Перечень типовых задач и формул
«Электростатика. Постоянный ток», «Электромагнетизм»

Электростатика

1. Закон Кулона. Поле точечных зарядов.

Сила взаимодействия точечных зарядов – сила Кулона $F = k\dfrac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$,

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}$, в вакууме k=9·10^9 Н·м^2/Кл^2

Напряженность поля системы точечных зарядов – принцип суперпозиции
$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots$ **(сумма векторная по правилу треугольника или параллелограмма)**
$E_i = k\dfrac{|q_i|}{r_i^2}$, **где** r_i - расстояние от заряда до точки поля, где рассчитывается напряженность

Потенциал поля системы точечных зарядов – принцип суперпозиции
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$ **(сумма с учетом знака потенциала)**
$\varphi_i = k\dfrac{q_i}{r_i}$, **где** r_i - расстояние от заряда до точки поля, где рассчитывается потенциал, заряд подставляется со знаком + или -

2. Расчет электростатического поля с применением т. Остроградского-Гаусса.

$\oint\limits_S E_n dS = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon\varepsilon_0}$, где q_{in} - заряд внутри поверхности, по которой производится интегрирование (гауссовой поверхности)

3. Расчет поля распределенных зарядов.

Разбить заряженное тело на точечные заряды – применить интегральный принцип суперпозиции
$\vec{E} = \int d\vec{E}$ **(сумма векторная), где** $dE = k\dfrac{|dq|}{r^2}$,

$dq = \tau dl$

$dq = \sigma dS$ - элементарный заряд через линейную, поверхностную или

$dq = \rho dV$

объемную плотность заряда

r - расстояние от заряда dq до точки поля, где рассчитывается напряженность

Потенциал поля системы точечных зарядов – принцип суперпозиции

$$\varphi = \int d\varphi = \int k\frac{dq}{r}$$

где r - расстояние от заряда dq до точки поля, где рассчитывается потенциал

4. Движение зарядов в поле.

2 закон Ньютона – $F = ma$, F – равнодействующая сила

Сила, действующая на заряд q **со стороны электрического поля -** $F_e = qE$

Законы равноускоренного движения $\vartheta = \vartheta_0 \pm at$, $s_y = \vartheta_0 t \pm \dfrac{at^2}{2}$ - скорость и перемещение вдоль оси, по которой направлено ускорение

5. Работа электростатических сил. Энергия.

Потенциальная энергия системы точечных зарядов - алгебраическая сумма энергий взаимодействия каждой из взаимодействующих пар зарядов, т.е.

$$W = П = П_{12} + П_{13} + П_{23},$$

где потенциальные энергии взаимодействия пары зарядов $П_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r_{12}}$; r_{12} - расстояние между зарядами 1 и 2

Потенциальная энергия точечного заряда q в точке внешнего поля с потенциалом φ - $W = П = q\varphi$

Работа поля (электростатических сил) – $A = W_0 - W$

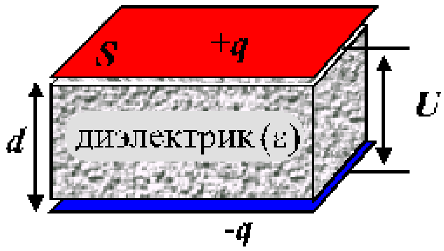
Работа внешних сил - $A_B = -A = W - W_0$

W_0 **- начальная энергия системы,** W **- конечная энергия системы**

6. Электрическая емкость. Соединения конденсаторов. Энергия конденсатора.

Емкость конденсатора - $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi} = \dfrac{q}{U}$

Для плоского конденсатора - $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$

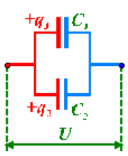


S – площадь обкладки;
d, *U* – расстояние и напряжение между обкладками.

емкость проводника - $C = \dfrac{q}{\varphi}$

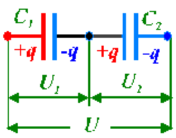
Для заряженного шара - $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, **R- радиус шара**

Соединения конденсаторов



Параллельное соединение

$$q = q_1 + q_2 + \ldots$$
$$U = U_1 = U_2$$
$$C = C_1 + C_2 + \ldots$$



Последовательное соединение

$$q = q_1 = q_2$$
$$U = U_1 + U_2$$
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$$

Энергия конденсатора $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}$

7. Энергия электростатического поля. $W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V$

Объемная плотность энергии поля - $\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$

8. Поле в диэлектрике.

Связь электрического смещения D с напряженностью поля в диэлектрике E

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E$$

Напряженность поля в диэлектрике $E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon d}$,

Напряженность поля в вакууме (создаваемая свободными зарядами) $E_0 = \frac{U}{d}$

Связь электрического смещения D с поляризованностью

$$D = \varepsilon_0 E + P,$$

где $\vec{D}$ и $\vec{E}$ – соответственно векторы электрического смещения и напряженности поля плоского конденсатора; $\vec{P}$ – вектор поляризованности диэлектрика.

Поверхностная плотность **связанных зарядов** σ' равна поляризованности P:

$$\sigma' = P.$$

Связь между поляризованностью диэлектрика P и напряженностью электростатического поля E в диэлектрике $P = \chi\varepsilon_0 E$

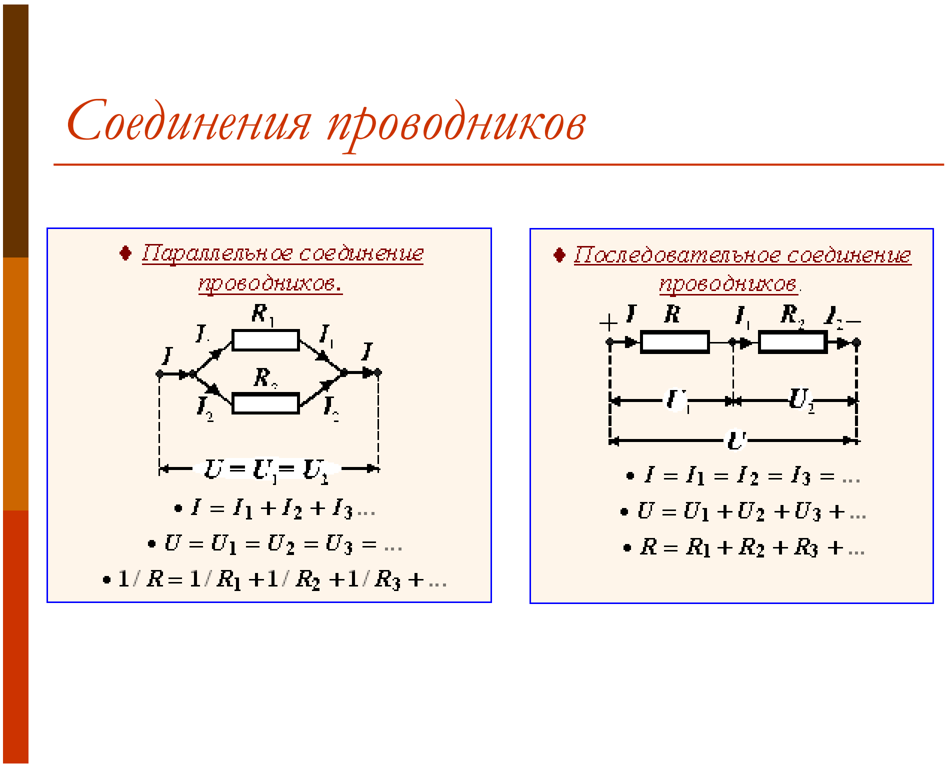
где χ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика:

$$\chi = \varepsilon - 1$$

(ε – диэлектрическая проницаемость).

Постоянный ток

1. Соединения резисторов.



2. Расчет электрических цепей с применением законов Ома, Джоуля-Ленца, Фарадея.

Закон Ома для участка цепи **не** содержащего ЭДС $U = IR$

Закон Ома для участка цепи содержащего ЭДС $U = IR = \Delta\varphi \pm \varepsilon$ знак + если при движении по току ЭДС переходим с – клеммы на +клемму.

Закон Ома для полной цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$, ε - ЭДС источника, R-сопротивление внешней цепи, r – внутреннее сопротивление источника

Закон Джоуля-Ленца - тепловая энергия выделяющаяся на сопротивлении равна $Q = I^2Rt = IURt = \dfrac{U^2}{R}t$ при постоянном токе

$Q = \int I^2Rdt = \int IURdt = \int \dfrac{U^2}{R}dt$ при токе изменяющем со временем

Мощность тока - $P = \dfrac{Q}{t} = I^2R = IU = \dfrac{U^2}{R}$

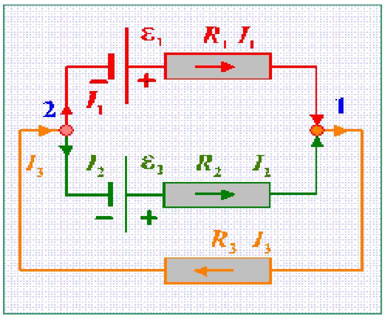
Сила тока - $I = \dfrac{dq}{dt}$

Заряд $q = \int I dt$

Сопротивление проводника $R = \rho \dfrac{l}{S}$, ρ - удельное сопротивление

3. Расчет электрических цепей с применением правил Кирхгофа.

◆ ***Определения:***



Узел: точка где сходятся три и более токов.

Контур: любой замкнутый участок цепи.

Для узлов: входящие токи (+), выходящие (–).

Для контуров: – токи, текущие по часовой стрелке (+), против (–).

Для ЭДС: ЭДС, дающие токи по часовой стрелке (+), против - (–).

◆ ***Правила Кирхгофа*** позволяют составлять системы уравнений для расчета неизвестных параметров цепи (I, R, ε).

Первое правило (для узлов): Алгебраическая сумма токов в узле равно нулю

$$\boxed{\sum_k I_k = 0}.$$

Второе правило (для контуров): В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений токов и сопротивлений равна сумме ЭДС:

$$\boxed{\sum_k I_k \cdot R_k = \sum_i \varepsilon_i}.$$

◆ ***Пример (см. рис.)***

$$\begin{cases} \text{Для узла } 1: I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ \text{Для контура } R_1, R_3: \; I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1 \\ \text{Для контура } R_1, R_2: \; I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases}$$

Остальные уравнения являются линейно зависимыми (узел 2 и контур R_2, R_3.)

Законы Кирхгофа

Магнитостатика

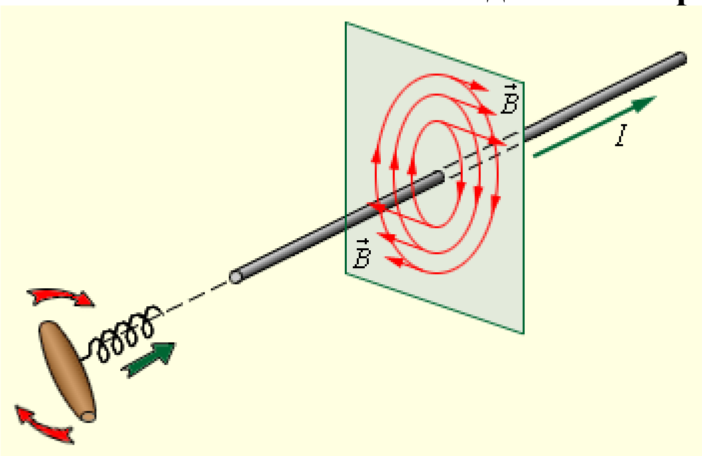
1. **Определение индукции и напряженности магнитного поля, создаваемого проводником с током произвольной формы, в любой точке пространства.**

Принцип суперпозиции $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$

Магнитное поле в центре кругового тока $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

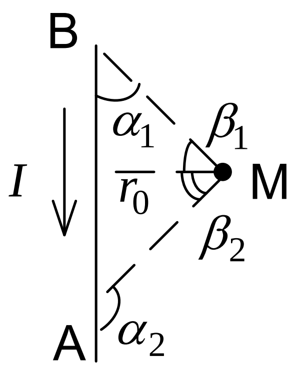
Магнитное поле катушки с током (соленоида) - $B = \mu_0 I n$
где число витков на единицу длины $n = \dfrac{N}{\ell}$

Магнитное поле бесконечно длинного провода с током



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Магнитное поле прямого провода с током конечной длины



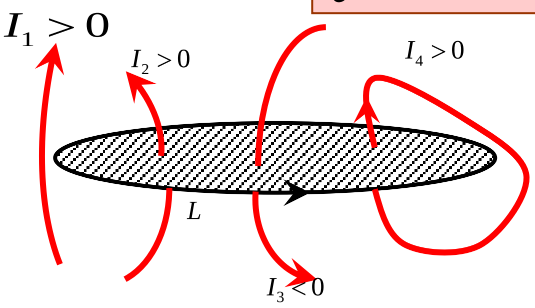
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

Связь магнитно индукции B и напряженности магнитного поля H

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

2. Расчет индукции и напряженности магнитного поля с использованием теоремы о циркуляции.

теорема о циркуляции $\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_k$



3. Расчет магнитного момента контуров с током в магнитном поле. Расчет механического момента, действующего на контур с током в однородном магнитном поле.

Магнитный момент $p = IS$

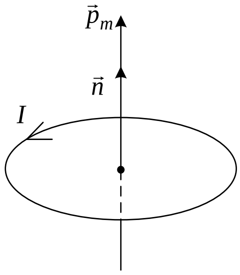
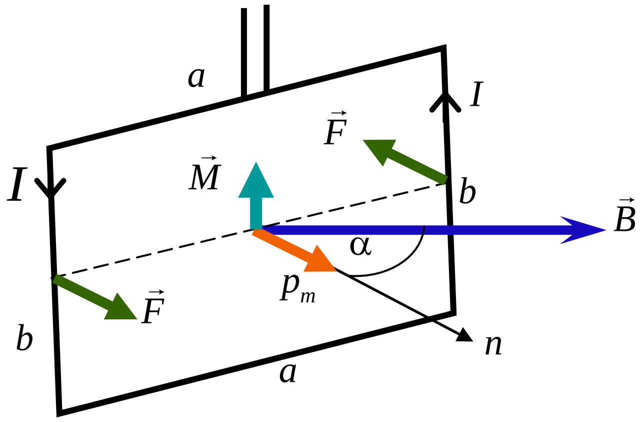


Рис.

Механический вращательный момент на контур с током в магнитном поле

$$M = B \cdot p_m \sin\alpha = IBS \sin\alpha$$

α **- угол между магнитным полем и нормалью к контуру**

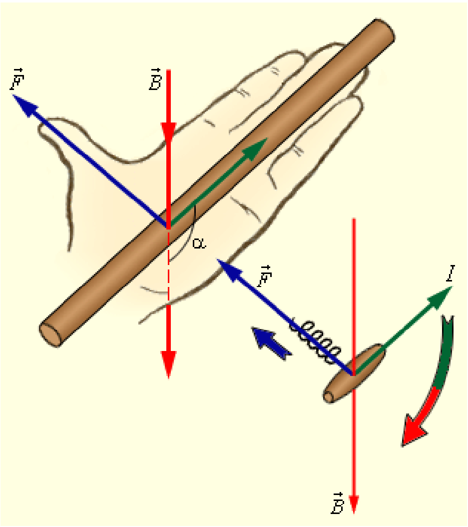


4. Магнитное взаимодействие проводников с током. Закон Ампера.

$$F = BIl\sin\alpha$$

α **- угол между магнитным полем и током**

направление по правилу <u>левой руки</u> четыре пальца левой руки направить по току, вектор магнитной индукции должен входить в ладонь, тогда отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы Ампера.



5. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

$$F_Л = q\upsilon B\sin\alpha$$

α **- угол между магнитным полем и скоростью движения <u>положительно</u> заряженной частицы**

направление по правилу <u>левой руки</u> четыре пальца левой руки направить по скорости положительного заряда, вектор магнитной индукции должен входить в ладонь, тогда отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы Лоренца.

6. Магнитный поток. Энергия контура с током в магнитном поле.

$$\Phi = NBS\cos\alpha$$

α **- угол между магнитным полем и нормалью к рамке, N – число витков в рамке, S- площадь рамки**

$$\Phi = \int B_n dS$$

Энергия контура с током в магнитном поле $W = I\Phi$

Работа амперовых сил $A = \Delta W = I(\Phi_1 - \Phi_2)$

Электромагнитная индукция

1. Определение ЭДС индукции,

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}}$$

закон электромагнитной индукции, где ε_i - ЭДС индукции $\frac{d\Phi}{dt}$ - скорость изменения магнитного потока, $d\Phi$ – изменение магнитного потока, dt - промежуток времени, за которое это изменение произошло.

изменение магнитного потока $\Delta\Phi$:

1.Если в задаче изменяется магнитная индукция поля $\vec{B}$, в котором находится контур, то изменение магнитного потока будет равно: $\Delta\Phi = (B_2 - B_1)\cdot S\cos\alpha$.

2.Если в задаче изменяется площадь контура $\vec{S}$, то изменение магнитного потока будет равно: $\Delta\Phi = B\cdot(S_2 - S_1)\cos\alpha$.

3.Если в задаче изменяется положение контура в магнитном поле $\cos\alpha$, то изменение магнитного потока будет равно: $\Delta\Phi = B\cdot S(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$.

4.Если изменяется магнитное поле со временем, или рамка вращается в магнитном поле, то ЭДС индукции рассчитывается как производная от ***Ф.***

Дополнительные формулы

Закон Ома: $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где $\varepsilon = \pm\varepsilon_{ист} \pm \varepsilon_{инд} \pm \varepsilon_{Si}$.

Заряд: $q = \int I \cdot dt$.

Количество теплоты: $Q = \int I^2 R \cdot dt$.

2. **Закон самоиндукции. Расчет индуктивности соленоида и параметров магнитного поля в соленоиде, объемной плотности энергии магнитного поля.**

$$\Phi = L \cdot I$$

- магнитный поток через контур, где L – индуктивность контура, I - сила тока в контуре.

$$L = \mu\mu_0 N^2 S / l$$

- индуктивность соленоида, где N - число витков в соленоиде, l - длина соленоида, S - площадь витка соленоида, μ - магнитная проницаемость, μ_0 - магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $Гн/м.$.

$$\varepsilon_{Si} = -L\frac{dI}{dt}$$

- ЭДС самоиндукции, где $\frac{dI}{dt}$ - скорость изменения тока в проводнике, L – индуктивность проводника.

$$W_{тока} = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

- энергия магнитного поля проводника с током, где L – индуктивность проводника, I - сила тока в проводнике.

$$\omega = \frac{W_{МП}}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$$

- объемная плотность энергии магнитного поля, где

$$p = \omega = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$$

- магнитное давление.

3. **Определение зависимости тока и энергии от времени в цепях с индуктивностью при их коммутации.**

изменения тока при *размыкании* цепи $\boxed{I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

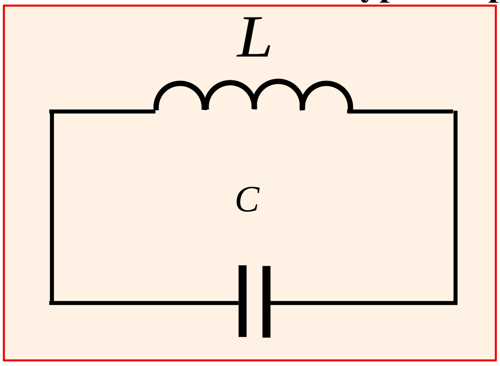
изменения тока при *замыкании* цепи $I = I_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

время релаксации $\tau = \frac{L}{R}$

Электромагнитные колебания и волны

1. Электромагнитные колебания

Колебательный контур - период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$



2. Электромагнитные волны

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

- фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде, где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ - скорость распространения света в вакууме, ε_0 и μ_0 - соответственно электрическая и магнитная постоянные, ε и μ - соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды .

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E = \sqrt{\mu\mu_0} \cdot H$$ -

связь между мгновенными значениями напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны, где E и H - напряженности соответственно электрического и магнитного поле.

- длина электромагнитной волны в вакууме (воздухе) определяется формулами: $\lambda = cT$ и $\lambda = \frac{c}{\nu}$, где ν - частота колебаний, T - период колебаний.
- объемная плотность электромагнитной волны: $\omega_{эл-м} = 2\omega_{эл} = 2 \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2$, где ε_0 - электрическая постоянная ($8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м), ε - диэлектрическая проницаемость среды (ε вакуума=1), E_m - амплитуда напряженности электрического поля.

Примеры решения задач
«Электростатика. Постоянный ток», «Электромагнетизм»

Электростатика

1. Закон Кулона. Поле точечных зарядов.

Два точечных заряда $Q_1 = 1$ мкКл и $Q_2 = -1$ мкКл расположены на расстоянии $l = 0{,}1$ м. Определить силу F, действующую на точечный заряд $Q_0 = 0{,}1$ мкКл, удаленный на расстояние $x_1 = 0{,}06$ м от первого и $x_2 = 0{,}08$ м от второго заряда.

Дано: $Q_1 = 1$ мкКл; $Q_2 = -1$ мкКл; $l = 0{,}1$ м; $Q_0 = 0{,}1$ мкКл; $x_1 = 0{,}06$ м; $x_2 = 0{,}08$ м.

Найти: F.

Решение. На заряд Q_0 будет действовать сила $\vec{F}$, определяемая векторной суммой

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

где $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы, действующие со стороны зарядов Q_1 и Q_2.

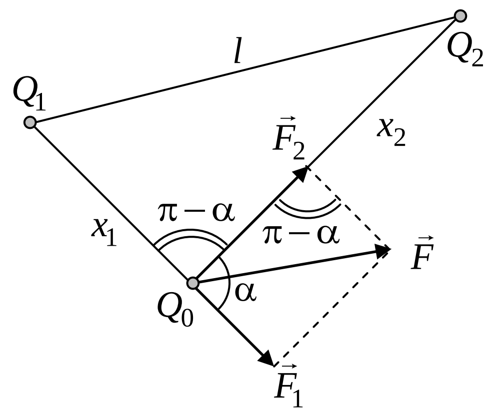


Рис.

Направление сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ показано на рис. Абсолютная величина сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяется выражениями

$$F_1 = \frac{Q_0 Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2}; \quad F_2 = \frac{Q_0 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x_2^2}.$$

Абсолютная величина силы $\vec{F}$ может быть найдена по теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Из треугольника со сторонами l, x_1, x_2 находим

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos(\pi-\alpha) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\alpha.$$

Оценим угол α:

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1x_2} = \frac{0{,}01 - 0{,}0036 - 0{,}0064}{2\cdot 0{,}06\cdot 0{,}08} = 0.$$

Следовательно, $\alpha = {}^{\pi}\!/_{2}$ и

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{\left(\frac{Q_0Q_1}{4\pi\varepsilon_0x_1^2}\right)^2+\left(\frac{Q_0Q_2}{4\pi\varepsilon_0x_2^2}\right)^2}=\frac{Q_0\sqrt{Q_1^2x_2^4+Q_2^2x_1^4}}{4\pi\varepsilon_0x_1^2x_2^2}=0,286\text{ Н}.$$

Четыре точечных одинаковых заряда $Q = 10$ нКл размещены по вершинам квадрата со стороной $b = 0,1$ м (рис. *a*). Заряды в вершинах 1 и 2 – положительные, а в вершинах 3 и 4 – отрицательные. Определить: 1) напряженность электрического поля в центре квадрата; 2) потенциал в той же точке поля.

Дано: $Q = 10$ нКл; $b = 0,1$ м.

Найти: E; φ.

Решение: 1. Напряженности электрического поля каждого из рассматриваемых зарядов в центре квадрата одинаковы и равны

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

где $r=b\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Направления векторов $\vec{E}_i$ (i = 1, 2, 3, 4) указаны на рис. Результирующий вектор $\vec{E}$ находим как векторную сумму этих векторов (в данном случае как диагональ квадрата со стороной $2E_i$) $E = 2E_i\sqrt{2}$.

Таким образом,

$$E=2\sqrt{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}=\frac{\sqrt{2}Q}{\pi\varepsilon_0b^2}.$$

Выполним вычисления:

$$E=\frac{\sqrt{2}\cdot 10\cdot 10^{-9}}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}}=51\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

2. Потенциалы полей зарядов $Q_1, \ldots, Q_4$ суммируются как скалярные величины:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_4}{r}.$$

Учитывая, что заряды одинаковы по модулю, но имеют разные знаки, находим потенциал поля в точке А:

$$\varphi = 0.$$

2. Расчет электростатического поля с применением т. Остроградского-Гаусса.

Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными заряженными плоскостями с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 0,4\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$ и $\sigma_2 = 0,1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$. Определить напряженность электрического поля, создаваемого этими заряженными плоскостями.

Дано: $\sigma_1 = 0,4\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}; \sigma_2 = 0,1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$.

Найти: E.

Решение. Согласно закону суперпозиции, поля, создаваемые каждой заряженной плоскостью в отдельности, накладываются друг на друга, причем каждая заряженная плоскость создает электрическое поле независимо от присутствия другой заряженной плоскости.

Напряженности однородных электрических полей, создаваемых первой и второй плоскостями, соответственно равны

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Плоскости делят все пространство на три области: I, II, III (рис. 6).

Как видно из рисунка, в областях I и III электрические силовые линии обоих полей направлены в одну сторону и, следовательно, напряженности полей $E^{(I)}$ и $E^{(III)}$ в областях I и III равны между собой и равны сумме напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E^{(I)} = E^{(III)} = E_1 + E_2$$

или

$$E^{(I)} = E^{(III)} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Во второй (II) области (между плоскостями) электрические силовые линии полей направлены в противоположные стороны, следовательно, напряженность поля $E^{(II)}$ равна разности напряженностей полей,

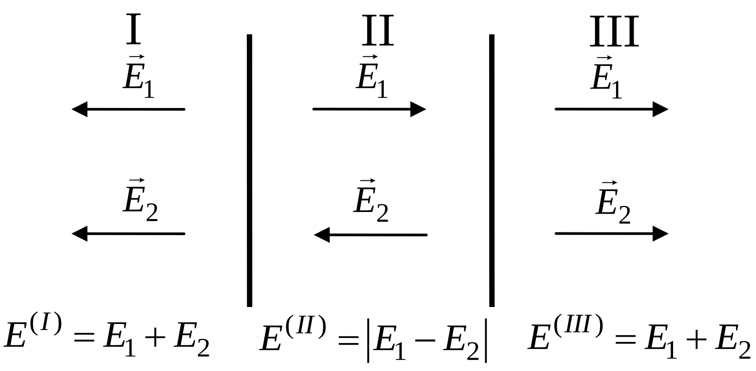


Рис.

создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E^{(II)} = \left|E_1 - E_2\right|$$

или

$$E^{(II)} = \frac{1}{2}\frac{\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|}{\varepsilon_0}.$$

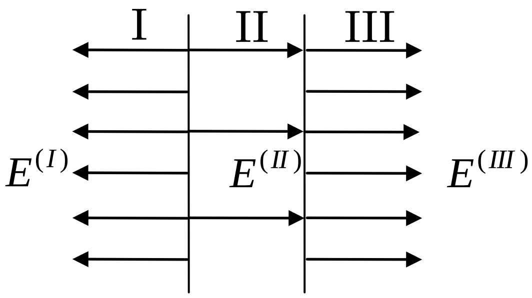


Рис.

Подставив данные и произведя вычисления, получим

$$E^{(I)} = E^{(III)} = 28,3\ ^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}};$$

$$E^{(II)} = 17\ ^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}}.$$

Картина распределения силовых линий суммарного поля представлена на рис.

Две концентрические проводящие среды радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0,5$ нКл. Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см и $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$.

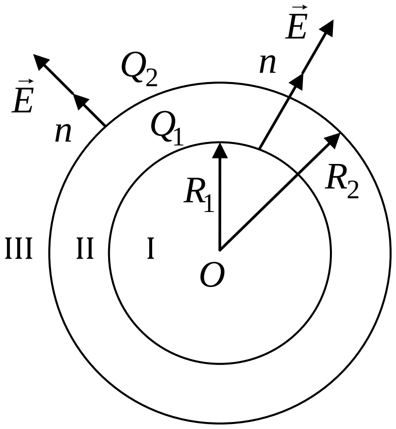


Рис.

Дано: $R_1 = 6$ см; $R_2 = 10$ см; $Q_1 = 1$ нКл; $Q_2 = -0,5$ нКл; $r_1 = 5$ см; $r_2 = 9$ см; $r_3 = 15$ см.

Найти: E_1; E_2; E_3; $E(r)$.

Решение. Точки, в которых требуется найти напряженность электрического поля, лежат в трех областях (рис.): область I $(r_1 < R_1)$, область II $(R_1 < r_2 < R_2)$, область III $(r_3 > R_2)$.

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем сферическую поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Гаусса. Так как внутри области I зарядов нет, то согласно указанной теореме получим равенство

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0, \tag{1}$$

где E_n – нормальная составляющая напряженности электрического поля.

Из соображений симметрии нормальная составляющая E_n должна быть равна самой напряженности и постоянна для всех точек сферы, т.е. $E_n = E_1 = \text{const}$. Поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Равенство (1) примет вид $E_1 \oint\limits_{S_1} dS = 0$.

Так как площадь сферы не равна нулю, то $E_1 = 0$, т.е. напряженность поля во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю.

2. В области II сферическую поверхность проведем радиусом r_2. Так как внутри этой поверхности находится заряд Q_1, то для нее, согласно теореме Гаусса, можно записать равенство

$$\oint\limits_{S_2} E_n dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Так как $E_n = E_2 = \text{const}$, то из условий симметрии следует

$$E_2 \oint\limits_{S_2} dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad E_2 S_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}, \quad \text{откуда} \quad E_2 = \frac{Q_1}{S_2 \varepsilon_0}.$$

Подставив сюда выражение площади сферы, получим

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

3. В области III сферическую поверхность проведем радиусом r_3. Эта поверхность охватывает симметричный заряд $Q_1 + Q_2$. Следовательно, для нее уравнение, записанное на основе теоремы Гаусса, будет иметь вид

$$\oint\limits_{S_2} E_n dS = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда, использовав положения, применяемые в первых двух случаях, найдем

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (3)$$

Выразим все величины в единицах СИ ($Q_1 = 10^{-9}$ Кл; $Q_2 = -0{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл; $r_2 = 0{,}09$ м; $r_3 = 0{,}15$ м; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) и произведем вычисления:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{(0{,}09)^2} \text{ В/м} = 1{,}11 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 1{,}11 \text{ кВ/м};$$

$$E_3 = 9\cdot10^9 \frac{(1-0{,}5)\cdot10^{-9}}{(0{,}15)^2} \text{ В/м} = 200 \text{ В/м}.$$

4. Построим график $E(r)$. В области I $(r < R_1)$ напряженность $E = 0$. В области II $(R_1 < r < R_2)$ напряженность $E_2(r)$ изменяется по закону $\frac{1}{r^2}$.

В точке $r = R_1$ напряженность

$$E_2(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 2500 \text{ В/м}.$$

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева)

$$E_2(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 900 \text{ В/м}.$$

В области III $(r_3 > R_2)$ $E_3(r)$ изменяется по закону $\frac{1}{r^2}$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа)

$$E_3(R_2) = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 450 \text{ В/м}.$$

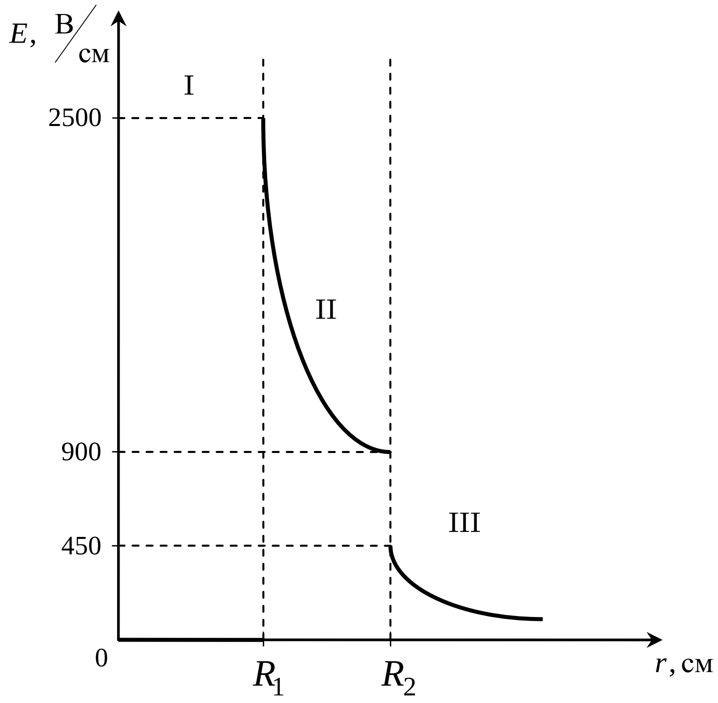


Рис.

Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ терпит разрыв. График зависимости $E(r)$ представлен на рис.

3. Расчет поля распределенных зарядов.

Стержень длиной $L = 8$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 400$ нКл/м. Для точки А, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии $b = 6$ см от этого конца (рис.) найти: 1) напряженность электрического поля.

Дано: $L = 8$ см; $\tau = 400$ нКл/м; $b = 6$ см.

Найти: E, φ.

Решение. 1. Выделим на стержне физически малый участок длиной dl (см. рис.).

Находящийся на нем заряд $dQ = \tau dl$ можно рассматривать как точечный, и тогда напряженность поля этого элемента определим по формуле

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{1}$$

Прежде чем интегрировать это выражение, необходимо две переменные величины в правой части, dl и r выразить через одну. Для этого воспользуемся тригонометрическими равенствами

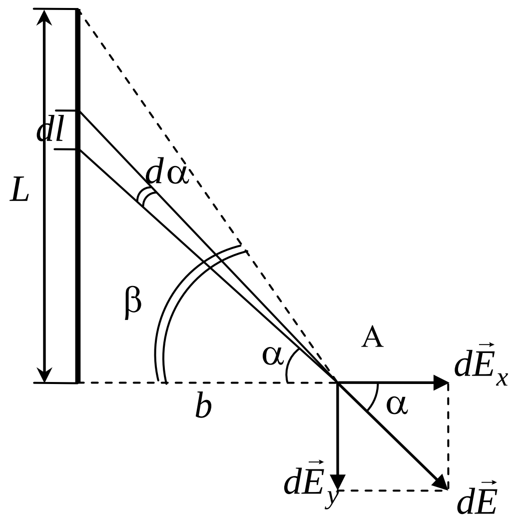


Рис.

$$r = \frac{b}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad l = btg\alpha.$$

Дифференцируя последнее, получим

$$dl = b\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha.$$

Подставляя выражения для r и dl в формулу (1), находим

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau b\cos^2\alpha d\alpha}{b^2\cos^2\alpha}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\frac{\vec{r}}{r}d\alpha.$$

Представим вектор $d\vec{E}$ как сумму двух составляющих: $d\vec{E}_x$ – перпендикулярной стержню и $d\vec{E}_y$ – параллельной ему. Из рис. 10.9 видно, что $d\vec{E}_x = \cos\alpha d\vec{E}$, а $d\vec{E}_y = \sin\alpha d\vec{E}$. Тогда, интегрируя эти выражения, получим

$$E_x = \int_0^\beta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\int_0^\beta \cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\sin\beta;$$

$$E_y = \int_0^\beta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\int_0^\beta \sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}(1-\cos\beta).$$

Из рис. следует, что

$$\sin\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2+b^2}} = 0{,}8; \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}} = 0{,}6.$$

Произведем вычисления:

$$E_x = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} \cdot 0{,}8 = 48\ \frac{кВ}{м};$$

$$E_y = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} \cdot (1 - 0{,}6) = 24\ \frac{кВ}{м}.$$

Напряженность электрического поля определим по формуле

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

После подстановки полученных значений и вычислений находим $E = 53{,}7\ кВ/м$. Направление вектора напряженности зададим углом γ (рис.), который найдем по формуле

$$tg\gamma = \frac{E_y}{E_x} = 0{,}5.$$

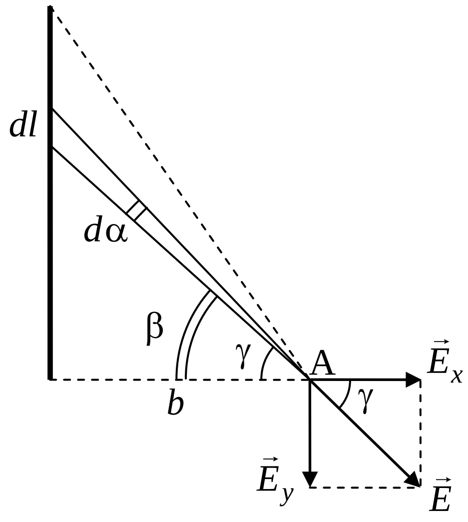


Рис.

Кольцо радиусом R равномерно заряжено зарядом Q. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на перпендикуляре к кольцу, проходящем через его центр, на расстоянии h от плоскости кольца.

Дано: R; Q; h.

Найти: E.

Решение. Так как заряд распределен по кольцу, то кольцо следует разбить на элементарные участки dl, которые несут на себе элементарный заряд (в силу равномерного распределения заряда) (рис.).

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R} dl. \qquad (1)$$

Тогда напряженность поля dE, создаваемого элементарным участком dl,

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

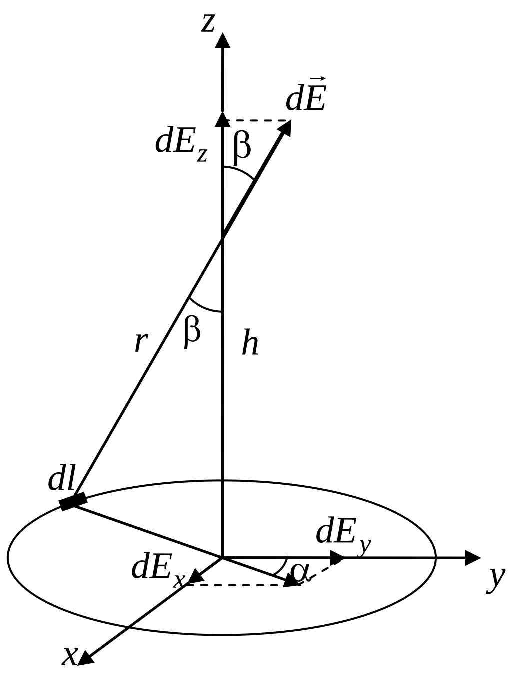


Рис.

Однако dE – это абсолютное значение вектора напряженности поля, создаваемого элементарным зарядом dQ. Поэтому определим проекции вектора $d\vec{E}$ на оси x, y, z и только после этого проинтегрируем соответствующие проекции элементарных напряженностей dE_x, dE_y, dE_z.

Из рисунка видно, что

$$dE_z = dE\cos\beta \quad \text{и} \quad r^2 = R^2 + h^2.$$

Учитывая (1), запишем

$$E_z = \int dE\cos\beta = \int \frac{Qdl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi R\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\cos\beta .$$

Так как $\cos\beta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\left(R^2+h^2\right)^{1/2}}$, а элемент дуги dl связан с поворотом на элементарный угол $d\alpha$ соотношением $dl = Rd\alpha$, окончательно получим

$$E_z = \int_0^{2\pi} \frac{QhRd\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\alpha\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}.$$

Учитывая, что $\sin\beta = \frac{R}{\sqrt{\left(R^2+h^2\right)}}$, найдем проекцию вектора E_x на ось x:

$$E_x = \int\limits_{\text{по кольцу}} dE\sin\beta\sin\alpha = \int\limits_{\text{по кольцу}} \frac{QdlR\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{QR\sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{QR}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha = \frac{QR}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\cos\alpha\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Аналогично можно показать, что проекция вектора напряженности на ось y также равна нулю:

$$E_y = 0.$$

Следовательно,

$$E_x = E_y = 0; \quad E_z = E = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом R, равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке O, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити составляет $1/3$ длины окружности и равна 15 см.

Дано: R; $\tau = 10$ нКл/м; $\frac{1}{3}l = 15$ см.

Найти: $\vec{E}$, φ.

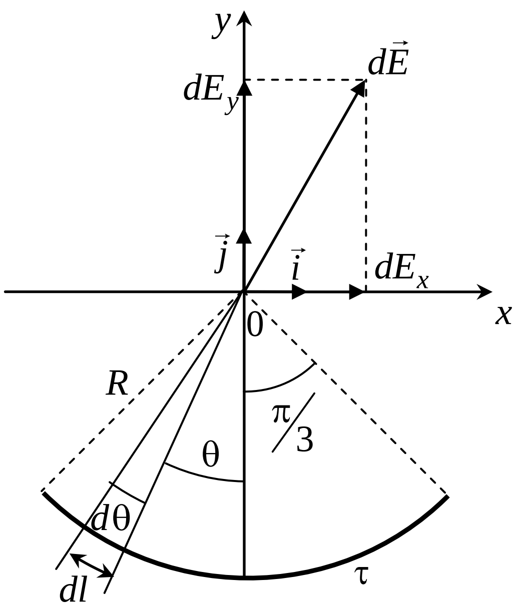


Рис.

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось y была расположена симметрично относительно концов дуги (рис.).

На нити выделим элемент длины dl. Заряд $dQ = \tau dl$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

Определим напряженность электрического поля в точке O. Для этого найдем сначала напряженность $d\vec{E}$ поля, создаваемого зарядом dQ:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке, напряженность которой вычисляется. Выразим вектор $d\vec{E}$ через проекции dE_x и dE_y на оси координат:

$$d\vec{E} = \vec{i}dE_x + \vec{j}dE_y,$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы направлений (орты).

Напряженность $\vec{E}$ найдем интегрированием:

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i}\int_l dE_x + \vec{j}\int_l dE_y .$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длиной l. В силу симметрии интеграл $\int_l dE_x$ равен нулю. Тогда

$$\vec{E} = \vec{j}\int_l dE_y , \qquad (1)$$

где

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta .$$

Так как $r = R = \mathrm{const}$ и $dl = Rd\theta$, то

$$dE_y = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta .$$

Подставим найденное выражение dE_y в (1) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси OY, пределы интегрирования возьмем от 0 до $\pi/3$, а результат удвоим

$$\vec{E} = \vec{j}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/3}\cos\theta d\theta = \vec{j}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\pi/3} .$$

Подставив указанные пределы и выразив R через длину дуги $(3l = 2\pi R)$, получим

$$\vec{E} = \vec{j}\frac{\tau}{2\varepsilon_0 l}\sqrt{3} .$$

Из этой формулы видно, что вектор $\vec{E}$ совпадает с положительным направлением оси OY. Подставив значения τ и l в последнюю формулу и сделав вычисления, найдем

$$E = 2{,}18 \text{ кВ/м} .$$

Определим потенциал электрического поля в точке O. Найдем сначала потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dQ в точке O:

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Заменим r на R и произведем интегрирование:

$$d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l dl = \frac{l\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как $l = {}^{2\pi R}\!/_{3}$, то

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$\varphi = 188 \text{ В}$$

4. Движение зарядов в поле.

Электрон без начальной скорости прошел разность потенциалов $U_0 = 10$ кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, по линии *AB*, параллельной пластинам (рис.). Расстояние d между пластинами равно 2 см. Длина l_1 пластин конденсатора в направлении полета электрона равна 20 см. Определить расстояние BC на экране, отстоящем от конденсатора на $l_2 = 1$ м.

Дано: $U_0 = 10$ кВ; $U_1 = 100$ В; $d = 2$ см; $l_1 = 20$ см; $l_2 = 1$ м.

Найти: *BC*.

Решение. Движение электрона внутри конденсатора складывается из двух движений:

1) по инерции вдоль линии *AB* с постоянной скоростью υ_0, приобретенной под действием разности потенциалов U_0, которую электрон прошел до конденсатора;

2) равномерно ускоренного движения в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы поля конденсатора. По выходе из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью υ, которую он имел в точке M в момент вылета из конденсатора.

Из рисунка видно, что искомое расстояние $|BC| = h_1 + h_2$, где h_1 – расстояние, на которое смещается электрон в вертикальном направлении во время движения в конденсаторе; h_2 – расстояние между точкой D на экране, в которую электрон попал бы, двигаясь по выходе из конденсатора по направлению начальной скорости υ_0, и точкой C, в которую электрон попадает в действительности.

Выразим отдельно h_1 и h_2.

Пользуясь формулой длины пути для равноускоренного движения, найдем

$$h_1 = \frac{at^2}{2}, \qquad (1)$$

где a – ускорение, полученное электроном под действием поля конденсатора; t – время полета электрона внутри конденсатора.

По второму закону Ньютона $a = F/m$, где F – сила, с которой поле действует на электрон; m – его масса. В свою очередь,

$$F = eE = \frac{eU_1}{d},$$

где e – заряд электрона; U_1 – разность потенциалов между пластинами конденсатора; d – расстояние между ними.

Время полета электрона внутри конденсатора найдем из формулы пути равномерного движения

$$l_1 = \upsilon_0 t, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{l_1}{\upsilon_0},$$

где l_1 – длина конденсатора.

Выражение скорости υ_0 найдем из условия равенства работы, совершаемой полем при перемещении электрона, и приобретенной им кинетической энергии:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = eU_0.$$

Отсюда

$$\upsilon_0^2 = \frac{2eU_0}{m}. \qquad (2)$$

Подставляя в формулу (1) последовательно значения a, F, t и υ_0^2 из соответствующих выражений, получим

$$h_1 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0}.$$

Длину отрезка h_2 найдем из подобия треугольников *MDC* и векторного

$$h_2 = \frac{\upsilon_1 l_2}{\upsilon}, \qquad (3)$$

где υ_1 – скорость электрона в вертикальном направлении в точке M; l_2 – расстояние от конденсатора до экрана.

Скорость υ_1 найдем по формуле $\upsilon_1 = at$, которая с учетом выражений для a, F и t примет вид

$$\upsilon_1 = \frac{eU_1 l_1}{dm\upsilon_0}.$$

Подставив выражение υ_1 в формулу (3), получим

$$h_2 = \frac{eU_1 l_1 l_2}{dm\upsilon_0^2}$$

или, заменив υ_0^2 по формуле (2), найдем

$$h_2 = \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0}.$$

Окончательно для искомого расстояния $|BC|$ будем иметь

$$|BC| = h_1 + h_2 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0} + \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0} = \frac{U_1 l_1}{2dU_0}\left(\frac{l_1}{2} - l_2\right) = 5{,}5 \text{ см}.$$

5. Работа электростатических сил. Потенциал электростатического поля. Энергия.

Три точечных заряда $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл и $Q_3 = -4$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной длиной $a = 10$ см. Определите потенциальную энергию этой системы.

Дано: $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл, $Q_3 = -4$ нКл, $a = 10$ см.

Найти: Π.

Решение. Потенциальная энергия системы зарядов (рис.) равна алгебраической сумме энергий взаимодействия каждой из взаимодействующих пар зарядов, т.е.

$$\Pi = \Pi_{12} + \Pi_{13} + \Pi_{23}, \qquad (1)$$

где соответственно потенциальные энергии одного из зарядов, находящегося в поле другого заряда на расстоянии a от него, равны

$$\Pi_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{a}; \quad \Pi_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{a}; \quad \Pi_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{a}. \qquad (2)$$

Подставив формулы (2) в выражение (1), найдем искомую потенциальную энергию системы зарядов

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3\right)}{a} = -1{,}26 \text{ мкДж}$$

Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь под действием электростатического поля вдоль линии напряженности от нити с расстояния $r_1 = 2$ см до $r_2 = 10$ см, изменил свою скорость от $\upsilon_1 = 1 \text{ Мм/с}$ до $\upsilon_2 = 5 \text{ Мм/с}$. Определите линейную плотность τ заряда нити.

Дано: $r_1 = 2$ см; $r_2 = 10$ см; $\upsilon_1 = 1 \text{ Мм/с}$; $\upsilon_2 = 5 \text{ Мм/с}$.

Найти: τ.

Решение. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении протона из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2, идет на увеличение кинетической энергии протона

$$Q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \Delta T. \qquad (1)$$

В случае нити электростатическое поле обладает осевой симметрией, поэтому

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -Edr.$$

Тогда разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от нити,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_2}{r_1}. \qquad (2)$$

Учли, что напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной нитью,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что

$$\Delta T = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

получим

$$\frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

откуда искомая линейная плотность заряда нити

$$\tau = \frac{\pi\varepsilon_0 m\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{Q\ln\frac{r_2}{r_1}} = 4{,}33\ \text{мкКл}/\text{м}.$$

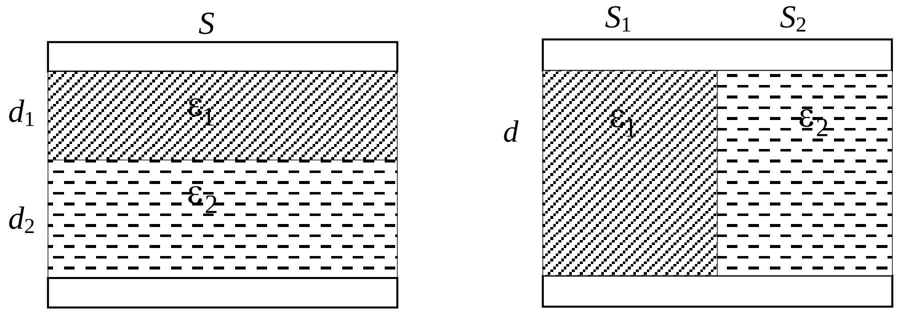
6. Электрическая емкость. Соединения конденсаторов. Энергия конденсатора.

Между пластинами плоского конденсатора находится два слоя диэлектриков: слюда с $\varepsilon_1 = 7$ толщиной $d_1 = 0{,}3$ мм и эбонит с $\varepsilon_2 = 3$ толщиной $d_2 = 0{,}7$ мм (рис. *а*). Площадь пластин равна $S = 20$ см^2. Найти: 1) емкость конденсатора; 2) емкость конденсатора, если между теми же пластинами помещены те же диэлектрики, поровну заполняющие объем конденсатора (рис. *б*).

Дано: $\varepsilon_1 = 7$; $d_1 = 0{,}3$ мм; $\varepsilon_2 = 3$; $d_2 = 0{,}7$ мм.

Найти: C.

Решение.



а) б)

Рис.

1. Легко видеть, что в сущности у нас последовательно соединены два конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d_2},$$

соответственно, искомая емкость

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{(8{,}85 \cdot 10^{-12})(20 \cdot 10^{-4})}{\frac{0{,}3 \cdot 10^{-3}}{7} + \frac{0{,}7 \cdot 10^{-3}}{3}} = 64{,}1 \cdot 10^{-12}\ \Phi = 64{,}1\ \text{п}\Phi.$$

2. Здесь мы имеем дело с параллельно соединенными конденсаторами, площадь пластин которых уменьшена вдвое: $S_1 = S_2 = S/2$, а расстояние между пластинами одинаково и равно $d = d_1 + d_2$. Поэтому искомая емкость

$$C = C + C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2(d_1 + d_2)} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2(d_1 + d_2)} = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(d_1 + d_2)} =$$

$$= \frac{(8{,}85 \cdot 10^{-12})(20 \cdot 10^{-4})(7+3)}{2(0{,}3 \cdot 10^{-3} + 0{,}7 \cdot 10^{-3})} = 88{,}5 \cdot 10^{-12}\ \Phi = 88{,}5\ \text{п}\Phi.$$

В каждое ребро куба, изготовленного из проволоки (рис.), включено по одному конденсатору емкостью C каждый. Определите емкость этой батареи конденсаторов, если она включается в цепь проводниками, подсоединенными к противоположным концам (A и B) диагонали куба.

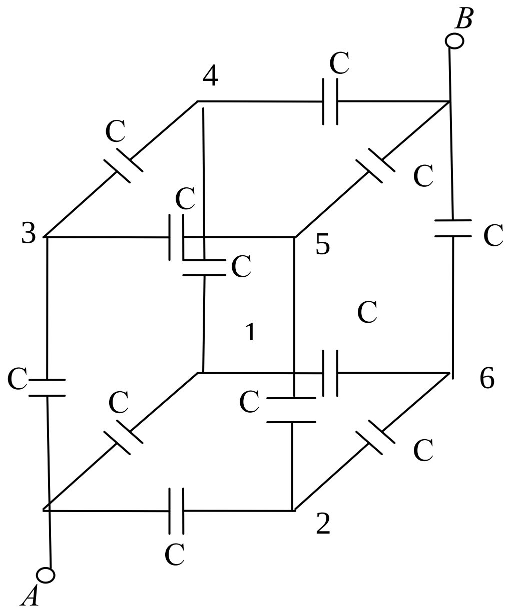


Рис.

Решение. Если батарея конденсаторов заряжена, то точки 1, 2 и 3 имеют одинаковый потенциал и их можно соединить между собой параллельно. Точки 4, 5 и 6 также можно соединить аналогично.

Поэтому можно перейти к эквивалентной схеме, изображенной на рис. Эта схема – три последовательные ветви, каждая из которых содержит соответственно 3, 6 и 3 параллельно включенных конденсатора одинаковой емкости. Емкость отдельных ветвей равна $3C$, $6C$ и $3C$. Емкость последовательно соединенных ветвей

$$\frac{1}{C_{оьщ}} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C} = \frac{5}{6C}.$$

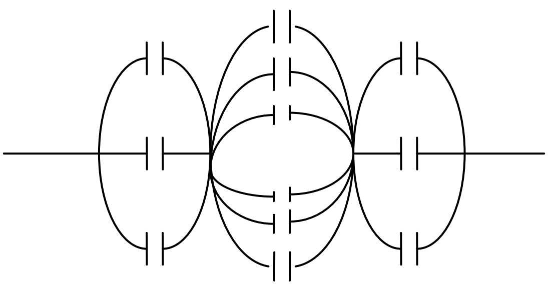


Рис.

Откуда искомая емкость батареи конденсаторов

$$C_{общ} = 1{,}2C.$$

Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $S = 10^{-2}$ м^2 и расстоянием между ними $d_1 = 10^{-3}$ м заряжен от батареи до разности потенциалов $U = 100$ В. Затем пластины раздвигают до расстояния $d_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м. Найти энергию конденсатора до W_1 и после W_{2a} и $W_{2б}$ раздвижения пластин, если батарея перед раздвижением а) не отключается; б) отключается.

Дано: $S = 10^{-2}$ м^2; $d_1 = 10^{-3}$ м; $U = 100$ В; $d_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: W_1; W_{2a}; $W_{2б}$.

Решение. Так как емкость конденсатора зависит от его геометрических размеров, то

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}.$$

Энергию конденсатора до раздвижения пластин можно определить по формуле

$$W_1 = C_1 \frac{U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_1} = 4,43 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

После раздвижения пластин емкость будет

$$C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

В случае *а*, когда во время раздвижения пластин напряжение на обкладках постоянно, т.е $U = \text{const}$, энергия определяется по формуле

$$W_{2a} = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_2} = 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

В случае *б* на пластинах будет неизменным первоначальный заряд $Q = C_1 U$. Поэтому для нахождения энергии конденсатора воспользуемся выражением

$$W_{2б} = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{S} \mathrm{d}_2 U^2}{2\mathrm{d}_1^2} = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

7. Энергия электростатического поля.

Металлический шар радиусом R = 3 см несет заряд Q = 20 нКл. Шар окружен слоем парафина толщиной d = 2 см. Определить энергию W электрического поля, заключенного в слое диэлектрика.

Дано: R = 3 см; Q = 20нКл; d = 2 см.

Найти: W.

Решение.

Так как поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, то энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно.

Однако объемная плотность энергии будет одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра сферы, так как поле заряженного шара обладает сферической симметрией.

Выразим энергию в элементарном сферическом слое диэлектрика объемом dV:

$$dW = \omega dV,$$

где ω – объемная плотность энергии (рис.).

Полная энергия выразится интегралом

$$W = \int \omega dV = 4\pi \int_R^{R+d} \omega r^2 dr, \qquad (1)$$

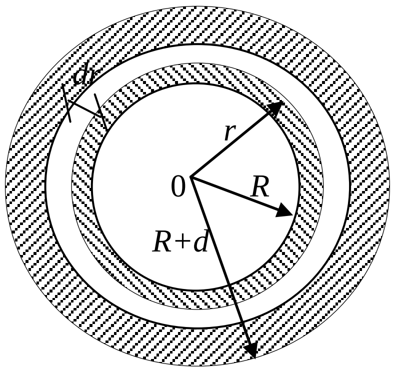


Рис.

где r – радиус элементарного сферического слоя; dr – его толщина.

Объемная плотность энергии определяется по формуле

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2},$$

где E – напряженность поля.

В нашем случае $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$ и, следовательно, $\omega = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^4}$.

Подставив это выражение плотности в формулу (1) и вынеся за знак интеграла постоянные величины, получим

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_R^{R+d} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) = \frac{Q^2 d}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R(R+d)} = 12 \text{ мкДж}.$$

8. Поле в диэлектрике.

Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,5 кВ, зажата парафиновая пластинка ($\varepsilon = 2$) толщиной 5 мм. Определите поверхностную плотность связанных зарядов на парафине.

Дано: U = 1,5 кВ; $\varepsilon = 2$; d = 5 мм.

Найти: σ'.

Решение. Векторы $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{P}$ связаны соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где $\vec{D}$ и $\vec{E}$ – соответственно векторы электрического смещения и напряженности поля плоского конденсатора; $\vec{P}$ – вектор поляризованности диэлектрика.

Так как векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ нормальны к поверхности диэлектрика, то

$$D_n = D \quad \text{и} \quad E_n = E.$$

Тогда можем записать $D = \varepsilon_0 E + P$,

где $p = \sigma'$, т.е. равна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика (учли, что $p_n = p$).

Тогда $\sigma' = D - \varepsilon_0 E$.

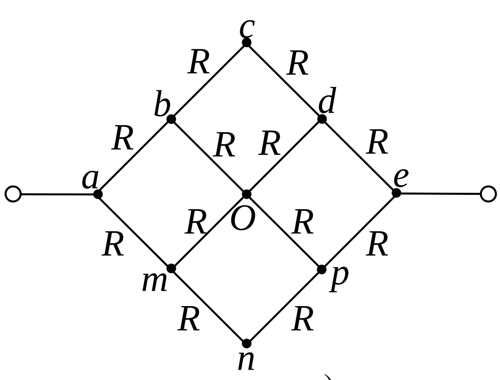
Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ и $E = \dfrac{U}{d}$, где d – расстояние между обкладками конденсатора, найдем

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = 2{,}65 \text{ мкКл/м}^2.$$

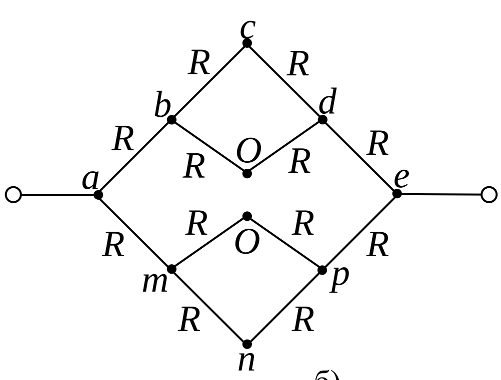
Постоянный ток

1. Соединения резисторов.

На рис. *а* приводится схема, общее сопротивление которой надо



а)



б)

Рис.

определить.

Решение. Для решения данной задачи проводники, соединенные в узле O, удобно развести так, как показано на рис. *б*. Тогда сразу становится ясно, что здесь мы имеем две параллельные ветви $abcde$ и $amnpe$. Ветвь $abcde$ состоит из трех последовательно соединенных участков ab, bcd и de. Общее сопротивление участка $bcdob$, состоящего из двух параллельных сопротивлений по $2R$ каждое, равно $2R/2 = R$. Тогда общее сопротивление ветви $abcde$ будет равно $R + R + R = 3R$. Ветвь $amnpe$ совершенно такая же, как и $abcde$, поэтому ее общее сопротивление, очевидно, тоже равно $3R$. Поскольку эти ветви параллельны и имеют одинаковые сопротивления $3R$, то общее сопротивление всей этой цепи

$$R_{общ} = \frac{3R}{2} = 1{,}5R.$$

Определите общее сопротивление между точками A и B цепи проводников в виде шестиугольника (рис.). Сопротивление каждой проволоки $r = 1$ Ом.

Дано: $r = 1$ Ом.

Найти: R.

Решение. В силу симметрии токи, текущие по сопротивлениям 8, 9, 11 и 12 одинаковы. Поэтому ток через узел O равен нулю. Тогда схема, представленная на рис., является эквивалентной той, которая задана в виде шестиугольника (см. рис.).

Сопротивления 8 и 9 соединены между собой последовательно и параллельно с сопротивлением 2. Тогда

$$R_{8,9,2} = \frac{2}{3} r.$$

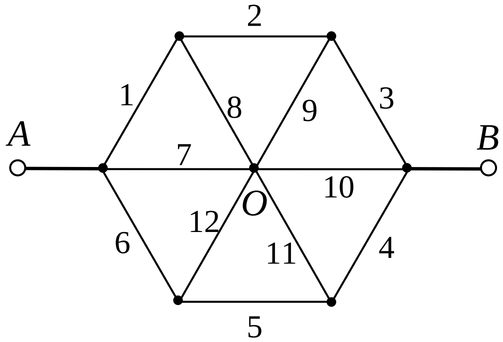


Рис.

Эквивалентное сопротивление $R_{8,9,2}$ соединено последовательно с сопротивлениями 1 и 3, поэтому

$$R_{1\to 3} = \frac{2}{3}r + r + r = \frac{8}{3}r\ .$$

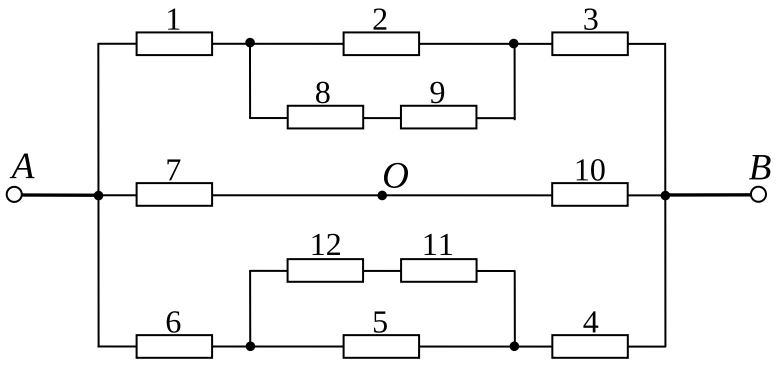


Рис.

Из схемы следует, что эквивалентное сопротивление $R_{4\to 6}$ равно $R_{1\to 3}$, т.е.

$$R_{4\to 6} = \frac{8}{3}r\ .$$

Сопротивления $R_{1\to 3}$, $R_{4\to 6}$, 7 и 10 соединены параллельно, поэтому

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{1\to 3}} + \frac{1}{R_{4\to 6}} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

или, подставив значения $R_{1\to 3}$ и $R_{4\to 6}$, получим

$$\frac{1}{R} = \frac{3}{8r} + \frac{3}{8r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{5}{4r},$$

откуда общее сопротивление

$$R = \frac{4}{5}r = 0{,}8\ \text{Ом}\ .$$

2. Расчет электрических цепей с применением законов Ома, Джоуля-Ленца, Фарадея.

Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 6$ А.

Определить количество теплоты Q_1, выделившееся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 – за вторую, а также найти отношение этих количеств теплоты Q_2 / Q_1.

Дано: $R = 20$ Ом; $\Delta t = 2$ с; $I_0 = 0$; $I_{\max} = 6$ А.

Найти: Q_1; Q_2; Q_2/Q_1.

Решение. Закон Джоуля – Ленца $Q = I^2Rt$ применим в случае постоянного тока $(I = \text{const})$. Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = I^2Rdt. \tag{1}$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$I = Kt, \tag{2}$$

где K – коэффициент пропорциональности, равный отношению приращения силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение:

$$K = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

С учетом равенства (2) формула (1) имеет вид

$$dQ = K^2Rt^2dt. \tag{3}$$

Для определения количества теплоты, выделившейся за конечный промежуток времени Δt, выражение (3) следует проинтегрировать в пределах от t_1 до t_2:

$$Q = K^2R\int_{t_1}^{t_2} t^2dt = \frac{1}{3}K^2R\left(t_2^3 - t_1^3\right).$$

При определении количества теплоты, выделившегося за первую секунду, пределы интегрирования $t_1 = 0$ с, $t_2 = 1$ с и, следовательно,

$$Q_1 = 60 \text{ Дж},$$

а за вторую секунду пределы интегрирования – $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с и тогда

$$Q_2 = 420 \text{ Дж}.$$

Следовательно,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 7,$$

т.е. за вторую секунду выделится теплоты в 7 раз больше, чем за первую.

2. Определить заряд Q, прошедший по проводу с сопротивлением $R = 3$ Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от $U_0 = 2$ В до $U = 4$ В в течение $t = 20$ с.

Дано: $R = 3$ Ом; $U_0 = 2$ В; $U = 4$ В; $t = 20$ с.

Найти: Q.

Решение. Так как сила тока в проводе изменяется, то воспользоваться для подсчета заряда формулой $Q = It$ нельзя. Поэтому возьмем дифференциал заряда $dQ = Idt$ и проинтегрируем:

$$Q = \int_0^t Idt. \qquad (1)$$

Выразив силу тока по закону Ома, получим

$$Q = \int_0^t \frac{U}{R} dt. \qquad (2)$$

Напряжение U в данном случае переменное. В силу равномерности нарастания оно может быть выражено формулой

$$U = U_0 + KT, \qquad (3)$$

где K – коэффициент пропорциональности.

Подставив это выражение U в формулу (2), найдем

$$Q = \int_0^t \left(\frac{U_0}{R} + \frac{Kt}{R} \right) dt = \frac{U_0}{R} \int_0^t dt + \frac{K}{R} \int_0^t tdt.$$

Проинтегрировав, получим

$$Q = \frac{U_0 t}{R} + \frac{Kt^2}{2R} = \frac{t}{2R}\left(2U_0 + Kt\right). \qquad (4)$$

Значение коэффициента пропорциональности K найдем из формулы (3), если заметим, что при $t = 20$ с $U = 4$ В.

$$K = \frac{U - U_0}{t} = \frac{4 - 2}{20} = 0{,}1 \ \text{В}/\text{с}.$$

Подставив значения величин в формулу (4), найдем

$$Q = 20 \text{ Кл}.$$

Два одинаковых источника с ЭДС $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = 1{,}2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом соединены как показано на рис.

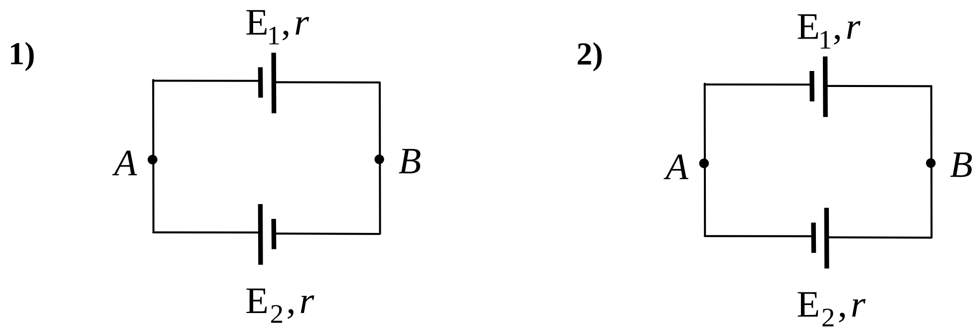


Рис.

Какова сила тока I и разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B в первом и во втором случаях?

Дано: $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = 1{,}2$ В; $r = 0{,}4$ Ом.

Найти: I; $\varphi_A - \varphi_B$.

Решение. 1. Запишем закон Ома $\left(I = \mathrm{E} \big/ (R + r) \right)$ для нашей замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2}{2r} = 3 \text{ А}.$$

Закон Ома $\left(\pm IR = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathrm{E} \right)$ для участка цепи $A\mathrm{E}_1B$

$$Ir = \varphi_A - \varphi_B + \mathrm{E}_1,$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = Ir - \mathrm{E}_1, \quad \varphi_A - \varphi_B = 0 \text{ В}.$$

2. В этом случае закон $\left(I = \mathrm{E} \big/ (R + r) \right)$ запишется как

$$I = \frac{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}{2r} = 0 \text{ А},$$

а для участка цепи $A\mathrm{E}_1B$ выражение $\left(\pm IR = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathrm{E} \right)$ будет иметь вид

$$Ir = \varphi_A - \varphi_B + \mathrm{E}_1,$$

откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = Ir - \mathrm{E}_1; \quad \varphi_A - \varphi_B = -1{,}2 \text{ В}.$$

Два одинаковых резистора сопротивлением $R_1 = 10$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 20$ Ом подключены к источнику ЭДС (рис.).

К участку AB подключен плоский конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ. Заряд Q на обкладках конденсатора равен 2 мкКл. Определите ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением.

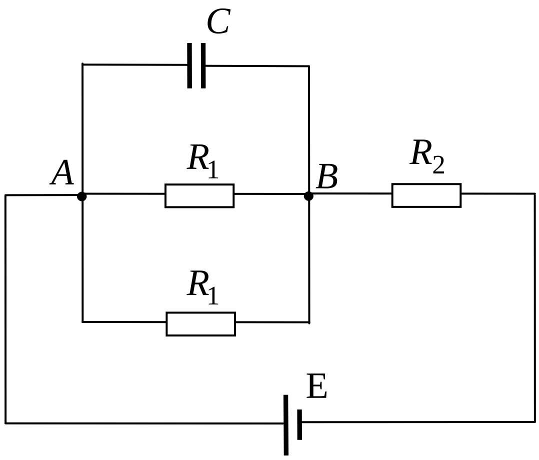


Рис.

Дано: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $C = 0{,}1$ мкФ; $Q = 2$ мкКл.

Найти: E.

Решение. ЭДС источника

$$\mathrm{E} = U_1 + U_2, \qquad (1)$$

где U_1 – напряжение между обкладками конденсатора (равно напряжению на параллельно включенных резисторах сопротивлением R_1); U_2 – падение напряжения на резисторе сопротивлением R_2.

Учитывая, что резисторы сопротивлением R_1 включены параллельно и их сопротивления равны

$$U_1 = I\frac{R_1}{2} = \frac{Q}{C}, \qquad (2)$$

где I – сила тока в общей цепи, имеем

$$I = \frac{2Q}{CR_1}. \qquad (3)$$

Падение напряжения

$$U_2 = IR_2 = \frac{2QR_2}{CR_1}. \qquad (4)$$

Здесь учли формулу (3). Подставив выражения (2) и (4) в формулу (1), найдем искомую ЭДС источника

$$\mathrm{E} = \frac{Q}{C} + \frac{2QR_2}{CR_1} = \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) = 100 \text{ В}.$$

Потенциометр с сопротивлением $R = 100$ Ом подключен к источнику тока, ЭДС Е которого равна 150 В и внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом (рис.).

Определить показание вольтметра с сопротивлением $R_B = 500$ Ом, соединенного проводником с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом с серединой обмотки потенциометра. Какова разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключенном вольтметре?

Дано: $R = 100$ Ом; $\mathrm{E} = 150$ В; $r = 50$ Ом; $R_B = 500$ Ом.

Найти: U; U_2.

Решение. Показания U_1 вольтметра, подключенного к точкам A и B (см. рис.), определяются по формуле

$$U_1 = I_1 R_1, \tag{1}$$

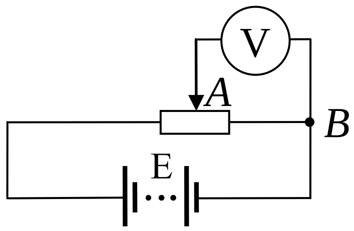


Рис.

где I_1 – сила тока в неразветвленной части цепи, R_1 – сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра.

Силу тока I_1 найдем по закону Ома для всей цепи:

$$I_1 = \frac{\mathrm{E}}{R_{BH} + r}, \tag{2}$$

где R_{BH} – сопротивление внешней цепи.

Внешнее сопротивление R_{BH} есть сумма двух сопротивлений

$$R_{BH} = \frac{R}{2} + R_1. \tag{3}$$

Сопротивление R_1 параллельного соединения может быть найдено по формуле $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{BH}} + \frac{2}{R}$, откуда

$$R_1 = \frac{R \cdot R_{BH}}{R + 2R_{BH}} = 45{,}5 \text{ Ом}.$$

Поставив в выражение (2) правую часть равенства (3), определим силу тока:

$$I_1 = \frac{\mathrm{E}}{R/2 + R_1 + r} = 1{,}03 \text{ А}.$$

Если подставить значения I_1 и R_1 в формулу (1), то найдем показания вольтметра:

$$U = 46{,}9 \text{ В}.$$

Разность потенциалов между точками A и B при отключенном вольтметре равна произведению тока I_2 на половину сопротивления потенциометра, т.е.

$$U_2 = I_2 \frac{R}{2} \quad \text{или} \quad U_2 = \frac{\mathrm{E}}{R + r} \frac{R}{2} = 50 \text{ В}.$$

3. Расчет электрических цепей с применением правил Кирхгофа.

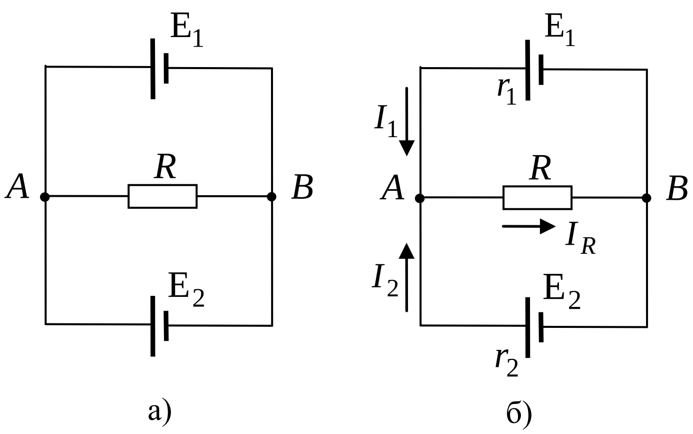


Рис.

Два источника, ЭДС которых $\mathrm{E}_1 = 2$ В и $\mathrm{E}_2 = 4$ В, соединены, как показано на рис. *а*.

Внешнее сопротивление $R = 1$ Ом, а внутренние сопротивления источников $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом. Определите силы токов, протекающих через источники и внешнее сопротивление.

Дано: $\mathrm{E}_1 = 2$ В; $\mathrm{E}_2 = 4$ В; $R = 1$ Ом; $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом.

Найти: I_1; I_2; I_R.

Решение. Выбираем направление токов, как указано на рис.*б*. Согласно первому правилу Кирхгофа для узла A

$$I_R = I_1 + I_2. \tag{1}$$

Второе правило Кирхгофа для замкнутых контуров ε_1, R и ε_2, R

$$I_1 r_1 + I_R R = \mathrm{E}_1; \tag{2}$$

$$I_2 r_2 + I_R R = \mathrm{E}_2. \tag{3}$$

Решая уравнения (1) – (3), получим (с учетом того, что $r_1 = r_2 = r$)

$$I_1 = \frac{E_1 - I_R R}{r}; \quad I_2 = \frac{E_2 - I_R R}{r}; \quad I_3 = \frac{E_1 + E_2}{r + 2R}.$$

Вычисляя, получаем $I_R = 2{,}4$ А; $I_1 = -0{,}8$ А; $I_2 = 3{,}2$ А.

<u>Магнитостатика</u>

1. **Определение индукции и напряженности магнитного поля, создаваемого проводником с током произвольной формы, в любой точке пространства.**

Длинный провод с током $I = 50$ А изогнут в точке *O* под углом 120º (рис.). Определить магнитную индукцию в точке *A*, расположенной на биссектрисе этого угла на расстоянии $d = 5$ см от точки *O*.

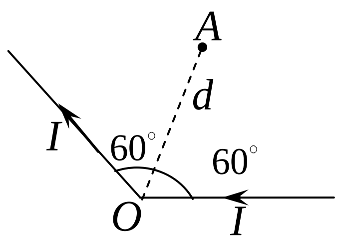


Рис.

Дано: $I = 50A$; $\alpha = 120^\circ$; $d = 5$ см.

Найти: B.

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция в точке *A* будет равна векторной сумме магнитных индукций $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых прямыми участками провода, т.е.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \qquad (1)$$

Учтем, что для всех участков провода векторное произведение $\left[d\vec{l}, \vec{e}_r\right]$ имеет направление, перпендикулярное к плоскости рисунка. Поэтому выражение (1) можно записать в скалярной форме:

$$B = B_1 + B_2.$$

Магнитную индукцию поля каждого из прямых участков находим с помощью формулы (12.10) (см. выше), приняв для правого участка $\varphi_1 = 0$ (считаем, что правый конец провода находится в бесконечности), $\varphi_2 = 120^\circ$ (см. рис. 12.4).

Тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos 0 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0},$$

где $r_0 = d\sin\frac{\pi}{3}$.

Для левого участка $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 180^\circ$. Соответственно запишем

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi\right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0}.$$

Суммируем индукции полей

$$B = B_1 + B_2 = \frac{6\mu_0 I}{8\pi d\sin\frac{\pi}{3}}.$$

Выполним вычисления

$$B = \frac{6\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{8\pi\cdot 5\cdot 10^{-2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3{,}46\cdot 10^{-4}\ \text{Тл}.$$

Найти величину индукции магнитного поля в центре петли радиусом $R = 10$ см, образованной бесконечно длинным тонким проводником с током $I = 50$ А (рис.).

Дано: $R = 10$ см; $I = 50$ А.

Найти: B.

Решение. Вектор индукции магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током на расстоянии R от него по величине равен

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

и направлен в центре (в точке O) петли перпендикулярно ее плоскости на нас.

Вектор индукции $\vec{B_2}$ магнитного поля кругового тока в центре петли по направлению совпадает с $\vec{B_1}$ и по величине равен

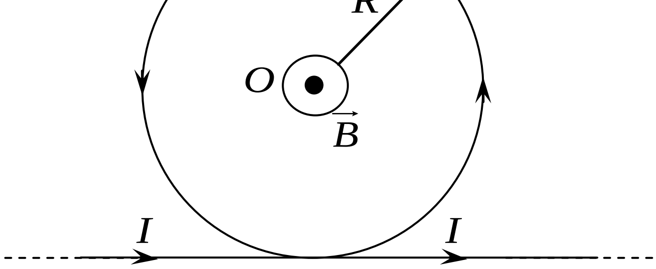


Рис.

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Следовательно, индукция поля, создаваемого проводником и круговым витком в рассматриваемой точке, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I(1+\pi)}{2\pi R} \approx 414 \text{ мкТл}.$$

2. Расчет индукции и напряженности магнитного поля с использованием теоремы о циркуляции.

Магнитная индукция B на оси тороида без сердечника (внешний диаметр тороида $d_1 = 60$ см, внутренний $d_2 = 40$ см), содержащего $N = 200$ витков, составляет $0{,}16$ мТл. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определите силу тока в обмотке тороида.

Дано: $d_1 = 60$ см; $d_2 = 40$ см; $B = 0{,}16$ мТл; $N = 200$.

Найти: I.

Решение. Циркуляция вектора $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \,, \qquad (1)$$

т.е. равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция, умноженной на магнитную постоянную. В качестве контура выберем окружность, расположенную так же, как и линия магнитной индукции, т.е. окружность некоторым радиусом r, центр который лежит на оси тороида. Из условия симметрии следует, что модуль вектора $\vec{B}$ во всех точках линии магнитной индукции одинаков, а поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint_L dl = 2\pi r B = \mu_0 N I \qquad (2)$$

(учли, что сила тока во всех витках одинакова, а контур охватывает число токов, равное числу витков тороида). Для средней линии тороида $r = \dfrac{d_1 + d_2}{4}$.

Подставив r в (2), получим искомую силу тока

$$I = \frac{\pi(d_1 + d_2)B}{2\mu_0 N} = 1A.$$

3. Расчет магнитного момента контуров с током в магнитном поле. Расчет механического момента, действующего на контур с током в однородном магнитном поле.

Проволочный виток радиусом $R = 5$ см находится в однородном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\beta = 60^\circ$ с направлением поля. Определить магнитный момент витка и механический момент, действующий на виток, если по нему течет ток силой $I = 5$ А.

Дано: $R = 5$ см; $B = 0{,}1$ Тл; $\beta = 60^\circ$; $I = 5$ А.

Найти: P_m; M_Z.

Решение. На виток с током, расположенный в магнитном поле так, что его плоскость не перпендикулярна к направлению силовых линий поля, относительно произвольной неподвижной оси OZ будет действовать механический момент M_Z, который стремится повернуть виток так, чтобы магнитный момент $\overrightarrow{P_m}$ витка был направлен по полю. Величина магнитного момента произвольного плоского контура с током зависит лишь от силы тока и площади, ограниченной контуром. Следовательно, для витка радиусом R, по которому течет ток I,

$$P_m = IS = I\pi R^2 \approx 0{,}04 \text{ А} \cdot \text{м}^2$$

Величина механического момента, действующего на виток в магнитном поле относительно произвольной оси, зависит от магнитного момента, величины индукции магнитного поля и ориентации контура в магнитном поле

$$M_Z = P_m B \sin\alpha,$$

где α – угол, который составляет нормаль к плоскости контура с направлением поля. В нашем случае $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Следовательно,

$$M_Z = I\pi R^2 B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = I\pi R^2 B \cos\beta \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

4. Магнитное взаимодействие проводников с током. Закон Ампера.

Металлический стержень массой $m = 0{,}5$ кг и длиной $l = 1$ м соскальзывает с наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Определить ускорение этого стержня, если по нему пропустить ток силой $I = 5$ А в направлении, показанном на рис. *а*. Коэффициент трения между стержнем и поверхностью наклонной плоскости $\mu = 0{,}2$.

Дано: $m = 0{,}5$ кг; $l = 1$ м; $\alpha = 30^\circ$; $B = 0{,}1$ Тл; $I = 5$ А; $\mu = 0{,}2$.

Найти: a.

Решение. При движении стержня с током в магнитном поле на него будут действовать: сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$ между стержнем и поверхностью наклонной плоскости и сила Ампера $\vec{F}_A$. Направление силы Ампера определяется правилом левой руки (рис. *б*).

Из уравнения движения стержня, записанного в проекциях на оси системы координат

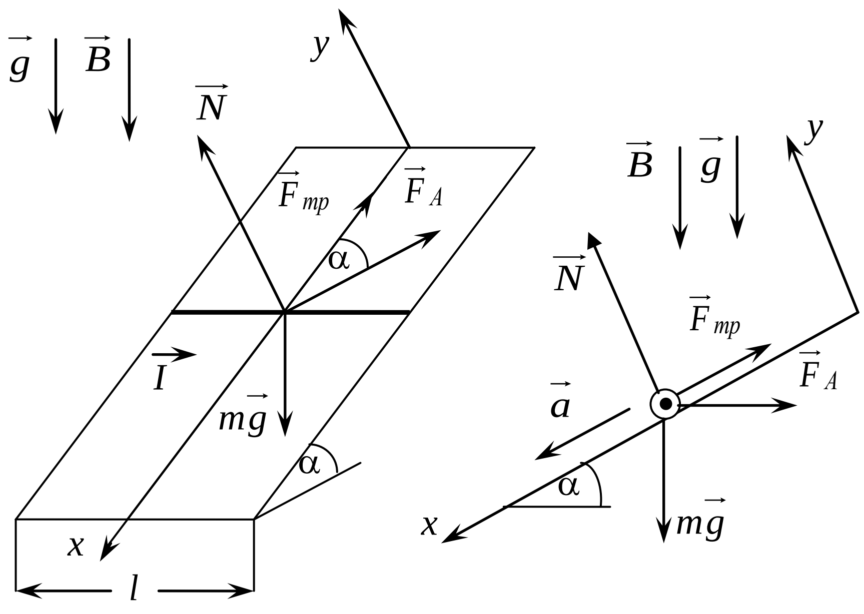
$$OX: \quad ma = mg\sin\alpha - F_{тр} - F_A\cos\alpha,$$

$$OY: \quad 0 = N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha,$$

с учетом, что $F_{тр} = \mu N$, получим

$$N = mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha, \quad F_{тр} = \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right);$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha\right) - F_A\cos\alpha.$$



а) б)

Рис.

Поскольку сила Ампера в нашем случае равна

$$F_A = IBl, \quad \text{то}$$

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu IBl\sin\alpha - IBl\cos\alpha;$$

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) - \frac{IBl}{m}\left(\mu\sin\alpha + \cos\alpha\right) \approx 2{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

5. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

Электрон движется в однородном магнитном поле так, что вектор его скорости, равной $2\cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, составляет с направлением вектора индукции магнитного поля угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Определить шаг винтовой линии, по которой движется электрон, если $B = 0{,}01$ Тл.

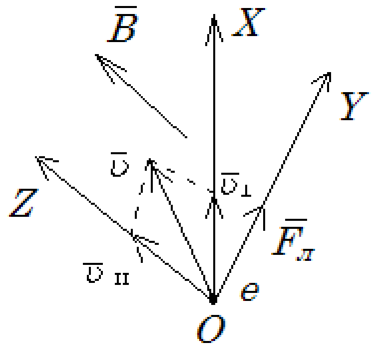
Дано: $\upsilon = 2\cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $B = 0{,}01$ Тл.

Найти: h.

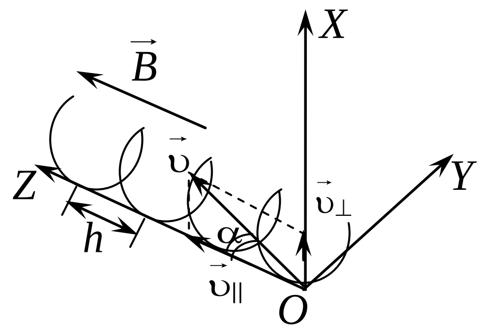
Решение. Сложное движение электрона в данных условиях представили как сумму двух независимых движений: вдоль направления поля $\vec{B}$ и в плоскости, перпендикулярной к направлению поля $\vec{B}$.

Для этого разложим вектор скорости на две составляющие: $\vec{\upsilon} = \overrightarrow{\upsilon_\perp} + \overrightarrow{\upsilon_{||}}$, где $\overrightarrow{\upsilon_\perp} \perp \vec{B}$ и $\overrightarrow{\upsilon_{||}} \,||\, \vec{B}$ (на рис. вектор $\vec{B}$ направлен параллельно оси OZ).

Действующая на электрон сила Лоренца зависит только от $\overrightarrow{\upsilon_\perp}$, и ее направление перпендикулярно к полю $\vec{B}$. Поэтому в направлении вдоль поля $\vec{B}$ ускорение электрона равно нулю и он движется с постоянной скоростью $\overrightarrow{\upsilon_\parallel}$.



а)



б)

Рис.

Одновременно под действием силы Лоренца электрон движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{B}$ (на рис. *а* в плоскости OXY). Результирующим является движение по винтовой линии h – расстояние между соседними витками (рис. *б*), которое равно перемещению электрона вдоль оси OZ за один период T вращательного движения со скоростью $\overrightarrow{\upsilon_\parallel}$, т.е. $h = \upsilon_\parallel \cdot T$. Для определения периода запишем второй закон Ньютона:

$$\overrightarrow{F_M} = m\overrightarrow{a_ц} \quad \text{или} \quad e\upsilon_\perp B = \frac{m\upsilon_\perp^2}{2}.$$

Тогда $R = \dfrac{m\upsilon_\perp}{eB}$, а период

$$T = \frac{2\pi R}{V_\perp} = \frac{2\pi m\upsilon_\perp}{eB\upsilon_\perp} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Подставим полученное выражение для периода в формулу $h = \upsilon_\parallel \cdot T$

$$h = \frac{2\pi m\upsilon_\parallel}{eB} = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{eB}.$$

После вычислений находим

$$h = 3{,}57 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3{,}57 \text{ мм}.$$

6. Магнитный поток. Энергия контура с током в магнитном поле.

В однородной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 50$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две ее стороны длиной $b = 65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из сторон рамки равно ее ширине a (рис.). Чему равен поток вектора магнитной индукции через рамку?

Дано: $I = 50$ А; $b = 65$ см; a.

Найти: Φ.

Решение. Находим поток вектора магнитной индукции через поверхность площадью S

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS,$$

где B_n – компонента вектора $\vec{B}$, перпендикулярная к элементу площади dS. Для определения магнитной индукции, создаваемой прямым бесконечным проводом с током, используем теорему о циркуляции

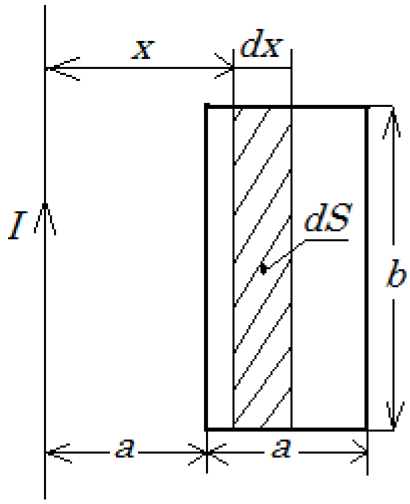


Рис.

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i .$$

Допустим, что точка A, в которой необходимо определить магнитную индукцию, находится на расстоянии x от провода (рис.). Проведем через нее окружность с центром на оси провода. Линии магнитной индукции поля касательны к этой окружности. Поэтому $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$. В силу симметрии магнитного поля на всем выбранном контуре модуль вектора магнитной индукции B постоянен. Тогда левую часть формулы запишем в виде

$$B\oint_L dl = B2\pi x,$$

а правую – в виде

$$\mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I .$$

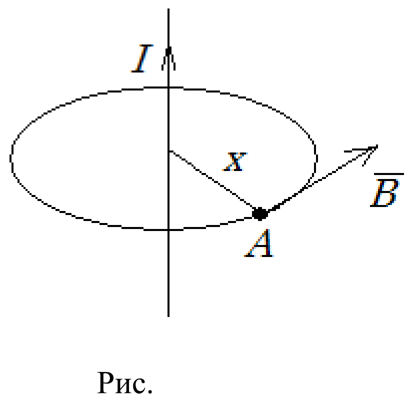


Рис.

Приравнивая эти выражения, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

В нашем случае вектор магнитной индукции $\vec{B}$ во всех точках плоскости рамки перпендикулярен к ней. Для вычисления потока вектора магнитной индукции через рамку разобьем ее площадь на узкие полоски длиной b, шириной dx и площадью $dS = bdx$ (см. рис.). В пределах одной полоски магнитную индукцию считаем постоянной, так как все части площади полоски равноудалены от провода (на расстояние x). С учетом сделанных замечаний элементарный поток магнитной индукции через площадь dS запишем в виде

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} bdx.$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = 2a$, находим поток

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln\frac{2a}{a} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln 2.$$

Производя вычисления, получим $\Phi = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Вб.

Круговой проводящий контур радиусом $r = 6$ см и током $I = 2$ А установился в магнитном поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению однородного магнитного поля с индукции $B = 10$ мТл. Определите работу, которую следует совершить, чтобы медленно повернуть контур на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ относительно оси, совпадающей с диаметром контура.

Дано: $r = 6$ см; $I = 2$ А; $B = 10$ мТл; $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Найти: $A_{вн}$.

Решение. Работа сил поля по перемещению замкнутого проводника с током I равна

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{1}$$

где Φ_1 и Φ_2 – потоки магнитной индукции, пронизывающие контуры в начальном и конечном положениях. Ток в контуре считаем постоянным, так как при медленном повороте контура в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь.

Поток магнитной индукции сквозь плоский контур площадью S в однородном магнитном поле с индукцией B

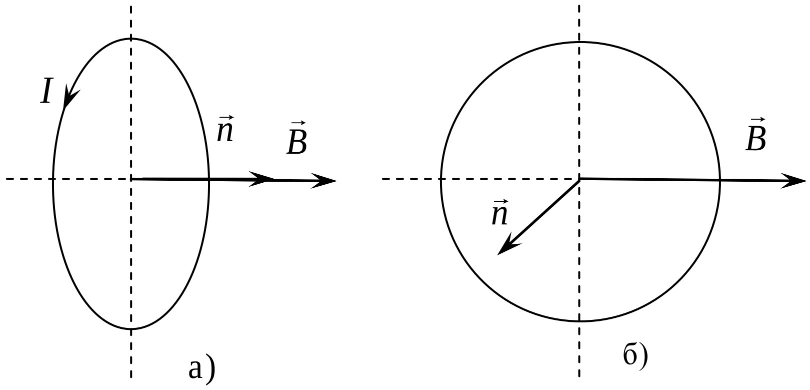


Рис.

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости контура и вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

В начальном положении (рис. *а*) контура (контур установился свободно) поток магнитной индукции максимален ($\alpha = 0;\ \cos\alpha = 1$) и $\Phi_1 = BS$ (S – площадь контура), а в конечном положении (рис. *б*) ($\alpha = \frac{\pi}{2};\ \cos\alpha = 0$) $\Phi_2 = 0$.

Тогда, подставив эти выражения в формулу (1), найдем, что

$$A = -IBS = -\pi IBr^2$$

(учли, что площадь кругового контура $S = \pi r^2$).

Работа внешних сил направлена против сил поля (равна ей по модулю, но противоположна по знаку), поэтому искомая работа

$$A_{вн} = \pi IBr^2 = 226 \text{ мкДж}.$$

Электромагнитная индукция

1. Определение ЭДС индукции,

Имеется круговой проводящий контур радиусом a с сопротивлением R. Первоначально ток в нем отсутствует. Затем включается перпендикулярное к плоскости контура однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленное за плоскость чертежа. Определить: 1) в каком направлении будет течь возникший при этом ток; 2) какой заряд q протечет по контуру.

Дано: a; R; $\vec{B}$.

Найти: q.

Решение. 1. Выберем направление положительной нормали к контуру «на нас», т.е. $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{B}$ (рис.). Тогда в начальный момент времени поток Φ_0, пронизывающий контур, будет равен $\Phi_0 = B_0 S\cos\alpha = 0$, так как $B_0 = 0$.

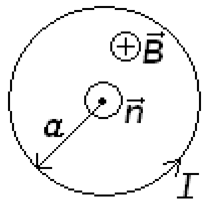


Рис.

После включения магнитного поля, когда магнитная индукция достигнет своего максимального значения B, конечное значение магнитного потока будет $\Phi = BS\cos\alpha < 0$, так как угол α между направлением нормали к контуру и вектором $\vec{B}$ равен $180°$.

Затем по формуле $\Delta\Phi = \Delta BS\cos\alpha$ определяем знак изменения магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = \left(B - B_0\right)S\cos\alpha = BS\cos\alpha < 0.$$

Из закона Фарадея $\mathrm{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ ЭДС индукции $\mathrm{E}_{инд}$, возникающая в контуре за время Δt,

$$\mathrm{E}_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -BS\cos\frac{\alpha}{\Delta t} = -B\pi a^2\left(\frac{-1}{\Delta t}\right) = \frac{\pi a^2 B}{\Delta t} > 0.$$

Так как $\mathrm{E}_{инд} > 0$, то, следовательно, направление положительной нормали $\vec{n}$ выбрано верно и ток I в соответствии с данной $\vec{n}$ потечет против часовой стрелки.

В случае если бы $\mathrm{E}_{инд}$ оказалась отрицательной, это бы означало, что мы неправильно выбрали направление нормали к контуру, т.е. положительная нормаль должна бы быть $\vec{n}\uparrow\uparrow\vec{B}$, и ток тек бы в противоположную сторону.

2. Для определения заряда q найдем, прежде всего, силу тока I, который потечет по контуру.

По закону Ома $I = \dfrac{\mathrm{E}}{R+r}$ запишем

$$I = \frac{\mathrm{E}_{инд}}{R} = \frac{\pi a^2 B}{R \Delta t}.$$

Тогда заряд q будет равен

$$q = I \Delta t = \frac{\pi a^2 B}{R}$$

2. Закон самоиндукции. Расчет индуктивности соленоида и параметров магнитного поля в соленоиде, объемной плотности энергии магнитного поля.

Определить индуктивность длинного соленоида, в котором при увеличении тока от $I_1 = 4$ А до $I_2 = 6$ А энергия магнитного поля увеличивается на $\Delta W = 10$ мДж.

Дано: $I_1 = 4$ А; $I_2 = 6$ А; $\Delta W = 10$ мДж.

Найти: L.

Решение. Энергия магнитного поля внутри соленоида с индуктивностью L при увеличении тока в нем от I_1 до I_2 увеличивается от $W_1 = \dfrac{1}{2} L I_1^2$ до $W_2 = \dfrac{1}{2} L I_2^2$.

По условию задачи $\Delta W = W_2 - W_1 = \dfrac{1}{2} L I_2^2 - \dfrac{1}{2} L I_1^2$,

отсюда находим

$$L = \frac{2 \Delta W}{I_2^2 - I_1^2} \approx 10^{-3}\ \text{Гц}$$

Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из медной проволоки диаметром $d = 0{,}3$ мм и площадью поперечного сечения $S_1 = 3$ мм^2 имеет длину $l = 0{,}6$ м. Определите индуктивность соленоида, если сопротивление обмотки $R = 10$ Ом. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм $\cdot$ м.

Дано: $\mu = 1$; $d = 0{,}3$ мм; $l = 0{,}6$ м; $S_1 = 3$ мм^2; $R = 10$ Ом; $\rho = 17$ нОм$\cdot$м.

Найти: L.

Решение. Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \qquad (1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь поперечного сечения соленоида.

Для определения N и S необходимо найти длину проволоки l_1, из которой изготовлен соленоид. Учитывая, что электрическое сопротивление обмотки $R = \rho \frac{l_1}{S_1}$, найдем

$$l_1 = \frac{RS_1}{\rho}.$$

С другой стороны,

$$l_1 = 2\pi r N,$$

где $2\pi r$ – длина одного витка (r – радиус соленоида); N – число витков.

Тогда, приравняв два последних выражения, получим

$$N = \frac{RS_1}{2\pi \rho r}. \qquad (2)$$

Площадь сечения соленоида

$$S = \pi r^2. \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), найдем индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \mu \frac{R^2 S_1^2 \pi r^2}{4\pi^2 \rho^2 r^2 l} = \mu_0 \mu \frac{R^2 S_1^2}{4\pi \rho^2 l} = 0{,}519 \text{ Гн}$$

Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}4$ мм имеет длину $l = 0{,}5$ м и поперечное сечение $S = 60$ см^2. За какое время при напряжении $U = 10$ В и силе тока $I = 1{,}5$ А в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано: $d = 0{,}4$ мм; $l = 0{,}5$ м; $S = 60\ \text{см}^2$; $I = 1{,}5$ А; $U = 10$ В; $Q = W$.

Найти: t.

Решение. При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделяется теплота

$$Q = IUt. \tag{1}$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} lS, \tag{2}$$

где $B = \dfrac{\mu_0\mu N I}{l}$ (N – общее число витков соленоида).

Если витки вплотную прилегают друг к другу, то $l = Nd$, откуда $N = \dfrac{l}{d}$.

Подставив выражения для B и N в (2), получаем

$$W = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I^2 lS}{d^2}. \tag{3}$$

Согласно условию задачи $Q = W$. Приравняв (1) и (3), найдем искомое время

$$t = \frac{\mu_0\mu I S l}{2Ud^2} = 1{,}77\ \text{мс}.$$

3. Определение зависимости тока и энергии от времени в цепях с индуктивностью при их коммутации.

Определите время t, за которое сила тока замыкания достигнет 0,8 предельного значения, если источник ЭДС замыкают на катушку сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн.

Дано: $I = 0{,}8 I_0$; $R = 10$ Ом; $L = 0{,}1$ Гн.

Найти: t.

Решение. Сила тока при замыкании цепи, содержащей источник ЭДС,

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \tag{1}$$

где R – сопротивление катушки; L – ее индуктивность; I_0 – установившаяся сила тока.

Подставив в выражение (1) $I = 0{,}8 I_0$ (условие задачи), можем записать

$$0{,}8 = 1 - e^{-\frac{R}{L}t},$$

откуда искомое время

$$t = -\frac{L \ln 0,2}{R} = 16,2 \text{ мс}.$$

Электромагнитные колебания и волны

1. Электромагнитные колебания

Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = -0,2\sin 250\pi t,\ \text{А}$. Пренебрегая сопротивлением контура, определите: период колебаний; электроемкость конденсатора; максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора; максимальную энергию магнитного поля; максимальную энергию электрического поля.

Дано: $L = 0,2$ Гн; $I = -0,2\sin 250\pi t,\ \text{А}$; $R = 0$.

Найти: T; C; $U_{\max}$, $W_{\max}^{M}$; $W_{\max}^{Э}$.

Решение. Сила тока в колебательном контуре согласно условию задачи

$$I = -0,2\sin 250\pi t,\ \text{А},$$

откуда следует, что амплитуда силы тока $I_m = 0,2$ А, а циклическая частота $\omega_0 = 250\pi\ \text{с}^{-1}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Электроемкость конденсатора найдем из формулы Томсона, определяющей период колебаний в электрическом контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

Максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{Q_m}{C}, \qquad (1)$$

где Q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора.

Заряд Q совершает гармонические колебания (при $R \approx 0$) по закону

$$Q = Q_m \cos\omega t$$

(начальную фазу приняли равной нулю).

Тогда сила тока в колебательном контуре

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin\omega t = -I_m \sin\omega t\,,$$

где амплитуда колебаний силы тока

$$I_m = \omega_0 Q_m\,, \quad \text{откуда} \quad Q_m = \frac{I_m}{\omega_0}\,. \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в выражение (1), найдем максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C}\,.$$

В случае незатухающих колебаний полная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора $\frac{CU^2}{2}$ и магнитного поля катушки $\frac{LI^2}{2}$, остается постоянной.

Следовательно,

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\,,$$

т.е. максимальные энергии электрического и магнитного полей равны.

Таким образом, максимальные значения

$$W_{\max}^{Э} = W_{\max}^{M} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}\,.$$

Вычисляя, получаем

$$T = 8 мс; C = 8{,}11 \text{ мкФ};\ U_m = 31{,}4 \text{ В};\ W_{\max}^{Э} = W_{\max}^{M} = 4 \text{ мДж}\,.$$

2. Электромагнитные волны