УДК 521.1

АППРОКСИМАЦИЯ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ МНОГИХ ТЕЛ В МЕТРИКЕ L_2

д-р физ.-мат. наук, доц. Ю.В. ТРУБНИКОВ, А.М. ВОРОНОВ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Основная задача небесной механики – задача о движении системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Эта задача и называется задачей многих тел, частными случаями которой являются задачи двух, трех и т.д. тел.

Исследуется аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел в метрике L_2.

Построен алгоритм квадратичной аппроксимации силовой функции общей задачи многих тел. Такой метод позволяет получить линейную аппроксимацию системы уравнений задачи (n+1)-го тела, причём система из 3(n+1)-го дифференциального уравнения второго порядка распадается на три подсистемы из (n+1)-го дифференциального уравнения второго порядка каждая.

В соответствии с законом всемирного тяготения силовая функция задачи $n+1$ тела в небесной механике имеет вид:

$$U_1 = \frac{f}{2}\sum_{i\neq j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (i, j = 0,1,...,n), \tag{1}$$

где f – гравитационная постоянная; m_i и m_j – взаимодействующие массы; r_{ij} – расстояния между точками $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $M_j(x_j, y_j, z_j)$ в которых эти массы сосредоточены. (Здесь и ниже используются декартовы координаты).

Заменим рассматриваемую задачу точно решаемой. Для этого в качестве новой силовой функции используем квадратичную форму[1]:

$$U = \frac{f}{2}\sum_{i\neq j} m_i m_j \left[a_1(i,j) r_{ij}^2 + a_0(i,j) \right], \tag{2}$$

коэффициенты которой подберем так, чтобы обеспечить максимальную (насколько позволяет развиваемый подход) близость соответствующих слагаемых в (1), (2) в рассматриваемом (вообще говоря, не малом) интервале изменения $r_{ij} \in \left[r_{ij\max}, r_{ij\min} \right]$.

В качестве меры близости используем величину интеграла[2]:

$$\varphi(a_0, a_1) = \int_{r_{\min}^2}^{r_{\max}^2} \left(\frac{1}{r} - a_0 - a_1 r^2 \right)^2 d(r^2),$$

где для краткости опущены индексы i, j. Свяжем пределы интегрирования со взаимным эксцентриситетом

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \in [0,1]$$

и серединой интервала изменения r:

$$a = \frac{1}{2}\left(r_{\max} + r_{\min} \right) > 0 .$$

[1] Вид U приводит к линейным уравнениям движения.

[2] Правомерность ее использования, а также замены силовой функции квадратичной формой (2) оставляем без теоретического обоснования. Тем не менее плодотворность развиваемого подхода подтверждается сравнением расчетных координат планет с астрономическими таблицами.

В результате получим

$$\varphi(a_0, a_1) = \int\limits_{[a(1-e)]^2}^{[a(1+e)]^2} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - a_0 - a_1 s \right)^2 ds \ , \tag{3}$$

где $s = r^2$. Мала ли на самом деле разница между U и U_1 определяется конфигурацией исследуемой системы тел. Согласно (3) на приемлемый результат можно рассчитывать, если взаимные эксцентриситеты близки к нулю.

Чтобы определить оптимальные коэффициенты квадратичной формы (2), найдем минимум $\varphi(a_0, a_1)$. Для этого вычислим частные производные:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} = -2\int\limits_{[a(1-e)]^2}^{[a(1+e)]^2} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - a_0 - a_1 s \right) ds = -2\left(2\sqrt{s} - a_0 s - a_1 \frac{s^2}{2} \right)\Bigg|_{[a(1-e)]^2}^{[a(1+e)]^2} = -2\Bigg\{ 4ae - 4a^2 e a_0 - \frac{1}{2} a^4 a_1 \Big[1 +$$

$$+4e + 6e^2 + 4e^3 + e^4 - \left(1 - 4e + 6e^2 - 4e^3 + e^4\right) \Big] \Bigg\} = -2\left(4ae - 4a^2 e a_0 - \frac{1}{2} a^4 a_1 \left(8e + 8e^3\right) \right) =$$

$$= -2\left[4ae - 4a^2 e a_0 - 4a^4 e a_1 \left(1 + e^2\right) \right] = -8ae\left[1 - a a_0 - a^3 a_1 \left(1 + e^2\right) \right].$$

Далее:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = -2\int\limits_{[a(1-e)]^2}^{[a(1+e)]^2} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - a_0 - a_1 s \right) s ds = \frac{2}{3} s^{\frac{2}{3}} \Bigg|_{\left[a(1-e)\right]^2}^{\left[a(1+e)\right]^2} - \frac{a_0}{2} s^2 \Bigg|_{\left[a(1-e)\right]^2}^{\left[a(1+e)\right]^2} - a_1 \cdot \frac{1}{3} s^3 \Bigg|_{\left[a(1-e)\right]^2}^{\left[a(1+e)\right]^2} =$$

$$= \frac{2}{3} a^3 2e\left(3 + e^2\right) - \frac{1}{2} a_0 a^4 \left(8e + 8e^3\right) - \frac{1}{3} a_1 a^6 \left[(1+e)^6 - (1-e)^6 \right] = \frac{4}{3} a^3 e\left(3 + e^2\right) - 4a^4 e\left(1 + e^2\right) a_0 -$$

$$- \frac{4}{3} a^6 e\left(3 + 10e^2 + 3e^4\right) a_1 \ ;$$

Приравнивая полученное выражение к нулю и сокращая на $4a^3 e$, получаем:

$$\frac{1}{3}\left(3 + e^2\right) - a\left(1 + e^2\right) a_0 - \frac{1}{3} a^3 \left(3 + 10e^2 + 3e^4\right) a_1 = 0 \ .$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a a_0 + a^3 \left(1 + e^2\right) a_1 = 1; \\ 3a\left(1 + e^2\right) a_0 + a^3 \left(3 + 10e^2 + 3e^4\right) a_1 = 3 + e^2. \end{cases} \tag{4}$$

Решим систему (4) при помощи правила Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^3\left(1 + e^2\right) \\ 3a\left(1 + e^2\right) & a^3\left(3 + 10e^2 + 3e^4\right) \end{vmatrix} = a^4\left(3 + 10e^2 + 3e^4\right) - 3a^4\left(1 + e^2\right)^2 =$$

$$= a^4\left(3 + 10e^2 + 3e^4 - 3 - 6e^2 - 3e^4\right) = 4a^4 e^2 \ ;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a^3\left(1 + e^2\right) \\ 3 + e^2 & a^3\left(3 + 10e^2 + 3e^4\right) \end{vmatrix} = a^3\left(3 + 10e^2 + 3e^4\right) - a^3\left(3 + 4e^2 + e^4\right) =$$

$$= a^3\left(6e^2 + 2e^4\right) = 2a^3 e^2\left(3 + e^2\right);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3a\left(1 + e^2\right) & 3 + e^2 \end{vmatrix} = a\left(3 + e^2 - 3 - 3e^2\right) = -2ae^2 \ .$$

Далее

$$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{2a^3 e^2 \left(3+e^2\right)}{4a^4 e^2} = \frac{3+e^2}{2a}; \tag{5}$$

$$a_1 = -\frac{2ae^2}{4a^4 e^2} = -\frac{1}{2a^3}. \tag{6}$$

Таким образом, полином наилучшего приближения в квадратичной метрике имеет вид:

$$\mathrm{P}(s) = -\frac{1}{2a^3} s + \frac{3+e^2}{2a}. \tag{7}$$

Найдём

$$\max \left| \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2a^3} s - \frac{3+e^2}{2a} \right|, \tag{8}$$

$$s \in \left[a^2 (1-e)^2, a^2 (1+e)^2 \right].$$

Для этого рассмотрим функцию:

$$\delta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2a^3} s - \frac{3+e^2}{2a}. \tag{9}$$

Так как

$$\delta\left[a^2 (1-e)^2 \right] = \frac{1}{a(1-e)} + \frac{1}{2a^3} a^2 (1-e)^2 - \frac{3+e^2}{2a} = \frac{1}{a(1-e)} + \frac{(1-e)^2}{2a} - \frac{3+e^2}{2a} =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-e} + \frac{1-2e+e^2-3-e^2}{2} \right] = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-e} + \frac{-2-2e}{2} \right] = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-e} - \frac{1+e}{1} \right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1-1+e^2}{1-e} = \frac{e^2}{a(1-e)}; \tag{10}$$

$$\delta\left[a^2 (1+e)^2 \right] = \frac{1}{a(1+e)} + \frac{1}{2a^3} a^2 (1+e)^2 - \frac{3+e^2}{2a} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{(1+e)^2}{2} - \frac{3+e^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1+2e+e^2-3-e^2}{2} \right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{-2+2e}{2} \right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+e} - \frac{1-e}{1} \right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{e^2}{1+e} = \frac{e^2}{a(1+e)}, \tag{11}$$

то

$$\delta'(s) = -\frac{1}{2} s^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2a^3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^3} \right)$$

и обращается в нуль при $s = a^2$. При этом

$$\delta'\left[a^2 (1-e)^2 \right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a^3 (1-e)^3} + \frac{1}{a^3} \right] = \frac{1}{2a^3}\left(1 - \frac{1}{(1-e)^3} \right) < 0;$$

$$\delta\left(a^2\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} \cdot a^2 - \frac{3+e^2}{2a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{3+e^2}{2a} = \frac{3}{2a} - \frac{3+e^2}{2a} = -\frac{e^2}{2a}.$$

Так как

$$\frac{e^2}{2} < \frac{e^2}{1-e},$$

то

$$\max\left|\delta(s)\right| = \frac{e^2}{a(1-e)}.$$

Заметим, что

$$\max\left|\delta(s)\right| \to 0,$$

если $e \to 0$, (заметим, что при этом длина интервала $\left[a(1-e), a(1+e)\right]$ также стремится к нулю), а исходная система дифференциальных уравнений приходит к виду:

$$m_k\ddot{x}_k = \frac{\partial U}{\partial x_k},\ m_k\ddot{y}_k = \frac{\partial U}{\partial y_k},\ m_k\ddot{z}_k = \frac{\partial U}{\partial z_k} \quad (k = 0,1,...,n). \tag{12}$$

В развёрнутой форме получаем, что

$$\ddot{x}_k = 2f\left(\sum_{j\neq k} m_j b_{kj}\right)x_k - 2f\sum_{j\neq k} m_j b_{kj} x_j; \tag{13.1}$$

$$\ddot{y}_k = 2f\left(\sum_{j\neq k} m_j b_{kj}\right)y_k - 2f\sum_{j\neq k} m_j b_{kj} y_j; \tag{13.2}$$

$$\ddot{z}_k = 2f\left(\sum_{j\neq k} m_j b_{kj}\right)z_k - 2f\sum_{j\neq k} m_j b_{kj} z_j. \tag{13.3}$$

Таким образом, исходная система нелинейных дифференциальных уравнений после аппроксимации распадается на 3 подсистемы (13.1) – (13.3), каждая из которых имеет одну и ту же матрицу коэффициентов D, где

$$(D)_{kk} = b_{kk} = -f\sum_{j\neq k}\frac{m_j}{a_{kj}^3}; \tag{14}$$

$$(D)_{kj} = b_{kj} = f\frac{m_j}{a_{kj}^3} \quad (j \neq k). \tag{15}$$

Здесь a_{kj} – середина интервала изменения r_{kj}:

$$a_{kj} = \frac{1}{2}\left(r_{kj\max} + r_{kj\min}\right), \tag{16}$$

e_{kj} – величина, которая играет роль взаимного эксцентриситета между телами M_k и M_j:

$$e_{kj} = \frac{r_{kj\max} - r_{kj\min}}{r_{kj\max} + r_{kj\min}}. \tag{17}$$

Введем следующие обозначения: $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение векторов; $[\bullet,\bullet]$ – векторное произведение векторов

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix},\ k = (0,1,\ldots,n).$$

Справедлива теорема о первых интегралах системы (13.1) – (13.3).

ТЕОРЕМА 1. Имеют место следующие равенства:

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n} m_k \ddot{\vec{r}} = 0\,;\; m = \sum_{k=0}^{n} m_k\,; \tag{18}$$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n} m_k \dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{m}\vec{a}\,; \tag{19}$$

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n} m_k \vec{r}_k = \frac{1}{m}\vec{a}t + \frac{1}{m}\vec{b}\,, \tag{20}$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторные константы.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x_k\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x_k} + y_k\frac{\partial\tilde{U}}{\partial y_k} + z_k\frac{\partial\tilde{U}}{\partial z_k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\vec{r}_k, m_k\ddot{\vec{r}}_k\right) = 2\tilde{U}\,; \tag{21}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\vec{r}_k, m_k\dot{\vec{r}}_k\right] = \vec{\varsigma}\,, \tag{22}$$

где $\vec{\varsigma}$ – постоянный вектор;

$$\mathrm{T} \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} m_k\left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right) = \tilde{U} + c\,, \tag{23}$$

а c – постоянная.

Обозначив

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\; \vec{r}_y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\; \vec{r}_z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$

запишем основную систему дифференциальных уравнений в векторном виде:

$$\ddot{\vec{r}}_x = D\vec{r}_x\,;\; \ddot{\vec{r}}_y = D\vec{r}_y\,;\; \ddot{\vec{r}}_z = D\vec{r}_z. \tag{24}$$

К системе (24) можно применять как численные, так и аналитические методы решения и анализа поведения решений задачи Коши или краевых задач.

В относительной прямоугольной системе координат с центром в точке M_0 система дифференциальных уравнений (24) будет иметь вид (25):

$$\ddot{x}_k = 2f\left\{\left[\left(m_0 + m_k\right)b_{0k} + \sum_{j\neq 0, j\neq k} m_j b_{kj}\right]x_k + \sum_{j\neq 0, j\neq k} m_j\left(b_{0j} - b_{kj}\right)x_j\right\}\;\left(k = 1,2,\ldots,n\right); \tag{25.1}$$

$$\ddot{y}_k = 2f\left\{\left[\left(m_0 + m_k\right)b_{0k} + \sum_{j\neq 0, j\neq k} m_j b_{kj}\right]y_k + \sum_{j\neq 0, j\neq k} m_j\left(b_{0j} - b_{kj}\right)y_j\right\}\;\left(k = 1,2,\ldots,n\right); \tag{25.2}$$

$$\ddot{z}_k = 2f\left\{\left[\left(m_0 + m_k\right)b_{0k} + \sum_{j\neq 0, j\neq k} m_j b_{kj}\right]z_k + \sum_{j\neq 0, j\neq k} m_j\left(b_{0j} - b_{kj}\right)z_j\right\}\;\left(k = 1,2,\ldots,n\right), \tag{25.3}$$

где

$$b_{kj} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{kj}^3}\,. \tag{26}$$

Например, для Солнечной системы уравнения (25.1) запишем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 = -6{,}8298\cdot 10^{-13}x_1(t)+3{,}9012\cdot 10^{-20}x_2(t)+1{,}0426\cdot 10^{-19}x_3(t)-2{,}1996\cdot 10^{-22}x_4(t)-1{,}3196\cdot 10^{-20}x_5(t)-\\
&-8{,}6088\cdot 10^{-22}x_6(t)-1{,}3955\cdot 10^{-23}x_7(t)-9{,}8206\cdot 10^{-25}x_8(t)-5{,}7008\cdot 10^{-26}x_9(t);\\
&\ddot{x}_2 = -1{,}0468\cdot 10^{-13}x_2(t)-8{,}0352\cdot 10^{-20}x_1(t)-2{,}0820\cdot 10^{-20}x_3(t)-4{,}2876\cdot 10^{-22}x_4(t)-1{,}7937\cdot 10^{-20}x_5(t)-\\
&-9{,}8214\cdot 10^{-22}x_6(t)-3{,}0798\cdot 10^{-23}x_7(t)-1{,}2265\cdot 10^{-24}x_8(t)-1{,}9347\cdot 10^{-26}x_9(t);\\
&\ddot{x}_3 = -3{,}9618\cdot 10^{-14}x_3(t)-9{,}1422\cdot 10^{-20}x_1(t)-1{,}6174\cdot 10^{-19}x_2(t)-3{,}9336\cdot 10^{-22}x_4(t)-1{,}7110\cdot 10^{-20}x_5(t)-\\
&-9{,}6092\cdot 10^{-22}x_6(t)-1{,}4917\cdot 10^{-23}x_7(t)-1{,}1840\cdot 10^{-24}x_8(t)-5{,}7308\cdot 10^{-26}x_9(t);\\
&\ddot{x}_4 = -1{,}1200\cdot 10^{-14}x_4(t)-9{,}6068\cdot 10^{-20}x_1(t)-2{,}3322\cdot 10^{-19}x_2(t)-8{,}9800\cdot 10^{-19}x_3(t)-8{,}4850\cdot 10^{-21}x_5(t)-\\
&-7{,}4266\cdot 10^{-22}x_6(t)-1{,}2818\cdot 10^{-23}x_7(t)-7{,}4444\cdot 10^{-25}x_8(t)-5{,}6646\cdot 10^{-26}x_9(t);\\
&\ddot{x}_5 = -2{,}8136\cdot 10^{-16}x_5(t)-9{,}7536\cdot 10^{-20}x_1(t)-2{,}5686\cdot 10^{-19}x_2(t)-1{,}1925\cdot 10^{-18}x_3(t)-3{,}5322\cdot 10^{-21}x_4(t)-\\
&-5{,}3122\cdot 10^{-22}x_6(t)-1{,}0834\cdot 10^{-23}x_7(t)-3{,}9310\cdot 10^{-24}x_8(t)-2{,}5024\cdot 10^{-27}x_9(t);\\
&\ddot{x}_6 = -4{,}5086\cdot 10^{-17}x_6(t)-9{,}7566\cdot 10^{-20}x_1(t)-2{,}5740\cdot 10^{-19}x_2(t)-1{,}1992\cdot 10^{-18}x_3(t)-3{,}6066\cdot 10^{-21}x_4(t)-\\
&-2{,}2712\cdot 10^{-19}x_5(t)-5{,}9044\cdot 10^{-24}x_7(t)-6{,}9088\cdot 10^{-24}x_8(t)-5{,}4488\cdot 10^{-26}x_9(t);\\
&\ddot{x}_7 = -5{,}5788\cdot 10^{-18}x_7(t)-9{,}7572\cdot 10^{-20}x_1(t)-2{,}5750\cdot 10^{-19}x_2(t)-1{,}2003\cdot 10^{-18}x_3(t)-3{,}6184\cdot 10^{-21}x_4(t)-\\
&-2{,}6326\cdot 10^{-19}x_5(t)-1{,}1311\cdot 10^{-20}x_6(t)-1{,}9010\cdot 10^{-24}x_8(t)-5{,}2684\cdot 10^{-26}x_9(t);\\
&\ddot{x}_8 = -1{,}4540\cdot 10^{-18}x_8(t)-9{,}7572\cdot 10^{-20}x_1(t)-2{,}5750\cdot 10^{-19}x_2(t)-1{,}2004\cdot 10^{-18}x_3(t)-3{,}6198\cdot 10^{-21}x_4(t)-\\
&-2{,}6704\cdot 10^{-19}x_5(t)-1{,}2446\cdot 10^{-20}x_6(t)-1{,}7852\cdot 10^{-22}x_7(t)-5{,}5522\cdot 10^{-26}x_9(t);\\
&\ddot{x}_9 = -6{,}5530\cdot 10^{-19}x_9(t)-9{,}7572\cdot 10^{-20}x_1(t)-2{,}5752\cdot 10^{-19}x_2(t)-1{,}2005\cdot 10^{-18}x_3(t)-3{,}6200\cdot 10^{-21}x_4(t)-\\
&-2{,}6774\cdot 10^{-19}x_5(t)-1{,}2724\cdot 10^{-20}x_6(t)-2{,}2192\cdot 10^{-22}x_7(t)-4{,}9926\cdot 10^{-23}x_8(t).
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Коэффициенты, фигурирующие в (27), вычислены в системе единиц CGS.

Полученную систему дифференциальных уравнений можно решать и исследовать различными методами. Один из них состоит в нахождении собственных чисел и собственных векторов матрицы M коэффициентов системы (27).

Если обозначить собственные значения матрицы M в порядке их возрастания через λ_k, то обозначив

$$\omega_k = (-\lambda_k)^{\frac{1}{2}} \quad (k = 1, 2, \ldots, 9),$$

получим

$$\omega_1 := 8{,}2643\cdot 10^{-7};\ \omega_2 := 3{,}2354\cdot 10^{-7};\ \omega_3 := 1{,}9904\cdot 10^{-7};\ \omega_4 := 1{,}0583\cdot 10^{-7};\ \omega_5 := 1{,}6773\cdot 10^{-8};$$

$$\omega_6 := 6{,}7146\cdot 10^{-9};\ \omega_7 := 2{,}3619\cdot 10^{-9};\ \omega_8 := 1{,}2059\cdot 10^{-9};\ \omega_9 := 8{,}0950\cdot 10^{-10}.$$

Для нахождения решения двухточечной краевой задачи необходимо найти коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $d_1, d_2, \ldots, d_n$ из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left[h_{jk}c_k\cos(\omega_k t_0)+h_{jk}d_k\sin(\omega_k t_0)\right] = x_j(t_0);\\
&\sum_{k=1}^{n}\left[h_{jk}c_k\cos(\omega_k t_1)+h_{jk}d_k\sin(\omega_k t_1)\right] = x_j(t_1),
\end{aligned}\qquad(28)$$

где h_{jk} $(j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$ – j-тая координата k-того собственного вектора.

Матрицу коэффициентов системы (28) можно представить в виде произведения двух матриц $H \times B$:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} & 0 & h_{13} & \cdots & h_{1n} & 0 \\ h_{21} & 0 & h_{22} & 0 & h_{23} & \cdots & h_{2n} & 0 \\ h_{31} & 0 & h_{32} & 0 & h_{33} & \cdots & h_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & 0 & h_{n2} & 0 & h_{n3} & \cdots & h_{nn} & 0 \\ 0 & h_{11} & 0 & h_{12} & 0 & \cdots & 0 & h_{1n} \\ 0 & h_{21} & 0 & h_{22} & 0 & \cdots & 0 & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & h_{n1} & 0 & h_{n2} & 0 & \cdots & 0 & h_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t_0) & \sin(\omega_1 t_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cos(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 t_0) & \sin(\omega_2 t_0) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 t_0) & \sin(\omega_2 t_0) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos(\omega_n t_0) & \sin(\omega_n t_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos(\omega_n t_1) & \sin(\omega_n t_1) \end{bmatrix}$$

Например, для Солнечной системы строки матрицы B имеют вид:

$$\begin{gathered}
[0,44791;-0,89408;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0,38144;0,92439;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;-0,22397;-0,97460;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0,012981;0,99992;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;-0,92811;0,37231;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0,11108;-0,99381;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0,10311;0,99467;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;-0,83822;0,54534;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0,97307;0,23050;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0,91851;0,39539;0;0;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,99567;0,092977;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,98679;0,16201;0;0;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,99946;0,032746;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,99836;0,057210;0;0;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,99986;0,016721;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,99957;0,029221;0;0],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,99994;0,011225],\\
[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0,99981;0,019617].
\end{gathered}$$

Вектор неизвестных находится по формуле:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \\ \vdots \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = B^{-1} H^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \\ x_1(t_1) \\ \vdots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Матрицы H и B легко обратимы и, таким образом, получаются условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$\sin(\omega_k t_1)\cos(\omega_k t_0)-\cos(\omega_k t_1)\sin(\omega_k t_0)\equiv\sin\left[\omega_k(t_1-t_0)\right]\neq 0\,(k=1,2,...,n), \tag{30}$$

тогда двухточечная краевая задача

$$x_j(t_0)=x_{j0},\, x_j(t_1)=x_{j1}\,(j=1,2,...,n) \tag{31}$$

однозначно разрешима при любом наборе значений (32).

Решением такой краевой задачи являются функции:

$$x_j(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[h_{jk}c_k\cos(\omega_k t)+h_{jk}d_k\sin(\omega_k t)\right]\,(j=1,2,...,n). \tag{32}$$

Аналогичный вид имеют функции: $y_j(t),\, z_j(t)\ \ (j=1,2,...,n)$.

Например, для Солнечной системы координата $x_3(t)\equiv x3t$ – это координата x для барицентра Земля + Луна. В сравнительной таблице для барицентра Земля + Луна представлены результаты решения краевой задачи и астрономических наблюдений за 1977 год.

Юлианские дни	Результаты, полученные в Maple после аппроксимации	Данные таблиц астрономического ежегодника (1977 г.)
	Координата x для барицентра Земля + Луна	
180	–0,70948	–0,71785
200	–0,89867	–0,91080
220	–0,98254	–0,99390
240	–0,95133	–0,95891
260	–0,80872	–0,81184
280	–0,57138	–0,57138
300	–0,26705	–0,26606
320	+0,06848	+0,06917
340	+0,39609	+0,39669
360	+0,67720	+0,67987
380	+0,87900	+0,88661

Заключение. Найдены в аналитическом виде многочлены наилучшего приближения в метрике L_2 для функции $1/r$. При помощи таких многочленов проведена «аппроксимация» силовой функции.

Для новой силовой функции доказаны теоремы о первых интегралах. Найден и апробирован алгоритм решения двухточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, построенной при помощи новой силовой функции. В качестве естественного примера рассмотрена математическая модель Солнечной системы. Результаты численных экспериментов удовлетворительно согласуются с данными, приведенными в астрономических таблицах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык, В. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. Дзядык. – М., 1977. – 512 с.
2. Дубошин, Г. Небесная механика / Г. Дубошин. – М., 1975. – 426 с.
3. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М., 2002. – 33 с.

Поступила 16.01.2008