УДК 512.542

ФОРМАЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СВОЙСТВАМИ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОРАДИКАЛОВ

В.В. ШПАКОВ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Исследуются формации, определяемые свойствами прямых произведений корадикалов. Описаны новые локальные задания формаций посредством спутников, определяемых операторами Дерка – Хоукса.

Установлено, что каждая локальная формация определяется полулокально посредством спутников, заданных оператором «^{0}». Рассматривается гипотеза, которая является дуальной к гипотезе Локетта для классов Фиттинга. Классы Фиттинга являются объектами, дуальными формациям конечных групп. Определены необходимые условия, при которых каждая локальная формация удовлетворяет гипотезе, дуальной гипотезе Локетта. В работе рассматриваются только конечные группы.

Введение. Решение многих задач описания строения классов конечных групп и их классификации связано с применением операторов Локетта «*» и «$_*$» [1]. Напомним, что каждому непустому классу Фиттинга n посредством оператора «*» сопоставляется класс $\mathfrak{F}^*$, который определяется как наименьший из всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство: $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, и посредством оператора «$_*$» – класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Заметим, что семейство классов Локетта обширно: оно содержит наследственные, обобщенно наследственные классы Фиттинга (классы Фишера), а также классы Фиттинга, замкнутые относительно гомоморфных образов или конечных подпрямых произведений (в частности, формации Фиттинга).

Основополагающий результат в теории локальных классов Фиттинга был получен Н.Т. Воробьевым в работе [2], где было установлено, что каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта и определяется посредством функций Хартли, заданных операторами Локетта.

Заметим также, что в теории классов Фиттинга известна общая проблема описания структуры классов Фиттинга как пересечения классов Локетта и нормальных классов Фиттинга, которая в настоящее время известна под названием гипотезы Локетта [1]. Напомним, что ввиду результата [3] класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, удовлетворяет гипотезе Локетта в точности тогда, когда $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. В 1988 году Н.Т. Воробьевым [4] было доказано, что каждый разрешимый локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.

Известно, что классы Фиттинга являются объектами, дуальными формациям конечных групп. Основная цель настоящей работы – дуализация указанных выше результатов Н.Т. Воробьева на случай локальных формаций. Для этой цели мы будем использовать формационные операторы «^{0}» и «$_0$», дуальные операторам Локетта, которые были впервые определены Дерком и Хоуксом [5]. Напомним, что каждой непустой формации $\mathfrak{F}$ посредством оператора «^{0}» сопоставляется класс $\mathfrak{F}^0$, который определяется как наименьшая из всех формаций, содержащих $\mathfrak{F}$, такая, что для всех групп G и H справедливо равенство: $(G\times H)^{\mathfrak{F}^0} = G^{\mathfrak{F}^0}\times H^{\mathfrak{F}^0}$, и посредством оператора «$_0$» – класс $\mathfrak{F}_0$ как пересечение всех таких формаций $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^0 = \mathfrak{F}^0$.

Формацию $\mathfrak{F}$ назовем формацией Дерка – Хоукса, или просто DH-формацией, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0$.

Некоторые результаты, связанные с исследованием свойств DH-формаций, были получены в работах Дерка – Хоукса [5] и Торреса [8], хотя систематические исследования в этом направлении до настоящего времени не производилось. Вместе с тем обширность семейства DH-формаций обусловливает тот факт, что ввиду результатов Дерка – Хоукса [5] каждая непустая разрешимая формация является DH-формацией.

В настоящей работе нами установлено, что каждая локальная формация определяется полулокально посредством спутников, заданных оператором «^{0}». Кроме того, определены достаточные условия, при которых локальная формация будет удовлетворять гипотезе, дуальной гипотезе Локетта.

В работе рассматриваются только конечные группы. В терминологии и обозначениях мы следуем монографиям Л.А. Шеметкова [6] и Дерка, Хоукса [7].

1. Предварительные сведения. Непустой класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией* [6], если он удовлетворяет двум условиям:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и N нормальная в G, тогда $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если N_1, N_2 нормальные подгруппы группы G и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то из условия 2) определения формации следует, что для каждой группы G можно однозначно определить подгруппу $G^{\mathfrak{F}}$, которую называют $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G [6], как пересечение всех тех нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$.

Произведением формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ [6] называют класс всех тех групп G, $\mathfrak{H}$-корадикал которых является $\mathfrak{F}$-подгруппой.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-*проектором* группы G, если HN/N – $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа группы G для любой нормальной подгруппы N группы G.

Мы будем использовать следующее известное свойство корадикалов произведения формаций.

ЛЕММА 1.1 [7, IV.1.8]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– формации. Тогда* $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = \left(G^{\mathfrak{F}}\right)^{\mathfrak{H}}$.

Напомним, что всякое отображение f множества P всех простых чисел во множество формаций называют *локальным спутником* [6]. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *локальной* [6], если существует такой локальный спутник f, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi} \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p) \right)$, где $\pi = Supp(f) = \{p \in P : f(p) \neq \varnothing\}$ *– носитель* f.

Локальный спутник f формации $\mathfrak{F}$ называют:

1) *внутренним*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, для всех $p \in P$;

2) *полным*, если $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$, для всех $p \in P$;

3) *каноническим*, если он является одновременно полным и внутренним;

Формация $\mathfrak{F}$ определяется *полулокально* [6], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi} \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'} f(p) \right)$ для некоторого локального спутника f.

Пусть $\mathfrak{X}$ – формация. Тогда оператор E_{Φ} определяется для $\mathfrak{X}$ равенством:

$$E_{\Phi}\mathfrak{X} = (G : \exists K \triangleleft G, K \subseteq \Phi(G) \text{ и } G/K \in \mathfrak{X}).$$

Если $\mathfrak{X} = E_{\Phi}\mathfrak{X}$, то формацию $\mathfrak{X}$ называют *насыщенной*.

Одним из основных результатов теории формации представляет

ЛЕММА 1.2 [7, IV.3.3]. *Непустая формация* $\mathfrak{F}$ *локальна в точности тогда, когда* $\mathfrak{F}$ *насыщенна.*

Приведем теперь в качестве следующей леммы известные свойства операторов «^{0}» и «$_0$», которые мы будем использовать.

ЛЕММА 1.3 [5, 8]. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *– непустые формации. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}^0 \subseteq \mathfrak{H}^0$ *и* $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{H}_0$;

2) *если* $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ *– множество непустых формаций* $\mathfrak{F}_i$, *то* $\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right)^0 = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i^0$;

3) $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}^0} \subseteq Z\left(G/G^{\mathfrak{F}^0}\right)$ *для любой группы* G;

4) $\mathfrak{F}_0 = (\mathfrak{F}_0)_0 = (\mathfrak{F}^0)_0 \subseteq \mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{F}_0)^0 = (\mathfrak{F}^0)^0 \subseteq E_{\Phi}\mathfrak{F}$;

5) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ *и* $G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{H}} \subseteq Z\left(G/G^{\mathfrak{H}}\right)$ *для любой группы* G, *то* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^0$.

2. DH-операторы и локальные формации. Напомним, что оператор «^{0}» – это отображение, сопоставляющее каждой непустой формации $\mathfrak{F}$ наименьшую из формаций $\mathfrak{F}^0$, содержащую $\mathfrak{F}$ такую, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)^{\mathfrak{F}^0} = G^{\mathfrak{F}^0} \times H^{\mathfrak{F}^0}$, и оператор «$_0$» – отображение, сопоставляющие $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F}_0$ как пересечение всех таких формаций $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^0 = \mathfrak{F}^0$. Такие операторы в дальнейшем будем называть операторами Дерка – Хоукса, или DH-операторами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 *Формацию* $\mathfrak{F}$ *назовем формацией Дерка – Хоукса, или просто DH-формацией, если* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0$.

ЛЕММА 2.2. *Каждая локальная формация является DH-формацией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Тогда по утверждению 4 леммы 1.3 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^0$. С другой стороны, применяя снова утверждение 4 леммы 1.3, получаем $\mathfrak{F}^0 \subseteq E_\Phi \mathfrak{F}$. Но по лемме 1.2 $\mathfrak{F} = E_\Phi \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0$. Лемма доказана.

Следующая лемма описывает свойства произведений DH-формаций и представляет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2.3. *Для любых формаций* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) $\left(\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}\right)^0 = \left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0$;

2) *если* $\mathfrak{H}$ *является DH-формацией, то* $\mathfrak{F}^0\mathfrak{H} = \left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0$;

3) произведение двух любых DH-формаций является DH-формацией.

Доказательство. 1) Если одна из формаций $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ пустая, то лемма очевидна. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые формации. Так как по утверждению 4 леммы 1.3 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^0$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^0\mathfrak{H}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.3 имеет место включение $\left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0 \subseteq \left(\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}\right)^0$.

Докажем обратное включение: $\left(\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}\right)^0 \subseteq \left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0$. Используя лемму 1.1, получаем, что $G^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}} = \left(G^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0}$, и по лемме 1.1 $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = \left(G^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}}$ для любой группы G. Но тогда если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^0$, следует, что $\left(G^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0} \subseteq \left(G^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}}$, и поэтому по утверждению 3 леммы 1.3 $\left(G^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}} \Big/ \left(G^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0} \subseteq Z\left(G \Big/ \left(G^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0}\right)$ для любой группы G. Отсюда по утверждению 5 леммы 1.3 имеет место включение $\left(\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}\right)^0 \subseteq \left(\left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0\right)^0$. Теперь по утверждению 4 леммы 1.3 $\left(\left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0\right)^0 = \mathfrak{F}\mathfrak{H}^0$. Следовательно, применяя утверждение 1 леммы 1.3, имеем $\left(\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}\right)^0 \subseteq \left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0$, и первое утверждение леммы доказано.

2) Для доказательства второго утверждения, ввиду 1), достаточно выяснить, что имеет место равенство $\left(\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}\right)^0 = \mathfrak{F}^0\mathfrak{H}$. Пусть G и H – любые группы, и $(G \times H)^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}$-корадикал группы $G \times H$. Используя лемму 1.1, имеем равенство: $(G \times H)^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}} = \left(\left(G \times H\right)^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0}$. Но по условию $\mathfrak{H}$ – DH-формация. Следовательно, $\left(\left(G \times H\right)^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0} = \left(G^{\mathfrak{H}} \times H^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0}$. Так как по утверждению 4 леммы 1.3 $\left(\mathfrak{F}^0\right)^0 = \mathfrak{F}^0$, то $\mathfrak{F}^0$ – DH-формация. Теперь, используя лемму 1.1, получаем равенство $\left(G^{\mathfrak{H}} \times H^{\mathfrak{H}}\right)^{\mathfrak{F}^0} = G^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}} \times H^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}}$. Следовательно, для любых групп G и H имеет место равенство: $(G \times H)^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}} \times H^{\mathfrak{F}^0\mathfrak{H}}$. Это означает, что $\mathfrak{F}^0\mathfrak{H} = \left(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\right)^0$, и второе утверждение доказано.

3) Доказательство данного утверждения вытекает непосредственно из утверждения 2).

Лемма доказана

ЛЕММА 2.4. *Если* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация, то произведение* $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}$ *– локальная формация для любого множества* $\pi \subseteq P$.

Доказательство. Если $\pi = \varnothing$, то $\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{E}$ и формация $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$. Но $\mathfrak{E} = LF(f)$ для локального спутника f такого, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для всех $p \in P$. Аналогично, доказывается справедливость леммы и в случае, когда $\pi = P$.

Пусть $LF(f)$ – локальная формация с локальным спутником f таким, что

$$f(p)=\begin{cases}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}, \text{ если } p\in\pi;\\ \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}, \text{ если } p\in\pi'.\end{cases}$$

Тогда $LF(f)=\mathfrak{E}_P\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}\right)\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi'}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}\right)$.

Учитывая тот факт, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{\pi}=\mathfrak{E}_{\pi}$ для всех $p\in\pi$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathfrak{E}_{\pi'}$ для все $p\in\pi'$, получаем: $LF(f)=\mathfrak{E}\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}\right)\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi'}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}\right)$.

Отсюда следует, что $LF(f)=\left(\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}\right)\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}\right)\bigcap\left(\left(\bigcap_{p\in\pi'}\mathfrak{E}_{p'}\right)\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}\right)$.

Значит, $LF(f)=\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}\bigcap\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}$, и поэтому $LF(f)=\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. *Если формация* $\mathfrak{F}$ *такова, что* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$ *для некоторого* $p\in P$, *то* $\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}\right)^0=\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}^0$.

Доказательство. По утверждению 4 леммы 1.3, для любой формации $\mathfrak{F}$ имеет место включение $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}^0$. Следовательно, для любой группы G, по свойству корадикалов $G^{\mathfrak{F}^0}\subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, если $G^{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{E}_{p'}$, то и $G^{\mathfrak{F}^0}\in\mathfrak{E}_{p'}$, так как $\mathfrak{E}_{p'}$ – нормально-наследственная формация. Значит, $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}^0$.

Докажем обратное включение. По свойству произведений формаций $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}$. Тогда по утверждению 1 леммы 1.3 получаем $\mathfrak{F}^0\subseteq\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}\right)^0$. Так как $\mathfrak{E}_{p'}$ – нормально-наследственная формация, то $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}^0\subseteq\mathfrak{E}_{p'}\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}\right)^0$. По условию $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$, для некоторого $p\in P$, значит $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}=\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$. Но по лемме 2.4 формация $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ является локальной. Следовательно, по лемме 2.2 $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}$ является DH-формацией. Используя ассоциативность умножения формаций и тот факт, что $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_{p'}=\mathfrak{E}_{p'}$, получаем:

$$\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}^0\subseteq\mathfrak{E}_{p'}\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}\right)^0=\mathfrak{E}_{p'}\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}\right)^0=\mathfrak{E}_{p'}\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}\right)=\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}=\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}\right)^0=\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}\right)^0.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. *Пусть* f *– локальный спутник. Определим DH-спутники* f^0 *и* f_0 *следующим образом:* $f_0(p)=\left(f(p)\right)_0$ *и* $f^0(p)=\left(f(p)\right)^0$ *для всех* $p\in P$.

Заметим, что каждая формация определяется полулокально, хотя существуют DH-формации, определяемые полулокально, которые нелокальны. Это подтверждает следующий пример.

ПРИМЕР 2.7. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная формация и f такой локальный спутник, что $f(p)=\mathfrak{X}$ для всех $p\in P$. Тогда $Supp(f)=P$ и $SLF(f)=\bigcap_{p}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{X}=\left(\bigcap_{p}\mathfrak{E}_{p'}\right)\mathfrak{X}=(1)\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$, где (1) – формация единичных групп. Таким образом, любая формация $\mathfrak{X}$ определяется полулокально.

Пусть теперь $\mathfrak{X}=\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ – произведение формаций всех абелевых и всех нильпотентных групп. Так как $\mathfrak{X}$ – разрешимая формация, то $\mathfrak{X}$ является DH-формацией и определяется полулокально. Выберем группу G, равную полупрямому произведению группы кватернионов Q_8 и Z_3 – циклической группы порядка 3. Очевидно, $Z(Q_8)=C_2$. Так как Q_8 нормальная подгруппа из G и Z_2 содержится в подгруппе Фраттини группы Q_8, то $Z_2\subseteq\Phi(G)$. Тогда из того, что $G/Z_2\cong A_4\in\mathfrak{X}$, где A_4 – знакопеременная группа из четырех символов, следует $G/\Phi(G)\in\mathfrak{X}$. Но $G\notin\mathfrak{X}$, так как $G^{\mathfrak{N}}=Q_8\notin\mathfrak{A}$. Следовательно, формация $\mathfrak{X}$ не является насыщенной и поэтому по лемме 1.2 не является локальной.

Напомним, что если f – локальный спутник, то DH-спутник f^0 определяется равенством $f^0(p)=\left(f(p)\right)^0$ для всех $p\in P$.

Следующая теорема показывает, что любая локальная формация определяется полулокально DH-спутниками.

ТЕОРЕМА 2.8. *Если f – полный локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} = SLF(f^0)$.*

Доказательство. Пусть f – такой локальный спутник, что $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ для всех $p \in P$ и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Докажем, что $\mathfrak{F} = SLF(f^0)$. По условию локальный спутник f – полный. Следовательно, $\mathfrak{F}$ определяется полулокально f, т.е. $\mathfrak{F} = SLF(f) = \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'} f(p) \right)$, где $\pi = Supp(f)$. Значит, $\mathfrak{F}^0 = \left(\mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'} f(p) \right) \right)^0$. По утверждению 2 леммы 1.3 $\mathfrak{F}^0 = (\mathfrak{E}_\pi)^0 \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'} f(p) \right)^0$. Так как $\mathfrak{E}_\pi = LF(\varphi)$ для локального спутника φ такого, что $\varphi(p) = \begin{cases} \mathfrak{E}_\pi, \text{ если } p \in \pi; \\ \varnothing, \text{ если } p \in \pi', \end{cases}$ то по лемме 2.2 $\mathfrak{E}_\pi = \mathfrak{E}_\pi^0$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'} f(p) \right)^0$. Теперь по утверждению 2 леммы 1.3 $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \left(\mathfrak{E}_{p'} f(p)\right)^0 \right)$. Но $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ для всех $p \in P$. Следовательно, по лемме 2.5 $\left(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)\right)^0 = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p \left(f(p)\right)^0 = \mathfrak{E}_{p'}\left(f(p)\right)^0$ для всех $p \in \pi$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{E}_{p'} \left(f(p)\right)^0 \right)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{F} = SLF\left(f^0\right)$. Теорема доказана.

Локальный спутник F формации $\mathfrak{F}$ называют каноническим или наибольшим внутренним, если $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in P$.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Каждая локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется полулокально внутренним DH-спутником F^0.*

Доказательство. По теореме IV.3.8 [7] каждая локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется каноническим спутником F. Тогда, из того что $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$, по утверждению 2 леммы 1.3, следует $F^0(p) = \left(\mathfrak{N}_p F(p)\right)^0 \subseteq \mathfrak{F}^0$. Но по лемме 2.2 $\mathfrak{F}$ является DH-формацией. Следовательно, по теореме 2.8 $\mathfrak{F} = SLF(f^0)$ для внутреннего локального DH-спутника F^0.

3. Дуальная $\mathfrak{L}$-гипотеза для формаций

Напомним, что Локеттом [1] была сформулирована следующая проблема, которая в настоящее время известна как

Гипотеза Локетта [1]: *Каждый ли разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением некоторого нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}^*$?*

Ввиду результата Брайса – Косси [3] данная гипотеза эквивалентна тому, что для каждого разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливо равенство:

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*,$$

где $\mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий гипотезе Локетта, будем называть $\mathfrak{L}$-классом.

Следующий обобщенный вариант гипотезы Локетта был предложен Дерком и Хоуксом в [7, X.1.19].

$\mathfrak{L}_\mathfrak{X}$ **-гипотеза.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Каковы классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$, для которых справедливо равенство: $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*$?*

В связи с этим в теории формаций естественной является формулировка следующих двух гипотез.

Дуальная $\mathfrak{L}$-гипотеза. *Верно ли, что каждая формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет равенству: $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}^0 \cap \mathfrak{E}_0$.*

Дуальная $\mathfrak{L}_\mathfrak{X}$-гипотеза. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – формации, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Каковы формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$, для которых справедливо равенство: $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}^0 \cap \mathfrak{X}_0$?*

Формацию $\mathfrak{F}$, удовлетворяющую дуальной $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-гипотезе, будем называть $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-*формацией.*

Для определения условий, когда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-формацией, мы будем использовать понятие формационного произведения 2-го рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [9]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация и* $\mathfrak{H}$ *– формация. Тогда формацию* $\mathfrak{F}*_2\mathfrak{H}$, *состоящую из всех групп* G, *для которых* $\mathfrak{F}$ *проектор существует и принадлежит* $\mathfrak{H}$, *называют формационным произведением второго рода.*

Ввиду результатов Дерка и Хоукса [7, VI.1.2] для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ и формации $\mathfrak{H}$ класс $\mathfrak{F}*_2\mathfrak{H}$ является формацией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Пусть* $\mathfrak{F}=LF(f)$ *для некоторого локального спутника* f. *Класс групп* $\mathfrak{X}$ *назовем f-проективно замкнутым, если* $\mathrm{Proj}_{f(p)}(G)\neq\varnothing$ *и* $\mathfrak{X}\subseteq f(p)*_2\mathfrak{X}$ *для всех* G *и простых* $p\in\pi(\mathfrak{F})$.

Приведем примеры проективно замкнутых классов.

ПРИМЕР 3.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, определяемая локально внутренним спутником *f*, такая, что $\mathrm{Proj}_{f(p)}(G)\neq\varnothing$ для всех G и простых $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Тогда формация $\mathfrak{H}$ является *f*-проективно замкнутой в каждом из следующих случаев:

1) $f(p)\subseteq\mathfrak{H}$ для всех $p\in Supp(f)$;

2) если $\mathfrak{H}$ – наследственная формация.

Проверим *f*-проективную замкнутость $\mathfrak{H}$ в случае 1). Пусть F – $f(p)$-проектор группы $G\in\mathfrak{H}$. Очевидно, $F\in f(p)\subseteq\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}\subseteq f(p)*_2\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ для всех $p\in\pi(\mathfrak{F})$ и формация $\mathfrak{H}$ является f-проективно замкнутой.

2) Пусть $G\in\mathfrak{H}$ и подгруппа F группы G ее $f(p)$-проектор. Тогда ввиду наследственности $\mathfrak{H}$ следует $F\in\mathfrak{H}$. Получаем $\mathfrak{H}\subseteq f(p)*_2\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ для всех $p\in\pi(\mathfrak{F})$ и формация $\mathfrak{H}$ является *f*-проективно замкнутой.

Замечание 3.4. Ввиду теоремы IV.1.18 [7] и теоремы 3.10 [5], если формация $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^0$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^0$. По утверждению 4) леммы 1.3 $\mathfrak{F}_0\subseteq\mathfrak{F}$. Тогда по теореме IV.1.18 [7] для формации $\mathfrak{F}_0$ справедливо равенство: $(G\times G)^{\mathfrak{F}_0}=G^{\mathfrak{F}_0}\times G^{\mathfrak{F}_0}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_0$ – DH-формация и $(\mathfrak{F}_0)^0=\mathfrak{F}_0$. С другой стороны, по утверждению 4 леммы 1.3 $(\mathfrak{F}_0)^0=\mathfrak{F}^0$. Но $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$ – DH-формация. Следовательно, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0$. Аналогично для формации $\mathfrak{X}$ справедливо равенство: $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_0$. Значит, для формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ имеет место равенство: $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}^0\cap\mathfrak{X}_0$, поэтому любая разрешимая формация является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-формацией.

Следующая теорема определяет в общем случае достаточные условия, когда локальная формация является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-формацией.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть формация* $\mathfrak{F}=LF(f)$ *и* $\mathfrak{X}$ *таковы, что* $\mathfrak{X}$ *– f-проективно замкнута, а класс* $\mathfrak{E}_{p'}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0$ *является DH-формацией для всех* $p\in\pi(\mathfrak{F})$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}_0=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0$;

2) *если* $\mathfrak{F}$ *– является подформацией* $\mathfrak{X}$, *то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-*формацией.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что f – полный внутренний локальный спутник формации $\mathfrak{F}$

1) Так как $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{X}$, то по утверждению 1 леммы 1.3 $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0\subseteq\mathfrak{X}_0$. Учитывая, что $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$, получаем $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0\subseteq\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}_0$.

Докажем обратное включение. Пусть G – группа из $\mathfrak{X}$ и F – $f(p)$-проектор группы G, где $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Тогда $F\in f(p)\cap\mathfrak{X}$, и поэтому ввиду того, что локальный спутник f внутренний, $F\in\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}$. Но $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}$ по утверждению 4 леммы 1.3 является подформацией $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})^0$. Следовательно по утверждению 1 леммы 1.3 получаем, что $F\in\mathfrak{E}_{p'}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})^0$.

Покажем, что $\mathfrak{E}_{p'}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})^0\subseteq\mathfrak{E}_{p'}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0$.

По утверждению 4 леммы 1.3 следует $((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0)^0=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})^0$.

Так как $(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\subseteq \mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$, то, используя утверждения 1 и 4 леммы 1.3, получаем $(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})^0\subseteq\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\right)^0$.

Но $\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{H})_0\right)^0$ является DH-формацией и поэтому $\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\right)^0=\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$.

Значит, $\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})^0\subseteq\mathsf{E}_{p'}\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$.

Учитывая тот факт, что $\mathsf{E}_{p'}\mathsf{E}_{p'}=\mathsf{E}_{p'}$, и свойство ассоциативности умножения формаций, получаем $\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})^0\subseteq\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$.

Следовательно, $F\in\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})^0\subseteq\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$. Значит, $G\in f(p)*_2\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\right)$.

Итак, мы показали, что $\mathsf{X}\subseteq f(p)*_2\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\right)$. Следовательно, по утверждению 4 леммы 1.3 получаем $\mathsf{X}_0\subseteq f(p)*_2\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\right)$.

Значит, $f(p)\cap\mathsf{X}_0\subseteq\left(f(p)*_2\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\right)\right)\cap f(p)$. Так как для любой группы $G\in\left(f(p)*_2\left(\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0\right)\right)\cap f(p)$ ее $f(p)$-проектор совпадает с G, то по определению формационного произведения 2-го рода получаем, что $G\in\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$. Следовательно, $f(p)\cap\mathsf{X}_0\subseteq\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$. Отсюда следует, что $\mathsf{E}_{p'}\left(f(p)\cap\mathsf{X}_0\right)\subseteq\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$. Таким образом, $\mathsf{E}_{p'}f(p)\cap\mathsf{E}_{p'}\mathsf{X}_0\subseteq\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$ для всех простых $p\in\pi(\mathsf{F})$. Следовательно, $\bigcap\limits_{p\in\pi(\mathsf{F})}\left(\mathsf{E}_{p'}f(p)\cap\mathsf{E}_{p'}\mathsf{X}_0\right)\subseteq\bigcap\limits_{p\in\pi(\mathsf{F})}\mathsf{E}_{p'}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$. Теперь, учитывая полноту локального спутника *f*, имеем:

$$\mathsf{E}_{\pi(\mathsf{F})}\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi(\mathsf{F})}\left(\mathsf{E}_{p'}f(p)\cap\mathsf{E}_{p'}\mathsf{X}_0\right)\right)\subseteq\mathsf{E}_{\pi(\mathsf{F})}\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi(\mathsf{F})}\left(\mathsf{E}_{p'}f(p)\right)\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi(\mathsf{F})}\mathsf{E}_{p'}\mathsf{X}_0\right)\right)=\mathsf{F}\bigcap\left(\bigcap_{p\in\pi(\mathsf{F})}\mathsf{E}_{p'}\mathsf{X}_0\right).$$

Но, тогда $\mathsf{F}\bigcap\left(\bigcap\limits_{p\in\pi(\mathsf{F})}\mathsf{E}_{p'}\mathsf{X}_0\right)\subseteq\mathsf{E}_{\pi}\bigcap\left(\bigcap\limits_{p\in\pi(\mathsf{F})}\mathsf{E}_{p'}\right)(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$.

Следовательно, $\mathsf{F}\bigcap\mathsf{E}_{\pi'(\mathsf{F})}\mathsf{X}_0\subseteq\mathsf{E}_{\pi(\mathsf{F})}\bigcap\mathsf{E}_{\pi'(\mathsf{F})}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$.

Так как $\mathsf{X}_0\subseteq\mathsf{E}_{\pi'(\mathsf{F})}\mathsf{X}_0$, то $\mathsf{F}\bigcap\mathsf{X}_0\subseteq\mathsf{F}\bigcap\mathsf{E}_{\pi'(\mathsf{F})}\mathsf{X}_0$. Кроме того $\mathsf{E}_{\pi(\mathsf{F})}\bigcap\mathsf{E}_{\pi'(\mathsf{F})}(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0=(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$. Значит, $\mathsf{F}\cap\mathsf{X}_0\subseteq(\mathsf{F}\cap\mathsf{X})_0$.

2) Данное утверждение теоремы непосредственно вытекает из 1).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lockett, P. Fitting class H, / P. Lockett // Mathematische Zeitschrift. – 1974. – Band 137, № 2. – P. 131 – 136.
2. Воробьев, Н.Т. О локальных радикальных классах / Н.Т. Воробьев // Вопросы алгебры. – 1986. – № 2. – С. 41 – 50.
3. Bryce, R.A. A problem in Theory of Normal Fitting classes / R.A. Bryce, J.A. Cossey // Mathematische Zeitschrift. – 1975. – Band 141, № 2. – S. 99 – 110.
4. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161 – 167.
5. Doerk, K. On the residual of a direct product / K. Doerk, T. Hawkes // Arch. Math. – 1978. – Band. 30, № 5. – S. 458 – 468.
6. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
7. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. Torres, I.M. Residual of direct products and relative normality in formations / I.M. Torres // Comm. Algebra. – 1985. – Vol. 13, № 2. – P. 375 – 386.
9. Воробьев, Н.Т. Максимальные экраны локальных формаций / Н.Т. Воробьев // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 23, № 2. – С. 137 – 161.

Поступила 05.12.2007