УДК 536.2.001.24

ТЕПЛОПЕРЕНОС В ОГРАЖДЕНИЯХ ИЗ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

канд. техн. наук, доц. Э.И. ГОНЧАРОВ, канд. техн. наук С.И. ПИВОВАРОВА,
канд. техн. наук, доц. Т.И. КОРОЛЁВА
(Полоцкий государственный университет)

Исследование проблем нестационарной теплопроводности в ограждающих конструкциях проводится с целью получения информации о значениях температур в различных сечениях ограждений и тепловых потоков, проходящих через ограждения.

В работе изложен метод приближённого решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности при наличии зависимости коэффициента теплопроводности и удельной теплоёмкости от температуры и произвольно изменяющегося во времени коэффициента теплоотдачи.

Используя новое значение безразмерной температуры, исходная задача преобразуется таким образом, что все её нелинейные особенности содержатся в комплексе, входящем в основное уравнение в качестве внутреннего источника теплоты. Решение преобразованной задачи в первом приближении получено методом конечных интегральных преобразований без учёта внутреннего источника теплоты. Дальнейшие приближенные решения учитывают наличие внутреннего источника, все члены которого вычисляются на основе предыдущего приближения.

Предлагаемый метод последовательных приближений имеет хорошую сходимость и с достаточной точностью можно ограничиваться несколькими приближениями.

Введение. Довольно часто при решении краевой задачи нестационарной теплопроводности значения теплофизических параметров, входящих в основное уравнение и граничные условия, можно принимать постоянными, и задача становится линейной. Такая постановка задачи даёт решения, удовлетворяющие инженерную практику в случаях, когда температурный перепад около поверхностей ограждения незначителен, как, например, в наружных ограждениях зданий и сооружений. Если ограждающие конструкции выполнены из теплоизоляционных и огнеупорных материалов и имеет место широкий диапазон изменения температур около поверхностей ограждения (ограждения промышленных печей, парогенераторов), то ситуация усложняется из-за того, что коэффициенты теплопроводности и теплоёмкости материала существенно зависят от температуры. Так, в диапазоне температур от 0 до 300 ºС коэффициент теплопроводности диатомитового кирпича изменяется от 0,12 до 0,23 Вт/(м·ºС), почти в 2 раза, а шамотного кирпича – от 0,62 до 0,85 Вт/(м·ºС), в 1,4 раза. Причём эта зависимость имеет линейный характер [1]. По этой причине величины теплофизических параметров при данной температуре могут сильно отличаться от исходных значений, и замена нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности его линейной аппроксимацией не даёт в этом случае информации о влиянии переменных характеристик материала на поля температур и величину теплопотерь через ограждения. Кроме того, входящий в граничные условия коэффициент внешнего теплообмена может произвольно меняться с течением времени.

Постановка задачи и её решение. Указанная задача в безразмерных переменных для ограждений в форме неограниченной пластины математически формируется следующим образом:

$$C(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial F_O}=\frac{\partial}{\partial X}\left[\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial X}\right]; \tag{1}$$

$$\theta(X,0)=\theta_0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta(0,Fo)}{\partial X}=0; \tag{3}$$

$$\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(1,Fo)}{\partial X}=Bi(Fo)\left[1-\theta(1,Fo)\right]; \tag{4}$$

$$\lambda(\theta)=1+\beta\theta;\ C(\theta)=1+\gamma\theta. \tag{5}$$

Здесь $\theta=T/T_{ср}$ – безразмерная температура; $X=x/\delta$ – безразмерная координата; $\theta_0=T_0/T_{ср}$ – безразмерная начальная температура; $Bi=\alpha\delta/\lambda, Fo=a\tau/\delta^2$ – критерии Био и Фурье; $\lambda(\theta)=\lambda/\lambda_0, C(\theta)=C/C_0$ – безразмерные значения коэффициентов теплопроводности и удельной теплоёмкости; T_{cp} – температура греющей среды, ºС; T_0 – начальная температура пластины, ºС; x – текущая координата, м; δ – полутолщина пластины, м; τ – время, с; α– коэффициент температуропроводности, м^2/с; α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·ºС); λ_0, Вт/(м^2·ºС), C_o, кДж/(кг·ºС) – значения коэффициентов теплопроводности и удельная теплоёмкости материала при начальной температуре T_0; β, γ – константы.

Введем новое значение безразмерной температуры:

$$\xi = -\beta\theta - (1+\beta)\ln(1-\theta). \tag{6}$$

Система (1)…(4) с помощью этого преобразования примет вид:

$$\frac{\partial \xi}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + \varphi(X, Fo), \tag{7}$$

где

$$\varphi(X, Fo) = \frac{(\beta-\gamma)\theta}{1+\gamma\theta}\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} - \frac{1}{1+\gamma\theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial X}\right)^2; \tag{8}$$

$$\xi(X, o) = -\beta\theta_0 - (1+\beta)\ln(1-\theta_0) = \xi_0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \xi(0, Fo)}{\partial X} = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \xi(1, Fo)}{\partial X} = Bi(Fo). \tag{11}$$

Комплекс $\varphi(X, Fo)$ по смыслу является внутренним источником теплоты, зависящим от координат и времени, содержащим в себе все нелинейные особенности исходной задачи (1)…(4).

В первом приближении найдем решение системы (7)…(11) при $\varphi(X, Fo)$ методом интегрального косинус-преобразования Фурье [2]:

$$\xi_C(n, Fo) = \int_0^1 \xi\ (X, Fo)\cos n\pi X dX, \tag{12}$$

где n = 0, 1, 2,…; $\xi_C(n, Fo)$ – изображение функции $\xi\ (X, Fo)$.

Переход от изображения функции к её оригиналу осуществляется по формуле:

$$\xi\ (X, Fo) = \xi_C(0, Fo) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\xi_C(n, Fo)\cos n\pi X. \tag{13}$$

Дифференциальное уравнение (7) с учётом граничных условий в изображениях имеет вид:

$$\frac{\partial \xi_C(n, Fo)}{\partial Fo} + n^2\pi^2\xi_C(n, Fo) = (-1)^n Bi(Fo). \tag{14}$$

Решение этого уравнения с учётом начального условия запишется:

$$\xi_C(n, Fo) = \xi_0 + \int_o^{F_o} Bi(\eta)d\eta + (-1)^n\int_0^{Fo} Bi(\eta)\exp\left[-\mu_n^2(Fo-\eta)\right]d\eta. \tag{15}$$

Здесь $\mu_n = n\pi$ – корни характеристического уравнения.

Перейдя от изображения функции к её оригиналу, в соответствии с (13), получим соотношение для расчёта температурного поля в первом приближении:

$$\xi_1(X, Fo) = \xi_0 + \int_o^{Fo} Bi(\eta)d\eta - \frac{1-3X^2}{6}Bi(Fo) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\mu_n^2}\cos\mu_n X\int_0^{Fo} Bi(\eta)\exp\left[-\mu_n^2(Fo-\eta)\right]d\eta. \tag{16}$$

Дальнейшие приближения будут строиться с учетом нелинейного комплекса (8), все члены которого определяются на основании предыдущих приближений. Так, для второго приближения имеем выражение:

$$\xi_2(X,Fo)=\xi_0+\int_0^{Fo}Bi\ (\eta)d\eta+\int_0^{Fo}d\eta\int_0^1\varphi_1(X,\eta)dX-\frac{1-3X^2}{6}Bi\ (Fo)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\mu_n^2}\cos\mu_n X\int_0^{Fo}Bi(\eta)\times$$
$$\times\exp\left[-\mu_n^2(Fo-\eta)\right]d\eta+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\mu_n X\int_0^{Fo}\exp\left[-\mu_n^2(Fo-\eta)\right]\int_0^1\varphi_1(X,\eta)\cos\mu_n X dX d\eta. \quad (17)$$

В формуле (17) величина $\varphi_1(X, Fo)$ – значение внутреннего источника теплоты, вычисленного на основе первого приближения.

Используя (16), вычислим значения производных и окончательно, в соответствии с (8), получим:

$$\varphi_1(X,Fo)=\frac{(\beta-\gamma)\theta}{1+\gamma\theta}\left\{Bi(Fo)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2\cos\mu_n X\int_0^{Fo}Bi(\eta)\exp\left[-\mu_n^2(Fo-\eta)\right]d\eta\right\}+$$
$$+\frac{1}{1+\gamma\theta}\left\{X\,Bi(Fo)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\mu_n}\sin\mu_n X\int_0^{Fo}Bi(\eta)\exp\left[-\mu_n^2(Fo-\eta)\right]d\eta\right\}^2. \quad (18)$$

Функциональная связь θ с ξ находится разложением в ряд $\ln(1-\theta)$ в выражении (6) и дальнейшим переходом к обращённому ряду:

$$\theta=A\xi+B\xi^2+C\xi^3+D\xi^4+..., \quad (19)$$

где $A = 1$; $B = -(1+\beta)$; $C = 2(1+\beta)^2-(1+\beta)$; $D = 5(1+\beta)^2-(1+\beta)-5(1+\beta)^3$.

Второе приближение служит основой для получения третьего приближения и, проводя последовательно цепь математических выкладок, можно получить любое «*n*» приближение.

Искомая температура $\theta(x,Fo)$ определяется из выражения (6). Результаты расчета представлены в таблице 1.

Таблица 1

Связь между безразмерными температурами ξ и θ

β	θ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,05	0,10564	0,2243	0,35945	0,5164	0,70282	0,93224	1,2229	1,6498	2,3717
0,10	0,10991	0,22545	0,36228	0,52125	0,71248	0,94810	1,2543	1,6902	2,4418
0,15	0,10618	0,22661	0,36511	0,52749	0,72213	0,96390	1,2795	1,7307	2,5118
0,20	0,10644	0,22777	0,36794	0,53303	0,73175	0,97970	1,3047	1,7712	2,5819
0,25	0,10671	0,22893	0,37078	0,53858	0,74145	0,9950	1,3299	1,8116	2,6520
0,30	0,10698	0,23006	0,37361	0,54412	0,75111	1,0114	1,3551	1,8521	2,7221
0,35	0,10725	0,23124	0,37644	0,54966	0,76077	1,0272	1,3803	1,8926	2,7922
0,40	0,10752	0,23240	0,37929	0,55520	0,77042	1,0430	1,4055	1,9330	2,8622
0,50	0,10806	0,23471	0,3893	0,56629	0,78970	1,0746	1,4559	2,0140	3,0024
0,55	0,10832	0,23587	0,38776	0,57183	0,79940	1,0905	1,4811	2,0544	3,0725

С целью определения погрешности предложенного метода и его сходимости, было произведено сравнение результатов расчета численного интегрирования исходной системы (1)…(4) с данными расчетов по предложенным соотношениям (16) и (17).

В качестве примера рассмотрен нагрев неограниченной пластины при следующих параметрах:

$$\theta_0=0{,}2;\ \ Bi\ (Fo)=0{,}5\exp Fo;\ \ \lambda(\theta)=1+0{,}15\theta;\ \ C(\theta)=1+0{,}25\theta.$$

Результаты расчётов погрешностей определения температур на поверхности и в центре изделия представлены в таблице 2.

Таблица 2

Расчёт погрешностей определения температур

Fo	θ поверхности					θ центра				
	ЭВМ	1 приближение		2 приближение		ЭВМ	1 приближение		2 приближение	
		θ	δ %	θ	δ %		θ	δ %	θ	δ %
0,4	0,4777	0,4851	–1,53	0,48140	–0,78	0,2833	0,2917	–2,87	0,2874	–1,46
0,5	0,5232	0,5321	–1,67	0,5294	–1,18	0,3218	0,3325	–3,23	0,3285	–2,08
0,6	0,57253	0,5834	–1,69	0,5806	–1,41	0,37238	0,38708	–3,95	0,3811	–2,35
0,7	0,61175	0,6252	–2,16	0,6219	–1,67	0,41111	0,4257	–3,56	0,4219	–2,63
0,8	0,64732	0,6717	–3,7	0,6599	–1,94	0,44602	0,4711	–5,63	0,4617	–3,53
0,9	0,68425	0,7152	–4,55	0,7005	–2,38	0,48497	0,5171	–6,64	0,5033	–3,79
1,0	0,71896	0,7554	–5,07	0,7374	–2,56	0,52335	0,5650	–7,95	0,5455	–4,23
1,1	0,75177	0,7921	–5,33	0,7719	–2,67	0,56127	0,6101	–8,9	0,5854	–4,37
1,2	0,78383	0,8256	–5,3	0,8037	–2,53	0,60419	0,6552	–8,6	0,6296	–4,22
1,3	0,81649	0,8552	–4,75	0,8369	–2,51	0,64711	0,7008	–8,38	0,6744	–4,21
1,4	0,84853	0,8861	–4,44	0,8678	–2,27	0,68873	0,7432	–7,92	0,7174	–4,17
1,5	0,88066	0,9153	–3,93	0,9004	–2,24	0,73794	0,77804	–6,48	0,7576	–3,67
1,6	0,91797	0,9425	–2,76	0,9343	–1,78	0,77265	0,8164	–5,66	0,8018	–3,44
1,7	0,94758	0,9717	–2,55	0,9621	–1,53	0,81287	0,8456	–4,07	0,8317	–2,36

Выводы. Анализ полученных результатов подтверждает сходимость предложенного метода. При этом с достаточной для инженерной практики точностью в пределах изменения безразмерных параметров, имеющих практический интерес, можно ограничиваться первыми двумя-тремя приближениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михеев, М.А. Основы теплопередачи / М.А. Михеев, И.М. Михеев. – М: Энергия, 1977. – 343 с.
2. Лыков, А.В. Теория тепло- и массопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. – М: ГЭИ, 1973. – 587 с.

Поступила 17.12.2007