Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

А. Г. Щербо

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Методические указания
к лабораторной работе по сопротивлению материалов
для студентов строительных специальностей

Новополоцк
ПГУ
2015

УДК 539.3/.4(075.8)

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией
инженерно-строительного факультета
в качестве методических указаний
(протокол № 3 от 25.04.2015)

Кафедра прикладной механики и графики

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
канд. техн. наук, доц., зав. каф. строительных конструкций УО «ПГУ»
А. И. КОЛТУНОВ;
канд. техн. наук, доц., доц. каф. прикладной механики и графики УО «ПГУ» Л. С. ТУРИЩЕВ

Предназначены для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»; 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»; 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»; 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»; 1-70 05 01 «Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ».

Лабораторная работа

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Цель работы: экспериментальное и аналитическое определение критической силы для стойки; сравнительный анализ результатов экспериментальной и теоретической части работы.

Краткие теоретические сведения

Понятие об устойчивости равновесия упругих систем

Прямолинейная форма равновесия упругого стержня, заделанного нижним концом и нагруженного сверху центрально приложенной сжимающей силой, при некотором значении этой силы может оказаться неустойчивой, и стержень резко искривится. Устойчивость формы равновесия упругой системы зависит от ее размеров, материала, значений и направления внешних сил (рис. 1). Прямолинейная форма равновесия центрально-сжатого стержня устойчива при малых значениях сжимающей силы и неустойчива, когда значения этой силы превышает некоторый предел. Прямолинейный прямой стержень при некотором значении сжимающей силы может находиться в состоянии устойчивого равновесия, а деревянный стержень таких же размеров при том же значении силы – в состоянии неустойчивого равновесия. Значения силы, нагрузки и напряжения, при котором первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называются соответственно критической силой, критической нагрузкой и критическим напряжением. Исследование устойчивости и определение критических сил или нагрузок имеет большое практическое значение, т.к. для любого сооружения в целом и каждого его элемента должна быть обеспечена устойчивость исходной формы равновесия под действием приложенных к нему сил. Резкое изменение формы какого-либо элемента может вызвать разрушение всего сооружения.

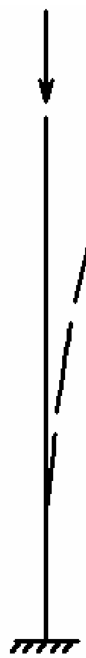

Рис. 1

Понятие устойчивости не следует смешивать с понятием прочности; каждое из них имеет самостоятельное значение. Так, например, сжатый стержень при действии на него нагрузки, большей критической, изогнется, но при этом деформации его могут быть упругими, и он после снятия нагрузки восстановит свою первоначальную форму. Следовательно, потеря устойчивости в этом случае не связана с потерей прочности. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально-сжатого прямого стержня называется **продольным изгибом** – это наиболее простая и в то же время одна из наиболее важных инженерных задач, связанных с проблемой устойчивости.

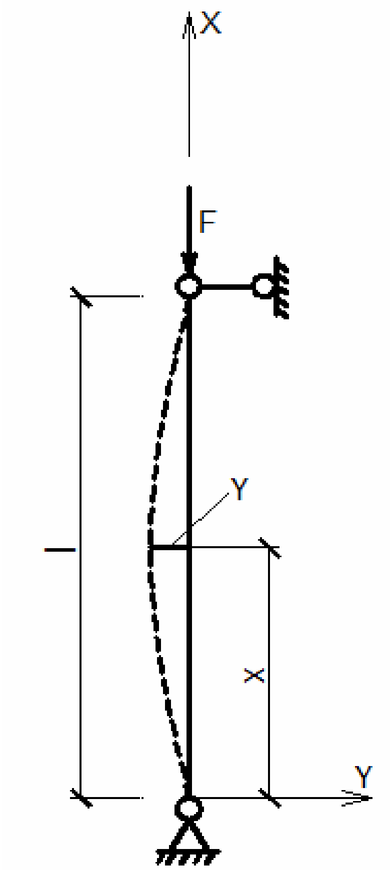

Рис. 2

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения длиной *l* с шарнирно закрепленными концами, нагруженный на верхнем конце центрально приложенной сжимающей силой *F* (рис. 2).

Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы *F*, при котором прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой. Для ее определения отклоним стержень в положение, показанное пунктиром, и установим, при каком наименьшем значении силы *P* стержень может оставаться в этом положении.

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}. \qquad (1)$$

Начало координат считаем расположенным у нижнего конца стержня, а ось *x* – направленной вверх.

Изгибающий момент в сечении с абсциссой *x* равен

$$M = -Py.$$

Подставим выражение *M* в уравнение (1):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EJ} = 0,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0, \tag{2}$$

где

$$k^2=\frac{P}{EJ}. \tag{3}$$

Интеграл дифференциального уравнения (2) имеет вид:

$$y = A*\cos kx + B*\sin kx. \tag{4}$$

Произвольные постоянные A и B можно определить из граничных условий:

а) $y = 0$ при $x = 0$ и, следовательно, на основании уравнения (4)

$$0 = A*\cos 0 + B*\sin 0 = A*1 + B*0 = A,$$

т. е. $A = 0$;

б) $y = 0$ при $x = l$ и, следовательно, на основании уравнения (4)

$$0 = 0*\cos kl + B*\sin kl,$$

или

$$B*\sin kl = 0. \tag{5}$$

Условие (5) выполняется при $B = 0$ или $\sin kl = 0$. При подстановке значения $B = 0$ и найденного значения $A = 0$ в уравнение (4) получаем выражение $y = 0$, не соответствующее условию задачи, целью которой является определение такого значения силы F, при котором величины y могут быть не равными нулю.

Таким образом, чтобы удовлетворить условию задачи и условию (5), необходимо принять $\sin kl = 0$ или (на основании выражения (3))

$$\sin\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)=0, \tag{6}$$

откуда

$$l\sqrt{\frac{P}{EJ}}=n\pi, \tag{7}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Условие (6) удовлетворяется и при $n = 0$, однако при этом из выражения (7) следует $F = 0$, что не удовлетворяет условию задачи. Наименьшее значение $F = F_{кр}$, отличное от нуля, можно получить из выражения (7) при $n = 1$. Тогда

$$l\sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ}}=\pi,$$

$$F_{кр}=\frac{\pi^2EJ}{l^2}. \tag{8}$$

Если сжимающая сила меньше критической, то возможна только прямолинейная форма равновесия, которая в этом случае является устойчивой.

Формула (8) дает значение критической силы для стержня с шарнирно закрепленными концами. Определим теперь значение критической силы при других видах закрепления концов стержня.

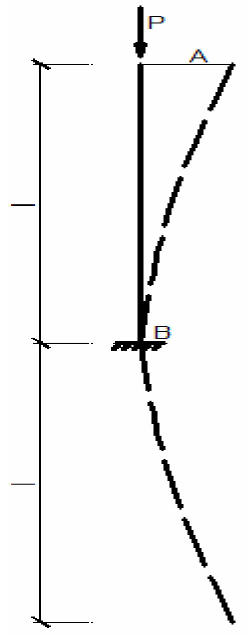

Рис. 3

Рассмотрим центрально-сжатый стержень *AB* длиной *l*, защемленный на нижнем конце. Возможная форма равновесия такого стержня при критическом значении силы *F* имеет вид, показанный на рис. 3.

Сравнивая рис. 2 и 3, устанавливаем, что стержень длиной *l* с одним защемленным концом можно рассматривать как стержень длиной 2*l* с шарнирно закрепленными концами, изогнутая ось которого показана на рис. 2 пунктиром. Следовательно, значение критической силы для стержня с одним защемленным концом можно найти, подставив в формулу (8) 2*l* вместо *l*. Тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \qquad (9)$$

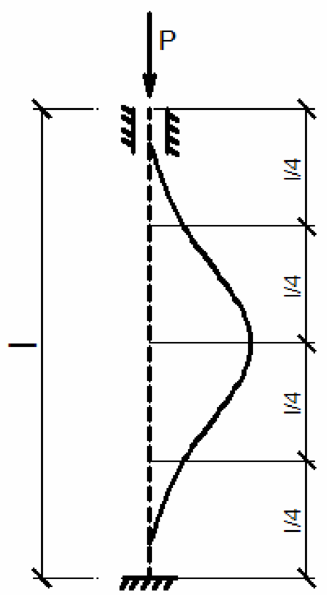

Рис. 4

Для стержня с обоими защемленными концами форма изгиба при потере устойчивости показана на рис. 4. Она симметрична относительно середины стержня; точки перегиба изогнутой оси расположены в четвертях длины стержня.

Из сопоставления рис. 3 и 4 видно, что каждая четверть длины стержня, заделанного обоими концами, находится в таких же условиях, в каких находится стержень *AB*, изображенный на рис. 3. Следовательно, значение критической силы для стержня с обоими заделанными концами можно найти, если подставить в формулу (9) l/4 вместо l/2.

Тогда

$$F_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \qquad (10)$$

Таким образом, критическая сила для стержня с шарнирно закрепленными концами в четыре раза больше, чем для стержня с одним защемленным, а другим свободным концом, и в четыре раза меньше, чем для стержня с обоими защемленными концами.

Случай шарнирного закрепления концов стержня принято называть основным. Формулы Эйлера (8), (9) и (10) для определения критической силы при различных закреплениях концов стержня можно представить в следующем виде:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \tag{11}$$

где μ – коэффициент приведения длины;

μl – приведенная длина стержня.

Коэффициент μ позволяет любой случай закрепления концов стержня свести к основному случаю, т.е. к стержню с шарнирно закрепленными концами. Для четырех наиболее часто встречающихся случаев закрепления концов стержня коэффициент μ имеет следующие значения:

– для стержня с шарнирно закрепленными концами $\mu = 1$;
– для стержня с заделанными концами $\mu = 0{,}5$;
– для стержня с одним заделанным и другим свободным концом $\mu = 2$;
– для стержня с одним заделанным и другим шарнирно закрепленным концом $\mu = 0{,}7$.

Из формулы (11) следует, что **значение критической силы прямо пропорционально жесткости *EJ* поперечного сечения стержня при изгибе и обратно пропорционально квадрату длины стержня**.

При потере устойчивости искривление стержня происходит, как правило, в плоскости, перпендикулярной главной центральной оси поперечного сечения, относительно которой момент инерции наименьший, т.е. при изгибе поперечные сечения поворачиваются вокруг этой оси. Поэтому критическую силу следует вычислять по значению главного центрального момента инерции $J_{\min}$. Исключения могут быть лишь в тех случаях, когда условия закрепления концов стержня в разных плоскостях, проходящих через его ось, различны

По значению критической силы можно определить **критическое сжимающее напряжение**, т.е. то напряжение, при котором прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой:

$$\sigma_{кр} = \frac{F}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 A}.$$

Заменив в этом выражении $J/F = i^2$ и введя обозначение

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \tag{12}$$

получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (13)$$

Величина λ, равная отношению приведенной длины стержня μl к радиусу инерции i поперечного сечения стержня, называется **гибкостью стержня**. Так как потеря устойчивости, как правило, происходит в плоскости наименьшей жесткости, то в выражение гибкости обычно входит минимальный радиус инерции $i_{\min}$ поперечного сечения.

Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

Формулы, выведенные выше, справедливы только, когда напряжения $\sigma_{кр}$ в материале, вызванные критической силой, не превышают предела пропорциональности, т.е. когда $\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}$. Это следует из того, что в основу вывода формул положено дифференциальное уравнение упругой линии, которым можно пользоваться лишь в пределах применимости закона Гука.

Подставляем в условие $\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}$ значение $\sigma_{кр}$ по формуле (13).

Из этого уравнения найдем

$$\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \qquad (14)$$

Правая часть выражения (14) представляет собой то наименьшее значение гибкости стержня, при котором формула Эйлера еще применима, – это так называемая **предельная гибкость $\lambda_{пред}$**. Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня – его модуля упругости и предела пропорциональности.

Итак, **формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня применима при условии, что его гибкость больше или равна предельной.**

Приведем значение $\lambda_{пред}$ для различных материалов.

Для стали Ст. 3 E = 2 x 10^7 Н/см^2, $\sigma_{пц}$. ~ 20000 Н/см^2, следовательно,

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^7}{20000}} \approx 100.$$

Действительные критические силы и критические напряжения для стержней, гибкость которых ниже предельной, значительно меньше величин, определяемых по формуле Эйлера. Для таких стержней критические напряжения определяются по эмпирическим формулам. Профессор

Ф.С. Ясинский предложил эмпирическую формулу критических напряжений для стержней, имеющих гибкость λ, меньшую предельной:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \tag{15}$$

где a и b – определяемые экспериментально коэффициенты, зависящие от свойств материала. Например, для стали Ст. 3

$$a \sim 31000 \text{ Н/см}^2;\ b \sim 114 \text{ Н/см}^2.$$

Постановка и порядок проведения лабораторной работы

Лабораторная установка показана на рис. 5. Критическая сила определяется при нагружении свободного конца защемленного стержня продольной нагрузкой. При росте нагрузки и достижении ею критической величины стержень отклоняется от прямолинейного положения. Невозвращение стержня в первоначальное вертикальное положение указывает на то, что стержень потерял устойчивость.

Рис. 5

Лабораторная работа проводится в следующей последовательности:

1. Измерить длину стержня l, размеры прямоугольного сечения h, b.
2. Плавно нагружать стержень, периодически отклоняя его от первоначального положения.
3. При наступлении криволинейной формы равновесия добиться наименьшей нагрузки, при которой возможна криволинейная форма равновесия.
4. Взвесить груз для определения критической силы. Опыт проделать три раза и найти среднюю величину критической силы.
5. Вычислить теоретическое значение критической силы:
   - определить для поперечного сечения стойки значение $J_{\min}$;
   - определить приведенную длину стержня $l_n = \mu l$;
   - определить гибкость стойки;
   - определить предельную гибкость стойки;
   - определить значение критической силы $F_{кр}$.

Анализ полученных результатов

Сравнить величины критической силы, определенные аналитически и экспериментально. Указать причины, повлиявшие на расхождение этих величин.

Выводы

Сделать вывод о точности определения критической силы экспериментальным путем.

Правила техники безопасности при работе на оборудовании, с приборами и инструментами

1. Проверить исправность и комплектность лабораторной установки.
2. Ознакомиться с порядком выполнения работы.

Контрольные вопросы

1. Какая сила называется критической?
2. Границы применимости формулы Эйлера.
3. Чему равен коэффициент μ для различных видов закрепления концов стержня?
4. Что называется предельной гибкостью стержня?
5. Какое практическое значение имеет определение критической силы сжатого стержня?
6. Зависит ли величина критической силы от упругих свойств материала стержня?
7. Укажите основные недостатки метода экспериментального определения критической силы при сжатии первоначально прямолинейного стержня.
8. Как определяются критические напряжения в пределах упругих деформаций и за пределом упругости?
9. Какой вид имеет график критических напряжений для стали Ст. 3?
10. Что называется потерей устойчивости центрально сжатого стержня?

Литература

1. Щербо, А.Г. Сопротивление материалов : учеб.-метод. комплекс для спец. 1-700201 / А.Г. Щербо, В.К. Родионов. – Новополоцк, УО «ПГУ», 2006. – 323 с.
2. Хмелев, А.А. Сопротивление материалов : лабораторные работы / А.А. Хмелев, В.А. Сидоров. – Минск : Технопринт, 2002. – 206 с.

Учебное издание

ЩЕРБО Александр Григорьевич

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ
КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Методические указания
к лабораторной работе по сопротивлению материалов
для студентов строительных специальностей

Редактор *Т. А. Дарьянова*

Подписано в печать 08.10.15. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 0,47. Уч.-изд. л. 0,38. Тираж 40 экз. Заказ 1407.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.14.

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.