РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

***Е.Р. БИБИЛО*, И.П. МАРТЫНОВ**

This article is devoted to the irrational solutions of the nonlinear differential equations and systems construction. The constructed two-parameter rational solutions meet the negative (different from -1) resonances of the equation

Ключевые слова: резонансы, рациональное решение

В работе [1] авторы говорят о том, что отрицательные резонансы до сих пор все еще полностью не поняты и на современном этапе представляют большой интерес, однако в работе [2] приведена формула, которая позволяет построить рациональные решения дифференциальных уравнений по отрицательным резонансам.

Рассмотрим применение формулы для нахождения рациональных решений нелинейных дифференциальных уравнений и систем на примере дифференциального уравнения

$$w'w''' = \frac{2}{3}w''^2 + \frac{1}{3}ww'w'' + 3w'^3 - \frac{1}{3}w^2w'^2 \tag{1}$$

и системы дифференциальных уравнений

$$x' = -x^2 - 3xy - 3xz, \quad y' = xy + 3y^2 + 2yz, \quad z' = xz + z^2. \tag{2}$$

Дифференциальному уравнению (1) соответствуют наборы $(1;-10;-1,-5,6)$, $(1;-1;-1,1,3)$. [3] По отрицательному резонансу $r=-5$ построим его двухпараметрическое рациональное решение

$$w = \frac{-5(t-t_0)^4\left(2(t-t_0)^5 + h\right)}{(t-t_0)^{10} + h(t-t_0)^5 + \frac{1}{54}h^2}. \tag{3}$$

Решениям системы (2) отвечает набор $\left(1;-3,-\frac{2}{3},2;-1,-2,6\right)$, где $s=1$ означает наличие решений с полюсом первого порядка, $-3,-\frac{2}{3},2$ – вычеты у компонент x,y,z, $-1,-2,6$ – резонансы. По отрицательному резонансу $r=-2$ строим двухпараметрическое рациональное решение

$$x = \frac{-3(t-t_0)^2 + c}{(t-t_0)\left((t-t_0)^2 - c\right)}, \quad y = \frac{-2(t-t_0)}{3(t-t_0)^2 + c}, \quad z = \frac{2(t-t_0)}{(t-t_0)^2 - c}. \tag{4}$$

Таким образом, верна

Теорема. Уравнение (1), система (2) имеют двухпараметрические рациональные решения (3), (4) соответственно.

Литература

1. *Peter A. Clarkson*. Symmetry and the Chazy equation / Peter A. Clarkson, Peter J. Olver // Journal of Differential Equations. – 1996. – № 124. – pp. 225 – 246.
2. *Здунек, А.Г.* О рациональных решениях дифференциальных уравнений / А.Г. Здунек, И.П. Мартынов, В.А. Пронько // Вест. ГрГУ. Сер.2. – 2000. – №3. – с.33 – 39.
3. *Ванькова, Т.Н.* О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений / Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, О.Н. Парманчук, В.А. Пронько // Весн. ГрДУ. Сер. 2. – 2008. – № 1 (64). – С. 8 – 16.

О ГЛОБАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ

***А.Д. БУРАК*, А.А. КОЗЛОВ**

We give sufficient conditions for the global controllability of Lyapunov exponents of four-dimensional linear systems with locally integrable and integrally bounded coefficient

Ключевые слова: глобальное управление характеристическими показателями Ляпунова

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, (1)$ с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Замкнем систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x$,

где U – некоторая ограниченная и измеримая $(m \times n)$-матрица, получим однородную систему $\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0,$ (2) матрица коэффициентов которой также локально интегрируема и интегрально ограничена. Известно, что в этом случае система (2) имеет конечные показатели Ляпунова [1, с. 245] $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU)$. Задача о построении для системы (1) обратной связи $u = U(t)x$, обеспечивающей выполнение равенств $\lambda_i(A+BU) = \mu_i,\ \ i = \overline{1,n},$ для произвольных заранее заданных вещественных чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n,$ называется *задачей глобального управления характеристическими показателями Ляпунова* [2, с. 184]. Е.Л. Тонков [3] предложил решать данную задачу при следующем предположении. *Система* (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0,$ что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0; t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление $u,$ при всех $t \in [t_0; t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\| u(t) \| \leqslant \gamma \| x_0 \|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

В рамках такого подхода целым рядом авторов были получены различные условия управляемости характеристических показателей Ляпунова линейных нестационарных систем, бóльшую часть из которых содержит монография [2]. Однако метод, предложенный ее авторами, ввиду своей специфичности, не мог быть распространен уже на системы (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами. В связи с этим возникла задача обобщения результатов, содержащихся в [2], на более широкий класс систем (2), например, систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами. А.А. Козловым в статье [4] на основании иного, чем у Е.К. Макарова и С.Н. Поповой, подхода была доказана глобальная управляемость показателей Ляпунова двумерных систем вида (2) с такими коэффициентами в случае равномерной полной управляемости соответствующей системы (1), а позднее, в цикле работ [5,6], им, совместно с А.Д. Бураком, эти результаты были распространены и на трехмерный случай систем (2). Обобщая этот подход, авторам данной работы удалось установить следующее утверждение:

Теорема. *Пусть* $n = 4,\ \ m \in \{1, \ldots, 4\}$. *Если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то показатели Ляпунова соответствующей замкнутой системы (2) глобально управляемы.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования (студенческий грант №20130402).

Литература

1. *Былов Б.Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам. М.: Наука. 1966. 576 с.
2. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск:
3. Беларус. навука. 2012. 407 с.
4. *Тонков Е.Л.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т.15. №10. С. 1804–1813.
5. *Козлов А.А.* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1319–1335.
6. *Козлов А.А.*, *Бурак А.Д.* // Веснік ВДУ. 2013. № 3(75). С. 29–45.
7. *Козлов А.А.*, *Бурак А.Д.* // Веснік ВДУ. 2013. № 5(77). С. 11–31.

ГГУ им. Ф Скорины

ОБОБЩЕННО МОДУЛЯРНЫЕ И ПЕРМУТИРУЕМЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

***В.А. ВАСИЛЬЕВ*, А.Н. СКИБА**

A subgroup H of a group G is called m-supplemented in G if there exists a subgroup K of G such that $G=HK$ and $H \cap K \leq H_mG$. A subgroup H of a group G is called permuteral (strong permuteral) in G if $P_G(H)=G$ ($P_U(H)=U$ when $H \leq U \leq G$). Based on these concepts groups with m-supplemented and permuteral (strong permuteral) subgroups were studied

Ключевые слова: конечная группа, m-добавляемая подгруппа, пермутируемая подгруппа, сильно пермутируемая подгруппа, p-нильпотентная группа

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша) решетки всех подгрупп группы. Каждая подгруппа H группы G обладает наибольшей содержащейся в ней модулярной подгруппой HmG группы G. В работе [1] нами было введено следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется m-добавляемой в G, если в G существует такая подгруппа K, что G=HK и H ∩ K ≤ HmG.

На основе данного понятия нами был получен следующий результат.

Теорема 1 [2]. Пусть G – группа и P – силовская p-подгруппа группы G, где p – простой делитель $|G|$. Предположим, что по крайней мере одно из следующих утверждений выполняется: