данной матрицы. Для этого пронумеруем строки и столбцы. В каждом столбце определяем минимальный элемент и записываем его в нижней строке:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 10 & 10 & 11 & 10 \\ 2 & 10 & \infty & 11 & 9 & 12 \\ 3 & 12 & 13 & \infty & 12 & 11 \\ 4 & 11 & 12 & 13 & \infty & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 12 & 10 & \infty \\ \hline & 10 & 10 & 10 & 9 & 10 \end{array}\right).$$

Из каждого элемента столбца вычитаем соответствующий минимальный элемент. Получаем матрицу A_1:

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & \infty & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & \infty & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 & \infty & 0 \end{array}\right).$$

Матрица A_1 оказалась не приведенной, поэтому определяем минимальный элемент в каждой строке и вычитаем его из всех элементов соответствующей строки. В результате получаем приведенную матрицу A_0:

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0^{(0)} & 0^{(1)} & 2 & 0^{(0)} \\ 2 & 0^{(0)} & \infty & 1 & 0^{(1)} & 2 \\ 3 & 1 & 2 & \infty & 2 & 0^{(1)} \\ 4 & 0^{(1)} & 1 & 2 & \infty & 2 \\ 5 & 1 & 0^{(1)} & 2 & 1 & \infty \end{array}\right).$$

Вычисляем константу приведения φ_0:

$$\varphi_0 = 10 + 10 + 10 + 9 + 10 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 51.$$

Находим степени каждого нуля – сумму минимальных элементов строки и столбца, в которых стоит нуль (без учета самого нуля). К каждому нулю приписываем вверху его степень. Максимальной степенью является число 1. Нули с максимальной степенью определяют дуги, которые вероятнее всего войдут в гамильтонов цикл. В нашем случае наиболее вероятными дугами гамильтонова цикла являются *l*(1; 3), *l*(2; 4), *l*(3; 5), *l*(4; 1), *l*(5; 2).

Выбираем, например, дугу *l*(5; 2).

В связи с этим рассматриваем две матрицы – $A_1(5;2)$ и $\tilde{A}_1(5;2)$. В матрице $A_1(5;2)$ убираем пятую строку и второй столбец, элемент a_{25} заменяем ∞. В матрице $\tilde{A}_1(5;2)$ элемент a_{52} заменяем на ∞. Получаем:

$$A_1(5;2)=\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 1 & \infty & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & \infty & 2 \end{array}\right); \quad \tilde{A}_1(5;2)=\left(\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & \infty & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & \infty & 2 & 0 \\ 5 & 1 & \infty & 2 & 1 & \infty & 1 \end{array}\right).$$

Матрица $A_1(5;2)$ оказалась приведенной. Матрица $\tilde{A}_1(5;2)$ не является приведенной. Для приведения матрицы $\tilde{A}_1(5;2)$ достаточно определить минимальные элементы строк. Получаем следующую матрицу $\tilde{A}_1(5;2)$:

$$\tilde{A}_1(5;2)=\left(\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & \infty & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & \infty & 2 \\ 5 & 0 & \infty & 1 & 0 & \infty \end{array}\right).$$

Вычисляем константы приведения:

$$\varphi_1(5;2)=\varphi_0+\Delta_1(5;2)=51+0=51;$$

$$\tilde{\varphi}_1(5;2)=\varphi_0+\tilde{\Delta}_1(5;2)=51+1=52,$$

где $\Delta_1(5;2)$ и $\tilde{\Delta}_1(5;2)$ – суммы минимальных элементов строк и столбцов матриц $A_1(5;2)$ и $\tilde{A}_1(5;2)$.

Так как $\varphi_1(5;2) < \tilde{\varphi}_1(5;2)$, то далее рассматриваем матрицу $A_1(5;2)$. Определяем степени нулей этой матрицы:

$$A_1(5;2) = \left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0^{(1)} & 2 & 0^{(0)} \\ 2 & 0^{(0)} & 1 & 0^{(2)} & \infty \\ 3 & 1 & \infty & 2 & 0^{(1)} \\ 4 & 0^{(2)} & 2 & \infty & 2 \end{array}\right).$$

Максимальная степень – число 2. Наиболее вероятными дугами гамильтонова цикла являются дуги $l(2;\ 4)$ и $l(4;1)$. Выбираем, например, дугу $l(4;\ 1)$.

В связи с этим рассматриваем две матрицы – $A_2(4;1)$ и $\tilde{A}_2(4;1)$. В матрице $A_2(4;1)$ убираем четвертую строку и первый столбец, элемент a_{14} заменяем на ∞. В матрице $\tilde{A}_2(4;1)$ элемент a_{41} заменяем на ∞. Имеем:

$$A_2(4;1) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & \infty & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 0 \end{array}\right); \quad \tilde{A}_2(4;1) = \left(\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & \infty & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \infty & 0 \\ 3 & 1 & \infty & 2 & 0 & 0 \\ 4 & \infty & 2 & \infty & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Матрица $A_2(4;1)$ оказалась приведенной. Матрица $\tilde{A}_2(4;1)$ не является приведенной. Определяем минимальные элементы строк матрицы $\tilde{A}_2(4;1)$.

После приведения получаем следующую матрицу:

$$\tilde{A}_2(4;1) = \left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 1 & \infty & 2 & 0 \\ 4 & \infty & 0 & \infty & 0 \end{array}\right).$$

Вычисляем константы приведения:

$$\varphi_2(4;1) = \varphi_1(5;2) + \Delta_2(4;1) = 51 + 0 = 51;$$
$$\tilde{\varphi}_2(4;1) = \varphi_1(5;2) + \tilde{\Delta}_2(4;1) = 51 + 2 = 53.$$

Так как $\varphi_2(4;1) < \tilde{\varphi}_2(4;1)$, далее рассматриваем матрицу $A_2(4;1)$:

$$A_2(4;1) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0^{(1)} & \infty & 0^{(0)} \\ 2 & 1 & 0^{(3)} & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 0^{(2)} \end{array}\right).$$

Определяем степени каждого нуля. Максимальная степень – число 3. Наиболее вероятной дугой гамильтонова цикла является дуга $l(2;\, 4)$.

В связи с этим рассматриваем две матрицы – $A_3(2;4)$ и $\tilde{A}_3(2;4)$. В матрице $A_3(2;4)$ убираем вторую строку и столбец под номером 4. В матрице $\tilde{A}_3(2;4)$ элемент a_{24} заменяем на ∞. Имеем:

$$A_3(2;4) = \left(\begin{array}{c|cc} & 3 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 3 & \infty & 0 \end{array}\right); \quad \tilde{A}_3(2;4) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & \infty & 0 \\ 2 & 1 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Матрица $\tilde{A}_3(2;4)$ не является приведенной. Определяем ее минимальные элементы строк и столбцов, после чего приводим матрицу:

$$\tilde{A}_3(2;4) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычисляем константы приведения:

$$\varphi_3(2;4) = \varphi_2(4;1) + \Delta_3(2;4) = 51 + 0 = 51;$$
$$\tilde{\varphi}_3(2;4) = \varphi_2(4;1) + \tilde{\Delta}_3(2;4) = 51 + 3 = 54.$$

Так как $\varphi_3(2;4) < \tilde{\varphi}_3(2;4)$, далее рассматриваем матрицу $A_3(2;\, 4)$. Ясно, что оставшимися дугами гамильтонова цикла являются $l(1;3)$ и $l(3;5)$.

Сравним константу приведения $\varphi_3(2;4)$ с константами приведения φ_k альтернативных вариантов ($k = 1,\, 2,\, 3$):

$$\varphi_3(2;4) < \tilde{\varphi}_1(5;2):\; 51 < 52;$$

$$\varphi_3(2;4) < \tilde{\varphi}_2(4;1):\ 51 < 53;$$

$$\varphi_3(2;4) < \tilde{\varphi}_3(2;4):\ 51 < 54.$$

Так как $\varphi_3(2;4) < \tilde{\varphi}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, полученное решение, состоящее из дуг (5; 2), (4; 1), (2;4), (1; 3), (3;5), оптимальное.

Из полученных дуг составляем замкнутый гамильтонов цикл: 1→3→5→2→4→1.

Весь процесс отыскания оптимального плана изобразим в виде дерева (рис. 8).

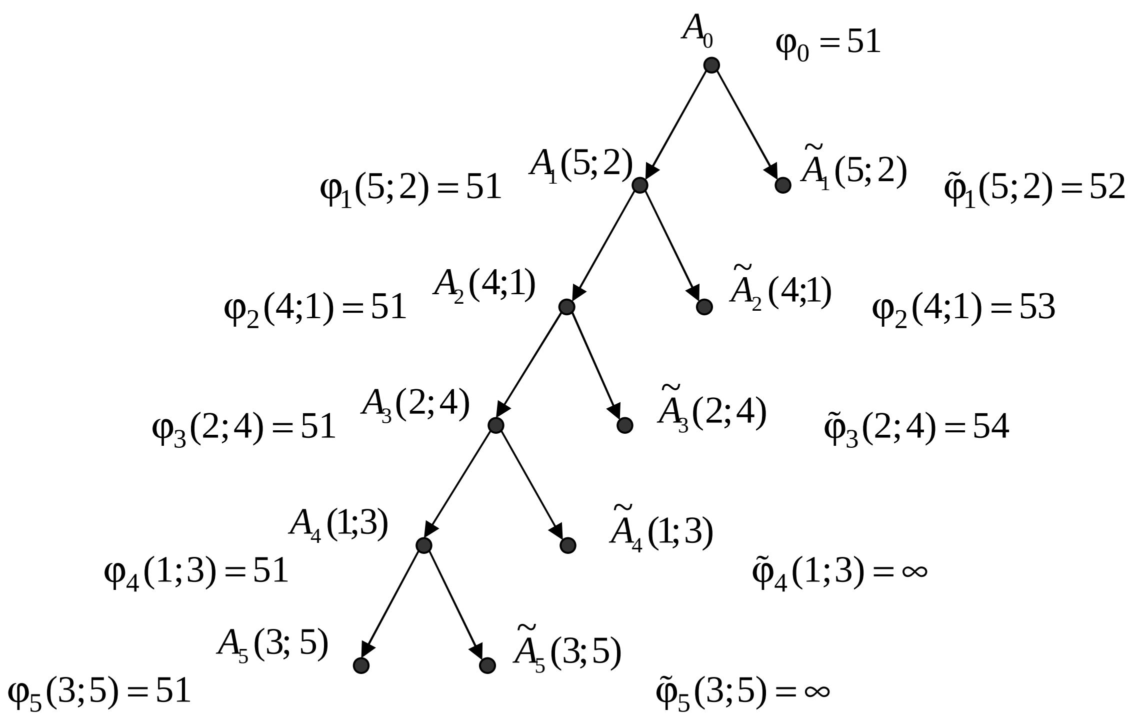


Рис. 8

Это означает следующее: после выпуска первого вида продукции следует наладить выпуск третьего вида продукции; после третьего – пятый; после пятого – второй; после второго – четвертый; после четвертого – снова вернуться к первому.

При полученной последовательности запуска партий продукции в производство 1→3→5→2→4→1 суммарные потери от переналадок минимальны и равны $\varphi_3(2;4) = 51$ (ден. ед.). ◄

ЛЕКЦИЯ 11. НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ НА СЕТИ: АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ

В различных приложениях возникает следующая задача: найти кратчайший путь между некоторыми вершинами a и b сети.

Одним из лучших способов решения подобных задач является *алгоритм Дейкстры*[1] (*алгоритм расстановки меток*). В процессе его использования вершинам сети присваивают метки $d(x_i)$, являющиеся оценками длины кратчайшего пути от вершины a к вершине x_i.

Если вершина x_i на некотором шаге получила метку $d(x_i)$, то в сети существует путь из a в x_i длиной $d(x_i)$. Метка может находиться в одном из двух состояний – быть временной или постоянной. Постоянность метки означает, что кратчайшее расстояние от a до x_i найдено.

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом находится длина кратчайшего пути от a до b, на втором – сам кратчайший путь.

Этап 1. *Нахождение длины кратчайшего пути*

Шаг 1. *Присвоение вершинам начальных меток*

Полагаем $d(a)=0^*$ и считаем эту метку постоянной (постоянные метки отметим звездочкой справа над нулем). Для остальных вершин полагаем $d(x_i)=\infty$ и считаем эти метки временными. То, что a – текущая вершина, обозначим так: $\tilde{x}=a$.

---

[1] Едсгер Вибе Дейкстра (1930, Роттердам, Нидерланды – 2002, Нуенен, Нидерланды) – нидерландский математик, идеи которого повлияли на развитие компьютерной индустрии. В 1956 году принял участие в разработке ЭВМ X1, для оптимизации разводки плат которой был придуман алгоритм поиска кратчайшего пути на графе, известный как «алгоритм Дейкстры». В своих книгах Дейкстра отстаивал необходимость математического подхода к программированию, который предполагает предварительное точное математическое описание задачи и способа ее решения, доказательство правильности выбранного алгоритма и последующую реализацию алгоритма в виде максимально простой, структурированной программы, корректность которой должна быть доказана. По мнению Дейкстры, господствующий в компьютерной индустрии подход к программированию как к процессу достижения результата методом проб и ошибок («написать код – протестировать – найти ошибки – исправить – протестировать – …») порочен, поскольку стимулирует программистов не думать над задачей, а писать код, что совершенно не гарантирует корректность программ, которая не может быть доказана тестированием в принципе.

Шаг 2. *Изменение меток*

Для каждой вершины x_i с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной $\tilde{x}$, меняем ее метку в соответствии с правилом

$$d_{\text{нов.}}(x_i) = \min\{d_{\text{стар.}}(x_i),\ d(\tilde{x}) + \omega(\tilde{x}, x_i)\}.$$

Шаг 3. *Превращение метки из временной в постоянную*

Из всех вершин с временными метками выбираем вершину x_j^* с наименьшим значением метки

$$d(x_j^*) = \min\{d(x_j) \mid d(x_j) - \text{временная}\}.$$

Превращаем эту метку в постоянную и полагаем $\tilde{x} = x_j^*$.

Шаг 4. *Проверка на завершение первого этапа*

Если $\tilde{x} = b$, то $d(\tilde{x})$ – длина кратчайшего пути от a до b. Иначе – возвращаемся ко второму шагу.

Этап 2. *Построение кратчайшего пути*

Шаг 5. *Последовательный поиск дуг кратчайшего пути*

Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине $\tilde{x}$ с постоянными метками, находим вершину x_i, удовлетворяющую соотношению

$$d(\tilde{x}) = d(x_i) + \omega(x_i, \tilde{x}).$$

Включаем дугу $(x_i, \tilde{x})$ в искомый путь и полагаем $\tilde{x} = x_i$.

Шаг 6. *Проверка на завершение второго этапа*

Если $\tilde{x} = a$, то кратчайший путь найден – его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. Иначе – возвращаемся к пятому шагу.

►**Пример.** Найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_6 сети, заданной матрицей весов, по алгоритму Дейкстры.

$$\Omega = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\ x_4 & \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\ x_5 & \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}.$$

Решение. Изобразим сеть, заданную матрицей Ω (рис. 1).

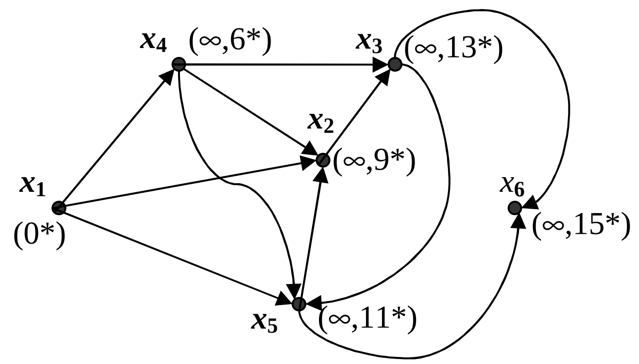


Рис. 1

<u>Этап 1</u>

<u>Шаг 1.</u> Полагаем $d(x_1) = 0^*$, $\tilde{x} = x_1$. Тогда

$$d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty.$$

<u>Итерация 1</u>

<u>Шаг 2.</u> Множество вершин x_2, x_4, x_5 с временными метками, непосредственно следующих за $\tilde{x} = x_1$, образуют множество $\tilde{S}$. Пересчитываем временные метки этих вершин:

$$d(x_2) = \min\{\infty,\ 0^* + 9\} = 9;$$

$$d(x_4) = \min\{\infty,\ 0^* + 6\} = 6;$$

$$d(x_5) = \min\{\infty,\ 0^* + 11\} = 11.$$

Шаг 3. Одна из временных меток превращается в постоянную:

$$\min\{9,\ \infty,\ 6,\ 11,\ \infty\} = 6^* = d(x_4),\ \tilde{x} = x_4.$$

Шаг 4. $x_4 = \tilde{x} \neq b = x_6$, возвращаемся на второй шаг.

Итерация 2

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_5\}$;

$$d(x_2) = \min\{9,\ 6^* + 5\} = 9;$$

$$d(x_3) = \min\{\infty,\ 6^* + 7\} = 13;$$

$$d(x_5) = \min\{11,\ 6^* + 6\} = 11.$$

Шаг 3.

$$\min\{d(x_2),\ d(x_3),\ d(x_5),\ d(x_6)\} = \min\{9,\ 13,\ 11,\ \infty\} = 9^* = d(x_2);$$

$$\tilde{x} = x_2.$$

Шаг 4. $x_2 \neq x_6$, возвращаемся на второй шаг.

Итерация 3

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_3\}$;

$$d(x_3) = \min\{13,\ 9^* + 8\} = 13.$$

Шаг 3.

$$\min\{\ d(x_3),\ d(x_5),\ d(x_6)\} = \min\{\ 13,\ 11,\ \infty\} = 11^* = d(x_5);$$

$$\tilde{x} = x_5.$$

Шаг 4. $x_5 \neq x_6$, возвращаемся на второй шаг.

Итерация 4

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_6\}$;

$$d(x_6) = \min\{\infty,\ 11^* + 4\} = 15.$$

Шаг 3.

$$\min\{\ d(x_3),\ d(x_6)\} = \min\{\ 13,\ 15\} = 13^* = d(x_3);$$

$$\tilde{x} = x_3.$$

Шаг 4. $x_3 \neq x_6$, возвращаемся на второй шаг.

Итерация 5

Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_6\}$;

$$d(x_6) = \min\{15,\ 13^* + 9\} = 15.$$

Шаг 3.

$$\min\{\ d(x_6)\} = \min\{\ 15\} = 15^*;$$
$$\tilde{x} = x_6.$$

Шаг 4. $x_6 = t = x_6$, конец первого этапа.

Этап 2

Итерация 1

Шаг 5. Составим множество $\tilde{S}$ вершин x_3, x_5 с постоянными метками, непосредственно предшествующих $\tilde{x} = x_6$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства $d(\tilde{x}) = d(x_i) + \omega(x_i, \tilde{x})$:

$$d(\tilde{x}) = 15 = 11^* + 4 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6);$$

$$d(\tilde{x}) = 15 \neq 13^* + 9 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6).$$

Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь; $\tilde{x} = x_5$.

Шаг 6. $\tilde{x} \neq a = x_1$, возвращаемся на пятый шаг.

Итерация 2

Шаг 5. $\tilde{S} = \{x_1,\ x_4\}$;

$$d(\tilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5);$$

$$d(\tilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5).$$

Включаем дугу (x_1, x_5) в кратчайший путь; $\tilde{x} = x_1$.

Шаг 6. $\tilde{x} = a = x_1$, завершаем второй этап.

Кратчайший путь от x_1 до x_6 построен: $x_1 \to x_5 \to x_6$. Его длина (вес) равна 15. ◄

ЛЕКЦИЯ 12. ПЛАНАРНОСТЬ ГРАФОВ

<u>*Графы плоские и планарные.*</u> Ранее отмечалось, что один и тот же граф можно изобразить по-разному. Например, на рис. 1 представлено изображение одного и того же графа, так как в обоих случаях содержится одна и та же информация о вершинах, дугах и их взаимных связях.

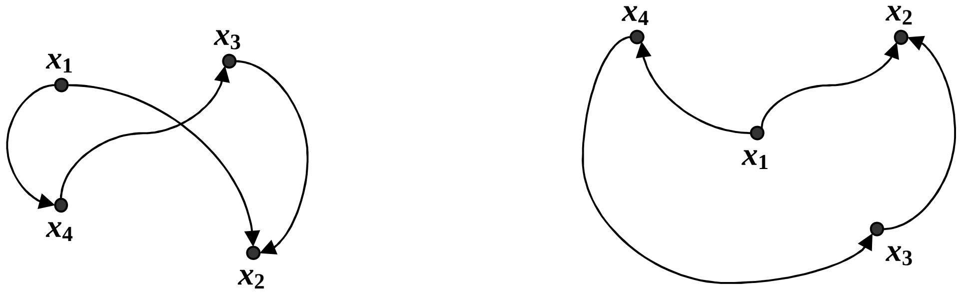


Рис. 1

Это свойство графов называется *изоморфностью*. Оно используется, например, при ответе на вопросы:

– можно ли схему какого-либо электронного устройства изобразить на плоскости без пересечений проводников;

– можно ли сделать проект участка железнодорожного или автодорожного полотна без пересечений.

Такие вопросы приводят к понятию плоского графа.

Плоским называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными линиями без самопересечений, и никакие два из них не имеют общих точек, кроме инцидентной им вершины.

Любой граф, изоморфный плоскому, называется *планарным*.

На рис. 2 изображены планарный (слева) и плоский (справа) графы.

Другими словами, если граф можно изобразить на плоскости так, что его ребра не пересекаются, он – планарный, иначе – непланарный.

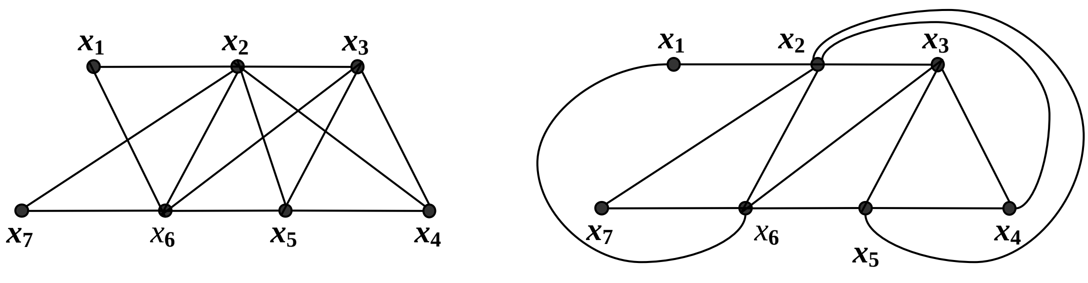


Рис. 2

Гранью планарного графа называется максимальное множество точек плоскости, каждую пару которых можно соединить плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа. Например, плоский граф на рис. 2 имеет восемь граней.

Границей грани называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани. Заметим, что граница каждой грани является циклом.

Существует теорема Эйлера, с помощью которой можно ответить на вопрос, является ли планарным связный граф, имеющий n вершин, m ребер, f граней.

Теорема Эйлера. Для всякого связного планарного графа верно равенство

$$n - m + f = 2,$$

где n, m, f – число вершин, ребер, граней (соответственно) планарного графа.

Например, для куба имеем: 8 – 12 + 6 = 2 (рис. 3).

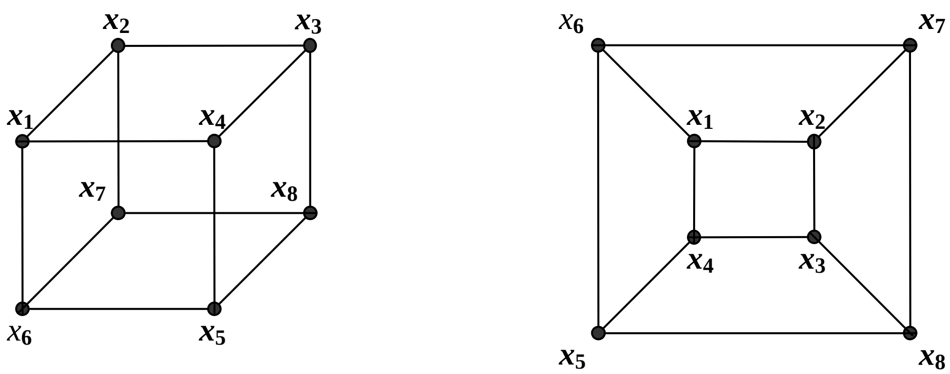


Рис. 3

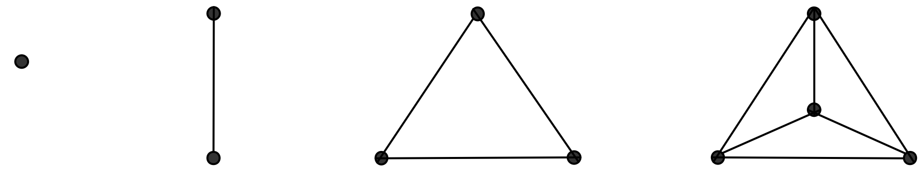
Имеется несколько критериев планарности и найдены эффективные алгоритмы нахождения плоского графа, изоморфного данному планарному (алгоритмы плоской укладки графа).

Чтобы познакомиться с ними, рассмотрим несколько определений.

Порядком графа называется число его вершин.

Простым называется граф без петель и кратных ребер.

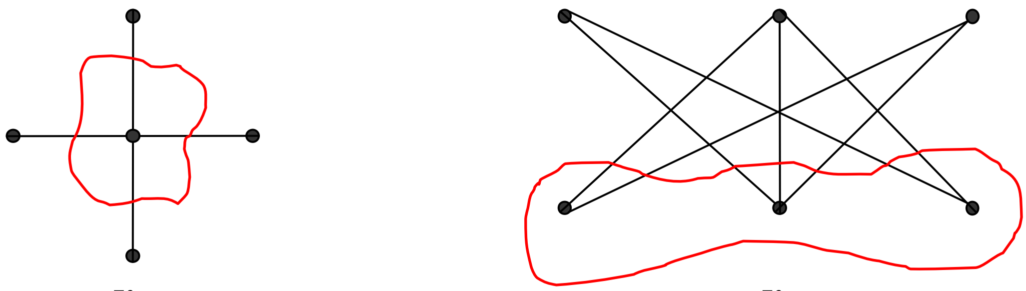
Полным называется простой граф, в котором каждые две вершины смежные. Обозначение полных графов порядка $n = 1$, 2, 3, 4 (рис. 4) – K_n.



K_1 K_2 K_3 K_4

Рис. 4

Граф, множество вершин которого можно разбить на две части (доли) так, чтобы концы каждого ребра принадлежали разным частям, называется *двудольным*. Обозначение: $K_{p,q}$, где p и q – число вершин в разных долях. На рис. 5 изображены двудольные графы $K_{1,4}$ и $K_{3,3}$.



$K_{1,4}$ $K_{3,3}$

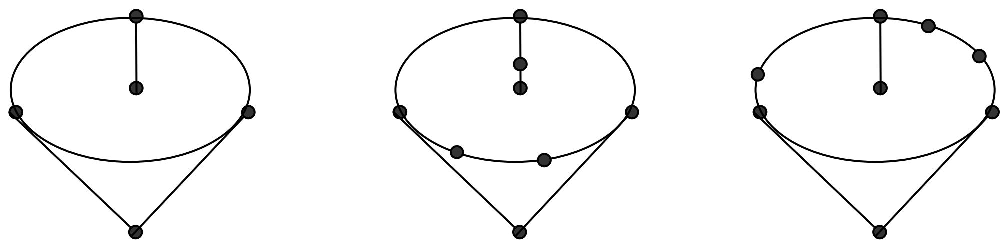
Рис. 5

Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, граф называется *полным двудольным*.

Подразбиением ребра называется добавление на него новой вершины, в результате чего оно заменяется двумя ребрами.

Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут получиться из третьего подразбиением его ребер.

На рис. 6 изображены исходный граф G и два гомеоморфных графа G_1 и G_2.

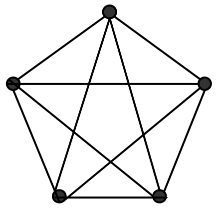


G G_1 G_2

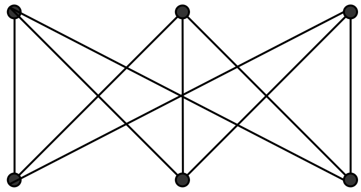
Рис. 6

Теорема Понтрягина[1] **– Куратовского**[2]**.** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Графы K_5 и $K_{3,3}$ являются основными непланарными (рис. 7).



$\boldsymbol{K_5}$



$\boldsymbol{K_{3,3}}$

Рис. 7

Эквивалентную форму критерия планарности содержит теорема 1.

Теорема 1. Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых (то есть получаемых последовательностью отождествлений[3] вершин, связанных ребрами) к графам K_5 или $K_{3,3}$.

►**Пример.** Докажем, что граф Петерсена (рис. 8) – непланарный. Для этого нужно показать, что он содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$.

---

[1] Лев Семенович Понтрягин (1908, Москва – 1988, Москва) – советский математик, академик АН СССР, Герой Социалистического Труда. В 14 лет потерял зрение в результате несчастного случая. Окончил МГУ. С 1939 года – заведующий отделом Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, одновременно с 1935 года – профессор МГУ. В топологии открыл общий закон двойственности и в связи с этим построил теорию характеров непрерывных групп; получил ряд результатов в теории гомотопий (классы Понтрягина). В теории колебаний главные результаты относятся к асимптотике релаксационных колебаний. В теории управления – создатель математической теории оптимальных процессов, в основе которой лежит т.н. принцип максимума Понтрягина; имеет фундаментальные результаты по дифференциальным играм.

[2] Казимир Куратовский (1896, Варшава – 1980, Варшава) – польский математик. В 1913 году поступил в Университет Глазго, однако из-за начавшейся Первой мировой войны прервал обучение и продолжил его в Варшавском университете, который окончил, защитив диссертацию в 1921 году. В 1927 – 1933 годах преподавал во Львовской политехнике, затем вернулся в Варшавский университет и с 1934 до 1952 год возглавлял в нем отделение математики. С 1952 года член Польской академии наук, в 1957 – 1968 годах ее вице-президент. С 1948 до 1967 года возглавлял Институт математики Польской академии наук. Ведущей областью научных интересов Куратовского была топология.

[3] Пусть x_1 и x_2 – две произвольные вершины графа G, а $G_1=G\backslash\{x_1\}\backslash\{x_2\}$. К G_1 присоединим новую вершину y_1, соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин x_1 и x_2 в графе G. Построенный граф G_1 получен из G отождествлением вершин x_1 и x_2.

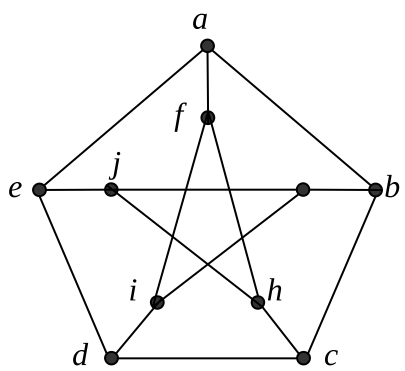


Рис. 8

Пусть верхними вершинами будут e, f, g, нижними – j, a, i. Соединим каждую верхнюю вершину с каждой нижней (рис. 9). Видим, что вершина c не нужна, поэтому ее и ребра, ей инцидентные, удаляем. Остальные ребра пока присутствуют. Теперь можно удалить вершины h, b, d, формируя ребра (f, j), (a, g), (e, i) соответственно, и получить граф, гомеоморфный предыдущему (рис. 10). Но последний граф можно изобразить как $K_{3,3}$. Значит, исходный граф содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$. Поэтому граф Петерсена – непланарный. ◀

Наименьшее число ребер непланарного графа, удаление которых приводит его к планарному, называется *числом планарности* или *искаженностью* (обозначается sk). Известно, что

$$sk = C_n^2 - 3n + 6, \quad n \geq 3.$$

Толщиной t непланарного графа называется наименьшее число его планарных подграфов, объединение которых дает сам граф.

Толщина графа равна минимальному числу плоскостей l, при котором граф G разбивается на плоские части G_i, $i = 1, 2, ..., l$.

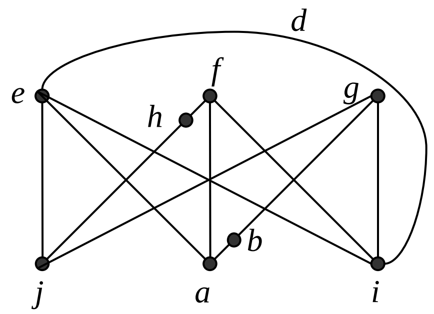


Рис. 9

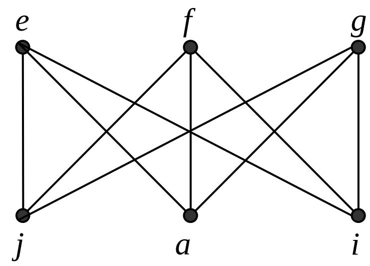


Рис. 10

Ясно, что толщина планарного графа равна единице. Для толщины связного графа с n вершинами и m ребрами найдены оценки:

$$t \geq \left] \frac{m}{3n-6} \right[;$$

$$t \geq \left[\frac{m+3n-7}{3n-6} \right],$$

где $[\ ]$ – целая часть числа, а $]\ [= [\ ]+1$.

<u>*Алгоритм укладки графа на плоскости.*</u> Пусть имеется некоторая плоская укладка подграфа $\tilde{G}$ графа G. *Сегментом* G_i относительно $\tilde{G}$ называется подграф графа G одного из следующих двух видов:

1. Ребро $u = (x; y) \in G$ такое, что $u \notin \tilde{G}$, $x \in \tilde{G}$, $y \in \tilde{G}$.

2. Связная компонента графа $G \setminus \tilde{G}$, дополненная всеми ребрами графа G, инцидентными вершинам взятой компоненты, и концами этих ребер.

Вершина z сегмента G_i называется *контактной*, если $z \in \tilde{G}$. Граф $\tilde{G}$ – плоский, следовательно, он разбивает плоскость на грани. *Допустимой гранью для сегмента* G_i *относительно* $\tilde{G}$ называется грань Γ графа $\tilde{G}$, содержащая все контактные вершины сегмента G_i. Пусть $\Gamma(G_i)$ – множество допустимых граней для G_i. Для непланарных графов может быть $\Gamma(G_i) = \varnothing$.

Рассмотрим путь сегмента G_i без петель и кратных ребер, соединяющий две различные контактные вершины и не содержащий других контактных вершин. Такие пути называются α*-путями*. Всякий α-путь может быть уложен в любую грань, допустимую для данного сегмента.

Два сегмента G_1 и G_2 относительно $\tilde{G}$ называются конфликтующими, если:

1. $\theta = \Gamma(G_1) \cap \Gamma(G_2) \neq \varnothing$.

2. Существуют два α-пути $L_1 \in G_1$ и $L_2 \in G_2$, которые нельзя уложить без пересечений одновременно ни в какую грань $\Gamma \in \theta$.

Пусть $\tilde{G}$ – плоская укладка некоторого подграфа графа G. Для каждого сегмента G_i относительно $\tilde{G}$ находим множество допустимых граней. Тогда может осуществиться один из трех случаев:

1. Существует сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i) = \varnothing$. В этом случае исходный граф непланарен.

2. Для некоторого сегмента G_i существует единственная допустимая грань Γ. Тогда можно расположить любой α-путь сегмента G_i в грани Γ. При этом грань Γ разобьется на две грани.

3. $\Gamma(G_i) \geq 2$ для Γ_i. В этом случае можно расположить α-путь в любой допустимой грани.

Сам алгоритм укладки планарного графа G на плоскость состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Выбираем любой простой цикл[4] C графа G. Этот цикл укладывается на плоскости и полагается $\tilde{G} = C$.

Шаг 2. Находим все грани графа $\tilde{G}$ и все сегменты G_i относительно $\tilde{G}$. Если множество сегментов пусто, то переходим на шаг 7.

Шаг 3. Для каждого сегмента G_i определяем множество допустимых граней $\Gamma(G_i)$. Если найдется сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i) = \varnothing$, то исходный граф G непланарен. Конец алгоритма, иначе – переход на шаг 4.

Шаг 4. Если существует сегмент G_i, для которого имеется единственная допустимая грань Γ, то происходит переход на шаг 6, иначе – на шаг 5.

Шаг 5. Для некоторого сегмента G_i, для которого $\Gamma(G_i) > 1$, выбираем произвольную допустимую грань.

Шаг 6. Произвольный α-путь L сегмента G_i помещается в грань Γ, $\tilde{G}$ заменяется на $\tilde{G} \cup L$ и переход на шаг 1.

Шаг 7. Построена укладка $\tilde{G}$ графа G на плоскости. Конец алгоритма.

►**Пример.** Осуществить плоскую укладку графа G, изображенного на рис. 11.

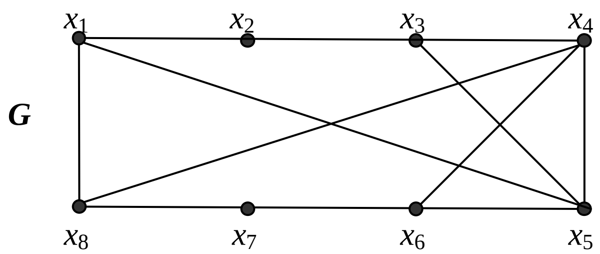


Рис. 11

Решение

<u>*Шаг 1.*</u> Выберем простой цикл $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, который разбивает плоскость на две грани, Γ_1 и Γ_2. Положим $\tilde{G} = C$.

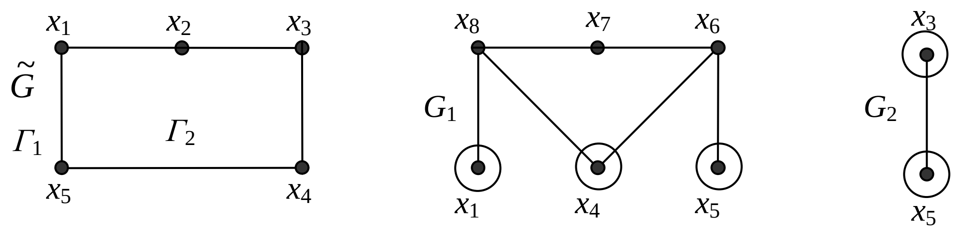


Рис. 12

<u>*Шаг 2.*</u> Изобразим граф $\tilde{G} = C$ и сегменты G_1, G_2 исходного графа G относительно $\tilde{G}$ (рис. 12). Контактные вершины обведены кружками; $\Gamma(G_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, $i = 1, 2$.

<u>*Шаг 3.*</u> $\Gamma(G_i) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$.

<u>*Шаг 4.*</u> Нет сегмента, для которого имеется единственная допустимая грань.

<u>*Шаг 5.*</u> Любой α-путь можно уложить в Γ_1 или Γ_2. Выберем для укладки грань Γ_1.

<u>*Шаг 6.*</u> Пусть $L = \{x_1, x_8, x_7, x_6, x_5\}$. Поместим этот α-путь в Γ_1. Возникает новый граф $\tilde{G}$ и его сегменты (рис. 13) G_1, G_2, G_3. Появляется и новая грань Γ_3.

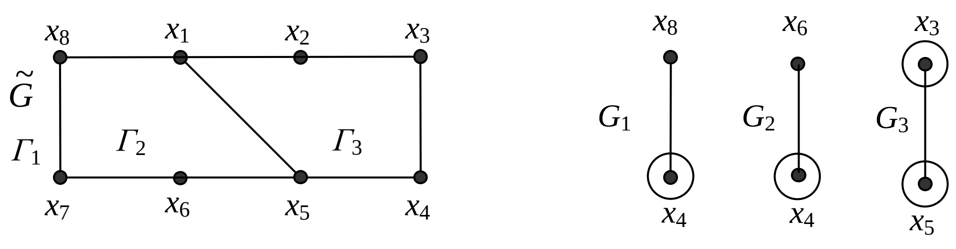


Рис. 13

---

[4] Простым циклом называется путь, содержащий различные вершины (кроме крайних) и различные ребра.

Переходим на шаг 1.

<u>*Шаг 1.*</u> Новых сегментов три – G_1, G_2, G_3.

<u>*Шаг 2.*</u> $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_1\}$; $\Gamma(G_2)=\{\Gamma_1\}$; $\Gamma(G_3)=\{\Gamma_1, \Gamma_3\}$.

<u>*Шаг 3.*</u> $\Gamma(G_i)\neq\varnothing$, $i=1, 2, 3$.

<u>*Шаг 4.*</u> $\Gamma(G_1)=\Gamma(G_2)=\{\Gamma_1\}$, переход на шаг 6.

<u>*Шаг 6.*</u> α-путь $L_1=\{x_4, x_8\}$ поместим в грань Γ_1, α-путь $L_2=\{x_4, x_6\}$ также поместим в эту грань. В результате возникает новый граф $\tilde{G}$, изображенный на рис. 14. Этот граф имеет пять граней и один сегмент.

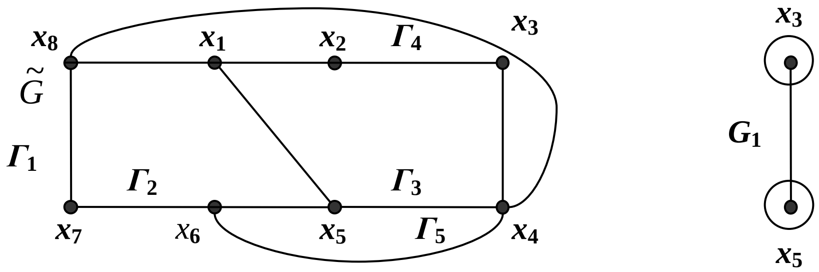


Рис. 14

<u>*Шаг 1.*</u> G_1 – ребро (x_3, x_5).

<u>*Шаг 2.*</u> $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_3\}$.

<u>*Шаг 3.*</u> $\Gamma(G_1)\neq\varnothing$.

<u>*Шаг 4.*</u> $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_3\}$, переход на шаг 6.

<u>*Шаг 6.*</u> α-путь $L_1=\{x_3, x_5\}$ поместим в грань Γ_3. Новый граф $\tilde{G}$ (рис. 15) является плоской укладкой исходного планарного графа.

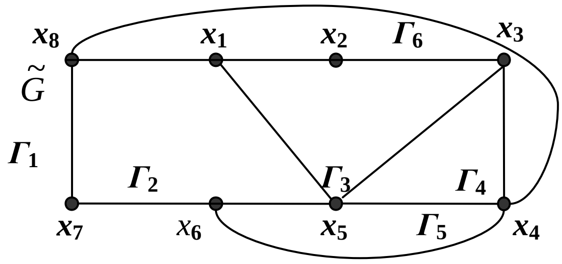


Рис. 15

◄

РАЗДЕЛ III. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

ЛЕКЦИЯ 13. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Иногда бывает необходимо подсчитать:

– *число всех возможных способов размещения некоторых элементов конечного множества* или

– *число всех возможных способов выполнения определенного действия из конечного множества таких действий*.

Задачи такого типа называются *комбинаторными*. *Комбинаторикой* называется раздел дискретной математики, в котором решают задачи выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными свойствами.

Основные правила комбинаторики. Опыт выполнения комбинаторных операций отбора подмножеств привел к двум логическим правилам – произведения и суммы.

►**Пример.** Бросают два кубика – белый и красный. Пусть на белом выпадает число a, на красном – b. Всего возможных комбинаций чисел (a,b): $6\cdot 6=36$.◄

Эта задача является реализацией *правила произведения*.

Правило произведения

Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта a и b можно выбрать $n_1\cdot n_2$ способами.

►**Пример.** Сколько шифров, состоящих из трех букв, за которыми идут две цифры, можно составить, используя 32 буквы и 10 цифр?

Для выбора одной буквы из 32 имеющихся существует 32 способа, для выбора одной цифры из 10 имеющихся существует 10 способов. В шифре должно быть три буквы и две цифры, поэтому количество N таких шифров найдем по правилу произведения:

$$N=32\cdot 32\cdot 32\cdot 10\cdot 10=3\,276\,800.$$ ◄

Правило суммы

Если из некоторого конечного множества элемент a можно выбрать n_1 способами, а элемент b – n_2 способами, причем способы n_1 и n_2 не пересекаются, то любой из элементов a или b можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

►**Пример.** Сколько существует способов выбора одного карандаша из коробки, содержащей 5 красных, 7 синих и 3 зеленых карандаша?

Решение. Один карандаш можно выбрать 5 + 7 + 3 = 15 способами.◄

Размещения. Имеются n различных элементов a_1, a_2, ..., a_n. Из них составляют всевозможные *расстановки длины* k ($1 \le k \le n$). Например, $a_1\ a_2\ a_4$ – расстановка длины 3. Две расстановки *длины* k считаются различными, если они отличаются видом входящих в них элементов или порядком их следования в расстановке. Такие расстановки называются *размещениями без повторений* из n по k, а их число обозначают A_n^k (буква A от французского слова *arrangement* – размещение). Найдем A_n^k.

При составлении размещений на первое место можно поставить любой из имеющихся n элементов. На второе место теперь можно поставить только любой из $n-1$ оставшихся. И, наконец, на k-тое – любой из $n-(k-1) = n-k+1$ оставшихся предметов. По правилу произведения получаем общее число размещений без повторений из n по k:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ и $0! = 1$.

►**Пример.** Сколькими способами можно набрать семизначный код, если все его цифры различны?

Решение. Первую цифру можно набрать 10 способами, вторую – 9, так как одна цифра уже использована, и так далее, седьмую – 4. Тогда общее число возможных размещений

$$A_{10}^7 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10!}{(10-7)!} = 604800.$$◄

Перестановки. При составлении размещений из n элементов по k мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком элементов. Но если брать расстановки, которые включают все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком. Такие расстановки называются *перестановками из n элементов*, а их число обозначается P_n (буква P от английского слова *permutation* – перестановка). Следовательно, число перестановок

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

►**Пример.** Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

Решение. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.◄

►**Пример.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая входит в число только один раз?

Решение. $P_3 = 3! = 6$.◄

Сочетания. В случае, когда порядок элементов в расстановке неважен, размещения называются сочетаниями. *Сочетаниями из n различных элементов по k* называются *все* возможные расстановки длины k, образованные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Общее число сочетаний обозначают через C_n^k или $\binom{n}{k}$ (буква C от английского слова *combination* – комбинация).

Определим это число. Составим все сочетания из n по k. Затем переставим в каждом сочетании элементы всеми возможными способами. Теперь мы получим расстановки, отличающиеся либо составом, либо порядком, то есть это все размещения без повторений из n по k. Их число равно A_n^k. Учитывая, что каждое сочетание дает $k!$ размещений, по правилу произведения можно записать: $C_n^k \cdot k! = A_n^k$.

Тогда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \quad \text{или} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для чисел C_n^k (они называются *биномиальными коэффициентами*) справедливы тождества (докажите их самостоятельно):

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (правило симметрии);

$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$;

$C_n^k \cdot C_k^r = C_n^r \cdot C_{n-r}^{k-r}$, где $0 \le r \le k \le n$;

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, где $0 \le r \le k \le n$ (правило Паскаля[1]);

$C_n^0 = C_n^n = 1$.

►**Пример.** Составить различные сочетания по два из элементов множества $A = \{3, 4, 5\}$ и подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно составить следующие три сочетания по два элемента: $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$. Их число можно подсчитать и по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$C_3^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3. ◄$$

►**Пример.** Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Решение. Поскольку несущественно, в каком порядке отобраны кандидатуры, число вариантов $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$. ◄

---

[1] Блез Паска́ль (1623, Клермон-Ферран, Франция – 1662, Париж, Франция) – французский математик, физик, литератор и философ. Классик французской литературы, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, создатель первых образцов счетной техники, автор основного закона гидростатики.

►**Пример.** Сколько различных прямоугольников можно вырезать из клеток доски, размер которой равен $m \times n$?

Решение. Прямоугольник однозначно определяется положением его сторон. Горизонтальные стороны могут занимать любое из $m+1$ положений. Тогда число способов их выбора равно C_{m+1}^2. Вертикальные стороны можно выбрать C_{n+1}^2 способами. По правилу произведения заключаем, что количество прямоугольников равно $C_{m+1}^2 \cdot C_{n+1}^2$.◄

При большом n подсчет числа вариантов по этим формулам требует громоздких вычислений – $n!$. В таком случае пользуются *асимптотической формулой Стирлинга*[2]

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\Theta(n)},$$

где $\left|\Theta(n)\right| \le \dfrac{1}{12n}$.

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов данного множества различны. Если некоторые элементы повторяются, то количество расстановок вычисляют по другим формулам.

[2] Джеймс Стирлинг (1692 – 1770) – шотландский математик. В работе «Ньютоновские кривые третьего порядка» Стирлинг обнаружил 4 новых типа этих кривых, не замеченных великим аналитиком. В этой же работе доказан ряд теорем, высказанных Ньютоном без доказательства, изучаются кривая скорейшего спуска и цепная линия, решается лейбницевская задача об ортогональных траекториях. Стирлинг выяснил, что алгебраическая кривая n-ного порядка определяется своими $n(n + 3)/2$ точками. В 1730 году опубликован главный труд Стирлинга – «Дифференциальные методы» (Methodus Differentialis). Это один из первых содержательных учебников по матанализу, излагающий помимо основ анализа немало личных открытий Стирлинга. Среди тем книги: бесконечные ряды, их суммирование и ускорение сходимости, теория интегрирования (квадратуры), интерполирование, свойства гамма-функции, асимптотические представления. Одно из таких представлений, несколько преобразованное де Муавром, известно сейчас как формула Стирлинга. В 1733 году – еще один важный труд Стирлинга – «Двенадцать предложений о фигуре Земли». В его честь названы числа Стирлинга и формула Стирлинга.

ЛЕКЦИЯ 14. КОМБИНАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ С ПОВТОРЕНИЯМИ. БИНОМ НЬЮТОНА. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Размещения с повторениями. *Размещениями с повторениями из n элементов по k* называются расстановки длины k, отличающиеся видом входящих в них элементов или порядком их следования в расстановке.

Их число обозначается $\overline{A_n^k}$. Черта указывает на возможность повторения элементов. Подсчитаем $\overline{A_n^k}$.

Для выбора любого элемента из n-элементного множества существует n возможностей. Для выбора следующего остаются всё те же n возможностей. По правилу произведения имеем

$$\overline{A_n^k} = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k\ раз} = n^k .$$

►**Пример.** Сколько пятизначных номеров можно составить из элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Решение. Поскольку элементы данного множества могут повторяться в расстановке, для каждого из пяти элементов есть девять способов выбора, поэтому вычислим $\overline{A_9^5}$:

$$\overline{A_9^5} = 9^5 = 59049 .◄$$

►**Пример.** Сколько имеется пятизначных чисел, делящихся на пять?

Решение. Число делится на пять, если оно оканчивается на нуль или на пять. В задаче речь идет о размещениях с повторениями. Первая цифра может быть выбрана из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Нуль не может участвовать в выборке, поскольку при его выборе число будет четырехзначным, а не пятизначным. Значит, имеется девять вариантов выбора первой цифры. Вторая, третья и четвертая цифры могут быть любыми из набора $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Последняя пятая цифра выбирается только из множества $\{0, 5\}$.

Тогда

$$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000 .◄$$

Перестановки с повторениями. *Перестановкой с повторениями состава n_1, n_2, …, n_k из элементов a_1, a_2, …, a_k* (обозначение $P(n_1, n_2, ..., n_k)$) называется любая расстановка длины $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, в которую a_1 входит n_1 раз, a_2 входит n_2 раз, …, a_k – n_k раз.

Для выбора элемента a_1 из n-элементного множества n_1 раз имеется $C_n^{n_1}$ возможностей, после этого a_2 можно выбирать только из оставшихся $n-n_1$ элементов. Этот выбор можно осуществить $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами и так далее. Применяя правило произведения, получаем искомое число перестановок с повторениями:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} ... C^{n_k}_{n-\sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot ... \cdot \frac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_k!\underbrace{(n-n_1-n_2-...-n_k)!}_{0!}} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} = \frac{(n_1+n_2+...+n_k)!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

►**Пример.** Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение. Слово «математика» имеет следующий состав: буква «м» входит два раза, «а» – три раза, «т» – два раза, буквы «е», «и», «к» – по одному разу.

Длина n расстановки «математика» равна

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k = 2+3+2+1+1+1 = 10.$$

Значит, при перестановке букв получится

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200 \text{ слов.}$$ ◄

►**Пример.** Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?

Решение. Число способов равно

$$P(7, 7, 7, 7) = \frac{28!}{(7!)^4}.$$ ◄

Сочетания с повторениями. Сочетаниями с повторениями из n *элементов по* k (обозначение $\overline{C_n^k}$) называются расстановки длины k, отличающиеся видом входящих в них элементов, и при этом расстановки могут содержать повторяющиеся элементы. Их число равно

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

►**Пример.** В почтовом отделении продаются открытки пяти видов. Найти число способов покупки семи открыток.

Решение. Число способов покупки открыток равно числу сочетаний с повторениями из $n=5$ элементов по $k=7$ элементов и равно

$$\overline{C_5^7}=C_{5+7-1}^7=C_{11}^7=\frac{11!}{7!(11-7)!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{24}=330 .◄$$

►**Пример.** Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта?

Решение. Искомое число равно

$$\overline{C_4^7}=C_{4+7-1}^7=C_{10}^7=C_{10}^3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120 .◄$$

►**Пример.** В научной библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и так далее, всего по 16 разделам науки. Поступили очередные 4 заказа на литературу. Сколько наборов из четырех заказов можно составить по 16 разделам науки?

Решение. Искомое число равно числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, то есть

$$\overline{C_{16}^4}=C_{16+4-1}^4=C_{19}^4=3876 .◄$$

Бином Ньютона. Формула

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}=C_n^0 a^0 b^k+C_n^1 a^1 b^{n-1}+\ldots+C_n^l a^l b^{n-l}+\ldots+C_n^n a^n b^0$$

называется *биномом Ньютона*[1]. Она была известна среднеазиатским математикам, начиная с Омара Хайяма, а в Европе до Ньютона ее знал Паскаль. Заслуга Ньютона в том, что он обобщил эту формулу для нецелого показателя n.

Биномиальное разложение служит основой для многих комбинаторных формул, например, при $a=b=1$ получим $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$ – число всех возможных неупорядоченных подмножеств из k элементов n-элементного множества.

---

[1] Сэр Исаак Ньютон (1643 – 1727) – английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

Треугольник Паскаля. Арифметический треугольник вида

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\ & & & \ldots & & & \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \ldots & & & & \end{array},$$

позволяющий быстро найти значения биномиальных коэффициентов, называется *треугольником Паскаля*.

В нем n-ная строка содержит биномиальные коэффициенты разложения $(a+b)^{n-1}$. Можно заметить, что каждый внутренний элемент треугольника равен сумме двух элементов, расположенных над ним, а боковые элементы состоят из единиц (это наблюдение основано на свойстве $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$).

Полиномиальная теорема. Обобщение бинома Ньютона на случай k слагаемых называется полиномиальной теоремой:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \ge 0,\ n_2 \ge 0,\ \ldots,\ n_k \ge 0, \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n}}^{n} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k},$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ в целых неотрицательных числах, то есть выражение $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n$ равно сумме всех возможных слагаемых вида $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

►**Пример.** Вычислить $(x+y+z)^3$.

Решение. Раскрывая скобки, получим

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz.$$

Выражение состоит из десяти членов. Этот же результат найдем с помощью полиномиальной теоремы при $n=3$, $k=3$. Система условий суммирования здесь имеет вид

$$\begin{cases} n_1 \ge 0,\ n_2 \ge 0,\ n_3 \ge 0; \\ n_1 + n_2 + n_3 = 3. \end{cases}$$

Различных числовых коэффициентов тоже три:

$$\frac{3!}{3!0!0!}=1,\ \frac{3!}{2!1!0!}=3,\ \frac{3!}{1!1!1!}=6.$$

Составим все возможные комбинации индексов n_1, n_2, n_3:

n_1	n_2	n_3
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
1	0	2
1	1	1
0	2	1
0	1	2

Тогда

$$(x+y+z)^3=1\cdot(x^3+y^3+z^3)+3\cdot(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2)+6xyz.◄$$

►**Пример.** Вычислить $(x+y+z)^4$.

Решение. Здесь $n=4$, $k=3$. Система условий суммирования здесь имеет вид

$$\begin{cases} n_1\geq 0,\ n_2\geq 0,\ n_3\geq 0; \\ n_1+n_2+n_3=4. \end{cases}$$

Различных числовых коэффициентов четыре:

$$\frac{4!}{4!0!0!}=1;\quad \frac{4!}{3!1!0!}=4;\quad \frac{4!}{2!2!0!}=6.$$

Составим все возможные комбинации индексов n_1, n_2, n_3:

n_1	n_2	n_3
4	0	0
0	4	0
0	0	4
3	1	0
3	0	1
1	3	0
1	0	3
0	1	3
0	3	1
2	2	0
2	0	2
0	2	2

Тогда

$$(x+y+z)^4=1\cdot(x^4+y^4+z^4)+4\cdot(x^3y+x^3z+xy^3+xy^3+yz^3+y^3z)+$$
$$+6(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2).◄$$

ЛЕКЦИЯ 15. МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Иногда возникает вопрос о наличии или отсутствии возможности сделать нужную выборку или расположение элементов. Другими словами, существует задача разделения множеств на подмножества в зависимости от того, обладают ли их элементы нужными свойствами или нет.

Рассмотрим задачу о нахождении числа элементов объединения множеств. Пусть $n(A)$ – количество элементов множества A, $n(B)$ – количество элементов множества B. Изобразим пересечение множеств A и B на диаграмме Эйлера – Венна (рис. 1).

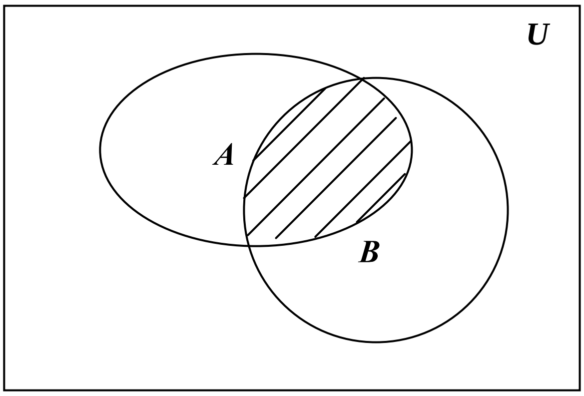


Рис. 1. $A\cap B$

Понятно, что число элементов объединения двух множеств равно сумме числа элементов одного множества и числа элементов другого множества без числа элементов пересечения множеств:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

Для числа элементов объединения трех множеств последняя формула имеет вид:

$$\begin{gathered}n(A\cup B\cup C)=n(A\cup(B\cup C))=n(A)+n(B\cup C)-n(A\cap(B\cup C))=\\ =n(A)+n(B\cup C)-n((A\cap B)\cup(A\cap C))=n(A)+n(B)+n(C)-\\ -n(B\cap C)-(n(A\cap B)+n(A\cap C)-n((A\cap B)\cap(A\cap C)))=\\ =n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap A\cap C)=\\ =n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).\end{gathered}$$

Для числа элементов объединения n множеств A_1, A_2, …, A_n справедлива аналогичная формула:

$$\begin{gathered}n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=n(A_1)+n(A_2)+\ldots+n(A_n)-(n(A_1\cap A_2)+n(A_1\cap A_3)+\ldots\\ \ldots n(A_{n-1}\cap A_n))+(n(A_1\cap A_2\cap A_3)+n(A_1\cap A_2\cap A_4)+\ldots\\ \ldots+n(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n))+\ldots+(-1)^{n-1}n(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n).\end{gathered}\tag{1}$$

Эту формулу можно обобщить для подсчета числа элементов, обладающих или не обладающих данным набором свойств.

Пусть дано множество n элементов и множество k свойств p_1, p_2, …, p_k, которыми могут обладать или не обладать эти элементы. Произвольным образом выделим r свойств p_{i_1}, p_{i_2}, …, p_{i_r}.

Число элементов, обладающих всеми r свойствами, обозначим $n(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r})$. Отсутствие какого-либо свойства p_i у элемента обозначим $\overline{p_i}$. Тогда запись $n(p_1, \overline{p_2}, p_3)$ означает число элементов со свойствами p_1 и p_3, но без свойства p_2.

Найдем число элементов, не обладающих набором определенных свойств. Начнем с простого случая.

1. Пусть имеется одно свойство p, тогда $n(\overline{p}) = n - n(p)$.

2. Имеется конечное число свойств p_1, p_2, …, p_k, несовместимых друг с другом.

Тогда $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k}) = n - \sum\limits_{i=1}^{k} n(p_i)$.

3. Элементы обладают комбинациями различных свойств (эти свойства совместимы между собой).

Тогда справедлива формула, аналогичная (1):

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k}) = n - \sum_{i=1}^{k} n(p_i) + \sum_{1 \le i \le j \le k}^{k} n(p_i, p_j) - \sum_{1 \le i \le j < l \le k}^{k} n(p_i, p_j, p_l) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k n(p_1, p_2, \ldots, p_k). \qquad (2)$$

В левой части (2) может стоять не только число вида $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k})$, но и, например, $n(p_1, \overline{p_2}, p_3, \overline{p_4})$ – число элементов, обладающих свойствами p_1, p_3 и не обладающих свойствами p_2, p_4:

$$n(p_1, \overline{p_2}, p_3, \overline{p_4}) = n(p_1, p_3) - n(p_1, p_3, p_2) - n(p_1, p_3, p_4) + n(p_1, p_3, p_2, p_4).$$

►**Пример.** В комнате несколько человек, знающих хотя бы один из трех языков. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек в комнате? Сколько из них знают только английский язык?

Решение. Задачу можно решить двумя способами – «вычерпывания» и по формуле включения и исключения. Запишем компактно условие задачи (табл. 1).

Таблица 1

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
6	6	7	4	3	2	1

Пусть из комнаты ушел человек, знающий все три языка, тогда табл. 1 примет вид табл. 2.

Таблица 2

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
5	5	6	3	2	1	0

Пусть теперь ушли три человека (из оставшихся), знающие одновременно английский и немецкий языки. Число людей, знающих другие пары языков, не изменится (табл. 3).

Таблица 3

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	2	6	0	2	1	0

Пусть уйдут двое, знающие немецкий и французский (табл. 4).

Таблица 4

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	0	4	0	0	1	0

Наконец, уходит человек, знающий французский и английский языки. Тогда получим табл. 5.

Таблица 5

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
1	0	3	0	0	0	0

Значит, в комнате остался один человек, знающий только английский язык, и трое, знающих только французский язык. Кроме того, вышло семь человек. Следовательно, сначала в комнате было одиннадцать человек.

Решим теперь эту задачу методом включений и исключений. Пусть свойство p_A есть знание английского языка, p_H – знание немецкого языка, p_Φ – знание французского языка. Общее число людей составляют все, знающие хотя бы один язык. Не знающих хотя бы одного языка в условии нет.

По формуле (1) имеем:

$$n = n(p_A) + n(p_H) + n(p_\Phi) - n(p_A, p_H) - n(p_A, p_\Phi) - n(p_H, p_\Phi) + n(p_A, p_H, p_\Phi) =$$
$$= 6 + 6 + 7 - (4 + 3 + 2) + 1 = 19 - 9 + 1 = 11.$$

Число людей, знающих только английский язык, – $n(p_A, \overline{p_H}, \overline{p_\Phi})$. По формуле (2) найдем это число:

$$n(p_A, \overline{p_H}, \overline{p_\Phi}) = n(p_A) - n(p_A, p_H) - n(p_A, p_\Phi) + n(p_A, p_H, p_\Phi) =$$
$$= 6 - 4 - 2 + 1 = 1. \blacktriangleleft$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

РАЗДЕЛ I. МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА БУЛЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1.. МНОЖЕСТВО, ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ. ПОДМНОЖЕСТВА

1. Какие из приведенных ниже соотношений неверны и почему:

а) $x \in \{2, a, x\}$;

б) $3 \in \{1, \{2,3\}, 4\}$;

в) $x \in \{1, \sin x\}$;

г) $\{x, y\} \in \{a, \{x, y\}, b\}$;

д) $\{a\} \in a$;

е) $A \in \{A\}$;

ж) $A = \{A\}$;

з) $a = \{a\}$.

2. Какие из приведенных ниже соотношений неверны и почему:

а) $\varnothing \subseteq \varnothing$;

б) $\varnothing \subset \varnothing$;

в) $\varnothing \in \varnothing$,

г) $\varnothing \subseteq A$, где A – произвольное множество;

д) $\varnothing \in A$, где A – произвольное множество.

3. Перечислите элементы множества $A = \{x \mid x - \textit{гласный звук}\}$.

4. Опишите множество при помощи общего свойства $P(x)$ всех его элементов x:

а) $A = \{3, 6, 9, 12, ..., 24\}$;

б) $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$;

в) $C = \{1, 4, 9, 16, ...\}$;

г) $D = \left\{\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, ...\right\}$;

д) $E = \left\{\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, ...\right\}$.

5. Укажите, какие из перечисленных множеств конечные, бесконечные, пустые. Указанные множества задать перечислением всех элементов, если возможно:

а) $A = \{x \mid x \in Z,\ -3 \le x \le 5\}$;

б) $B = \{x \mid x \in N,\ -3 \le x \le 5\}$;

в) $C = \{x \mid x \in N,\ x + 2 = 0\}$;

г) $D = \{x \mid x \in Z,\ x + 3 \in N\}$;

д) $E = \{x \mid x \in R,\ x + \frac{1}{2} \le 2 \wedge x > 0\}$;

е) $F = \{x \mid x \in N,\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \le 4\}$;

ж) $G = \{x \mid x \in R,\ \cos^2 2x = 1 \wedge 0 \le x \le 2\pi\}$.

6. Изобразите на координатной плоскости следующие множества:

а) $\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$;

б) $\{(x, y) \in R^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) \le 0\}$;

в) $\{(x, y) \in R^2 \mid (y^2 - 1)(x + 3) > 0\}$.

7. Равны ли между собой множества A и B? Если нет, то почему:

а) $A = \{2,5,4\}$, $B = \{5,4,2\}$;

б) $A = \{1,2,4,2\}$, $B = \{1,2,4\}$;

в) $A = \{2,4,5\}$, $B = \{2,4,3\}$;

г) $A = \{1,\{2,5\},6\}$, $B = \{1,\{5,2\},6\}$;

д) $A = \{1,\{2,5\},6\}$, $B = \{1,2,5,6\}$.

8. Найдите все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$.

9. Связаны ли множества A и B отношением включения? Если да, то укажите, какое из них является подмножеством другого:

а) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{a, b, c, d\}$;

б) $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{a, e, c\}$;

в) $A = \{c, d, e\}$, $B = \{c, a\}$.

10. Определить количество элементов в каждом множестве:

а) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

б) $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$;

в) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$;

г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$;

д) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

11. Даны следующие множества:

A – множество всех четырехугольников;

B – множество всех параллелограммов;

C – множество всех прямоугольников;

D – множество всех ромбов;

E – множество всех квадратов;

F – множество всех ромбов с прямыми углами.

Какие из этих множеств равны между собой? Какие из них являются подмножествами других?

12. Запишите булеан множества A:

а) $A = \varnothing$;

б) $A = \{1, \{1, 2\}\}$.

13. Приняв множество первых 20 натуральных чисел в качестве универсального, запишите следующие его подмножества:

A – четных чисел;

B – нечетных чисел;

C – квадратов чисел;

D – простых чисел.

В каких отношениях находятся эти подмножества?

Задания для самостоятельной работы

1. Для каких из следующих пар множеств имеет место одно из соотношений: $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$:

а) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;

б) $A = \varnothing$, $B = \varnothing$;

в) $A = \varnothing$, $B = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, a\}$.

2. Укажите, какие из перечисленных множеств конечные, бесконечные, пустые. Указанные множества задать перечислением всех элементов (если возможно):

а) $A = \{x \mid x \in Q,\ -1 \le x \le 2\}$;

б) $B = \{x \mid x \in R,\ x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$;

в) $C = \{x \mid x \in N,\ x^2 - 3x - 4 \le 0\}$;

г) $D = \{x \mid x \in Z,\ \frac{1}{4} \le 2^x \le 5 \wedge x \ge 0\}$;

д) $E = \{x \mid x \in N,\ x < 0\}$;

е) $F = \{x \mid x \in R,\ |x| \le 2\}$.

3. Изобразите на координатной плоскости следующие множества:

а) $\{(x, y) \in R^2 \mid x + y - 2 = 0\}$;

б) $\{(x, y) \in R^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$;

в) $\{(x, y) \in R^2 \mid y > \sqrt{2x+1} \wedge 2x + 1 \ge 0\}$;

г) $\{(x, y) \in R^2 \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\ x \ne 0,\ y \ne 0\}$.

4. Запишите все подмножества данного множества и постройте множество всех его подмножеств:

а) $\{a\}$;

б) $\{a, b\}$;

в) $\{1, 2, 3, 4\}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ при:

а) $A = \{-1, 0, 3, 4\}$, $B = \{0, 4, 6\}$;

б) $A = [0, 2]$, $B = [1, 5]$;

в) $A = [0, 2]$, $B = \{0, 4, 6\}$;

г) $A = (-\infty, 7]$, $B = (5, 8)$;

д) $A = [1, 3) \cup (5, 7]$, $B = [2, 6]$.

2. Пусть A – множество решений уравнения $f(x) = 0$, B – множество решений уравнения $g(x) = 0$. Выразите через A и B множество решений:

а) уравнения $f(x)g(x) = 0$;

б) уравнения $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

в) системы уравнений $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

3. Как можно выразить множество действительных корней уравнения $f(x) = 0$, если известны множества $X = \{x \mid f(x) > 0\}$ и $Y = \{x \mid f(x) < 0\}$?

4. Какие из следующих высказываний истинны для произвольных множеств A и B:

а) если $x \in A$, то $x \in A$ или $x \in B$;

б) если $x \in A$ или $x \in B$, то $x \in A$;

в) если $x \in A$ и $x \in B$, то $x \in A$;

г) если $x \in A$, то $x \in A$ и $x \in B$.

5. С помощью диаграмм Эйлера – Венна исследуйте вопрос о справедливости каждого из следующих рассуждений:

а) если A, B и C такие подмножества универсума U, что $A \cap B \subset \overline{C}$ и $A \cup C \subset B$, то $A \cap C = \varnothing$;

б) если A, B и C такие подмножества универсума U, что $A \subset \overline{B \cap C}$ и $B \subset \overline{A \cup C}$, то $B = \varnothing$.

6. Найти множества A и B, если:

а) $A \setminus B = \{a, b\}$, $B \setminus A = \{c, d\}$, $A \cap B = \{x, y, z\}$;

б) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \{c, d\}$, $A \setminus B = \{a, e, f\}$;

в) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = \{a\}$.

7. Каким условиям должны удовлетворять множества A и B, чтобы:

а) $A \cap B = A \cup B$;

б) $(A \setminus B) \cup B = A$;

в) $(A \cup B) \setminus B = A$.

8. Докажите, что для произвольных множеств A, B и C и универсального множества U справедливы следующие равенства:

а) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$;

б) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

г) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

д) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

е) $\overline{A \setminus B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$;

ж) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

з) $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \setminus C)}$.

9. Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский – 28, немецкий – 30, французский – 42, испанский и немецкий – 8, испанский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка – 3.

Определить:

а) сколько студентов не изучают ни одного языка;

б) сколько студентов изучают один французский язык;

в) сколько студентов изучают немецкий язык в том и только в том случае, если они не изучают французский язык.

Решение. Нарисуем диаграмму Эйлера-Венна в виде трех кругов, обозначающих множества студентов, изучающих французский, немецкий и испанский языки (рис. 1). В каждую из восьми областей впишем данные, используя приведенные цифры. Начнем с конца списка и будем двигаться к его началу.

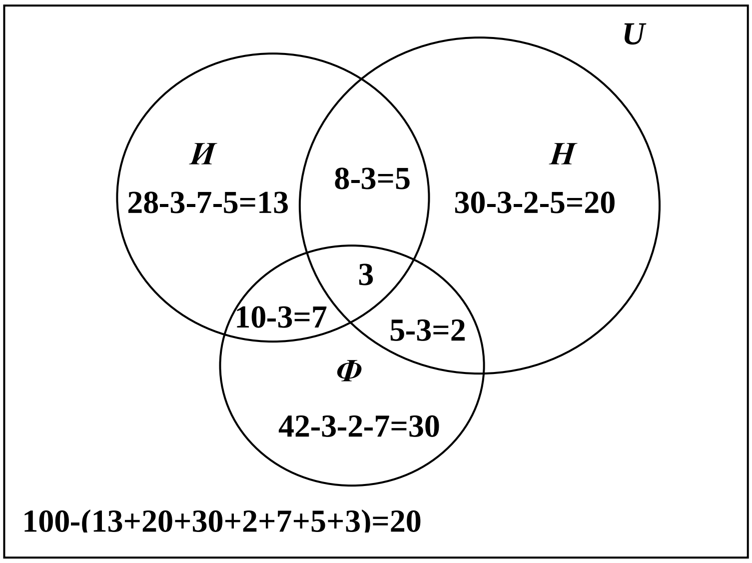


Рис. 1

Получим следующие ответы:

а) 20;

б) 30;

в) 25.

10. Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: только немецкий – 18, немецкий, но не испанский – 23, немецкий и французский – 8, немецкий – 26, французский – 48, французский и испанский – 8, никакого языка – 24.

Определить:

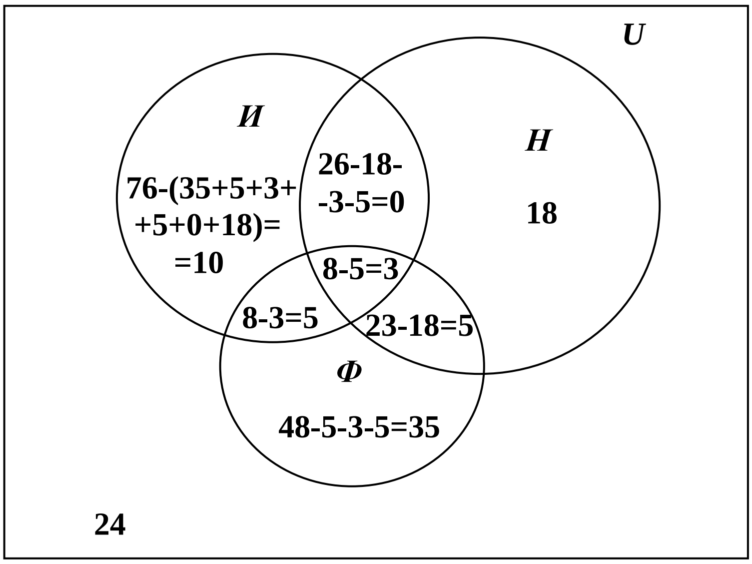
а) сколько студентов изучают испанский язык;

б) сколько студентов изучают только немецкий и испанский языки;

в) сколько студентов изучают немецкий и испанский языки;

в) сколько студентов изучают французский язык в том и только в том случае, если они не изучают испанский.

Решение



Получим следующие ответы:

а) 10 + 5 + 3 = 18;

б) 0;

в) 3;

г) 35 + 5 = 40.

11. В отчете об опросе 100 студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих различные иностранные языки, таково: все три языка – 5, немецкий и испанский – 10, французский и испанский – 8, немецкий и французский – 20, испанский – 30, немецкий – 23, французский – 50. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему?

Задания для самостоятельной работы

1. Даны множества $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D=\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Запишите перечислением элементов множества:

а) $A\cup B\cup C\cup D$;

б) $A\cap B\cap C\cap D$;

в) $(A\cap B)\cup(C\cap D)$;

г) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$;

д) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

2. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера – Венна множества:

а) $A\subset B$ и $B\subset C$;

б) $A\subset B$, $B\subset C$ и $A\setminus B=\varnothing$;

в) $A\subset B$, $B\subset C$ и $C=A\cup B$;

г) $A\subset B$, $B\subset C$ и $A\cap B\neq\varnothing$.

3. Пусть $A=\{x\mid x\in N,\ 2<x\le 6\}$, $B=\{x\mid x\in N,\ 1<x<4\}$, $C=\{x\mid x\in N,\ x^2-4=0\}$. Из каких элементов состоят множества:

а) $B\cup C$;

б) $A\cap B\cap C$;

в) $A\cup B\cup C$.

4. Пусть $A\subset U$, $B\subset U$. Найти множество $X\subset U$ такое, что $\left(\overline{X\cup A}\right)\cup\left(\overline{X\cup\overline{A}}\right)=B$.

5. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} A\cap X=B, \\ A\cup X=C, \end{cases}$ где $B\subseteq A\subseteq C$;

б) $\begin{cases} A\setminus X=B, \\ X\setminus A=C, \end{cases}$ где $B\subseteq A,\ A\cap =\varnothing$.

6. Из 100 студентов 24 не изучают никакого языка, 26 – немецкий, 48 – французский, 8 – французский и английский, 8 – французский и немецкий, 18 – только немецкий, 23 – немецкий, но не английский. Сколько студентов изучают английский язык?

7. Одному человеку задали вопрос: «Какая погода была в одном из летних месяцев?». Ответ: «80 % дней были теплыми, 80 % дней были облачными и 60 % дней были ветреными». Сколько процентов составляют дни, когда было тепло, облачно и ветрено одновременно? (Найти наибольшее и наименьшее их число.)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ЛОГИКЕ БУЛЯ

Пример 1. Составьте таблицу истинности булевой функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \to \overline{x_3} \vee x_1 \,|\, (\overline{x_2} \wedge \overline{x_1})$ и найдите ее двоичный набор.

Решение. Для вычисления значений функции определим порядок выполнения операций:

$$f_1 = x_1 \oplus x_2, \quad f_2 = \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}, \quad f_3 = x_1 \,|\, f_2, \quad f_4 = \overline{x_3} \vee f_3, \quad f_5 = f_1 \to f_4.$$

Последовательно составим таблицы истинности полученных функций (табл. 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Двоичный набор данной функции $F = 11111111$.

Отметим, что двоичный набор определяет булеву функцию только в том случае, если его длина – степень двойки, а соответствующий показатель степени равен числу переменных данной функции.

Пример 2. Докажите, что функция $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \to (x_1 \to x_2)$ является тавтологией.

Решение. Необходимо показать, что двоичный набор данной функции имеет вид $F = 1111$. Составим таблицу истинности (табл. 2).

Таблица 2

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$x_1 \to x_2$	$\overline{x_1} \to (x_1 \to x_2)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Пример 3. Докажите равенство функций

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$ и $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$.

Решение. Для доказательства необходимо построить таблицы истинности этих функций (табл. 3, 4), и если их двоичные наборы совпадут, то равенство функций будет доказано.

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_3$	$x_2 \vee x_3$	$x_1 \wedge (x_1 \vee x_3)$	$x_1 \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Таблица 4

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge x_3$	$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Получаем $F_1 = 00000111$, $F_2 = 00000111$. Значит, функции равны.

Пример 4. Докажите закон дистрибутивности

$$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

Решение. Для доказательства изобразим две диаграммы, соответствующие двум операциям в левой части равенства (рис. 1, 2), и три диаграммы, соответствующие трем операциям в правой части равенства (рис. 3 – 5).

Левая часть равенства

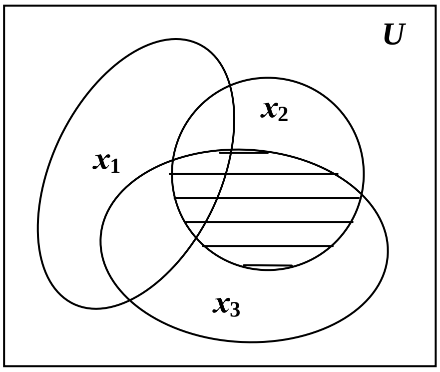


Рис. 1. $x_2 \wedge x_3$

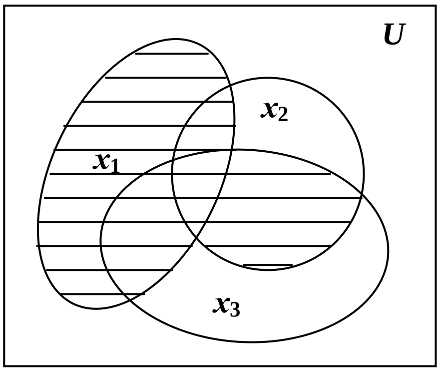


Рис. 2. $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$

Правая часть равенства

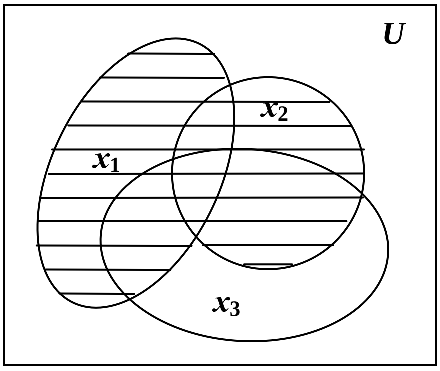


Рис. 3. $x_1 \vee x_2$

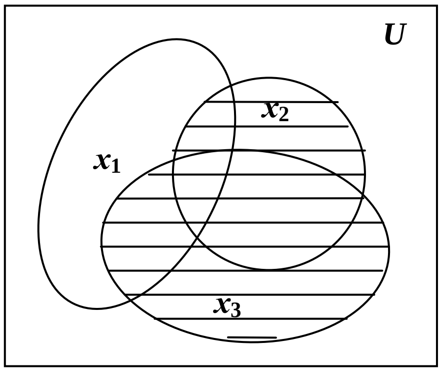


Рис. 4. $x_1 \vee x_3$

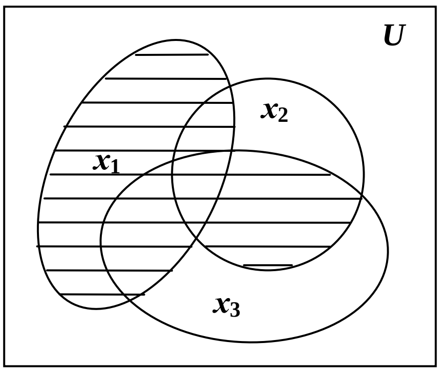


Рис. 5. $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$

Результаты построения логических операций левой и правой частей совпали, поэтому равенство верное.

Пример 5. Для каждого из следующих высказываний[1] найдите символическую форму и постройте таблицу истинности:

(а) если Джон умен, а Джим глуп, то Джон получит приз;

(б) Джон получит приз в том и только в том случае, если он умен или если Джим глуп;

(в) если Джим глуп, а Джон не получит приз, то Джон не умен.

Воспользуйтесь обозначениями: x_1 для «Джон умен», x_2 для «Джим глуп», x_3 для «Джон получит приз».

Решение: (а) $f_1 = x_1 \wedge x_2 \to x_3$;

(б) $f_2 = x_3 \leftrightarrow x_1 \vee x_2$;

(в) $f_3 = x_2 \wedge \overline{x_3} \to \overline{x_1}$.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_3}$	$x_1 \wedge x_2$	f_1	$x_1 \vee x_2$	f_2	$x_2 \wedge \overline{x_3}$	f_3
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1

Пример 6. Докажите равенство, используя свойства булевых функций:

$$\overline{(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3})} = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3).$$

Решение. Используя законы де Моргана, получим:

$$\overline{(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3})} = \overline{x_1 \wedge \overline{x_2}} \wedge \overline{x_2 \wedge \overline{x_3}} = (\overline{x_1} \vee \overline{\overline{x_2}}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{\overline{x_3}}).$$

Применим закон двойного отрицания:

$$(\overline{x_1} \vee \overline{\overline{x_2}}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{\overline{x_3}}) = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3).$$

Применим дистрибутивный закон:

$$(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) = ((\overline{x_1} \vee x_2) \wedge \overline{x_2}) \vee ((\overline{x_1} \vee x_2) \wedge x_3) =$$
$$= ((\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_2} \wedge x_2)) \vee ((\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)).$$

Ассоциативность дизъюнкции позволяет упростить последнее выражение:

$$((\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_2} \wedge x_2)) \vee ((\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)) =$$
$$= (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_2} \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3).$$

---

[1] Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое вместе. Например, высказывание «Волга впадает в Каспийское море» – истинное, а высказывание «Два больше трех» – ложное.

Учитывая закон непротиворечивости, имеем:

$$(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_2} \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) =$$
$$= (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee 0 \vee (\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) =$$
$$= (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) =$$

Пример 7. Докажите равенство $\overline{x_1 \to x_2} = x_1 \wedge \overline{x_2}$, используя свойства булевых функций.

Решение. Используя определение операции импликации $x_1 \to x_2 = \overline{x_1 \setminus x_2} = \overline{x_1} \vee x_2$, получим:

$$\overline{x_1 \to x_2} = \overline{\overline{x_1} \vee x_2}.$$

Тогда по закону де Моргана имеем:

$$\overline{\overline{x_1} \vee x_2} = \overline{\overline{x_1}} \wedge \overline{x_2}.$$

Применяя закон двойного отрицания, получим:

$$\overline{x_1 \to x_2} = x_1 \wedge \overline{x_2}.$$

Пример 8. Преобразуйте функцию $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \leftrightarrow \overline{x_2 \to x_1}$ к виду, не содержащему импликацию и эквивалентность.

Решение. Цепочка преобразований имеет вид:

$$(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \leftrightarrow \overline{x_2 \to x_1} =$$
$$= (x_1 \to (\overline{x_2} \vee x_3)) \leftrightarrow x_2 \wedge \overline{x_1} =$$
$$= \overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \vee x_3) \leftrightarrow (x_2 \wedge \overline{x_1}) =$$
$$= ((\overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \vee x_3)) \wedge (x_2 \wedge \overline{x_1})) \vee (\overline{\overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \vee x_3)} \wedge \overline{x_2 \wedge \overline{x_1}}).$$

Задания для самостоятельной работы

1. Проверьте равенство функций

$$f_1 = x_1 \wedge (x_2 \to x_3) \quad \text{и} \quad f_2 = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3).$$

2. Постройте таблицы истинности следующих функций и расположите их в таком порядке, чтобы из каждой функции следовали все, стоящие после нее:

$$f_1 = \overline{x_1} \leftrightarrow x_2,\ f_2 = x_1 \to x_2,\ f_3 = x_1 \to (x_2 \to x_1),\ f_4 = x_1 \vee x_2,\ f_5 = \overline{x_1} \wedge x_2.$$

3. Докажите, что конъюнкция импликации и ее конверсия равны эквивалентности.

4. Пусть x_1 означает «Я сдам этот экзамен», а x_2 – «Я буду регулярно выполнять домашние задания». Запишите в символической форме следующие высказывания:

(а) «Я сдам этот экзамен только в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания»;

(б) «Регулярное выполнение домашнего задания является необходимым условием для того, чтобы я сдал этот экзамен»;

(в) «Сдача этого экзамена является достаточным условием для того, чтобы я регулярно выполнял домашние задания».

(г) «Я сдам этот экзамен в том и только в том случае, если я буду регулярно выполнять домашние задания»;

(д) «Регулярное выполнение домашних заданий есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы я сдал этот экзамен».

5. Пусть p, q, r означают следующие высказывания:

p – путешествие на Марс дорогостоящее;

q – я совершу путешествие на Марс;

r – у меня есть деньги.

Запишите в символической форме следующие высказывания:

(а) «У меня нет денег и я не совершу путешествие на Марс».

(б) «У меня нет денег и путешествие на Марс дорогостоящее или я совершу путешествие на Марс».

(в) «Неверно, что у меня есть деньги и я совершу путешествие на Марс».

(г) «Путешествие на Марс не является дорогостоящим и я полечу на Марс или путешествие на Марс дорогостоящее и я не полечу на Марс».

6. Пусть p, q, r означают следующие высказывания:

p – эта игра очень трудна;

q – я играю в шахматы;

r – игра в шахматы требует времени.

Интерпретируйте следующие выражения как высказывания:

(а) $q \wedge r$; (б) $\overline{p} \vee \overline{q}$; (в) $(p \vee r) \wedge q$; (г) $p \wedge q \wedge r$.

7. Пусть p, q, r означают следующие высказывания:

p – он купит компьютер;

q – он будет праздновать всю ночь;

r – он выиграл в лотерею.

Запишите в символической форме следующие высказывания:

(а) «Если он выиграет в лотерею, он купит компьютер и будет праздновать всю ночь».

(б) «Если он не купит компьютер, то и праздновать всю ночь не будет».

(в) «Если он выиграет в лотерею, то будет праздновать всю ночь и если он не выиграет лотерею, то не купит компьютер».

(г) «Если он не выиграет в лотерею или не купит компьютер, то праздновать всю ночь не будет».

8. Проверьте верность следующих равенств:

а) $x_1 \to (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \to x_3)$;

б) $x_1 \mid (x_2 \to x_3) = (x_1 \mid x_2) \to (x_1 \mid x_3)$;

в) $x_1 \downarrow (x_2 \leftrightarrow x_3) = \overline{(x_1 \downarrow x_2) \leftrightarrow (x_1 \downarrow x_3)}$;

г) $x_1 \to x_2 = ((x_1 \wedge x_2) \oplus x_1) \oplus 1$;

д) $(x_1 \wedge x_2 \vee (\overline{x_1} \to x_2 \wedge x_3)) \leftrightarrow (\overline{x_1} \to \overline{x_2}) \to x_3 = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \oplus x_3)$.

9. Докажите аналитическим путем справедливость выражений:

а) $(A \setminus B) \oplus (C \setminus D) = A \oplus C$, если $A \cap B = C \cap D$;

б) $A \cup B \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1$;

в) $(a \leftrightarrow b) \setminus (a \mid b) = (a \wedge b)$.

10. Докажите аналитическим путем, а затем с помощью диаграмм Эйлера – Венна проверьте доказательство справедливости выражения

$$(a \mid b) \mid (a \leftrightarrow b)) \mid ((c \oplus d) \to (d \setminus c)) = ((b \to c) \to (a \setminus c)) \downarrow ((a \mid d) \mid (d \to \overline{b})).$$

11. Используя таблицы истинности, докажите, что:

а) $x_1 \downarrow x_1$ равна $\overline{x_1}$;

б) $(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$ равна $x_1 \wedge x_2$;

в) $(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$ равна $x_1 \vee x_2$.

Ответы

1. Функции не равны.
2. f_3, f_5, f_1, f_4, f_2.
3. **Замечание.** Нужно доказать, что $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) = (x_1 \leftrightarrow x_2)$.
4. (а) $x_1 \to x_2$; (б) $x_2 \to x_1$; (в) $x_2 \to x_1$; (г) $x_1 \leftrightarrow x_2$; (д) $x_2 \leftrightarrow x_1$.
8. а) неверное, б) неверное, в) верное, г) верное, д) верное.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4. КОММУТАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

Пример 1. Постройте коммутационную схему, соответствующую булевому выражению $((\overline{p} \wedge g) \vee \overline{r}) \vee ((\overline{p} \vee \overline{g}) \wedge \overline{r})$. Определите, при каких положениях переключателей ток в сети отсутствует.

Решение. Данному выражению соответствует схема на рис. 1.

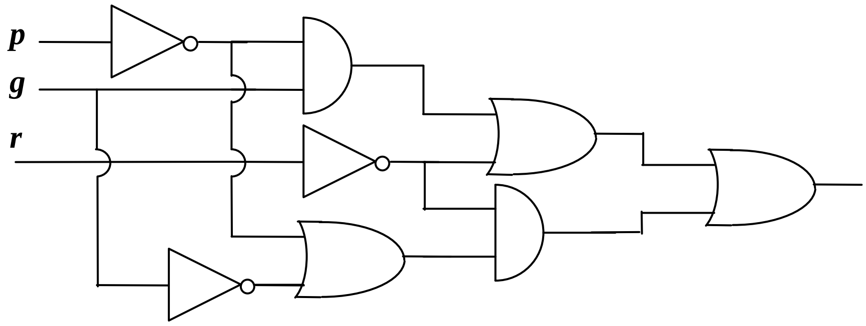


Рис. 1

Определим, при каких положениях переключателей ток в сети на рис. 1 отсутствует. Для этого запишем в таблицу все возможные наборы значений переменных p, g, r и найдем для них соответствующие значения данного булевого выражения (табл. 1).

Таблица 1

p	g	r	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge g$	$\overline{r}$	$(\overline{p} \wedge g) \vee \overline{r}$	$\overline{g}$	$\overline{p} \vee \overline{g}$	$(\overline{p} \vee \overline{g}) \wedge \overline{r}$	$f(p;g;r)$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Из последнего столбца табл. 1 следует, что ток в сети отсутствует в трех случаях:

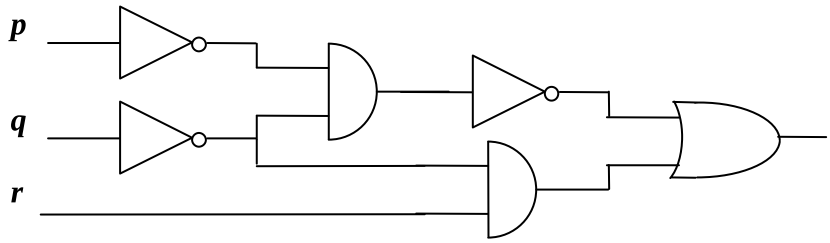
– все переключатели замкнуты;
– переключатели p и r замкнуты, а переключатель g разомкнут;
– переключатель r замкнут, а переключатели p и g разомкнуты.

◄

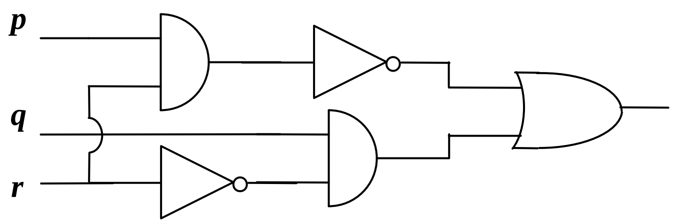
Задания для самостоятельной работы

1. Приведите булевы выражения, соответствующие коммутационным схемам:

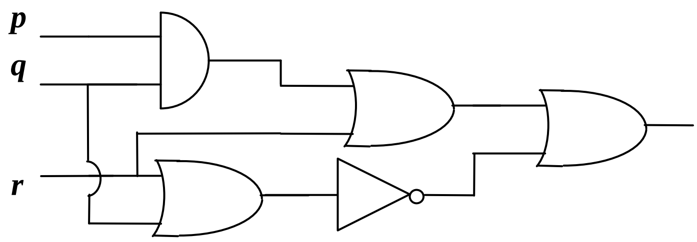
а)



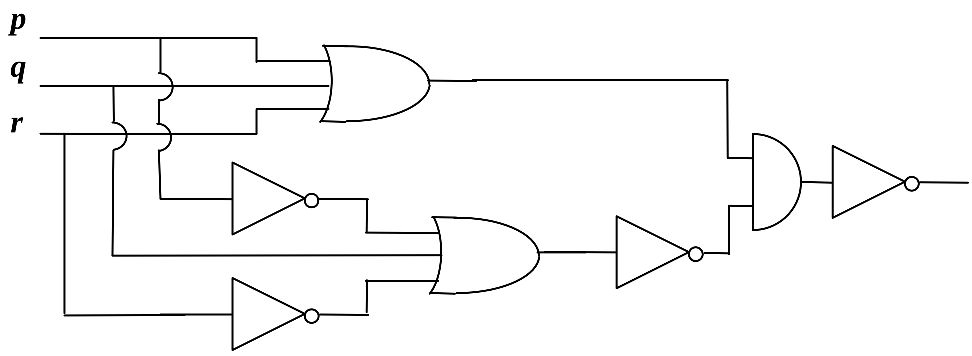
б)



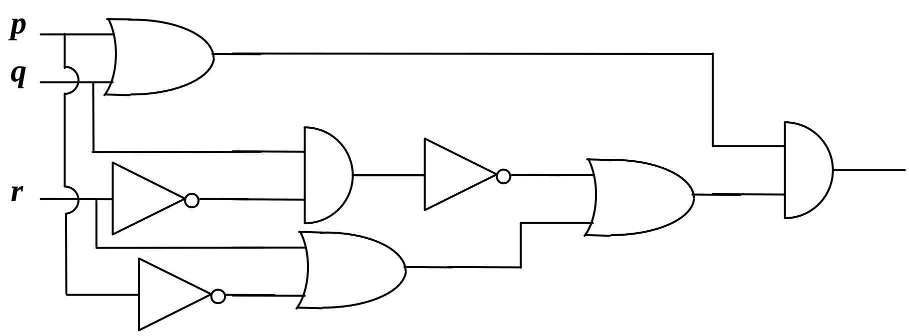
в)



г)

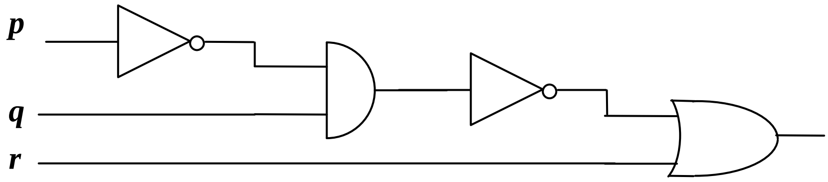


д)

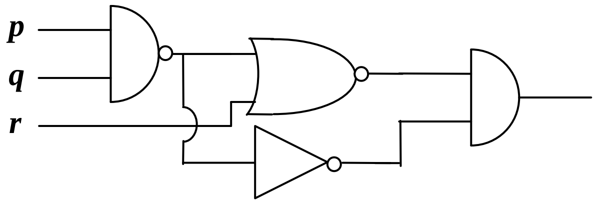


2. Приведите булевы выражения, соответствующие коммутационным схемам:

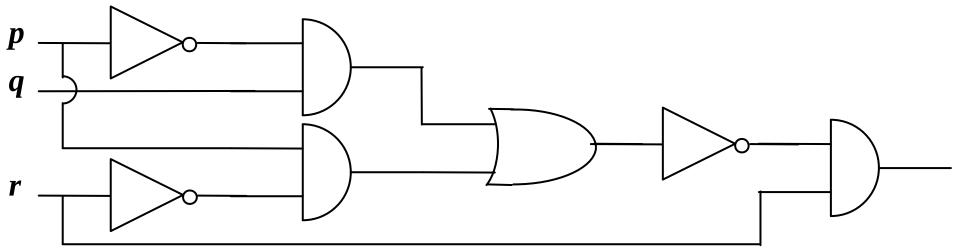
а)



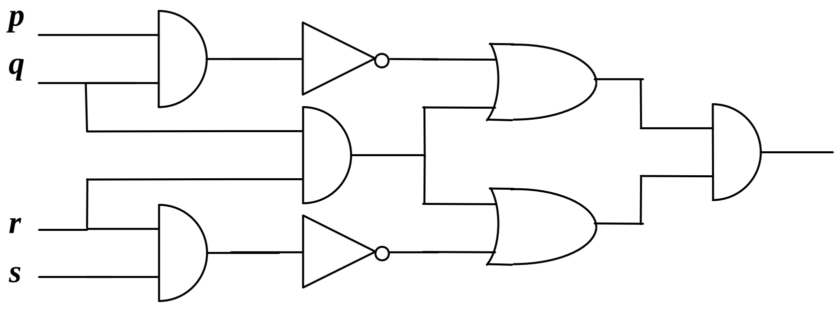
б)



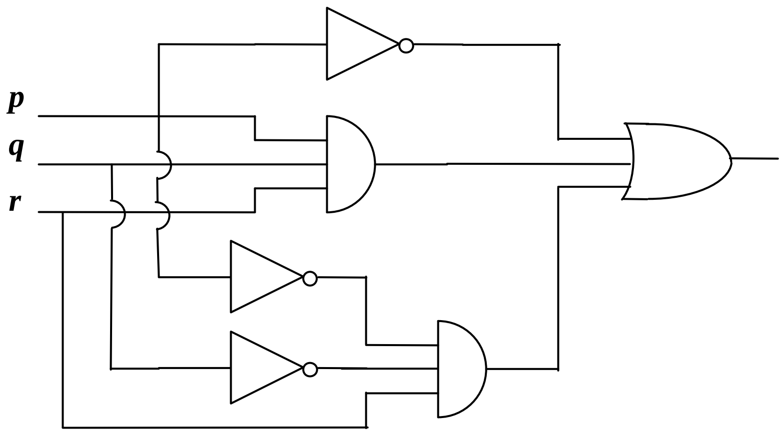
в)



г)



д)



3. Постройте коммутационные схемы, соответствующие булевым выражениям:

а) $(\bar{p}\vee q)\wedge(p\vee(q\wedge r))$;

б) $(p\wedge\bar{q})\vee((q\wedge\bar{r})\vee(\bar{p}\wedge r))$;

в) $(\bar{q}\wedge\bar{r})\vee(\overline{(p\wedge q)}\wedge(\bar{q}\wedge r))$;

г) $(q\wedge(r\vee s))\wedge((\bar{p}\wedge\bar{q})\vee(q\wedge\bar{r}))$;

д) $(p\wedge q)\vee(\overline{(p\wedge\bar{q}\wedge\bar{r})\vee r})$.

4. Постройте коммутационные схемы, соответствующие булевым выражениям:

а) $\overline{(p\wedge\bar{q})}\vee\overline{(q\wedge r)}$;

б) $\overline{((p\vee q)\wedge z)}$;

в) $((\bar{p}\wedge(q\vee\bar{p}\wedge\bar{r}))\vee(p\wedge\bar{q}\vee r)$;

г) $\overline{(\bar{p}\wedge q\vee(\bar{q}\wedge r))}\vee p\wedge\bar{s}$;

д) $(\overline{(p\wedge\bar{q})}\vee(\bar{r}\wedge s))\wedge(p\vee\bar{r})$.

5. Муниципальный совет состоит из пяти членов. Каждый член совета для голосования имеет кнопки «за» и «против». Решение принимается, если за него проголосует большинство. Постройте коммутационную схему устройства, сигнализирующего о том, что решение принято путем высвечивания индикатора.

Указание. При построении схем используйте последовательное и параллельное подключения переключателей.

6. Муниципальный совет состоит из пяти членов, включая председателя совета. Каждый член совета для голосования имеет кнопки «за» и «против». Решение принимается, если за него проголосует большинство. Председатель совета голосует только в том случае, если голоса «за» и «против» разделились поровну. Постройте коммутационную схему для определения принятия или непринятия решения путем высвечивания индикатора.

Указание. При построении схем используйте последовательное и параллельное подключения переключателей.

7. Муниципальный совет состоит из пяти членов, включая председателя совета. Каждый член совета для голосования имеет кнопки «за» и «против». Решение принимается, если за него проголосует большинство, исключая председателя, который имеет право вето. Постройте коммутационную схему для определения принятия или непринятия решения путем высвечивания индикатора.

8. Электрическая схема содержит три двухпозиционных переключателя. Сконструируйте схему для включения и выключения любым переключателем.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пример 1. Используя СДНФ, найдите булеву функцию, принимающую значение 1 на следующих наборах переменных, и только на них:

$$f(0,1,0) = f(1,0,1) = f(1,1,1) = 1.$$

Решение. Наборам 010, 101, 111 соответствуют конъюнкции

$$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}; \quad x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3; \quad x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Составляя дизъюнкцию полученных конъюнкций, запишем СДНФ, а, значит, искомую функцию:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Пример 2. Составьте СКНФ функции $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

Решение. Таблица истинности данной функции имеет вид:

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Выпишем наборы значений переменных, на которых функция принимает значение 0:

$$f(0,0) = f(1,1) = 0.$$

Составим дизъюнкции, соответствующие этим наборам:

$$x_1 \vee x_2; \quad \overline{x_1} \vee \overline{x_2}.$$

Составляя конъюнкцию полученных дизъюнкций, запишем СКНФ:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}).$$

Пример 3. Записать СДНФ функций, заданных следующей таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	$f_1(x_1, x_2, x_3)$	$f_2(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Решение

$$f_1(x_1;x_2;x_3)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_2x_3\vee x_1\overline{x_2}x_3\vee x_1x_2\overline{x_3};$$

$$f_2(x_1;x_2;x_3)=\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_2x_3\vee x_1\overline{x_2}x_3\vee x_1x_2x_3.$$

Пример 4. Для данной булевой функции трех переменных

$$f(x;y;z)=\overline{((x\downarrow y)\to\overline{z})\leftrightarrow y}:$$

а) построить таблицу истинности, найти двоичную форму F булевой функции и привести функцию к СДНФ и СКНФ;

б) найти двумя способами многочлен Жегалкина.

Решение:

а) Обозначим $x\downarrow y=\varphi_1$; $\overline{z}=\varphi_2$; $(x\downarrow y)\to\overline{z}=\varphi_1\to\varphi_2=\varphi_3$; $((x\downarrow y)\to\overline{z})\leftrightarrow y=\varphi_3\leftrightarrow y=\varphi_4$; $\overline{((x\downarrow y)\to\overline{z})\leftrightarrow y}=\overline{\varphi_4}=\varphi_5$.

x	y	z	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0

Двоичная форма имеет вид:

$$F = 10001100.$$

Наборы, на которых $f(x;y;z)=1$, следующие:

$$(0;0;0),\ (1;0;0),\ (1;0;1).$$

Значит, СДНФ функции имеет вид:

$$f(x;y;z)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z).$$

Наборы, на которых $f(x;y;z)=0$, следующие:

$$(0;0;1),\ (0;1;0),\ (0;1;1),\ (1;1;0),\ (1;1;1).$$

СКНФ функции имеет вид:

$$f(x;y;z)=(x\vee y\vee\overline{z})\wedge(x\vee\overline{y}\vee z)\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}).$$

б) Построим многочлен Жегалкина первым способом:
в СДНФ функции

$$f(x;y;z)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)$$

заменяем знак дизъюнкции знаком суммы Жегалкина:

$$f(x;y;z)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\oplus(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\oplus(x\wedge\overline{y}\wedge z),$$

из первой и второй конъюнкции выносим за скобки выражение $\overline{y}\wedge\overline{z}$:

$$f(x;y;z)=(\overline{y}\wedge\overline{z})\wedge(\overline{x}\oplus x)\oplus(x\wedge\overline{y}\wedge z)=((\overline{y}\wedge\overline{z})\wedge 1)\oplus(x\wedge\overline{y}\wedge z)=$$

$$=(\overline{y}\wedge\overline{z})\oplus(x\wedge\overline{y}\wedge z);$$

делаем замены:

$$\overline{y}=y\oplus 1;\quad \overline{z}=z\oplus 1.$$

Тогда

$$f(x;y;z)=((y\oplus 1)\wedge(z\oplus 1))\oplus(x\wedge(y\oplus 1)\wedge z).$$

Далее раскрываем скобки:

$$\begin{gathered}f(x;y;z)=(y\wedge z\oplus 1\wedge z\oplus y\wedge 1\oplus 1\wedge 1)\oplus((x\wedge y\oplus x\wedge 1)\wedge z)=\\ =yz\oplus z\oplus y\oplus 1\oplus((xy\oplus x)\wedge z)=yz\oplus z\oplus y\oplus 1\oplus xyz\oplus xz=\\ =xyz\oplus xz\oplus yz\oplus y\oplus z\oplus 1.\end{gathered}$$

Многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f(x;y;z)=xyz\oplus xz\oplus yz\oplus y\oplus z\oplus 1.$$

Построим многочлен Жегалкина методом неопределенных коэффициентов. Составляем восемь уравнений:

$f(0;0;0)=a_0=1,\qquad a_0=1.$

$f(0;0;1)=a_0\oplus a_3=0,\qquad 1\oplus a_3=0,\qquad a_3=1.$

$f(0;1;0)=a_0\oplus a_2=0,\qquad 1\oplus a_2=0,\qquad a_2=1.$

$f(0;1;1)=a_0\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_{23}=0,\qquad 1\oplus 1\oplus 1\oplus a_{23}=0,\qquad a_{23}=1.$

$f(1;0;0)=a_0\oplus a_1=1,\qquad 1\oplus a_1=1,\qquad a_1=0.$

$f(1;0;1)=a_0\oplus a_1\oplus a_3\oplus a_{13}=1,\qquad 1\oplus 0\oplus 1\oplus a_{13}=1,\qquad a_{13}=1.$

$f(1;1;0)=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_{12}=0,\qquad 1\oplus 0\oplus 1\oplus a_{12}=0,\qquad a_{12}=0.$

$f(1;1;1)=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_{12}\oplus a_{13}\oplus a_{23}\oplus a_{123}=0,$

$1\oplus 0\oplus 1\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 1\oplus a_{123}=0,\qquad a_{123}=1.$

Многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f(x;y;z)=xyz\oplus xz\oplus yz\oplus y\oplus z\oplus 1.$$

Пример 5. Проверить на линейность функцию $f(x_1;x_2;x_3)$ с двоичным набором

$$F = 00101111.$$

Решение. Применим к функции $f(x_1;x_2;x_3)$ алгоритм проверки на линейность:

1. Вычислим коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 многочлена Жегалкина для данной функции:

$$a_0=f(0;0;0)=0;$$

$$a_1=f(0;0;0)\oplus f(1;0;0)=0\oplus 1=1;$$

$$a_2=f(0;0;0)\oplus f(0;1;0)=0\oplus 1=1;$$

$$a_3=f(0;0;0)\oplus f(0;0;1)=0\oplus 0=0.$$

2. Вычислим многочлен $\Phi(x_1;x_2;x_3)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus a_3x_3$:

$$\Phi(x_1;x_2;x_3)=0\oplus x_1\oplus x_2=x_1\oplus x_2.$$

Находим двоичный набор функции $\Phi(x_1;x_2;x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$\Phi(x_1;x_2;x_3)=x_1\oplus x_2$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Двоичный набор F_Φ = 00111100 многочлена $\Phi(x_1;x_2;x_3)=x_1\oplus x_2$ не совпадает с данным двоичным набором булевой функции F_f = 11100001, следовательно, функция $f(x_1;x_2;x_3)$ не линейна.

Пример 6. Докажите, что булева функция $f(x_1;x_2;x_3)$ с двоичным набором F = 10011001 линейная.

Решение:

1. Применим к функции $f(x_1;x_2;x_3)$ алгоритм проверки на линейность.

Вычислим коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 многочлена Жегалкина для данной функции:

$$a_0=f(0;0;0)=1;$$

$$a_1=f(0;0;0)\oplus f(1;0;0)=1\oplus 1=0;$$

$$a_2=f(0;0;0)\oplus f(0;1;0)=1\oplus 0=1;$$

$$a_3=f(0;0;0)\oplus f(0;0;1)=1\oplus 0=1.$$

2. Вычислим многочлен

$$\Phi(x_1;x_2;x_3)=x_2\oplus x_3\oplus 1.$$

3. Достроим в таблице истинности столбец для $\Phi(x_1;x_2;x_3)$:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1;x_2;x_3)$	$\Phi(x_1;x_2;x_3)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Двоичные наборы $f(x_1;x_2;x_3)$ и $\Phi(x_1;x_2;x_3)$ совпали, поэтому функция $f(x_1;x_2;x_3)$ линейная.

Задания для самостоятельной работы

1. Докажите следующие равенства:

а) $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$;

б) $x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3$;

в) $x \oplus x = 0$;

г) $x \oplus 0 = x$;

д) $\overline{x} = 1 \oplus x$.

2. Для данной функции:

1) постройте таблицу истинности, найдите двоичную форму, приведите к СДНФ и СКНФ;

2) найдите СПНФ двумя способами и определите, является ли линейной данная функция:

а) $\overline{\left(\left(x+y\right)\to z\right)\oplus y}$; б) $\left(\overline{\left(x \leftrightarrow \overline{y}\right)} \to \overline{z}\right) \big| y$.

3. Постройте СДНФ, СКНФ, СПНФ данных функций:

а) F = 0111101111011110;

б) F = 1101111001111011.

Определите, являются ли линейными данные функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

КЛАССЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. Определите двойственную функцию для функции с двоичным набором вида $F = 0100$.

2. Определите, является ли функция $f(x) = \overline{x}$ самодвойственной.

3. Определите, является ли функция f с двоичным набором:

а) $F = 00111011$;

б) $F = 10010110$

самодвойственной.

4. Определите, принадлежит ли функция:

а) $f = x \vee y$;

б) $f = x \leftrightarrow y$;

в) $f = \overline{x}$

0-классу.

5. Определите, принадлежит ли функция:

а) $f = xy$;

б) $f = x \oplus y$;

в) $f = \overline{x}$

1-классу.

6. Определите, является ли монотонной функция, заданная двоичным набором:

а) $F = 11010000$;

б) $F = 01100100$;

в) $F = 10100101$.

7. Проверьте систему функций:

а) $\{\vee, \bar{\ }\}$;

б) $\{\wedge, \leftrightarrow\}$;

в) $\{\oplus, \bar{\ }\}$;

г) $\{\oplus, \leftrightarrow\}$

на полноту.

8. Проверьте стрелку Пирса на полноту.

9. Используя таблицу истинности, представьте логические выражения в СПНФ. Определите, к каким классам относятся данные логические выражения:

а) $((b \downarrow d) \downarrow (c \downarrow d)) \wedge ((a \to b) \setminus (a \setminus c)) =$

$= ((b \vee c) \setminus (b \oplus c)) \vee ((a \setminus d) \downarrow (a \leftrightarrow d))$;

б) $((c \downarrow \bar{b}) \vee (c \oplus \bar{b})) \setminus ((\bar{d} \setminus \bar{a}) \downarrow (\bar{d} \leftrightarrow \bar{a})) =$

$= ((\bar{d} \to \bar{b}) \wedge (\bar{d} \to c)) \to ((\bar{b} \downarrow \bar{a}) \vee (c \downarrow \bar{a}))$.

РАЗДЕЛ II. ГРАФЫ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ. ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Пример 1. Дана матрица $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Постройте орграф, для которого данная матрица является матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности орграфа.

Решение. Для построения орграфа его вершине сопоставим точку на плоскости. Данная матрица смежности имеет четыре строки и четыре столбца, поэтому в орграфе четыре вершины.

Проанализируем элементы матрицы:

$a_{11} = 0$ – при вершине v_1 нет петель;

$a_{12} = 2$ – из вершины v_1 выходят две стрелки к вершине v_2;

$a_{13} = 0$ – из v_1 не выходит ни одной стрелки к вершине v_3;

$a_{14} = 0$ – из v_1 не выходит ни одной стрелки к вершине v_4;

$a_{21} = 0$ – из v_2 не выходит ни одной стрелки к вершине v_1;

$a_{22} = 0$ – при v_2 нет петель;

$a_{23} = 1$ – из v_2 выходит одна стрелка к вершине v_3;

$a_{24} = 0$ – из v_2 не выходит ни одной стрелки к вершине v_4;

$a_{31} = 1$ – из v_3 выходит одна стрелка к вершине v_1;

$a_{32} = 0$ – из v_3 не выходит ни одной стрелки к вершине v_2;

$a_{33} = 0$ – при v_3 нет петель;

$a_{34} = 1$ – из v_3 выходит одна стрелка к вершине v_4;

$a_{41} = 3$ – из v_4 выходят три стрелки к вершине v_1;

$a_{42} = 1$ – из v_4 выходит одна стрелка к вершине v_2;

$a_{43} = 0$ – из v_4 не выходит ни одной стрелки к вершине v_3;

$a_{44} = 0$ – при v_4 нет петель.

Строим орграф (рис. 1).

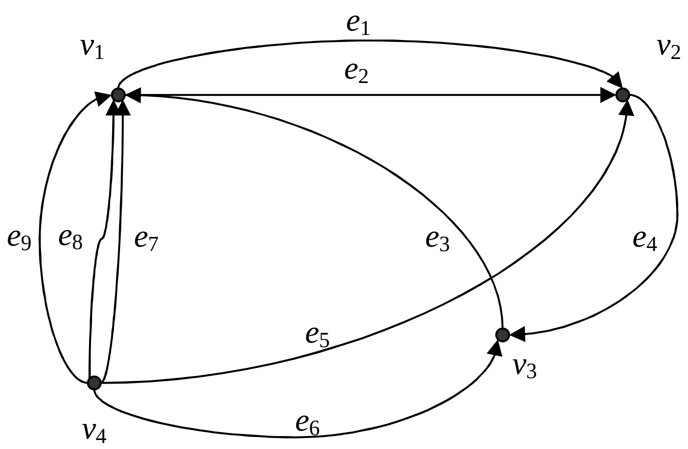


Рис. 1

Для построенного графа запишем матрицу инцидентности:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Для графов, изображенных на рис. 2, составить матрицы смежности вершин, смежности дуг (ребер) и инцидентности.

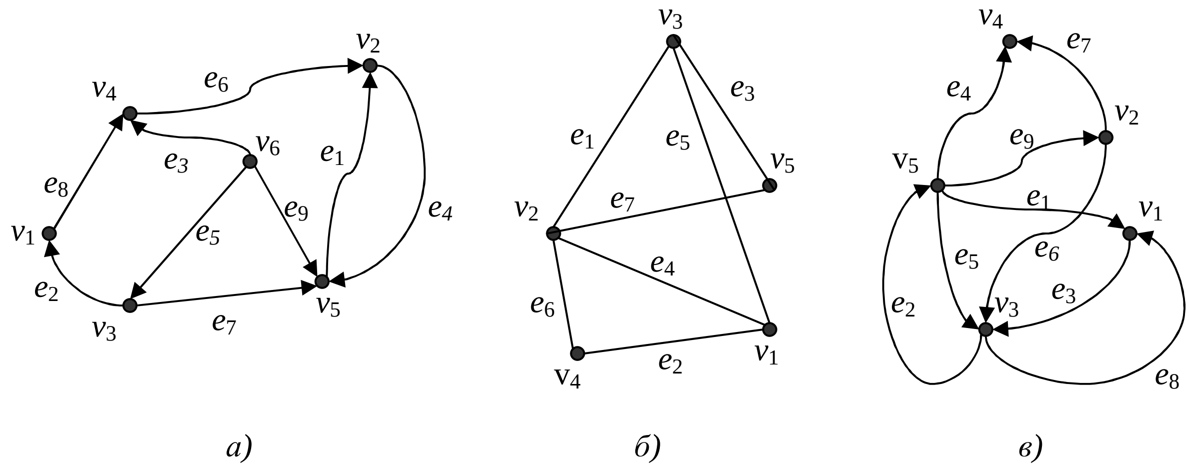


Рис. 2

2. По матрице смежности вершин постройте изображение графа:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Для графа, заданного матрицей инцидентности, найдите матрицу смежности и постройте граф.

$$
\text{а)}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&0\end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix};
$$

$$
\text{в)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\end{pmatrix}.
$$

4. Для графа, заданного матрицей смежности, найдите матрицу инцидентности и постройте граф.

$$
\text{а)}\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix};\quad \text{в)}\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}.
$$

5. Девять человек проводят шахматный турнир в один круг. К некоторому моменту выясняется, что двое сыграли одинаковое число партий. Докажите, что тогда либо один участник еще не сыграл ни одной партии, либо один сыграл все партии.

6. Для каждой приведенной ниже пары графов опишите изоморфизм или докажите, что графы не изоморфны.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8. ПОТОКИ В СЕТЯХ

Задания для самостоятельной работы

1. По данной матрице пропускных способностей дуг найти величину максимального потока по сети и выписать дуги, образующие на сети минимальный разрез.

$$
\text{а)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 10 & 12 & - & - & 16 & - \\
x_1 & - & - & 9 & 11 & 13 & - & - \\
x_2 & - & - & - & - & 12 & - & 17 \\
x_3 & - & - & - & - & - & 14 & - \\
x_4 & - & - & - & - & - & 16 & 18 \\
x_5 & - & - & 11 & - & - & - & 7 \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right); \quad
\text{б)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 18 & - & 15 & - & - & - \\
x_1 & - & - & 11 & - & 14 & - & 16 \\
x_2 & - & - & - & - & - & 14 & - \\
x_3 & - & - & 14 & - & 19 & - & 7 \\
x_4 & - & - & - & - & - & 26 & - \\
x_5 & - & - & - & - & - & - & 19 \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right);
$$

$$
\text{в)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 7 & 13 & - & - & 18 & - \\
x_1 & - & - & 8 & 10 & - & - & 13 \\
x_2 & - & - & - & 17 & - & 20 & - \\
x_3 & - & - & - & - & 9 & - & 11 \\
x_4 & - & - & - & - & - & 14 & 5 \\
x_5 & - & - & - & - & - & - & 8 \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right); \quad
\text{г)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 19 & - & - & 12 & - & - \\
x_1 & - & - & - & - & 15 & - & - \\
x_2 & - & - & - & - & - & 8 & - \\
x_3 & - & - & - & - & - & - & 11 \\
x_4 & - & - & 9 & 12 & - & - & 18 \\
x_5 & - & - & - & 11 & - & - & - \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right).
$$

2. Места добычи нефти расположены в трех географических пунктах. Из мест добычи нефть транспортируется на четыре нефтеперерабатывающих завода через два транзитных пункта. Совокупность пунктов с соединяющими их коммуникациями изображена на рис. 1, 2, дуги соответствуют трубопроводам, вершины – отдельным пунктам: местам добычи – I_1, I_2, I_3, станциям перекачки или железнодорожным станциям – T_4, T_5, (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7), заводам – S_6, S_7, S_8, S_9 (S_1, S_2). Пропускная способность коммуникаций обозначена числами в круглых скобках.

Требуется определить, какое максимальное количество нефти в единицу времени можно транспортировать из мест добычи на нефтеперерабатывающие заводы.

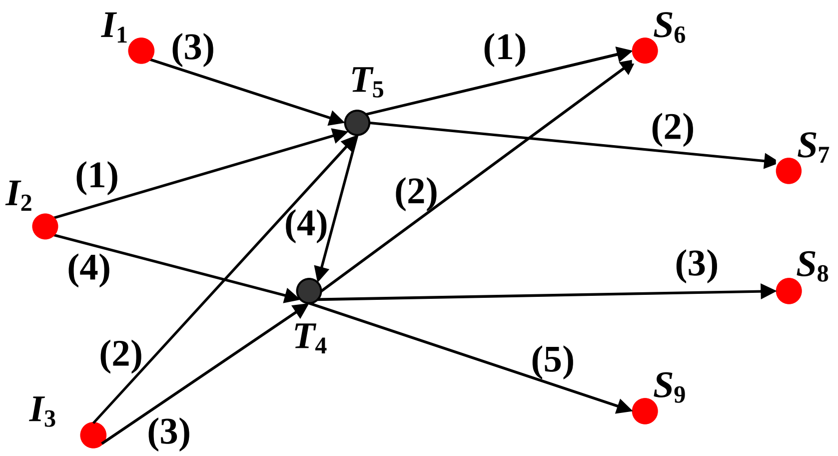


Рис. 1. Совокупность пунктов с соединяющими их коммуникациями

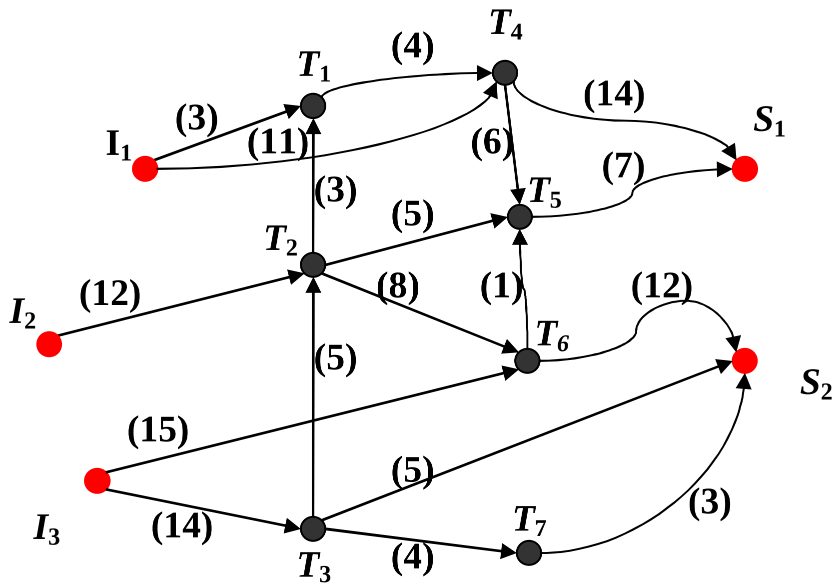


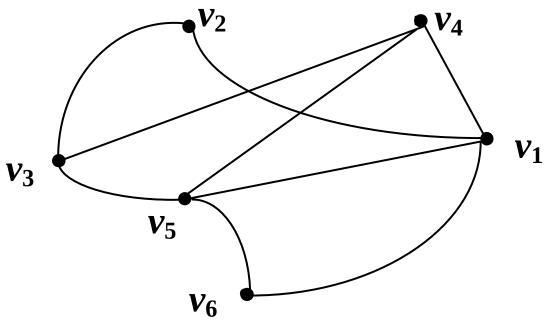
Рис. 2. Совокупность пунктов с соединяющими их коммуникациями

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9. ДЕРЕВЬЯ

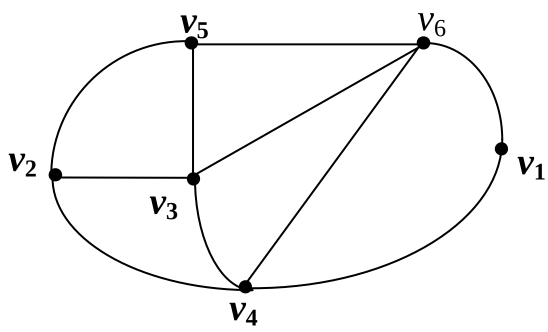
Задания для самостоятельной работы

1. Найти число различных остовов и цикломатическое число изображенных ниже графов.

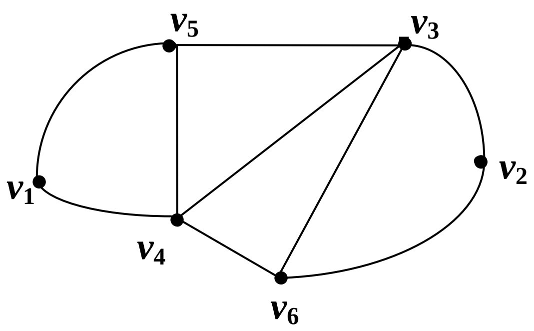
а)



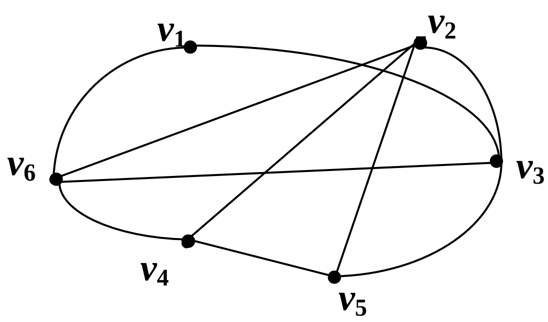
б)



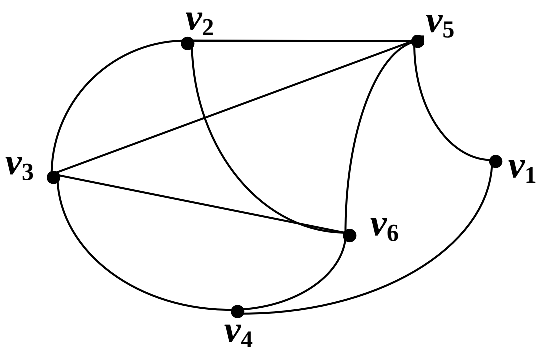
в)



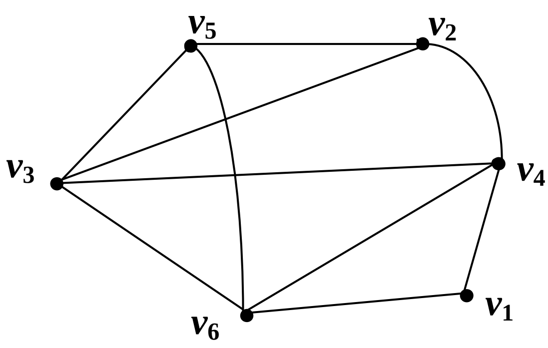
г)



д)



е)



2. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов G' с помощью формализованного алгоритма Прима и найти его вес $\omega_{\min}(G')$. Выполнить проверку с помощью алгоритма Краскала.

$$\text{а)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ x_2 & 10 & - & 6 & 12 & 4 & 8 & \infty \\ x_3 & \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ x_4 & 5 & 12 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ x_6 & \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ x_7 & 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{array}\right);$$

$$\text{б)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & \infty & 10 & 13 & \infty & 11 \\ x_2 & 8 & - & 7 & 8 & \infty & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & 7 & - & \infty & 19 & 10 & 15 \\ x_4 & 10 & 8 & \infty & - & 9 & \infty & 6 \\ x_5 & 13 & \infty & 19 & 9 & - & 8 & \infty \\ x_6 & \infty & 15 & 10 & \infty & 8 & - & 12 \\ x_7 & 11 & \infty & 15 & 6 & \infty & 12 & - \end{array}\right);$$

$$\text{в)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 8 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ x_2 & 6 & - & 11 & 12 & 9 & \infty & 5 \\ x_3 & 8 & 11 & - & 7 & 8 & \infty & 9 \\ x_4 & \infty & 12 & 7 & - & 6 & 5 & 10 \\ x_5 & \infty & 9 & 8 & 6 & - & 8 & \infty \\ x_6 & 7 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\ x_7 & \infty & 5 & 9 & 10 & \infty & 7 & - \end{array}\right);$$

$$\text{г)}\ \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 8 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ x_2 & 3 & - & 7 & 6 & \infty & \infty & 4 \\ x_3 & 8 & 7 & - & 4 & 6 & \infty & 10 \\ x_4 & \infty & 6 & 4 & - & 5 & 7 & \infty \\ x_5 & 3 & \infty & 6 & 5 & - & 8 & 9 \\ x_6 & 6 & \infty & \infty & 7 & 8 & - & \infty \\ x_7 & \infty & 4 & 10 & \infty & 9 & \infty & - \end{array}\right).$$

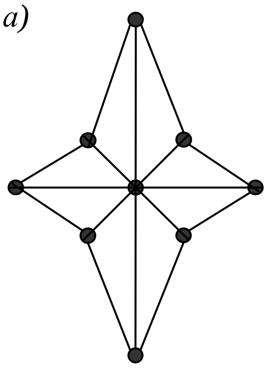
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

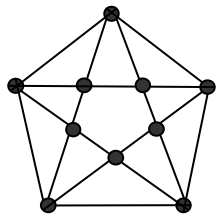
Задания для самостоятельной работы

1. Среди приведенных графов найти эйлеровы.

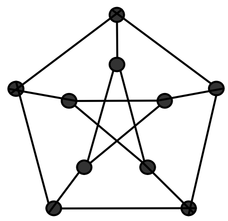
а)



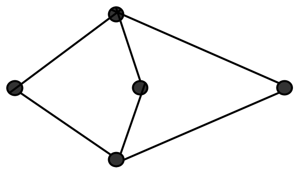
б)



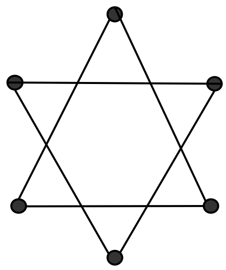
в)



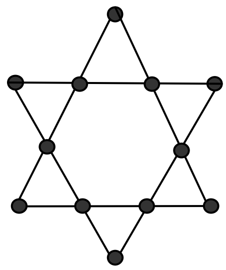
г)



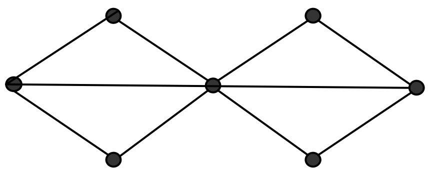
д)



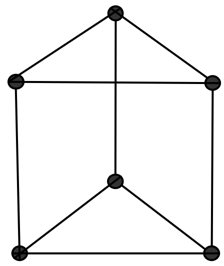
е)



ж)



з)



2. Найти эйлеров цикл в графе на рис. 1 с помощью алгоритма Флери.

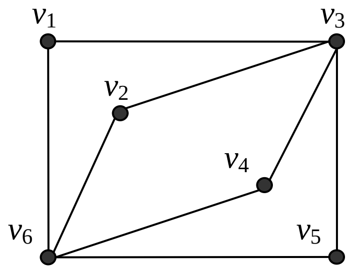


Рис. 1

3. Доказать, что граф Петерсена (рис. 2) не гамильтонов.

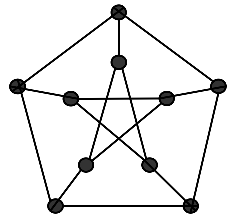


Рис. 2

4. Для матрицы $\begin{pmatrix} \infty & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & \infty & 9 & 3 & 8 \\ 7 & 1 & \infty & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & \infty & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & \infty \end{pmatrix}$ решить задачу коммивояжера.

5. На одном и том же оборудовании предприятие должно выпускать партиями пять видов продукции. Издержки от переналадок оборудования при переходе от производства одного вида продукции к производству другого заданы матрицей $A=[a_{ij}]$, где a_{ij} – затраты на переналадку оборудования при переходе от выпуска i-того вида продукции к выпуску j-того вида продукции. С помощью алгоритма Литтла найти последовательность запуска партий продукции в производство, при которой суммарные потери от переналадок будут минимальными.

$$\text{а) }\begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 12 \\ 9 & \infty & 14 & 12 & 12 \\ 10 & 10 & \infty & 13 & 13 \\ 9 & 11 & 12 & \infty & 17 \\ 11 & 10 & 13 & 12 & \infty \end{pmatrix};\text{ б) }\begin{pmatrix} \infty & 11 & 11 & 10 & 9 \\ 10 & \infty & 10 & 12 & 11 \\ 11 & 11 & \infty & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & \infty & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 10 & \infty \end{pmatrix};\text{ в) }\begin{pmatrix} \infty & 9 & 10 & 9 & 11 \\ 10 & \infty & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & \infty & 10 & 12 \\ 21 & 10 & 11 & \infty & 12 \\ 11 & 10 & 12 & 10 & \infty \end{pmatrix}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11. АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ

Пример 1. По заданной матрице весов Ω графа G найти величину минимального пути и сам путь от вершины x_1 до вершины x_6 по алгоритму Дейкстры.

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array} \right).$$

Решение. Изобразим сеть, заданную матрицей Ω (рис. 1):

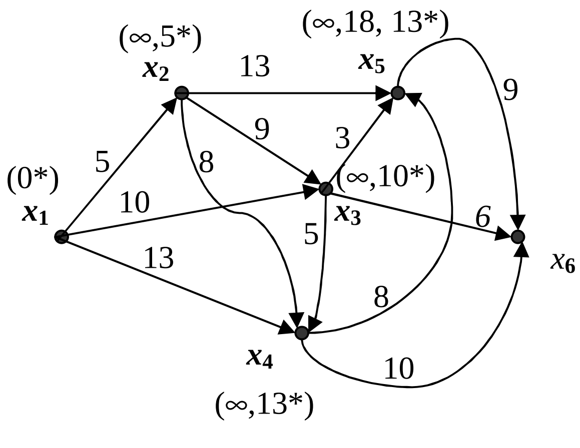


Рис. 1

Этап 1

Шаг 1. Полагаем $d(x_1) = 0^*$, $x_1 = \tilde{x}$;
$d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty$.

Итерация 1

Шаг 2. Множество вершин x_2, x_3, x_4 с временными метками, непосредственно следующих за $x_1 = \tilde{x}$, образуют множество $\tilde{S}$.

Пересчитываем временные метки этих вершин:

$$d(x_2) = \min\{\infty,\ 0^* + 5\} = 5;$$

$$d(x_3) = \min\{\infty,\ 0^* + 10\} = 10;$$

$$d(x_4) = \min\{\infty,\ 0^* + 13\} = 13.$$

<u>Шаг 3.</u> Одна из временных меток превращается в постоянную:

$$\min\{5,\ 10,\ 13,\ \infty,\ \infty\} = 5^* = d(x_2),\ x_2 = \tilde{x}.$$

<u>Шаг 4.</u> $x_2 = \tilde{x} \neq b = x_6$, возвращаемся на второй шаг.

<u>Итерация 2</u>

<u>Шаг 2.</u> $\tilde{S} = \{x_3, x_4, x_5\}$;

$$d(x_3) = \min\{10,\ 5^* + 8\} = 10;$$

$$d(x_4) = \min\{13,\ 5^* + 9\} = 13;$$

$$d(x_5) = \min\{\infty,\ 5^* + 13\} = 18.$$

<u>Шаг 3</u>

$$\min\{10,\ 13,\ 18,\ \infty\} = 10^* = d(x_3);$$

$$\tilde{x} = x_3.$$

<u>Шаг 4.</u> $x_3 \neq x_6$, возвращаемся на второй шаг.

<u>Итерация 3</u>

<u>Шаг 2.</u> $\tilde{S} = \{x_4, x_5, x_6\}$;

$$d(x_4) = \min\{13,\ 10^* + 5\} = 13;$$

$$d(x_5) = \min\{18,\ 10^* + 3\} = 13;$$

$$d(x_6) = \min\{\infty,\ 10^* + 6\} = 16.$$

<u>Шаг 3</u>

$$\min\{\ 13,\ 13,\ 16\} = 13^* = d(x_4) = d(x_5);$$

$$\tilde{x} = x_4 = x_5.$$

<u>Шаг 4.</u> $x_4 \neq x_6$, $x_5 \neq x_6$, возвращаемся на второй шаг.

Итерация 4

Шаг 2. $\widetilde{S}=\{x_6\}$;

$$d(x_6)=\min\{16,\ 13^*+9,\ 13^*+8\}=16.$$

Шаг 3

$$\min\{\,16\}=16^*=d(x_6);$$
$$\widetilde{x}=x_6.$$

Шаг 4. $x_6=t=x_6$, конец первого этапа.

Этап 2

Итерация 1

Шаг 5. Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\widetilde{x}=x_6$ с постоянными метками $\widetilde{S}=\{x_3,\ x_4,\ x_5\}$. Проверим для этих трех вершин выполнение равенства $d(\widetilde{x})=d(x_i)+\omega(x_i,\widetilde{x})$:

$$d(\widetilde{x})=16=10^*+6=d(x_3)+\omega(x_3,x_6);$$
$$d(\widetilde{x})=16\neq 10^*+10=d(x_4)+\omega(x_4,x_6);$$
$$d(\widetilde{x})=16\neq 10^*+13=d(x_5)+\omega(x_5,x_6).$$

Включаем дугу (x_3,x_6) в кратчайший путь. $\widetilde{x}=x_3$.

Шаг 6. $\widetilde{x}\neq a=x_3$, возвращаемся на пятый шаг.

Итерация 2

Шаг 5

$$\widetilde{S}=\{x_1,\ x_2\};$$
$$d(\widetilde{x})=10=0^*+10=d(x_1)+\omega(x_1,x_3);$$
$$d(\widetilde{x})=10\neq 0^*+8=d(x_2)+\omega(x_2,x_3).$$

Включаем дугу (x_1,x_3) в кратчайший путь. $\widetilde{x}=x_1$.

Шаг 6. $\widetilde{x}=a=x_1$, завершаем второй этап.

Кратчайший путь от x_1 до x_6 построен: $x_1\rightarrow x_3\rightarrow x_6$. Его длина (вес) равна 16.

Пример 2. На рис. 2 изображен орграф, для каждой дуги которого указана ее длина. Утолщенными линиями показан кратчайший путь от вершины v_1 к вершине v_6.

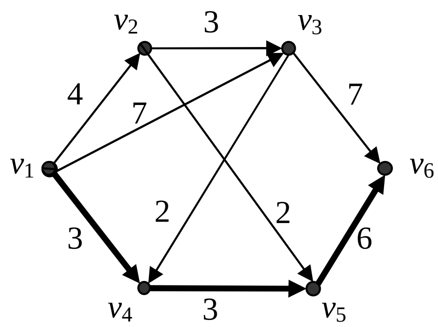


Рис. 2

Найдите самостоятельно кратчайший путь между вершинами v_2 и v_5.

Задания для самостоятельной работы

1. По заданной матрице весов Ω графа G найдите величину минимального пути и сам путь от вершины x_1 до вершины x_6 по алгоритму Дейкстры.

$$\text{а) } \Omega = \left(\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ x_4 & \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ x_5 & \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right); \text{ б) } \Omega = \left(\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ x_3 & \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right);$$

$$\text{в) } \Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ x_3 & \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

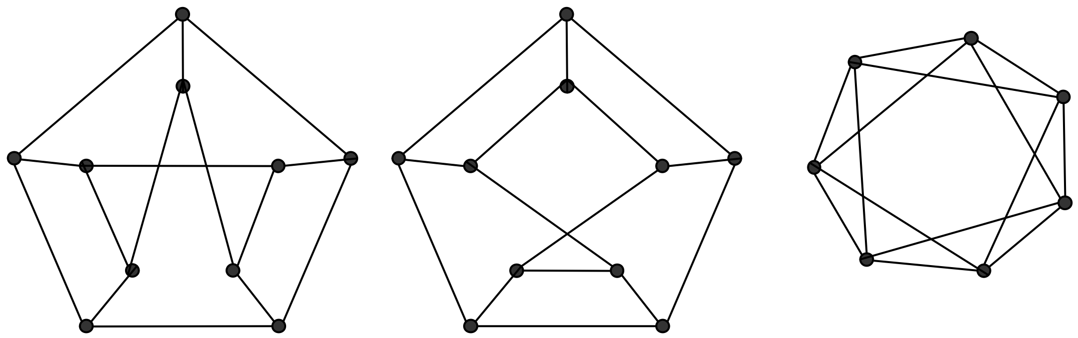
Ответы

1. а) 29, x_1-x_5, x_5-x_6; б) 18, x_1-x_4, x_4-x_6; в) 30, x_1-x_5, x_5-x_7.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12. ПЛАНАРНОСТЬ ГРАФОВ

1. Определим графы G_n следующим образом. Пусть G_n – граф, множество вершин которого совпадает с отрезком натурального ряда $\{1, 2, ..., 10\}$, а множество ребер определяется следующим условием: несовпадающие вершины x и y смежны тогда, когда числа x и y взаимно просты. При каких значениях n графы G_n планарны?

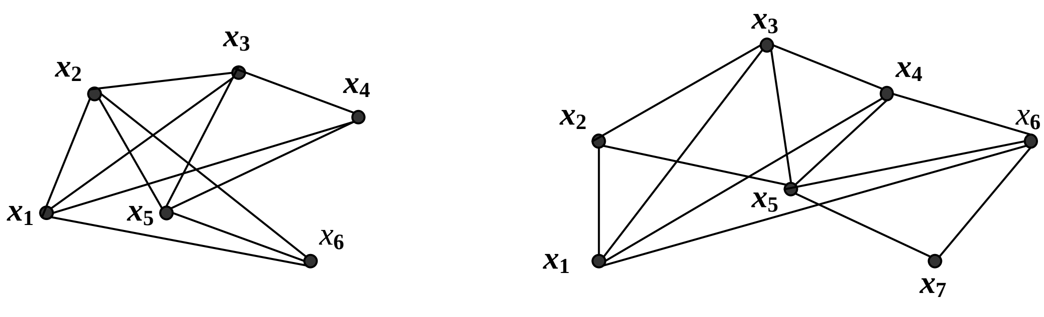
2. Какие из графов, изображенных на рис. 1, являются планарными?



а) *б)* *в)*

Рис. 1

3. С помощью алгоритма укладки графа на плоскость постройте плоские укладки или установите непланарность графов, изображенных на рис. 2.



а) *б)*

Рис. 2

4. Найти число планарности и толщину графов:

а) K_5; б) $K_{3,3}$; в) графа Петерсена.

РАЗДЕЛ III. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

ОСНОВНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ СХЕМЫ

Пример 1. Составьте все перестановки:

а) из трех букв a, b, c;

б) из четырех цифр 5, 4, 3, 2.

Решение: а) abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Самостоятельно получите все перестановки в п. б.

Пример 2. Составьте все размещения (без повторений):

а) из четырех букв a, b, c, d по три буквы в каждом;

б) из четырех цифр 1, 3, 5, 7 по две цифры в каждом.

Решение: а) abc, abd, bcd, acd, acb, adb, bdc, adc, bac, bad, cbd, cad, bca, bda, cdb, cda, cab, dab, dbc, dac, cba, dba, dcb, dca.

б) 1 3, 1 5, 1 7, 3 1, 3 5, 3 7, 5 1, 5 3, 5 7, 7 1, 7 3, 7 5.

Пример 3. Составьте все сочетания (без повторений) из пяти букв a, b, c, d, e по три буквы в каждом.

Решение:

а) abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Пример 4. В классе изучают 10 предметов. В понедельник шесть уроков, причем все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Решение. В задаче говорится о шести расстановках без повторений из 10 элементов. Первый урок можно поставить в расписание десятью способами, второй – девятью, третий – восемью и т.д. По правилу произведения число способов составления расписания будет равно

$$A_{10}^{6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200.$$

Пример 4. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых цветов. Сколькими способами можно выбрать из нее:

а) 3 цветка;

б) 6 цветков одного цвета;

в) 4 красных и 3 розовых цветка?

Решение:

а) Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 цветка из вазы, в которой 16 цветов, можно C_{16}^3 способами. Поэтому

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3} = 560.$$

б) Выбрать 6 цветков красного цвета можно $C_9^6 = 84$ способами, а 6 цветков розового цвета $C_7^6 = 7$ способами.

По правилу сложения выбрать 6 цветков одного цвета (красного или розового) можно

$$C_9^6 + C_7^6 = 84 + 7 = 91 \text{ способами.}$$

в) Выбрать 4 красных цветка из 9 имеющихся можно C_9^4 способами, а 3 розовых из 7 – C_7^3 способами. Поэтому букет из 4 красных и 3 розовых цветков можно составить по правилу умножения

$$C_9^4 \cdot C_7^3 = \frac{9!}{4!5!}\cdot\frac{7!}{3!4!} = 4410 \text{ способами.}$$

Пример 5. Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решение. В десятичной системе исчисления десять цифр – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На первом месте может стоять любая из девяти цифр, кроме нуля. На втором месте – любая из оставшихся 9 цифр, кроме выбранной. На последнем месте – любая из оставшихся 8 цифр.

По правилу произведения $9\cdot 9\cdot 8 = 648$ трехзначных чисел имеют разные цифры.

Пример 6. В соревнованиях участвуют 10 человек, трое из них займут первое, второе и третье места. Сколько существует различных вариантов?

Решение: $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720.$

Пример 7. Сколько существует способов расстановки десяти книг на полке?

Решение. Общее число способов расстановки определяется как число перестановок из 10 элементов и равно $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

Пример 8. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады?

Решение

$$C_{12}^{5}=\frac{12!}{5!(12-5)!}=\frac{12!}{5!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792.$$

Пример 9. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Решение

$$C_{80}^{3}\cdot C_{3}^{1}=\frac{80!}{3!77!}=\frac{3!}{1!\,2!}=\frac{78\cdot 79\cdot 80}{2}=78\cdot 79\cdot 40=246480.$$

Пример 10. На одной из боковых сторон прямоугольника взяли m точек, на другой – n точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками на противоположной стороне.

Определите:

а) сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника;

б) на сколько частей делят треугольник эти прямые?

Решение: а) Из вершины A треугольника ABC проведено m прямых, каждая из которых пересекается с n прямыми, проведенными из вершины B. Поэтому точек пересечения $m\cdot n$.

б) m прямых, проведенных из вершины A, делят треугольник на $m+1$ областей, аналогично n прямых, проведенных из вершины B, делят треугольник на $n+1$ областей. Тогда общее число частей в треугольнике ABC равно $(m+1)(n+1)$.

Пример 11. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз;

б) ровно один туз;

в) не менее двух тузов;

г) ровно два туза.

Решение: а) Карты из колоды вынимаются без возвращения (то есть без повторения) и без упорядочивания. Всего существует C_{52}^{10} способов вынуть 10 карт из 52. Тузов в колоде четыре, поэтому есть C_{48}^{10} способов вынуть 10 карт, чтобы среди них не было ни одного туза.

Тогда:

а) хотя бы один туз окажется в $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}$ случаях (по правилу суммы);

б) $C_4^1\cdot C_{48}^9$ – ровно один туз (C_4^1 – один туз из четырех и C_{48}^9 – девять не тузов из 48 карт, не содержащих тузов);

в) не менее двух тузов – это значит два, три или четыре туза. Это же количество получится, если из общего числа способов вынуть 10 карт из 52 вычесть число способов не вытащить ни одного туза и не вытащить ровно один туз (любой из четырех мастей). Тогда $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}-4\cdot C_{48}^9$;

г) $C_4^2\cdot C_{48}^8$ – ровно два туза.

Пример 12. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Решение. Здесь нужно найти число перестановок с повторениями.

При $k=2$, $n_1=3$, $n_2=3$, $n=6$ имеем

$$P_6(3;3)=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20.$$

Пример 13. В гостинице 10 комнат, каждая из которых может разместить четырех человек. Сколько существует вариантов размещения прибывших четырех гостей?

Решение. Каждый следующий гость из четырех может быть помещен в любую из 10 комнат, поэтому общее число размещений с повторениями равно

$$(A_{10}^4)_{\textit{с повт.}}=10^4=10000.$$

Пример 14. В магазине продается 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определите число возможных заказов.

Решение. Число равновозможных заказов равно

$$(C_n^m)_{\textit{с повт.}}=C_{n+m-1}^m=C_{10+3-1}^3=C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=220.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите:

а) $\frac{P_8}{A_8^7}$; б) $\frac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$; в) $\frac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$; г) $\frac{P_8 P_7}{7P_7}$.

2. Решите уравнения:

а) $A_{x+1}^2 = 30$; б) $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$; в) $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$;

г) $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$; д) $\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$.

3. Сколько существует пятизначных номеров:

а) не содержащих цифру 8;

б) не содержащих цифры 0 и 8;

в) составленных из цифр 2, 3, 5, 7.

4. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из десяти вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из десяти вагонов. Определите число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

5. Студенты второго курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по три предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

6. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?

7. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1, ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски?

8. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой?

9. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом?

10. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

11. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

12. Из группы студентов инженерно-строительного факультета в 16 человек формируются две строительные бригады по 10 и 6 человек. Сколькими способами можно создать эти бригады?

13. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)?

14. Сколькими способами можно расположить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не «били» друг друга?

15. В почтовом отделении продаются открытки шести видов. Найдите число способов покупки восьми открыток.

16. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9?

Ответы

2. а) 5; б) 7; в) 10; г) 8; д) 7.
3. а) 59049; б) 32768; в) 1024. Указание: здесь $\overline{A_n^k} = n^k$.
4. 100000.
5. 1320.
6. 60.
7. 5040.
8. 28.
9. 66.
10. 300.
11. 10.
12. 8008.
13. 15120.
14. 40320.
15. 1287.
16. 16807.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пример 1. В некотором царстве каждые два человека отличаются набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения царства (максимальное количество зубов у человека – 32)?

Решение. Рассмотрим всех людей с одним зубом. Ясно, что единственный зуб может находиться на любом из 32 мест, то есть людей с разным расположением одного зуба C_{32}^1. Тогда общее число людей с различными наборами зубов равно

$$C_{32}^0 + C_{32}^1 + \ldots + C_{32}^{32} = 2^{32} = 4\,294\,967\,292 \text{ человека.}$$

Пример 2. Сколько членов получится после раскрытия всех скобок в выражении

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)(g+1)?$$

Решение. Каждый из членов, которые получаются после раскрытия скобок, содержит семь сомножителей. Любой из этих сомножителей – либо буква, либо цифра, то есть может находиться в двух состояниях. Тогда, например, число членов, в которых содержится только одна цифра – C_7^1, две – C_7^2 и так далее. Всего членов

$$C_7^0 + C_7^1 + \ldots + C_7^7 = 2^7 = 128.$$

Пример 3. Сколько различных делителей имеет число:

а) 2310;

б) 10!

Решение:

а) $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Единица является делителем любого числа. Остальные делители (все разные) будут получаться путем перемножения одного, двух, трех, четырех и пяти чисел из набора 2, 3, 5, 7, 11, то есть число всех делителей равно

$$C_5^0 + C_5^1 + \ldots + C_5^5 = 2^5 = 32.$$

б) $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$. Всего делителей

$$C_{15}^0 + C_{15}^1 + \ldots + C_{15}^{15} = 2^{15}.$$

Из-за кратности простых делителей среди них будут одинаковые, которые надо исключить. Рассмотрим, например, делитель 3^4. Кратными трем будут четыре различных делителя – 3, 9, 27, 81. Таким образом, число различных делителей для простого кратного делителя равно его кратности. К этому надо добавить единицу, так как она – делитель любого числа. Тогда всего различных делителей будет

$$(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 9\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 270.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Определите, сколько рациональных членов содержится в разложении:

а) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{20}$; б) $(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2})^{100}$.

2. Найдите коэффициент при t^k в разложении:

а) $(2+t^4+t^7)^{15}$, $k=17$; б) $(2+t-2t^3)^{20}$, $k=10$.

3. Какое число больше, $99^{50}+100^{50}$ или 101^{50}?

4. Вычислите: а) $(a+b+c+d)^3$, б) $(a+b+c+d)^4$, в) $(a+b+c+d)^5$, г) $(a+b+c)^5$, д) $(a+b)^6$.

5. Определите коэффициент c в одночлене $cx_1^{\,3}x_2^{\,4}x_3^{\,3}$ после разложения выражения $(x_1+x_2+x_3)^{10}$ и приведения подобных членов.

Ответы

1. а) $k=2, 8, 14, 20$; б) $k=0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96$.

3. а) 0; б) $-C_{20}^4+2^{19}\cdot C_4^3+C_{20}^6+2^{16}\cdot C_6^2-C_{20}^8\cdot 2^{13}\cdot C_8^1+C_{20}^{10}\cdot 2^{10}\cdot C_8^0=$

$$=2^{10}\cdot 19\,409\,716.$$

3. Число 101^{50} больше числа $99^{50}+100^{50}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Пример 1. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни один из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружки? Сколько учеников посещает только математический кружок?

Решение. Введем два признака:

p_M – ученик посещает математический кружок;

p_Φ – ученик посещает физический кружок.

По условию задачи $m = 35$, $n(p_M) = 20$, $n(p_\Phi) = 11$, $n(\overline{p_M}, \overline{p_\Phi}) = 10$.

Тогда поскольку $n(\overline{p_M}, \overline{p_\Phi}) = n - (n(p_M) + n(p_\Phi)) + n(p_M, p_\Phi)$, то

$n(p_M, p_\Phi) = n(\overline{p_M}, \overline{p_\Phi}) - n + n(p_M) + n(p_\Phi) = 10 - 35 + 20 + 11 = 6$.

На второй вопрос задачи ответьте самостоятельно (ответ: 14).

Пример 2. В букинистическом магазине лежит 6 экземпляров романа И.С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую не менее чем по одному экземпляру каждого из этих романов?

Решение. Введем три признака:

p_P – том содержит роман «Рудин»;

$p_Д$ – том содержит роман «Дворянское гнездо»;

p_O – том содержит роман «Отцы и дети».

По условию задачи $n(p_P) = 6$, $n(p_Д) = 3$, $n(p_O) = 4$, $n(p_P, p_Д) = 5$, $n(p_Д, p_O) = 7$.

Нужно найти $n(p_P, p_Д, p_O) = 7$.

По формуле (2) из лекции 15 получим:

$$n(p_P, p_Д, p_O) = n - (n(p_P) + n(p_Д) + n(p_O)) + (n(p_P, p_Д) + n(p_P, p_O) +$$

$$+ n(p_Д, p_O)) - n(\overline{p_P}, \overline{p_Д}, \overline{p_O}) = 25 - (6+3+4) + (5+0+7) - 0 = 24 .$$

Пример 3. В результате социологического исследования выяснилось, что студенты читают три журнала A, B и C, причем журнал A читают 50 % студентов, B – 60 %, C – 40 %, A и B – 30 %, B и C – 20 %, A и C – 15 %, A, B и C – 10 %. Найдите:

1. Сколько процентов студентов не читают ни один из журналов.
2. Сколько процентов студентов читают только один журнал.
3. Сколько процентов студентов читают только два журнала.
4. Сколько процентов студентов читают не менее двух журналов.

Решение. По условию задачи $n(p_A) = 50\%$, $n(p_B) = 60\%$, $n(p_C) = 40\%$, $n(p_A, p_B) = 30\%$, $n(p_A, p_C) = 15\%$, $n(p_B, p_C) = 20\%$, $n(p_A, p_B, p_C) = 10\%$.

По формуле (2) получим:

1. $$n(\overline{p_A}, \overline{p_B}, \overline{p_C}) = n - n(p_A) - n(p_B) - n(p_C) + n(p_A, p_B) + n(p_A, p_C) +$$

$$+ n(p_B, p_C)) - n(p_A, p_B, p_C) = 100\% - 50\% - 60\% - 40\% +$$

$$+ 30\% + 15\% + 20\% - 10\% = 5\% .$$

2. $$n(p_A, \overline{p_B}, \overline{p_C}) + n(\overline{p_A}, p_B, \overline{p_C}) + n(\overline{p_A}, \overline{p_B}, p_C) = n(\overline{p_A}, \overline{p_B}, \overline{p_C}) =$$

$$= (n(p_A) - n(p_A, p_B) - n(p_A, p_C) + n(p_A, p_B, p_C)) +$$

$$+ (n(p_B) - n(p_A, p_B) - n(p_B, p_C) + n(p_A, p_B, p_C)) +$$

$$+ (n(p_C) - n(p_A, p_C) - n(p_B, p_C) + n(p_A, p_B, p_C)) =$$

$$= 15\% + 20\% + 15\% = 50\% .$$

На третий и четвертый вопрос задачи ответьте самостоятельно (ответы соответственно: 35 %, 45 %).

Пример 4. Сколько чисел от 1 до 100 не делятся на 5 и 7?

Решение. $n(p_{:5}) = 20$ чисел, $n(p_{:7}) = 14$ чисел, $n(p_{:35}) = 2$ числа.

Тогда чисел, не делящихся на 5 и 7,

$$100 - 20 - 14 + 2 = 68 .$$

Задания для самостоятельной работы

1. В группе 23 студента. Из них 18 знают английский язык, 9 – немецкий, 6 – оба языка. Сколько студентов в группе не знают ни одного языка? Сколько студентов знают один язык?

2. Найдите число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5, и 7.

3. Найдите число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, и 15.

4. В механической мастерской работают 12 человек, из них 6 человек имеют диплом слесаря, 4 – диплом оператора станов с ЧПУ, 7 человек – диплом фрезеровщика, по 3 человека владеют двумя из перечисленных специальностей и 2 человека – всеми тремя. Начальство решает уволить работников, не имеющих дипломов хотя бы по одной из этих специальностей. Имеется ли такая возможность?

Ответы

1. 2; 15.
2. 542.
3. 734.

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

При выполнении домашней контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами черного или синего цветов, оставляя поля шириной 3 – 4 см для замечаний рецензента. В конце работы должна быть оставлена чистая страница для развернутой рецензии.
2. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия, имя и отчество студента, учебный шифр, название дисциплины, название контрольной работы.
3. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой шифра его зачетной книжки. При этом если предпоследняя – число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в табл. 1. Если же предпоследняя цифра шифра – число четное или нуль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в табл. 2. В работу должны быть включены все задания варианта. Контрольные работы, содержащие не все задания, или содержащие задания не своего варианта, не рецензируются.

Таблица 1

Номер варианта	Номер задания							
1	1	21	41	61	81	101	121	141
2	2	22	42	62	82	102	122	142
3	3	23	43	63	83	103	123	143
4	4	24	44	64	84	104	124	144
5	5	25	45	65	85	105	125	145
6	6	26	46	66	86	106	126	146
7	7	27	47	67	87	107	127	147
8	8	28	48	68	88	108	128	148
9	9	29	49	69	89	109	129	149
10	10	30	50	70	90	110	130	150

4. Решения заданий следует располагать в порядке возрастания их номеров. Перед решением каждой задачи нужно полностью записать ее условие.
5. Получив контрольную работу после проверки, студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. Доработанные задания следует записывать только в работе над ошибками, после замечаний рецензента. Никакие исправления в тексте работы после проверки не допускаются.

Таблица 2

Номер варианта	Номер задания							
1	11	31	51	71	91	111	131	151
2	12	32	52	72	92	112	132	152
3	13	33	53	73	93	113	133	153
4	14	34	54	74	94	114	134	154
5	15	35	55	75	95	115	135	155
6	16	36	56	76	96	116	136	156
7	17	37	57	77	97	117	137	157
8	18	38	58	78	98	118	138	158
9	19	39	59	79	99	119	139	159
10	20	40	60	80	100	120	140	160

6. Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Если будет установлено, что контрольная работа выполнена несамостоятельно, то она не засчитывается (даже если в этой работе все задачи решены верно). Студенту в таком случае выдается новое индивидуальное задание по теме работы.

ЗАДАНИЯ

1 – 20. Постройте коммутационную схему, соответствующую данному булевому выражению. Определите, при каких положениях переключателей ток в сети отсутствует.

1. $((p \vee \overline{g}) \wedge \overline{r}) \vee ((p \wedge \overline{g}) \vee r)$.

2. $((\overline{p} \wedge \overline{g}) \vee r) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge \overline{r})$.

3. $((\overline{p} \vee g) \wedge r) \vee ((\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge g)$.

4. $((\overline{p} \wedge \overline{g}) \vee r) \vee ((\overline{p} \wedge g) \vee \overline{r})$.

5. $((p \vee g) \wedge \overline{r}) \vee ((\overline{p} \wedge \overline{g}) \vee r)$.

6. $((p \wedge \overline{g}) \vee \overline{r}) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge r)$.

7. $((p \wedge \overline{g}) \vee \overline{r}) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge r)$.

8. $((p \wedge \overline{g}) \vee r) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge r)$.

9. $((\overline{p} \vee \overline{g}) \wedge r) \vee ((p \wedge g) \vee \overline{r})$.

10. $((p \vee \overline{g}) \wedge r) \vee ((\overline{p} \wedge \overline{g}) \vee r)$.

11. $((p \vee g) \wedge \overline{r}) \vee ((\overline{p} \wedge \overline{g}) \vee r)$.

12. $((p \wedge \overline{g}) \vee r) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge \overline{r})$.

13. $((\overline{p} \wedge g) \vee \overline{r}) \vee ((p \vee \overline{g}) \wedge \overline{r})$.

14. $((p \vee \overline{g}) \wedge r) \vee ((\overline{p} \wedge g) \vee \overline{r})$.

15. $((p \wedge \overline{g}) \vee \overline{r}) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge r)$.

16. $((p \wedge \overline{g}) \vee r) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge \overline{r})$.

17. $((\overline{p} \wedge \overline{g}) \vee r) \vee ((\overline{p} \vee g) \wedge \overline{r})$.

18. $((\overline{p} \vee \overline{g}) \wedge r) \vee ((p \wedge g) \vee \overline{r})$.

19. $((p \wedge \overline{g}) \vee r) \vee ((\overline{p} \wedge \overline{r}) \vee g)$.

20. $((\overline{p} \vee g) \wedge r) \vee ((p \wedge \overline{r}) \vee g)$.

21 – 40. Для данной булевой функции:

а) постройте таблицу истинности, найдите двоичную форму булевой функции, приведите булеву функцию к СДНФ и СКНФ;

б) найдите двумя способами многочлен Жегалкина и ответьте на вопрос, является ли данная булева функция линейной.

21. $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y}) \to (\overline{z} \oplus \overline{x})$.

22. $f(x, y, z) = \overline{(x \vee \overline{y})} \to (z \oplus \overline{x})$.

23. $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee \overline{y}) \to \overline{(z \oplus x)}$.

24. $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y}) \to (\overline{(z \leftrightarrow \overline{x})}$.

25. $f(x, y, z) = \overline{(x \vee \overline{y}) \to (z \leftrightarrow \overline{x})}$.

26. $f(x, y, z) = \overline{(x \mid \overline{y}) \oplus (z \to \overline{x})}$.

27. $f(x, y, z) = \overline{(z \to x) \leftrightarrow (y \mid x)}$.

28. $f(x, y, z) = (x \mid \overline{y}) \oplus (\overline{z} \to x)$.

29. $f(x,y,z)=(\bar{z}\to x)\leftrightarrow(\bar{x}\mid y)$.

30. $f(x,y,z)=(z\to x)\oplus(x\mid\bar{y})$.

31. $f(x,y,z)=((x\downarrow y)\to z)\oplus y$.

32. $f(x,y,z)=\left(\overline{(x\leftrightarrow\bar{y})}\to\bar{z}\right)\mid y$.

33. $f(x,y,z)=\overline{(x\vee\bar{y})}\to(\bar{z}\leftrightarrow y)$.

34. $f(x,y,z)=\overline{((x\downarrow y)\to\bar{z})\leftrightarrow y}$.

35. $f(x,y,z)=\overline{(x\downarrow y)}\to(z\leftrightarrow\bar{y})$.

36. $f(x,y,z)=\overline{((x\leftrightarrow y)\mid\bar{z})\oplus y}$.

37. $f(x,y,z)=(\bar{x}\vee y)\to\overline{(\bar{z}\leftrightarrow x)}$.

38. $f(x,y,z)=\overline{((x\downarrow y)\to z)\leftrightarrow x}$.

39. $f(x,y,z)=\overline{((x\mid y)\oplus(\bar{z}\to y)}$.

40. $f(x,y,z)=\overline{(x\vee y)\to(\bar{z}\leftrightarrow y)}$.

41 – 60. По заданной матрице весов Ω графа G найдите величину минимального пути и сам путь от вершины x_1 до вершины x_7 по алгоритму Дейкстры.

41. $$\Omega=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 19 & 20 & \infty & 15 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 11 & 6 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 6 & 9 & \infty & 16 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 8 & 13 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

42. $$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 11 & 5 & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & 4 & - & 3 & 6 & 7 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 7 & - & 5 & 18 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

43. $$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 7 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 6 & 13 & \infty \\ x_3 & \infty & 5 & - & 4 & 5 & 6 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 8 & - & 5 & 9 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

44. $$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 5 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 8 & \infty & 9 & 15 \\ x_3 & \infty & \infty & - & 4 & 6 & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 8 & - & 3 & 11 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

$$\textbf{45.}\quad \Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ x_3 & \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

$$\textbf{46.}\quad \Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ x_5 & \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

$$\textbf{47.}\quad \Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & 21 & 23 & \infty & 14 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 12 & 7 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & 10 & \infty & 17 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 7 & 14 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 15 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

$$\mathbf{48}.\quad \Omega=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 11 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 13 & 7 & 12 & \infty \\ x_3 & \infty & 6 & - & 5 & 8 & 9 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 7 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 9 & - & 7 & 20 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

$$\mathbf{49}.\quad \Omega=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 6 & 10 & \infty & 9 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 5 & 12 & \infty \\ x_3 & \infty & 4 & - & 3 & 4 & 5 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 7 & - & 4 & 8 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

$$\mathbf{50}.\quad \Omega=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 8 & \infty & 7 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 11 & \infty & 12 & 18 \\ x_3 & \infty & \infty & - & 7 & 9 & \infty & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 11 & - & 6 & 14 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 11 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

51. $$\Omega=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 15 & 19 & 11 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 18 & 22 & \infty \\ x_3 & \infty & 13 & - & 17 & 11 & 15 & 26 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 15 & 20 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 & 27 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 23 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

52. $$\Omega=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 4 & \infty & 9 & 7 & 11 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 6 & \infty & 3 & 8 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 4 & \infty & 5 & 10 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ x_5 & \infty & \infty & 5 & \infty & - & 12 & 20 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & - & 8 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

53. $$\Omega=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 12 & 24 & 25 & \infty & 20 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 16 & 11 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 11 & 14 & \infty & 21 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 13 & 13 & 18 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 10 & 20 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}\right).$$

54. $$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline
x_1 & - & \infty & 14 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
x_2 & \infty & - & \infty & 16 & 10 & 15 & \infty \\
x_3 & \infty & 14 & - & 8 & 11 & 12 & \infty \\
x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 10 \\
x_5 & \infty & \infty & \infty & 12 & - & 10 & 23 \\
x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{array}\right).$$

55. $$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline
x_1 & - & \infty & 14 & 19 & \infty & 17 & \infty \\
x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 13 & 20 & \infty \\
x_3 & \infty & 12 & - & 11 & 12 & 13 & \infty \\
x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 11 \\
x_5 & \infty & \infty & \infty & 15 & - & 12 & 16 \\
x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 13 \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{array}\right).$$

56. $$\Omega = \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline
x_1 & - & 11 & 13 & \infty & 12 & \infty & \infty \\
x_2 & \infty & - & \infty & 16 & \infty & 17 & 23 \\
x_3 & \infty & \infty & - & 12 & 14 & \infty & \infty \\
x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 15 & \infty \\
x_5 & \infty & \infty & \infty & 16 & - & 11 & 19 \\
x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 16 \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{array}\right).$$

57. $$\Omega = \begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ x_3 & \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}.$$

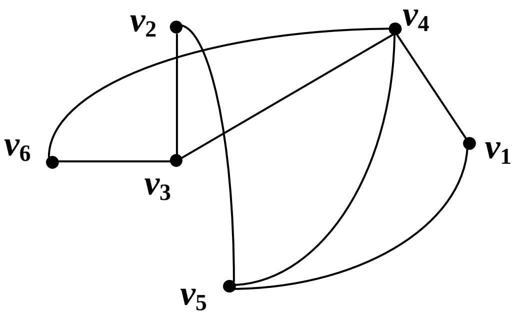
58. $$\Omega = \begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ x_2 & \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ x_5 & \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

59. $$\Omega = \begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 5 & 17 & 18 & \infty & 13 & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 9 & 4 & \infty & \infty \\ x_3 & \infty & \infty & - & 4 & 7 & \infty & 14 \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 6 & 11 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 & 13 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}.$$

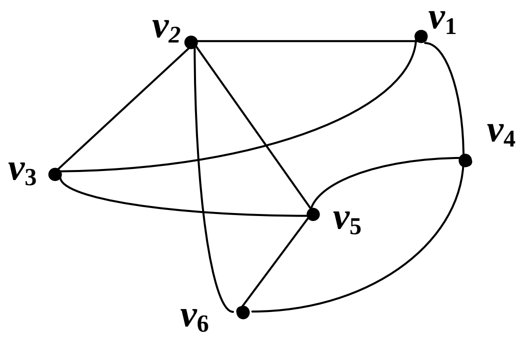
60. $$\Omega = \begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & \infty & 19 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ x_2 & \infty & - & \infty & 21 & 15 & 20 & \infty \\ x_3 & \infty & 14 & - & 13 & 16 & 17 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 15 \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & 17 & - & 15 & 28 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}.$$

61 – 80. Найдите число различных остовов данного графа, используя теорему Кирхгофа.

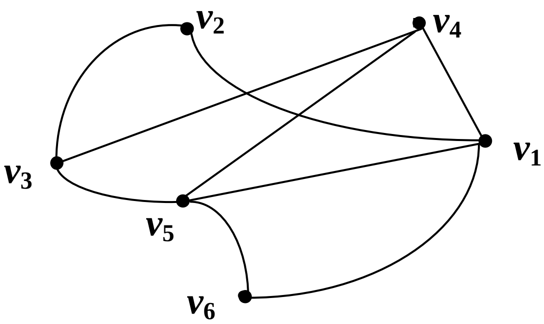
61.



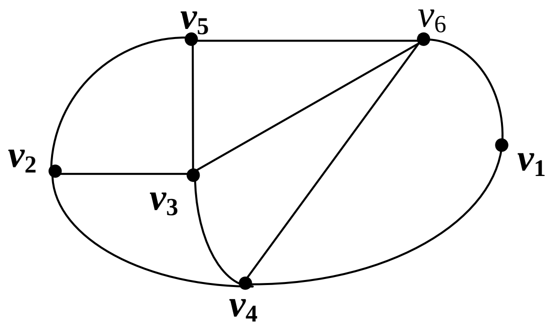
62.



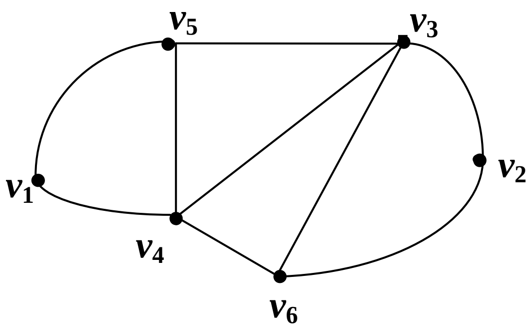
63.



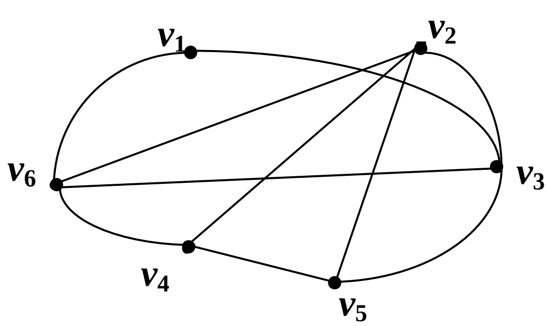
64.



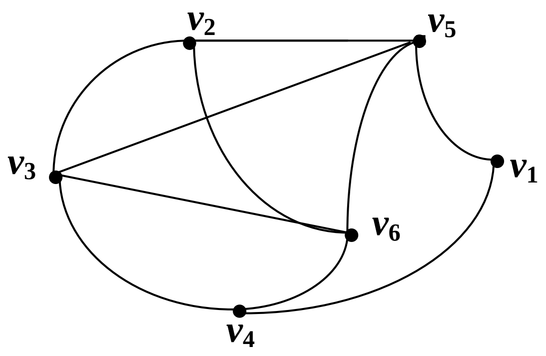
65.



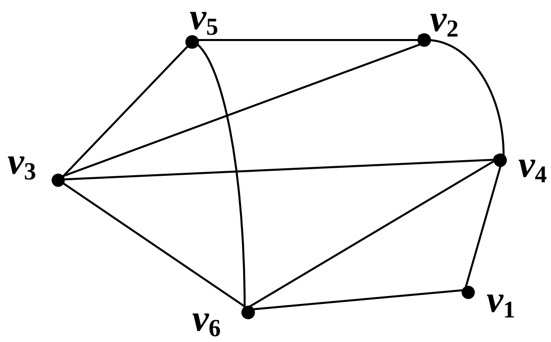
66.



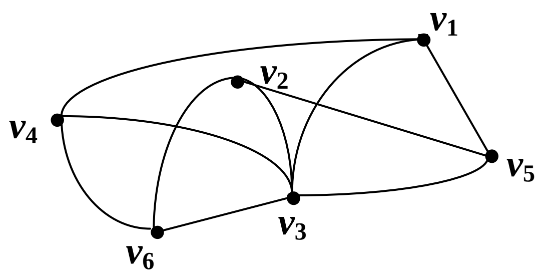
67.



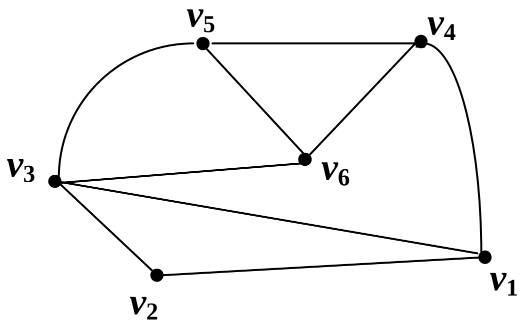
68.



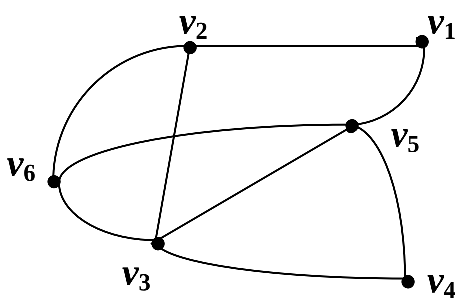
69.



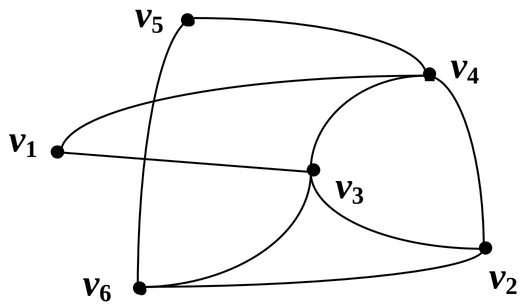
70.



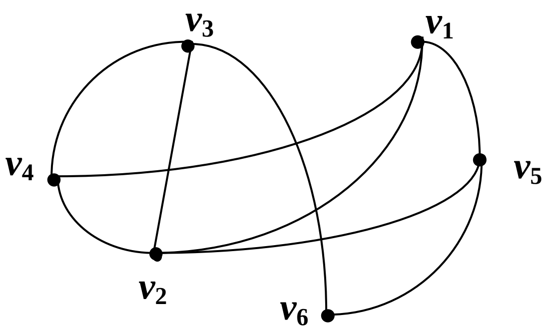
71.



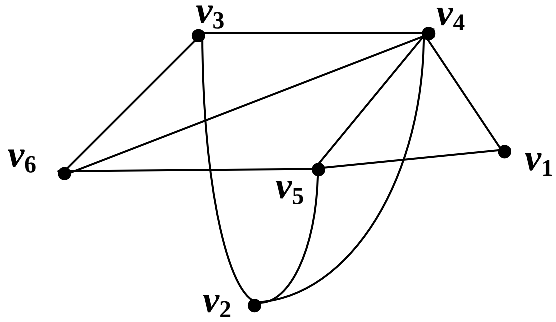
72.



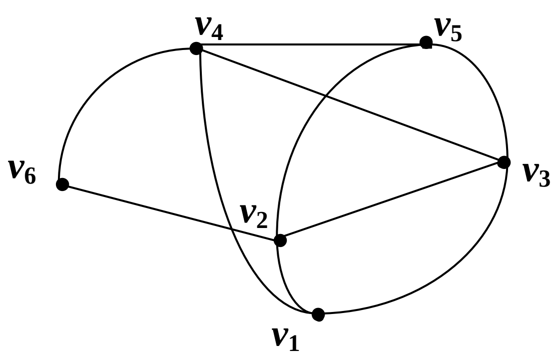
73.



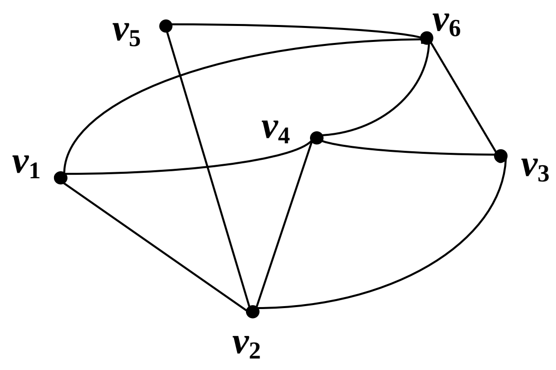
74.



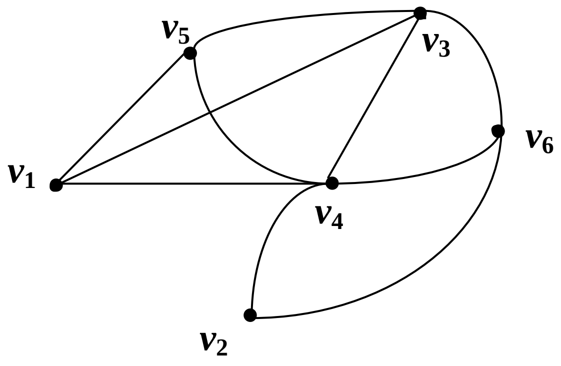
75.



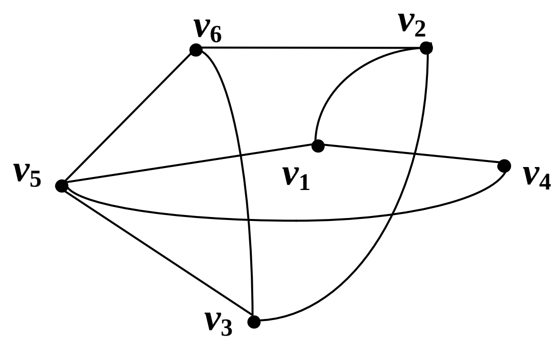
76.



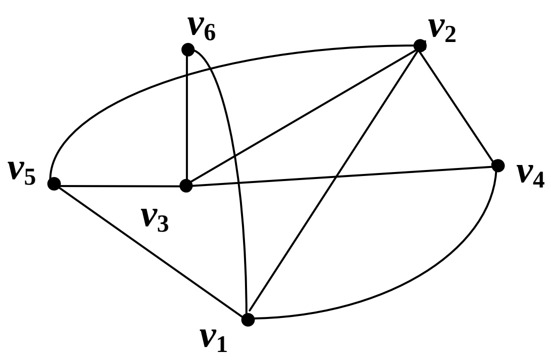
77.



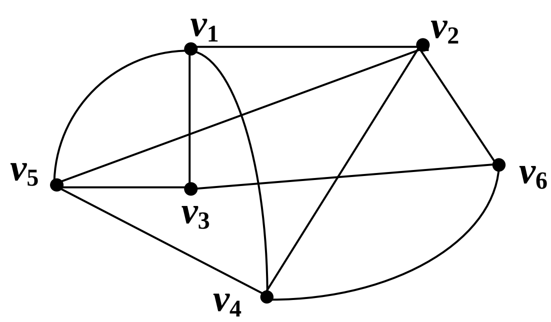
78.



79.



80.



81 – 100. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов G' с помощью формализованного алгоритма Прима и найти его вес $\omega_{\min}(G')$. Выполнить проверку с помощью алгоритма Краскала.

81.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ x_2 & 10 & - & 6 & 12 & 4 & 8 & \infty \\ x_3 & \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ x_4 & 5 & 12 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ x_6 & \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ x_7 & 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{array}\right).$$

82.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & \infty & 10 & 13 & \infty & 11 \\ x_2 & 8 & - & 7 & 8 & \infty & 15 & \infty \\ x_3 & \infty & 7 & - & \infty & 19 & 10 & 15 \\ x_4 & 10 & 8 & \infty & - & 9 & \infty & 6 \\ x_5 & 13 & \infty & 19 & 9 & - & 8 & \infty \\ x_6 & \infty & 15 & 10 & \infty & 8 & - & 12 \\ x_7 & 11 & \infty & 15 & 6 & \infty & 12 & - \end{array}\right).$$

83.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 6 & 8 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ x_2 & 6 & - & 11 & 12 & 9 & \infty & 5 \\ x_3 & 8 & 11 & - & 7 & 8 & \infty & 9 \\ x_4 & \infty & 12 & 7 & - & 6 & 5 & 10 \\ x_5 & \infty & 9 & 8 & 6 & - & 8 & \infty \\ x_6 & 7 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\ x_7 & \infty & 5 & 9 & 10 & \infty & 7 & - \end{array}\right).$$

84.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 3 & 8 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ x_2 & 3 & - & 7 & 6 & \infty & \infty & 4 \\ x_3 & 8 & 7 & - & 4 & 6 & \infty & 10 \\ x_4 & \infty & 6 & 4 & - & 5 & 7 & \infty \\ x_5 & 3 & \infty & 6 & 5 & - & 8 & 9 \\ x_6 & 6 & \infty & \infty & 7 & 8 & - & \infty \\ x_7 & \infty & 4 & 10 & \infty & 9 & \infty & - \end{array}\right).$$

85.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 9 & 10 & 15 & \infty & \infty & 11 \\ x_2 & 9 & - & 14 & 12 & \infty & 8 & 15 \\ x_3 & 10 & 14 & - & 10 & 9 & \infty & 6 \\ x_4 & 15 & 12 & 10 & - & 11 & 12 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & 9 & 11 & - & 12 & 11 \\ x_6 & \infty & 8 & \infty & 12 & 12 & - & \infty \\ x_7 & 11 & 15 & 6 & \infty & 11 & \infty & - \end{array}\right).$$

86.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 12 & \infty & 7 & \infty & \infty & 16 \\ x_2 & 12 & - & 8 & 14 & 6 & 10 & \infty \\ x_3 & \infty & 8 & - & 5 & 3 & 3 & \infty \\ x_4 & 7 & 14 & 5 & - & 6 & \infty & 3 \\ x_5 & \infty & 6 & 3 & 6 & - & 5 & \infty \\ x_6 & \infty & 10 & 3 & \infty & 5 & - & 2 \\ x_7 & 16 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{array}\right).$$

87.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ x_2 & 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ x_3 & 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ x_4 & 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ x_5 & \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ x_6 & 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ x_7 & \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{array}\right).$$

88.
$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 11 & \infty & 13 & 16 & \infty & 14 \\ x_2 & 11 & - & 10 & 11 & \infty & 18 & \infty \\ x_3 & \infty & 10 & - & \infty & 22 & 13 & 18 \\ x_4 & 13 & 11 & \infty & - & 12 & \infty & 9 \\ x_5 & 16 & \infty & 22 & 12 & - & 11 & \infty \\ x_6 & \infty & 18 & 13 & \infty & 11 & - & 15 \\ x_7 & 14 & \infty & 18 & 9 & \infty & 15 & - \end{array}\right).$$

89. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 12 & \infty & \infty & 11 & \infty \\ x_2 & 10 & - & 14 & 16 & 13 & \infty & 9 \\ x_3 & 12 & 14 & - & 11 & 12 & \infty & 13 \\ x_4 & \infty & 16 & 11 & - & 10 & 5 & 14 \\ x_5 & \infty & 13 & 12 & 10 & - & 8 & \infty \\ x_6 & 11 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\ x_7 & \infty & 9 & 13 & 14 & \infty & 7 & - \end{array}\right).$$

90. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 10 & 11 & \infty & 14 & \infty & 12 \\ x_2 & 10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\ x_3 & 11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\ x_4 & \infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\ x_5 & 14 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 12 \\ x_6 & \infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\ x_7 & 12 & 7 & 6 & \infty & 12 & \infty & - \end{array}\right).$$

91. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 9 & 10 & 15 & \infty & \infty & 11 \\ x_2 & 9 & - & 14 & 12 & \infty & 8 & 15 \\ x_3 & 10 & 14 & - & 10 & 9 & \infty & 6 \\ x_4 & 15 & 12 & 10 & - & 11 & 12 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & 9 & 11 & - & 12 & 11 \\ x_6 & \infty & 8 & \infty & 12 & 12 & - & \infty \\ x_7 & 11 & 15 & 6 & \infty & 11 & \infty & - \end{array}\right).$$

92. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 8 & 9 & \infty & \infty & \infty & 6 \\ x_2 & 8 & - & 7 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ x_3 & 9 & 7 & - & 6 & 10 & 5 & \infty \\ x_4 & \infty & 6 & 6 & - & 8 & 7 & \infty \\ x_5 & \infty & 9 & 10 & 8 & - & 4 & 5 \\ x_6 & \infty & \infty & 5 & 7 & 4 & - & 6 \\ x_7 & 6 & \infty & \infty & \infty & 5 & 6 & - \end{array}\right).$$

93. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 9 & 11 & \infty & \infty & 11 & \infty \\ x_2 & 9 & - & 13 & 15 & 12 & \infty & 8 \\ x_3 & 11 & 13 & - & 10 & 11 & \infty & 12 \\ x_4 & \infty & 15 & 10 & - & 9 & 8 & 13 \\ x_5 & \infty & 12 & 11 & 9 & - & 7 & \infty \\ x_6 & 11 & \infty & \infty & 8 & 7 & - & 6 \\ x_7 & \infty & 8 & 12 & 13 & \infty & 6 & - \end{array}\right).$$

94. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & \infty & 6 \\ x_2 & 13 & - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ x_3 & 9 & 5 & - & 6 & 11 & 5 & \infty \\ x_4 & \infty & 6 & 6 & - & 8 & 7 & \infty \\ x_5 & \infty & 9 & 11 & 8 & - & 4 & 5 \\ x_6 & \infty & \infty & 5 & 7 & 4 & - & 7 \\ x_7 & 6 & \infty & \infty & \infty & 5 & 7 & - \end{array}\right).$$

95. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 12 & 10 & 17 & \infty & \infty & 11 \\ x_2 & 12 & - & 14 & 12 & \infty & 7 & 15 \\ x_3 & 10 & 14 & - & 10 & 9 & \infty & 6 \\ x_4 & 17 & 12 & 10 & - & 11 & 12 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & 9 & 11 & - & 12 & 20 \\ x_6 & \infty & 7 & \infty & 12 & 12 & - & \infty \\ x_7 & 11 & 15 & 6 & \infty & 20 & \infty & - \end{array}\right).$$

96. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & - & 9 & \infty & 13 & 16 & \infty & 14 \\ x_2 & 9 & - & 8 & 12 & \infty & 18 & \infty \\ x_3 & \infty & 8 & - & \infty & 19 & 13 & 18 \\ x_4 & 13 & 12 & \infty & - & 12 & \infty & 8 \\ x_5 & 16 & \infty & 19 & 12 & - & 11 & \infty \\ x_6 & \infty & 18 & 13 & \infty & 11 & - & 16 \\ x_7 & 14 & \infty & 18 & 8 & \infty & 16 & - \end{array}\right).$$

$$
\mathbf{97}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline
x_1 & - & 5 & 9 & 17 & \infty & \infty & 11 \\
x_2 & 5 & - & 14 & 12 & \infty & 8 & 15 \\
x_3 & 9 & 14 & - & 11 & 10 & \infty & 6 \\
x_4 & 17 & 12 & 11 & - & 11 & 14 & \infty \\
x_5 & \infty & \infty & 10 & 11 & - & 12 & 11 \\
x_6 & \infty & 8 & \infty & 14 & 12 & - & \infty \\
x_7 & 11 & 15 & 6 & \infty & 11 & \infty & -
\end{array}\right).\ \mathbf{98}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline
x_1 & - & 6 & \infty & 12 & 13 & \infty & 11 \\
x_2 & 6 & - & 7 & 8 & \infty & 15 & \infty \\
x_3 & \infty & 7 & - & \infty & 21 & 12 & 15 \\
x_4 & 12 & 8 & \infty & - & 8 & \infty & 5 \\
x_5 & 13 & \infty & 21 & 8 & - & 8 & \infty \\
x_6 & \infty & 15 & 12 & \infty & 8 & - & 13 \\
x_7 & 11 & \infty & 15 & 5 & \infty & 13 & -
\end{array}\right).
$$

$$
\mathbf{99}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline
x_1 & - & 10 & 5 & 2 & 16 & \infty & \infty \\
x_2 & 10 & - & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
x_3 & 5 & 4 & - & 8 & 15 & 13 & \infty \\
x_4 & 2 & \infty & 8 & - & 8 & 5 & 7 \\
x_5 & 16 & \infty & 15 & 8 & - & 11 & 18 \\
x_6 & \infty & \infty & 13 & 5 & 11 & - & 4 \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & 7 & 18 & 4 & -
\end{array}\right).\ \mathbf{100}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline
x_1 & - & 19 & 9 & 6 & 20 & \infty & \infty \\
x_2 & 19 & - & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
x_3 & 9 & 4 & - & 8 & 15 & 13 & \infty \\
x_4 & 6 & \infty & 8 & - & 4 & 5 & 7 \\
x_5 & 20 & \infty & 15 & 4 & - & 11 & 18 \\
x_6 & \infty & \infty & 13 & 5 & 11 & - & 4 \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & 7 & 18 & 4 & -
\end{array}\right).
$$

101 – 120. По данной матрице пропускных способностей дуг найти величину максимального потока по сети и выписать дуги, образующие на сети минимальный разрез.

$$
\mathbf{101}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 18 & 16 & - & - & 9 & - \\
x_1 & - & - & 8 & 11 & 7 & - & 13 \\
x_2 & - & - & - & - & 13 & - & 19 \\
x_3 & - & - & 10 & - & - & 15 & - \\
x_4 & - & - & - & 17 & - & 28 & - \\
x_5 & - & - & - & - & - & - & 14 \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right).\ \mathbf{102}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 15 & 17 & - & - & 11 & - \\
x_1 & - & - & 20 & 20 & - & 33 & - \\
x_2 & - & - & - & 13 & 15 & - & 16 \\
x_3 & - & - & - & - & - & 12 & 19 \\
x_4 & - & 17 & - & 12 & - & - & 8 \\
x_5 & - & - & - & - & 2 & - & 7 \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right).
$$

$$
\mathbf{103}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 12 & 9 & - & - & 11 & - \\
x_1 & - & - & 12 & 7 & - & - & - \\
x_2 & - & - & - & 12 & 10 & - & 19 \\
x_3 & - & - & - & - & 12 & 15 & 6 \\
x_4 & - & 8 & - & - & - & 12 & 15 \\
x_5 & - & - & - & - & - & - & 4 \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right)\ \mathbf{104}.\ \left(\begin{array}{c|ccccccc}
 & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline
I & - & 7 & 9 & - & - & 8 & - \\
x_1 & - & - & 11 & 14 & 10 & - & 6 \\
x_2 & - & - & - & - & 9 & 11 & 19 \\
x_3 & - & - & - & - & - & 12 & - \\
x_4 & - & - & - & 8 & - & 14 & - \\
x_5 & - & - & - & - & - & - & 10 \\
S & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}\right).
$$

105. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 12 & 14 & - & 11 & - & 7 \\ x_1 & - & - & 17 & 17 & - & 20 & - \\ x_2 & - & - & - & 10 & 12 & - & 16 \\ x_3 & - & - & - & - & 9 & - & 11 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 12 & - \\ x_5 & - & - & 15 & - & - & - & 9 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

106. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 21 & 19 & - & - & 12 & - \\ x_1 & - & - & 11 & 13 & 9 & - & 11 \\ x_2 & - & - & - & - & 15 & - & 21 \\ x_3 & - & - & 11 & - & - & 15 & - \\ x_4 & - & - & - & 17 & - & 27 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 13 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

107. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 12 & 16 & - & - & 12 & - \\ x_1 & - & - & 21 & 20 & - & 32 & - \\ x_2 & - & - & - & 14 & 15 & - & 17 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 13 & 19 \\ x_4 & - & 17 & - & 15 & - & - & 8 \\ x_5 & - & - & - & - & 5 & - & 7 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

108. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 14 & 10 & - & - & 9 & - \\ x_1 & - & - & 13 & 8 & - & - & - \\ x_2 & - & - & - & 11 & 10 & - & 18 \\ x_3 & - & - & - & - & 11 & 14 & 6 \\ x_4 & - & 9 & - & - & - & 10 & 15 \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 5 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

109. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & - & 11 & 20 & 9 & - & - \\ x_1 & - & - & 7 & - & 10 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & - & 9 & 10 \\ x_3 & - & 15 & - & - & 13 & - & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 6 & 14 \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

110. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 5 & 8 & 18 & - & - & - \\ x_1 & - & - & - & - & 9 & 17 & - \\ x_2 & - & 6 & - & - & 10 & - & 24 \\ x_3 & - & - & - & - & 15 & - & 6 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 8 & 12 \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

111. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 10 & 8 & - & - & 11 & - \\ x_1 & - & - & 10 & 14 & - & 19 & - \\ x_2 & - & - & - & 10 & 8 & - & 7 \\ x_3 & - & - & - & - & 4 & - & 12 \\ x_4 & - & 8 & - & - & - & 7 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 13 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

112. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & - & 8 & 15 & - & 14 & - \\ x_1 & - & - & - & - & 7 & 13 & 19 \\ x_2 & - & 6 & - & - & 9 & - & 15 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 8 & 11 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 5 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 7 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

113. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 15 & 17 & - & - & 11 & - \\ x_1 & - & - & 20 & 20 & - & 33 & - \\ x_2 & - & - & - & 13 & 15 & - & 16 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 12 & 19 \\ x_4 & - & 17 & - & 12 & - & - & 8 \\ x_5 & - & - & - & - & 2 & - & 7 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

114. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 5 & - & 11 & 7 & - & - \\ x_1 & - & - & - & - & 6 & - & - \\ x_2 & - & 6 & - & - & - & 9 & 11 \\ x_3 & - & - & 4 & - & - & - & 4 \\ x_4 & - & - & 8 & - & - & 5 & - \\ x_5 & - & - & - & 7 & - & - & 6 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

115. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 9 & 11 & - & - & 18 & - \\ x_1 & - & - & 8 & 10 & - & - & 13 \\ x_2 & - & - & - & 11 & - & 20 & - \\ x_3 & - & - & - & - & 8 & - & 11 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 14 & 6 \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 4 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

116. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 17 & - & - & 11 & - & - \\ x_1 & - & - & - & - & 13 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & - & 9 & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & - & 11 \\ x_4 & - & - & 8 & 12 & - & - & 18 \\ x_5 & - & - & - & 10 & - & - & - \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

117. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 10 & 12 & - & - & 16 & - \\ x_1 & - & - & 9 & 11 & 13 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & 12 & - & 17 \\ x_3 & - & - & - & - & - & 14 & - \\ x_4 & - & - & - & - & - & 16 & 18 \\ x_5 & - & - & 11 & - & - & - & 7 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

118. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 18 & - & 15 & - & - & - \\ x_1 & - & - & 11 & - & 14 & - & 16 \\ x_2 & - & - & - & - & - & 14 & - \\ x_3 & - & - & 14 & - & 19 & - & 7 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 26 & - \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 19 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

119. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 7 & 13 & - & - & 18 & - \\ x_1 & - & - & 8 & 10 & - & - & 13 \\ x_2 & - & - & - & 17 & - & 20 & - \\ x_3 & - & - & - & - & 9 & - & 11 \\ x_4 & - & - & - & - & - & 14 & 5 \\ x_5 & - & - & - & - & - & - & 8 \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right).$$

120. $$\left(\begin{array}{c|ccccccc} & I & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & S \\ \hline I & - & 19 & - & - & 12 & - & - \\ x_1 & - & - & - & - & 15 & - & - \\ x_2 & - & - & - & - & - & 8 & - \\ x_3 & - & - & - & - & - & - & 11 \\ x_4 & - & - & 9 & 12 & - & - & 18 \\ x_5 & - & - & - & 11 & - & - & - \\ S & - & - & - & - & - & - & - \end{array}\right)$$

121 – 140. На одном и том же оборудовании предприятие должно выпускать партиями пять видов продукции. Издержки от переналадок оборудования при переходе от производства одного вида продукции к производству другого заданы матрицей $A=[a_{ij}]$, где a_{ij} – затраты на переналадку оборудования при переходе от выпуска i-того вида продукции к выпуску j-того вида продукции. С помощью алгоритма Литтла найти последовательность запуска партий продукции в производство, при которой суммарные потери от переналадок будут минимальными.

121. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 12 \\ 9 & \infty & 14 & 12 & 12 \\ 10 & 10 & \infty & 13 & 13 \\ 9 & 11 & 12 & \infty & 17 \\ 11 & 10 & 13 & 12 & \infty \end{pmatrix}$. **122.** $\begin{pmatrix} \infty & 11 & 11 & 10 & 9 \\ 10 & \infty & 10 & 12 & 11 \\ 11 & 11 & \infty & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & \infty & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 10 & \infty \end{pmatrix}$.

123. $\begin{pmatrix} \infty & 9 & 10 & 9 & 11 \\ 10 & \infty & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & \infty & 10 & 12 \\ 21 & 10 & 11 & \infty & 12 \\ 11 & 10 & 12 & 10 & \infty \end{pmatrix}$. **124.** $\begin{pmatrix} \infty & 9 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & \infty & 12 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & \infty & 11 & 12 \\ 11 & 10 & 10 & \infty & 12 \\ 12 & 10 & 10 & 11 & \infty \end{pmatrix}$.

125. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 9 & 12 \\ 9 & \infty & 11 & 12 & 11 \\ 9 & 10 & \infty & 13 & 13 \\ 10 & 12 & 10 & \infty & 15 \\ 11 & 10 & 13 & 14 & \infty \end{pmatrix}$. **126.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 12 & 11 & 12 \\ 11 & \infty & 14 & 12 & 10 \\ 10 & 9 & \infty & 10 & 13 \\ 9 & 13 & 11 & \infty & 17 \\ 12 & 10 & 13 & 11 & \infty \end{pmatrix}$.

127. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 13 & 10 & 12 \\ 10 & \infty & 10 & 12 & 12 \\ 10 & 10 & \infty & 13 & 10 \\ 9 & 11 & 12 & \infty & 17 \\ 12 & 10 & 9 & 9 & \infty \end{pmatrix}$. **128.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 9 & 11 & 10 \\ 9 & \infty & 13 & 12 & 11 \\ 10 & 10 & \infty & 13 & 12 \\ 11 & 11 & 12 & \infty & 15 \\ 11 & 10 & 9 & 12 & \infty \end{pmatrix}$.

129. $\begin{pmatrix} \infty & 11 & 14 & 11 & 12 \\ 9 & \infty & 14 & 12 & 9 \\ 10 & 9 & \infty & 13 & 13 \\ 11 & 11 & 10 & \infty & 16 \\ 9 & 10 & 12 & 12 & \infty \end{pmatrix}$. **130.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 12 & 11 & 9 \\ 11 & \infty & 14 & 10 & 12 \\ 10 & 9 & \infty & 13 & 13 \\ 9 & 11 & 12 & \infty & 10 \\ 11 & 10 & 13 & 10 & \infty \end{pmatrix}$.

131. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 9 & 11 & 12 \\ 12 & \infty & 11 & 12 & 10 \\ 10 & 10 & \infty & 13 & 13 \\ 9 & 9 & 12 & \infty & 13 \\ 11 & 10 & 13 & 12 & \infty \end{pmatrix}$. **132.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 9 \\ 9 & \infty & 11 & 12 & 12 \\ 10 & 10 & \infty & 10 & 12 \\ 11 & 11 & 12 & \infty & 11 \\ 9 & 10 & 10 & 12 & \infty \end{pmatrix}$.

133. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 12 & 9 & 12 \\ 9 & \infty & 14 & 12 & 12 \\ 10 & 10 & \infty & 13 & 13 \\ 9 & 9 & 12 & \infty & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & \infty \end{pmatrix}$. **134.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 12 \\ 11 & \infty & 16 & 12 & 10 \\ 10 & 10 & \infty & 11 & 13 \\ 9 & 10 & 12 & \infty & 13 \\ 11 & 9 & 13 & 12 & \infty \end{pmatrix}$.

135. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 12 & 11 & 12 \\ 9 & \infty & 14 & 12 & 10 \\ 10 & 10 & \infty & 9 & 13 \\ 11 & 11 & 9 & \infty & 15 \\ 10 & 10 & 13 & 11 & \infty \end{pmatrix}$. **136.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 10 \\ 12 & \infty & 12 & 9 & 12 \\ 10 & 9 & \infty & 13 & 13 \\ 9 & 11 & 10 & \infty & 11 \\ 11 & 10 & 13 & 12 & \infty \end{pmatrix}$.

137. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 13 & 11 & 10 \\ 9 & \infty & 9 & 12 & 12 \\ 10 & 10 & \infty & 11 & 9 \\ 11 & 11 & 12 & \infty & 13 \\ 11 & 10 & 13 & 12 & \infty \end{pmatrix}$. **138.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 13 & 10 & 12 \\ 9 & \infty & 10 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & \infty & 9 & 13 \\ 9 & 11 & 12 & \infty & 17 \\ 11 & 13 & 11 & 12 & \infty \end{pmatrix}$.

139. $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 11 & 11 & 12 \\ 11 & \infty & 14 & 12 & 9 \\ 10 & 9 & \infty & 13 & 10 \\ 9 & 11 & 10 & \infty & 17 \\ 11 & 10 & 12 & 12 & \infty \end{pmatrix}$. **140.** $\begin{pmatrix} \infty & 10 & 12 & 11 & 10 \\ 10 & \infty & 14 & 12 & 11 \\ 10 & 12 & \infty & 9 & 13 \\ 9 & 11 & 12 & \infty & 15 \\ 11 & 10 & 10 & 12 & \infty \end{pmatrix}$.

141 – 160

1. Определите:

а) число всех размещений из n элементов по k элементов;

б) число всех перестановок из n элементов;

в) число всех сочетаний из n элементов по k элементов.

2. В почтовом отделении продаются открытки n видов. Найдите число способов покупки k открыток.

3. Найдите разложение $(a+b)^n$.

4. Определите, сколько n-значных чисел можно составить из k цифр.

Номер задания	***n***	***k***
141	9	3
142	7	5
143	6	4
144	5	2
145	7	4
146	9	5
147	8	5
148	10	3
149	11	2
150	12	4
151	9	4
152	7	3
153	6	3
154	9	6
155	9	4
156	8	4
157	10	4
158	10	5
159	11	3
160	11	4

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие множества. Виды множеств. Основное отношение между элементом и множеством. Способы задания множеств.
2. Подмножества. Примеры подмножеств. Отношение равенства между множествами. Отношение включения между множествами. Диаграммы Эйлера – Венна. Мощность множества. Булеан и его мощность.
3. Объединение множеств. Пример. Дизъюнкция. Пересечение множеств. Пример. Конъюнкция. Тавтология. Противоречие.
4. Дополнение множества. Отрицание. Стрелка Пирса. Штрих Шеффера. Примеры.
5. Разность множеств. Импликация. Пример. Симметрическая разность. Эквивалентность. Пример.
6. Элементарные булевы функции. Методы доказательства в логике Буля.
7. Коммутационные схемы.
8. Свойства операций над множествами, свойства элементарных булевых функций (доказать два свойства). Приоритет операций над множествами.
9. Формы представления булевых функций: совершенные дизъюнктивная, конъюнктивная, полиномиальная нормальные формы.
10. Многочлен Жегалкина. Теорема Жегалкина. Алгоритмы построения многочлена Жегалкина.
11. Линейные и нелинейные булевы функции. Алгоритм определения линейности (или нелинейности) булевой функции.
12. Определения графа, ориентированного и неориентированного графов. Элементы графа и отношения между ними. Виды графов. Изоморфность графов.
13. Способы задания графа.
14. Определения сети, пропускной способности дуги, потока по сети, источника и стока. Задача о величине максимального потока по сети и алгоритм ее решения. Теорема Форда – Фалкерсона.
15. Задача о величине максимального потока по сети с несколькими источниками и стоками и алгоритм ее решения.
16. Деревья и их элементы. Остов. Теорема Кирхгофа. Цикломатическое число графа.
17. Алгоритмы поиска дерева минимального веса.
18. Эйлеровы графы. Алгоритм Флери.
19. Гамильтоновы графы. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.
20. Нахождение кратчайшего пути между источником и стоком сети. Алгоритм Дейкстры.
21. Основные правила комбинаторики – произведения и суммы (привести примеры).
22. Комбинаторные схемы без повторений (получить формулы, привести примеры).
23. Комбинаторные схемы с повторениями (получить формулы, привести примеры).
24. Бином Ньютона. Полиномиальная теорема. Пример.
25. Формула включений и исключений. Пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Акимов. – 2-е изд., доп. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.: ил.

2. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика: пер. с англ. / Д. Андерсон. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 960 с.: ил.

3. Галушкина, Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике. – 2-е изд., испр. / Ю.И. Галушкина, А.Н. Марьямов. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 176 с. – (Высшее образование).

4. Иванов, Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: учеб. пособие / Б.Н. Иванов. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 288 с.: ил.

5. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: учебник для вузов. – 2-е изд. / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2006. – 364 с.: ил.

6. Осипова, В.А Основы дискретной математики: учеб. пособие / В.А. Осипова. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006. – 160 с.: ил.

7. Плотников, А.Д. Дискретная математика: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. / А.Д. Плотников. – М.: Новое знание, 2006. – 304 с.

8. Просветов, Г.И. Дискретная математика: задачи и решения: учеб.-практ. пособие. – 2-е изд., доп. / Г.И. Просветов. – М.: Изд.-во «Альфа-Пресс», 2009. – 240 с.

9. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – М.: Техносфера, 2005. – 400 с.

10. Шапорев, С.Д. Дискретная математика: курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапорев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.: ил.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ГОЛУБЕВА Оксана Валерьевна

ЕХИЛЕВСКИЙ Степан Григорьевич

ГУРЬЕВА Нина Алексеевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс для студентов специальностей
1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»,
1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети»

Редактор *Т. В. Булах*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 29.06.2011. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 10,91. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 150 экз. Заказ 1331.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009 ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.