УДК 512.542

О НАСЛЕДСТВЕННО *G*-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУППАХ СПОРАДИЧЕСКИХ ГРУПП

д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ТЮТЯНОВ, П.В. БЫЧКОВ
(Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины)

А.Н. Скибой введено понятие G-перестановочной и наследственно G-перестановочной подгруппы группы G. В частности, А.Н. Скибой был поставлен вопрос, является ли непростой конечная группа G, имеющая собственную наследственную G-перестановочную подгруппу. После завершения классификации простых неабелевых групп естественно рассмотреть данный вопрос для простых спорадических групп, знакопеременных групп и простых групп лиевского типа. В настоящей работе исследуется проблема о существовании в простой спорадической группе G собственной наследственно G-перестановочной подгруппы. Доказано, что простая спорадическая группа G не имеет собственной наследственно G-перестановочной подгруппы. Также доказано, что группы M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Co_3, Co_2, Co_1, J_3, HS, M^cL, O'N, Ru, HN, B, M не имеют собственной G-перестановочной подгруппы. Группа J_1 имеет собственную G-перестановочную подгруппу порядка 2.

Введение. Все группы, рассматриваемые в этой работе, являются конечными. Следующие определения можно найти в работе А.Н. Скибы [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть *G* – конечная группа и $L \le G$. Подгруппа *L* называется *G*-перестановочной, если для всякой подгруппы $H \le G$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $LH^g = H^gL$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть *G* – конечная группа и $L \le G$. Подгруппа *L* называется наследственно *G*-перестановочной, если для всякой подгруппы $T \le G$ такой, что $L \le T$, подгруппа *L* является *T*-перестановочной.

В работе [1] была поставлена следующая проблема:

ПРОБЛЕМА 2.41 [1]. Описать простые неабелевы группы *G*, которые имеют нетривиальную *G*-перестановочную подгруппу.

Хорошо известно, что имеется бесконечно много простых неабелевых групп *G* с собственной *G*-перестановочной подгруппой. Тем не менее неизвестны примеры простых неабелевых групп *G* с собственной наследственно *G*-перестановочной подгруппой.

В работе доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть *G* – простая спорадическая группа. Тогда группа *G* не имеет собственной наследственно *G*-перестановочной подгруппы.

Обозначения, принятые в работе, в основном стандартны, их можно найти в [2, 3]. Напомним некоторые из них:

- если *G* – конечная группа, то $\pi(G)$ – множество всех простых делителей $|G|$;
- запись $L <\cdot G$ означает, что *L* является максимальной подгруппой группы *G*;
- $G = AB$ – группа *G* есть произведение двух своих подгрупп *A* и *B*;
- $[A]B$ – полупрямое произведение подгрупп *A* и *B*, *A* – нормальная подгруппа;
- если *m* и *n* – натуральные числа, то (m, n) – наибольший общий делитель чисел *m* и *n*.

Доказательство основного результата

ТЕОРЕМА 1. Пусть *G* – простая спорадическая группа. Тогда группа *G* не имеет собственной наследственно *G*-перестановочной подгруппы.

Мы будем последовательно рассматривать все спорадические группы *G*, показывая, что ни одна из них не обладает собственной наследственно *G*-перестановочной подгруппой. Всюду далее подгруппа *L* группы *G* это собственная наследственно *G*-перестановочная подгруппа в *G*. Часто используется тот факт, что в группе *G* всякая наследственно *G*-перестановочная подгруппа является *G*-перестановочной подгруппой, а поэтому, если в группе *G* нет собственной *G*-перестановочной подгруппы, то в *G* нет собственной наследственно *G*-перестановочной подгруппы.

1. $G = M_{11}$, $|G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа M_{11} допускает только следующие максимальные факторизации: $M_{11} = L_2(11)M_{10} = L_2(11)(M_9 : 2)$. Для некоторого $g \in G$ имеем $LS_5^g = S_5^gL$. Если *L* не является подгруппой $S_5{}^g$, тогда в силу максимальности S_5^g в G имеем, что $G = LS_5^g$. Однако группа M_{11} такой факторизации не имеет. Таким образом, $L \le S_5^g$. Точно так же показывается, что $L \le (2.S_4)^h$ для некоторого $h \in G$.

Отсюда следует, что $L \le S_5^g \bigcap (2.S_4)^h$ и $\pi(L) \subseteq \{2,3\}$. Для некоторого $g \in G$ имеет место факторизация $LZ_{11}^g = Z_{11}^g L$. Так как $\pi(L) \subseteq \{2,3\}$, то $LZ_{11}^g \ne G$. Таким образом, в M_{11} существует собственная подгруппа $T = LZ_{11}^g$, для которой $\pi(T)$ есть одно из следующих множеств: $\{2,3,11\}$, $\{3,11\}$, $\{2,11\}$. Из списка максимальных подгрупп [3] заключаем, что подгруппы T с таким свойством в группе M_{11} нет. Следовательно, группа M_{11} не имеет собственной G-перестановочной подгруппы.

2. $G = M_{12}$, $|G| = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа M_{12} допускает только следующие максимальные факторизации:

$$M_{12} = M_{11}M_{11} = M_{11}(M_{10} : 2) = M_{11}L_2(11) = M_{11}(M_9 : S_3) = M_{11}(2 \times S_5) =$$
$$= M_{11}(4^2 : D_{12}) = M_{11}(A_4 \times S_3) = L_2(11)(M_{10} : 2) = L_2(11)(M_9 : S_3).$$

Группа M_{12} содержит максимальную подгруппу $M_8.S_4 \cong 2_+^{1+4}.S_3$, и данная подгруппа не является сомножителем ни в какой максимальной факторизации группы M_{12}. Так как для некоторого $g \in G$ имеем $L(M_8.S_4)^g = (M_8.S_4)^g L$, то $L \le (M_8.S_4)^g$ и $\pi(L) \subseteq \{2,3\}$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то для некоторого $g \in G$ получаем $LZ_{11}^g = Z_{11}^g L$. Поскольку $\pi(L) \subseteq \{2,3\}$, то $LZ_{11}^g = Z_{11}^g L \ne G$. Таким образом, в M_{12} существует собственная подгруппа $T = Z_{11}^g L$, для которой $\pi(T)$ есть одно из следующих множеств: $\{2,3,11\}$, $\{3,11\}$, $\{2,11\}$. Из списка максимальных подгрупп [3] заключаем, что подгруппы T с таким свойством в группе M_{12} нет. Поэтому группа M_{12} не обладает собственной G-перестановочной подгруппой.

3. $G = M_{22}$, $|G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа M_{22} не имеет факторизаций. Поэтому для любой максимальной подгруппы M группы M_{22} найдется элемент $g \in G$ такой, что $L^g \le M$. Следовательно, $|L|$ делит числа: $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $2^7 \cdot 3 \cdot 5$; $2^6 \cdot 3 \cdot 7$; $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Отсюда следует, что $|L|$ делит число $2^2 \cdot 3$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то для некоторого $g \in G$ имеем $LZ_{11}^g = Z_{11}^g L \ne G$. Таким образом, в группе M_{22} существует подгруппа одного из следующих порядков: $2 \cdot 11$; $2^2 \cdot 11$; $3 \cdot 11$; $2 \cdot 3 \cdot 11$; $2^2 \cdot 3 \cdot 11$. Из списка максимальных подгрупп группы M_{22} [3] следует, что подгрупп таких порядков в M_{22} нет. Таким образом, группа M_{22} не имеет собственных G-перестановочных подгрупп.

4. $G = M_{23}$, $|G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа M_{23} допускает только следующие максимальные факторизации: $M_{23} = (23 : M)M_{22} = (23 : 11)(M_{21}.2) = (23 : 11)(2^4 : A_7)$. Поскольку максимальные подгруппы, отличные от тех, которые принимают участие в факторизации, содержат L, то $L \in \{A_8, M_{11}, 2^4 : (3 \times A_5) : 2\}$. Отсюда следует, что $|L|$ делит числа: $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$; $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$. Таким образом, $|L|$ делит число $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Так как группа L – G-перестановочная подгруппа, то найдется $g \in G$ для которого группа $LZ_{23}^g = Z_{23}^g L \ne G$. Из списка максимальных подгрупп [3] ясно, что таких собственных подгрупп в M_{23} нет. Таким образом, группа M_{23} не имеет собственных G-перестановочных подгрупп.

5. $G = M_{24}$, $|G| = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа M_{24} допускает только следующие максимальные факторизации:

$$M_{24} = M_{23}(M_{12} : 2) = M_{23}(2^6 : 3 \cdot S_6) = M_{23}L_2(23) = M_{23}(2^6 : (L_3(2) \times S_3)) =$$
$$= M_{23}L_2(7) = L_2(23)(M_{22} : 2) = L_2(23)(2^4 : A_8) = L_2(23)(L_3(4) : S_3).$$

Если *23* делит $|L|$, то L содержится в M_{24} или $L_2(23)$. Пусть сначала $L \le M_{23}$. Если $L = M_{23}$ то M_{23} перестановочна с любой максимальной подгруппой (с точностью до сопряжения), что невозможно. Таким образом, $L \le 23 : 11$. Если $L = Z_{23}$, то группа M_{24} имеет холлову *23′*-подгруппу. Однако в списке

максимальных подгрупп группы M_{24} [3] таких подгрупп нет. Поэтому $L = 23:11$. Из G – перестановочности L следует, что имеется подгруппа порядка $2^{10} \cdot 11 \cdot 23$. Таких подгрупп M_{24} не имеет. Случай $L \le L_2(23)$ рассматривается аналогично. Таким образом, $(|L|,\ 23) = 1$. Рассмотрим собственную подгруппу $T = Z_{23}^g L = LZ_{23}^g$. Очевидно, что $T \le M_{23}$ или $T \le L_2(23)$. Пусть сначала $T \le M_{23}$. Если $T = M_{23}$, тогда $L = M_{22}$. Поскольку $L = M_{22}$ не является подгруппой группы $L_2(7) < \cdot M_{24}$, то для некоторого $g \in G$ имеем, что $M_{24} = M_{22}L_2(7)^g = L_2(7)^g M_{22}$ и $|M_{24}|$ не делится на *23*, что невозможно. Поэтому $T < M_{23}$ и $T = 23:11$, при этом $L = Z_{11}$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то для некоторого $g \in G$ имеем $LS_2^g = S_2^g L$, где $S_2 \in Syl_2(G)$. Поэтому в M_{24} имеется подгруппа порядка $2^{10} \cdot 11$. Последнее невозможно. Таким образом, $T \le L_2(23)$. Если $T = L_2(23)$, то группа $L_2(23)$ имеет холлову 23'-подгруппу. Из [3] следует, что это невозможно. Поэтому $T = 23:11$ и $|L| = 11$. Поскольку L не является подгруппой группы $L_2(7) < \cdot M_{24}$, то $M_{24} = Z_{11}L_2(7)$, что невозможно. Таким образом, группа M_{24} не имеет собственных G-перестановочных подгрупп.

6. $G = Co_3$, $|G| = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа Co_3 не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок любой максимальной подгруппы группы Co_3. Следовательно, $|L|$ делит число $2^4 \cdot 3^2$. Так как L – G-перестановочная подгруппа в Co_3, то для некоторого $g \in G$ существует подгруппа $T = LZ_{23}^g = Z_{23}^g L \ne G$. Из списка максимальных подгрупп [3] заключаем, что $T < M_{23}$. Однако группа M_{23} содержит один класс сопряженных собственных подгрупп $23:11$, порядок которых делится на 23. Таким образом, включение $T < M_{23}$ невозможно, и группа Co_3 не имеет собственных G-перестановочных подгрупп.

7. $G = Co_2$, $|G| = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа Co_2 не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок любой максимальной подгруппы группы Co_2. Следовательно, $|L|$ делит число $2^5 \cdot 3 \cdot 5$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то в группе Co_2 существует собственная подгруппа $T = LZ_{23}^g = Z_{23}^g L$ для некоторого $g \in G$. Из списка максимальных подгрупп заключаем, что $T < M_{23}$. Однако группа M_{23} содержит один класс сопряженных собственных подгрупп $23:11$, порядок которых делится на 23. Таким образом, включение $T < M_{23}$ невозможно, и группа Co_2 не имеет собственных G-перестановочных подгрупп.

8. $G = Co_1$, $|G| = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа Co_1 допускает только следующие максимальные факторизации: $Co_1 = Co_2(3.Suz.2) = Co_2(A_4 \times G_2(4)).2 = Co_3(3.Suz.2) = Co_3(A_4 \times G_2(4)).2$. В данном случае $|L|$ делит число $2^3 \cdot 3$. Так как L – G-перестановочная подгруппа в Co_1, то найдется $g \in G$ для которого $T = LZ_{23}^g = Z_{23}^g L < Co_1$. Очевидно, что T является разрешимой группой. Если 3 делит $|L|$, тогда существует подгруппа $Z_{23} : Z_3 = Z_{23} \times Z_3$. Это невозможно, так как $C_G(Z_{23}) = Z_{23}$. Поэтому $|L|$ делит 2^3. В группах порядков $2 \cdot 23$, $2^2 \cdot 23$, $2^3 \cdot 23$ силовская 23-подгруппа является нормальной. Поэтому $|N_G(Z_{23})|$ – четное число. Однако известно, что $N_G(Z_{23}) = [Z_{23}]Z_{11}$. Из данного противоречия следует, что в группе Co_1 нет собственных G-перестановочных подгрупп.

9. $G = J_1$, $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа J_1 не имеет факторизаций. Поэтому $|L|$ делит порядок любой максимальной подгруппы в J_1. Из списка максимальных подгрупп [3] следует, что $|L| = 2$. Покажем, что L – G-перестановочная подгруппа в J_1. Пусть H – подгруппа в J_1. Предположим, что $|H|$ – четное число. Так как все инволюции в G сопряжены [3], то найдется $g \in G$, для которого $L^g \le H$, поэтому $HL^g = L^g H = H$ и L – G-перестановочная. Пусть теперь $|H|$ – нечетное число. В этом случае H либо си-

ловская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ в группе J_1, либо является одной из следующих групп: $Z_{11}:Z_5$; $Z_7:Z_3$; $Z_{19}:Z_3$; $Z_5:Z_3$. Если H является силовской подгруппой порядков: 3, 5, 7, 11, 19, то ее перестановочность с L следует из теоремы Силова и вложений: $3<7:6$; $5<11:10$; $7<7:6$; $11<11:10$; $19<19:6$. Если H не является силовской подгруппой, то она сверхразрешимая холлова подгруппа и будет D_π-группой для некоторого множества π. Ее перестановочность с L следует из вложений: $Z_{11}:Z_5<11:10$; $Z_7:Z_3<7:6$; $Z_{19}:Z_3<19:6$; $Z_3:Z_5<D_6:D_{10}$. Таким образом, подгруппы порядка 2 в группе J_1 – G-перестановочны и группа J_1 имеет собственную G-перестановочную подгруппу.

Силовская *2*-подгруппа группы J_1 является элементарной абелевой, и группа J_1 содержит подгруппу Фробениуса $[(Z_2 \times Z_2 \times Z_2)]Z_7$, в которой нет собственных подгрупп порядка 14. Поэтому J_1 не имеет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

10. $G = J_2$, $|G| = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа J_2 допускает только следующую максимальную факторизацию: $J_2 = U_3(3)(A_5 \times D_{10})$. $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы J_2, которая не является сомножителем в максимальной факторизации. Из списка максимальных подгрупп [3] заключаем, что $|L|$ делит число $2^2 \cdot 3$. Пусть сначала $|L| = 2^2 \cdot 3$. Так как максимальные подгруппы A_5 и $5^2:D_{12}$ не являются сомножителями в максимальной факторизации, то для некоторых $g, h \in J_2$ имеем $L^g \le A_5$ и $L^h \le 5^2:D_{12}$. Поэтому $L \cong A_4$ и $L \cong D_{12}$, что невозможно. Пусть $|L| = 2^2$, тогда $L < A_5 < \cdot J_2$. Поскольку L является A_5-перестановочной, то группа A_5 должна содержать подгруппу порядка 20, что невозможно. Пусть $|L| = 2 \cdot 3$. Тогда $L < A_5 < \cdot J_2$ и группа A_5 должна содержать подгруппу порядка $2 \cdot 3 \cdot 5$, что невозможно. Пусть $|L| = 3$. Тогда $L(5C)^g \cong Z_3 \times Z_5$ и 3 делит $|C_G(5C)|$, что невозможно [3]. Таким образом, $|L| = 2$. Очевидно, что $L < A_5 < \cdot J_2$, а поэтому $L < A_4 < A_5$. Группа A_4 не содержит подгрупп порядка 6, а значит L не является H-перестановочной подгруппой в $H = A_4$. Поэтому J_2 не имеет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

11. $G = j_3$, $|G| = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа J_3 не имеет факторизаций. Поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы J_3. Из списка максимальных подгрупп [3] следует, что $|L|$ делит число $2^2 \cdot 3$. Пусть $|L| = 2^2 \cdot 3$. Тогда существует собственная подгруппа $T = LZ_{19}^g = Z_{19}^g L$ в J_3, которая строго содержится в максимальной подгруппе $L_2(19)$. Из [3] следует, что в $L_2(19)$ таких подгрупп нет. Пусть $|L| = 2 \cdot 3$. Тогда собственная подгруппа $T = LZ_{19}^g = Z_{19}^g L$ содержится в максимальной подгруппе $L_2(19)$. Из [3] следует, что подгрупп порядка $2 \cdot 3 \cdot 19$ в $L_2(19)$ нет. Пусть $|L| = 2^2$. Тогда существует собственная подгруппа $T = LZ_{19}^g = Z_{19}^g L$ в J_3 и $|T| = 2^2 \cdot 19$. Из [3] следует, что подгрупп такого порядка в $L_2(19)$ нет. Пусть $|L| = 3$. Тогда существует подгруппа $T = LZ_{17}^g = Z_{17}^g L$, $T = Z_{17} \times Z_3$. Однако $C_G(Z_{17}) = Z_{17}$, что невозможно. Пусть $|L| = 2$. В этом случае существует подгруппа порядка $2 \cdot 19$, которая изоморфна $[Z_{19}]Z_2$. Однако $N_G(Z_{19}) = 19:9$, противоречие. Таким образом, в группе J_3 нет собственных G-перестановочных подгрупп.

12. $G = J_4$, $|G| = 2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа J_4 не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы J_4. Из порядков максимальных подгрупп [3] получаем, что $|L| = 2$. Из таблицы максимальных подгрупп [3] группы J_4 следует, что $L < L_2(32):5$, а поэтому $L < L_2(32)$. Группа $L_2(32)$ содержит подгруппу Фробениуса $H = [(Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2)]Z_{31}$, и $L < H$. Очевидно, что L не является H-перестановочной. Таким образом, J_4 не имеет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

13. $G = HS$, $|G| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *HS* допускает только следующие максимальные факторизации: $HS = M_{22}(U_3(5):2) = M_{22}(5:4\times A_5) = (M_{22}:2\bigcap L)(5^{1+2}.[2^5]\bigcap L)$. Максимальные подгруппы: $L_3(4):2$; S_8; $2^4.S_6$; $4^3:L_3(2)$; M_{11}; $4\cdot 2^4:S_5$; $2\times A^{6\cdot}2^2$, не являются сомножителями ни в одной максимальной факторизации, поэтому их порядки делятся на $|L|$. Таким образом, $|L|$ делит числа: $2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$; $2^8\cdot 3^2\cdot 5$; $2^9\cdot 3\cdot 7$; $2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$; $2^9\cdot 3\cdot 5$; $2^6\cdot 3^2\cdot 5$. Отсюда следует, что $|L|$ делит число $2^4\cdot 3$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то в *HS* имеется собственная подгруппа $T = LZ_{11}^g = Z_{11}^g L$ для некоторого $g\in G$. Очевидно, что $T\le M_{11}$ или $T\le M_{22}$. Из [3] следует, что в группах M_{11} и M_{22} нет подгрупп порядков: $2\cdot 11$; $2^2\cdot 11$; $3\cdot 11$; $2\cdot 3\cdot 11$; $2^2\cdot 3\cdot 11$. Таким образом, группа *HS* не имеет собственных G-перестановочных подгрупп.

14. $G = M^cL$, $|G| = 2^7\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа M^cL не имеет факторизаций. Следовательно, $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы M^cL. Таким образом, $|L|$ делит число $2^3\cdot 3$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то для некоторого $g\in G$ существует подгруппа $T = LZ_{11}^g = Z_{11}^g L \ne G$. Очевидно, что *T* содержится в одной из максимальных подгрупп M_{11} или M_{22}. Из [3] следует, что данные группы не имеют собственных подгрупп таких порядков, и группа M^cL не обладает собственной G-перестановочной подгруппой.

15. $G = O'N$, $|G| = 2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11\cdot 19\cdot 31$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *O'N* не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *O'N*. Из порядков максимальных подгрупп [3] получаем, что $|L|$ делит число $2^3\cdot 3$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то $LZ_{31}^g = Z_{31}^g L = T < L_2(31)$. Группа $L_2(31)$ содержит единственную подгруппу, порядок которой делится на 31, – это 31:15. Поэтому $|L| = 3$. Точно так же $LZ_{31}^g = Z_{31}^g L = T < G$. Очевидно, что $T = Z_{11}\times Z_3$. Из таблицы характеров группы *O'N* следует, что силовская 11-подгруппа самоцентрализуема. Противоречие. Поэтому в группе *O'N* нет собственных G-перестановочных подгрупп.

16. $G = Ru$, $|G| = 2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *Ru* допускает только следующую максимальную факторизацию: $Ru = L_2(29)\quad {}^2F_4(2)$. $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *Ru*, которая не является сомножителем в максимальной факторизации. Из списка порядков максимальных подгрупп [3] заключаем, что $|L|$ делит число 2^3. Так как *L* является G-перестановочной подгруппой, то для некоторого $g\in G$ имеем $LZ_{29}^g = Z_{29}^g L = T$ – собственная подгруппа в группе *Ru*. Из списка максимальных подгрупп группы *Ru* [3] следует, что $T < L_2(29)$. Из [3] заключаем, что $T < Z_{29}:14$. Следовательно, $|L|=2$. В силу максимальности подгрупп ${}^2F_4(2)$ и $L_2(29)$ в группе Рудвалиса получим, что для некоторых $u,v\in Ru$ $L^u < {}^2F_4(2)$ и $L^v < L_2(29)$. Поэтому $L < ({}^2F_4(2))^{u^{-1}}$ и $L < (L_2(29))^{v^{-1}}$. Так как $Ru = (L_2(29))^{v^{-1}}({}^2F_4(2))^{u^{-1}}$, то $\left|(L_2(29))^{v^{-1}}\bigcap({}^2F_4(2))^{u^{-1}}\right|$ – четное число. С другой стороны, имеет место равенство: $2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29 = \dfrac{2^{12}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 13\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 29}{\left|(L_2(29))^{v^{-1}}\bigcap({}^2F_4(2))^{u^{-1}}\right|}$, и следовательно $\left|(L_2(29))^{v^{-1}}\bigcap({}^2F_4(2))^{u^{-1}}\right| = 3$. Полученное противоречие показывает, что группа *Ru* не содержит собственных G-перестановочных подгрупп.

17. $G = He$, $|G| = 2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 17$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *He* допускает только следующую максимальную факторизацию: $He = (S_4(4):2)(7^2:2L_2(7))$. Порядок подгруппы *L* делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *He*, которая не является сомножителем в максимальной факторизации. Из списка максимальных под-

групп [3], $|L|$ делит число $2\cdot 3$. Так как L – G-перестановочная подгруппа в группе *He*, то для некоторого $g\in G$ имеем $LZ_{17}^{g}=Z_{17}^{g}L=T$ – собственная подгруппа в G. Из списка максимальных подгрупп [3] следует, что $L<S_4(4):2$. Группа $S_4(4):2$ содержит только два класса несопряженных максимальных подгрупп, порядок которых делится на 17, – это $L_2(16):4$. Поэтому $L<L_2(16):4$. Группа $L_2(16)$ содержит единственную максимальную подгруппу, порядок которой делится на 17, – это D_{34}. Следовательно, $|L|=2$. Очевидно, что $L<7:3\times L_3(2)<\cdot He$. Поэтому $L<L_3(2)=H$. Поскольку L является H-перестановочной, то в группе $L_3(2)$ имеется подгруппа порядка 14, что невозможно. Поэтому группа *He* не имеет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

18. $G=Suz$, $|G|=2^{13}\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *Suz* допускает только следующие максимальные факторизации: $Suz=G_2(4)U_5(2)=G_2(4)(3^5:M_{11})$. Порядок подгруппы L делит порядок любой максимальной подгруппы группы *Suz*, которая не является сомножителем в максимальных факторизациях. Из списка максимальных подгрупп [3] заключаем, что $|L|$ делит число $2^3\cdot 3$. Так как L – G-перестановочная подгруппа, то для некоторого $g\in G$ имеем $H=LZ_{13}^{g}=Z_{13}^{g}L<G$. Поскольку $|L|$ делит $2^3\cdot 3$, то H – разрешима и силовская 13-подгруппа группы H нормальна в H. Из [3] следует, что $N_{Suz}(Z_{13})=[Z_{13}]Z_6$, поэтому $|L|$ делит *6*. Точно так же для некоторого $g\in G$ $T=LZ_{11}^{g}=Z_{11}^{g}L<G$ и силовская 11-подгруппа из T нормальна в T. Так как $N_{Suz}(Z_{11})=[Z_{11}]Z_{10}$, то $|L|=2$. Имеет место включение $L<S=3^5:M_{11}<\cdot Suz$. Отсюда следует, что L является собственной M_{11}-перестановочной подгруппой в M_{11}, что, как показано ранее, невозможно. Поэтому группа *Suz* не имеет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

19. $G=Ly$, $|G|=2^8\cdot 3^7\cdot 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 37\cdot 67$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *Ly* не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *Ly*. Из порядков максимальных подгрупп [3] получаем, что $|L|=2$. Очевидно, что $L<5^3\cdot L_3(5)=H<\cdot G$. Поскольку L – H-перестановочная подгруппа, то в группе H существует подгруппа порядка 62. Из [3] следует, что это невозможно. Поэтому в группе *Ly* нет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

20. $G=Th$, $|G|=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 13\cdot 19\cdot 31$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *Th* не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *Th*. Из порядков максимальных подгрупп [3] получаем, что $|L|=3$. Имеется включение: $L<S_5<\cdot Th$. Поскольку L – S_5-перестановочна, то в S_5 имеется подгруппа порядка 15, что невозможно. Таким образом, в группе *Th* нет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

21. $G=HN$, $|G|=2^{14}\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 19$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *HN* не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *HN*. Из порядков максимальных подгрупп [3] получаем, что $|L|$ делит число 2^4. Так как L – G-перестановочная, то для некоторого $g\in G$ $LZ_{19}^{g}=Z_{19}^{g}L<G$ и в группе G существует подгруппа, изоморфная $[Z_{19}]L$. Однако из [3] следует, что $N_G(Z_{19})=[Z_{19}]Z_9$. Противоречие. Следовательно, в группе *HN* нет собственных G-перестановочных подгрупп.

22. $G=Fi_{23}$, $|G|=2^{18}\cdot 3^{13}\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 23$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа Fi_{23} не имеет факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы Fi_{23}. Из таблицы максимальных подгрупп [3] следует, что $|L|$ делит число $2^5\cdot 3^2$. Так как L – G-перестановочна, то $LZ_{23}^{g}=Z_{23}^{g}L=T<2^{11}\cdot M_{23}$. Из [3] следует, что группа M_{23} содержит единственный класс собственных подгрупп, порядок которых делится на 23, – это 23:11. Отсюда заключаем, что $T=[L]Z_{23}$, где $|L|$ делит число 2^5. Ясно, что T разрешимая группа. Число сопряженных с Z_{23} в T равно $23k+1$ и $(23k+1)$ делит 2^5. Отсюда следует, что $Z_{23}\lhd T$. Однако

$N_{Fi_{23}}(Z_{23}) = Z_{23} : Z_{11}$, что невозможно. Поэтому группа Fi_{23} не имеет собственных наследственно *G*-перестановочных подгрупп.

23. $G = F'_{24}$, $|G| = 2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа F'_{24} не имеет максимальных факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *G*. Из таблицы максимальных подгрупп [3] заключаем, что $|L| = 2$. Поскольку $L < Fi_{23}$, а группа Fi_{23} не имеет собственных Fi_{23}- перестановочных подгрупп, то и группа *G* не имеет собственных наследственно *G*-перестановочных подгрупп.

24. $G = Fi_{22}$, $|G| = 2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа Fi_{22} допускает только следующую максимальную факторизацию: $Fi_{22} =^2 F_4(2)'(2.U_6(2))$. Так как $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы Fi_{22}, отличной от $^2F_4(2)'$ и $2.U_6(2)$, то из [3] $|L|$ делит число $2^6 \cdot 3^2$. Очевидно, что $L < M_{12} < \cdot Fi_{22}$. Поскольку *L* – наследственно *G*-перестановочная подгруппа, то группа M_{12} содержит собственную наследственно перестановочную подгруппу, что невозможно. Таким образом, в группе Fi_{22} нет собственных наследственно *G*-перестановочных подгрупп.

25. $G = B$, $|G| = 2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *B* не имеет максимальных факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *B*. Из таблицы максимальных подгрупп [5] следует, что наибольший общий делитель порядков максимальных подгрупп группы *B* равен 1. Поэтому *L* = 1. Следовательно, группа *B* не имеет собственных *G*-перестановочных подгрупп.

26. $G = M$, $|G| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$.

Из [4, табл. 6] следует, что группа *M* не допускает факторизаций, поэтому $|L|$ делит порядок всякой максимальной подгруппы группы *M*. Из таблицы максимальных подгрупп [3], заключаем, что $|L|$ делит 2^2. Так как *L* – *G*-перестановочная подгруппа, то в группе *M* имеется собственная подгруппа $T = LZ_{71}^g = Z_{71}^g L$ четного порядка и силовская 71-подгруппа нормальна в *T*. Однако $N_M(Z_{71}) = [Z_{71}]Z_{35}$. Из полученного противоречия следует, что в группе *M* нет собственных *G*-перестановочных подгрупп.

В ходе доказательства получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть *G* изоморфна одной из следующих групп: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Co_3, Co_2, Co_1, J_3, *HS*, M^cL, *O'N*, *Ru*, *HN*, *B*, *M*. Тогда группа *G* не имеет собственной *G*-перестановочной подгруппы. Группа J_1 имеет собственную *G*-перестановочную подгруппу порядка 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5(36). – С. 12 – 31.
2. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New-York: Harper and Row, 1968.
3. Atlas of Finite Groups / J.H. Conway [et. al.]. – Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. Liebeck, M.W. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J Saxl // Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1 – 151.
5. Atlas of Finite Group Representations // Staff/Research Portal of the School of Mathematics at the University of Birmingham [Electronic resource]. – Mode of access: http://web.mat.bham.ac.uk/atlas/v2.0/. – Date of access: 10.05.2007.

Поступила 05.11.2007