УДК 624.046.4

Косенок В.В.; Киселёв В.Н., канд. техн. наук, доц.
(ПГУ, г. Новополоцк)

РАСЧЁТ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для многих задач строительной механики и теории упругости невозможно получить решение в замкнутом виде. Это, в частности, относится к таким конструкциям, как пластины сложной формы и подкрепленные пластины, в материале которых появляются пластические деформации.

Для расчета конструкций такого типа часто применяют численные методы, позволяющие широко применять вычислительную технику. Одним из таких способов является метод конечных разностей (МКР).

В данной работе производится расчет этим методом жесткой прямоугольной пластины, подкрепленной ребрами жесткости прямоугольного сечения (рис. 1). В процессе деформирования допускается появление пластических деформаций в ребрах жесткости.

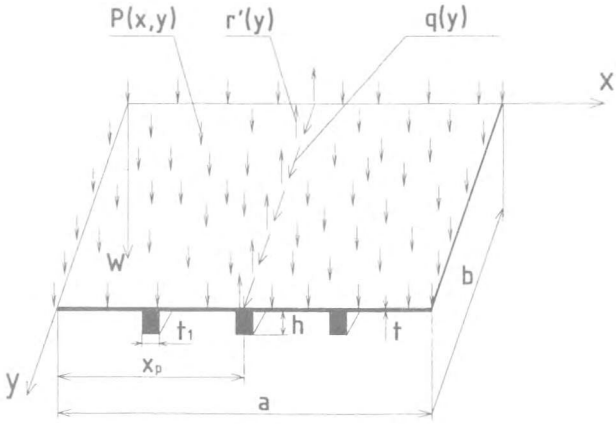

Рис. 1. Прямоугольная пластина с рёбрами жёсткости прямоугольного сечения

Пластина имела следующие параметры: a, b – размеры пластины в плане; t; t_1 – толщины пластины и ребра жесткости соответственно; h – высота стенки ребра жесткости; x_p – параметр, определяющий положение ребер жесткости.

Как известно, дифференциальные уравнения изгиба подкрепленной пластины в безразмерном виде в упругой области имеет вид

$$\lambda^4 \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{x}^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial \overline{x}^2 \partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial \overline{y}^4} = \overline{P} + \delta(\overline{x}_k - \overline{x}_p)\overline{r}_k \tag{1}$$

Здесь

$\lambda = \frac{b}{a}$; $\overline{W} = \frac{W}{t}$; $\overline{x} = \frac{x}{a}$; $\overline{y} = \frac{y}{b}$; $\overline{p} = \frac{b^4}{Dt} P(x;y)$; $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно; $P(x,y)$ – интенсивность равномерно-распределенной нормальной нагрузки;

$$\overline{r}_k = \frac{1}{D} r_k(\overline{y}), \tag{2}$$

$r_к(\overline{y})$ – нагрузка, распределенная вдоль линии соприкасания k-го ребра жесткости с пластиной, действующая со стороны этого ребра на пластину

Нагрузку $r_к(\overline{y})$ можно подсчитать по формуле:

$$r_k(\overline{y}) = EJ_k \frac{d^4 \overline{W}}{d\overline{y}^4}. \tag{3}$$

Здесь

$$I_k{}^* = I_k + F_k (c^*)^2, \tag{4}$$

где J_k; F_k – собственный момент инерции и площадь поперечного сечения $к$-го ребра жесткости соответственно;

$$c^* = c + 0{,}5t; \qquad c = 0{,}5h.$$

После проявления в ребрах жесткости пластических деформаций задача решается так же, как и в случае, когда пластина подкрепляется ребрами переменного сечения. В этом случае на упруго-пластических участках в уравнении (1) выражение (2) примет вид:

$$\begin{aligned} r_k(\overline{y}) = &\left[\Phi_2 \frac{\partial^2 B_x}{\partial \overline{y}^2} + \Phi_7 \left(c^* \frac{\partial^2 c^*}{\partial \overline{y}^2} + 2\frac{\partial c^*}{\partial \overline{y}} + \frac{\partial^2 c}{\partial \overline{y}} c^* \right) \right] + \\ &+2\left[\Phi_2 \frac{\partial B_x}{\partial \overline{y}} + \Phi_7 c^* \left(\frac{\partial c^*}{\partial \overline{y}} + \frac{\partial c}{\partial \overline{y}} \right) \right] \frac{\partial^3 \overline{W}}{\partial \overline{y}^3} + B_x + F(c^*)^2] \frac{\partial^4 \overline{W}}{\partial \overline{y}^4}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Phi_2 = \frac{E}{t}$; $\Phi_7 = \frac{EF}{t}$; B_x – роль момента инерции сечения ребра жесткости на упругопластических участках, которую можно подсчитать по формуле:

$$B_x = t_1\eta\left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3}\eta\right); \tag{6}$$

η – параметр, характеризующий глубину проникновения пластических деформаций.

Величину в данном случае определяем по формуле:

$$c = \sqrt{2h\eta} - \eta\,. \tag{7}$$

Решение проводим «шаговым» методом, определяя на каждом шаге необходимые параметры.

В качестве примера рассмотрим расчет пластины прямоугольной формы, жестко заделанной по контуру, нагруженной нормальной равномерно распределенной нагрузкой $p(x, y)$, подкрепленной тремя ребрами жесткости (см. рис. 1) прямоугольного сечения с размерами:

$a = b = 50$ см;

$\lambda = 0{,}5$ см; $t = 0{,}4$ см;

$t_1 = 0{,}5$ см; $h = 1{,}5$ см.

Характеристика материала:

$E = 2{,}1\cdot10^6$ кгс/см^2;

$\delta_T = 2400$ кгс/см^2;

$\mu = 0{,}3$.

В качестве расчетного метода примем метод конечных разностей (МКР). Для этого выберем прямоугольную сетку 10×10 и наносим ее на пластину. Заменяем исходные дифференциальные уравнения (1) и (2) и граничные условия системой разностных уравнений, которые записываем для каждого узла сетки, нанесенной на пластину. При этом аппроксимируем бигармонический оператор и все производные симметричными разностными выражениями с погрешностью $(\overline{\varepsilon}^2)$,

где ε – относительный шаг сетки равный $\varepsilon = \frac{a}{10} = \frac{b}{10}$.

Производные функции прогиба $\overline{W}$ в граничных условиях аппроксимируем с погрешностью $O(\overline{\varepsilon}^2)$. Ввиду симметрии пластины и нагрузки рассматриваем только 1/4 часть пластины.

Полученную систему нелинейных алгебраических уравнений решаем методом общей итерации.

Результаты расчета приведены на рисунке 2, где приведены прогибы W в мм для пластины при $\overline{X} = 0,5$ и $\overline{Y} = 0,5$.

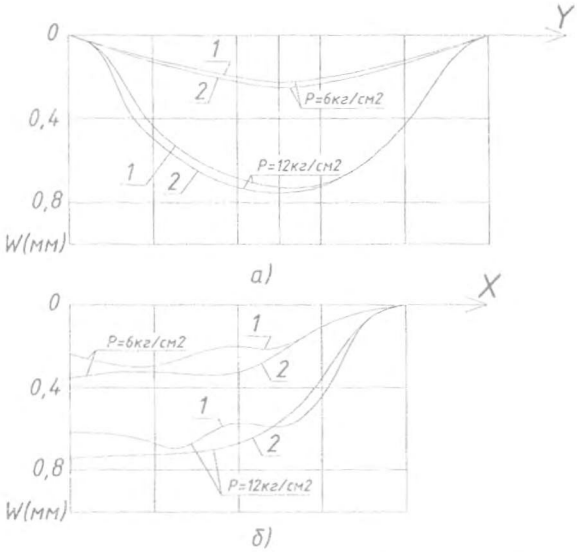

Рис. 2. Результаты расчёта вдоль оси Y (а) и вдоль оси X (б)

На рисунке кривая 1 соответствует упругой работе пластины и ребра, кривая 2 – нагрузке, при которой в ребрах имеются пластические деформации.

Литература

1. Ворожцов, Е.В. Разностные методы решения задач механики сплошных сред / Е.В. Ворожцов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – 86 с.
2. Технология построения разностных сеток / В.Д. Лисейкин [и др.]. – Новосибирск: Наука, 2009. – 414 с.
3. Марчук, Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
4. Романко, В.К. Разностные уравнения / В.К. Романко. – М.: БИНОМ, 2006. – 112 с.