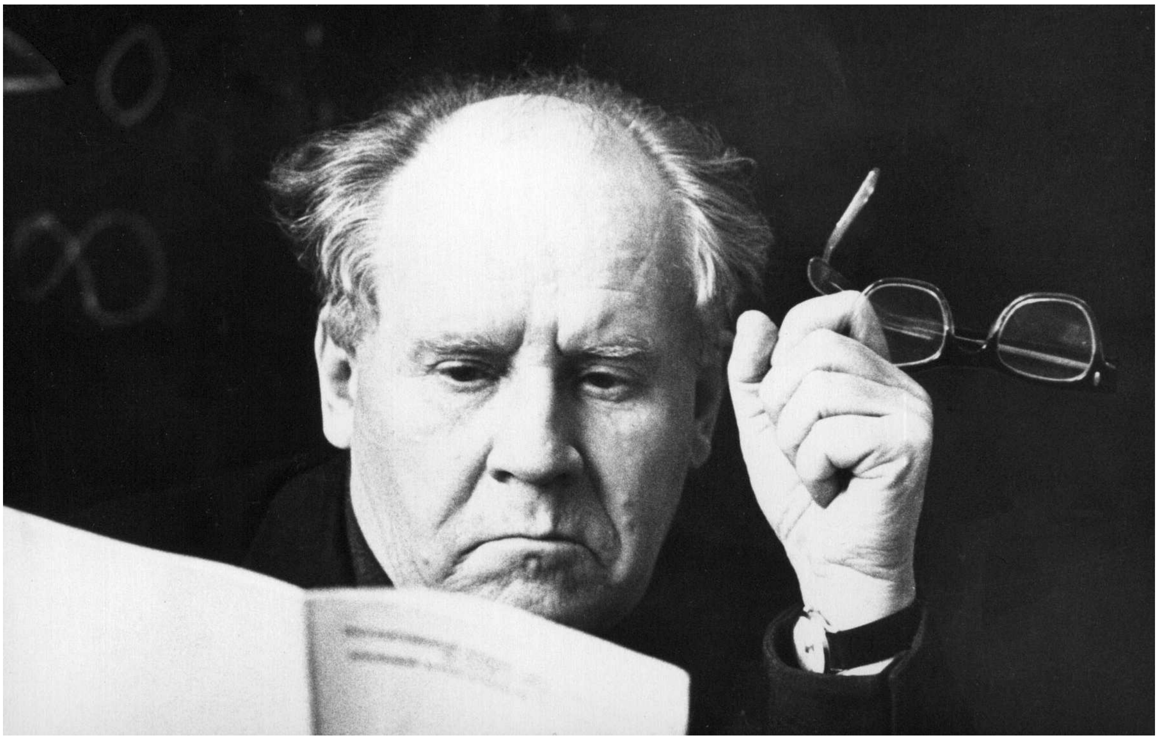
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014)



Тезисы докладов

Часть 1

Аналитическая теория дифференциальных уравнений
Асимптотическая теория дифференциальных уравнений
Качественная теория дифференциальных уравнений
Теория устойчивости и управления движением

МИНСК 2014

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
Ш51

Р е д а к т о р ы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

Конференция проводится при финансовой поддержке
Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований

XVI Международная научная конференция по дифференциальным
Ш51 **уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014):** тез. докладов Международной научной конференции. Новополоцк, 20 – 22 мая 2014 г. — Часть 1. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2014. — 114 с.

ISBN 987-985-6499-83-1 (Часть 1)
ISBN 978-985-6499-82-4

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на XVI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2014) по вопросам аналитической, асимптотической и качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и управления движением.

ISBN 987-985-6499-83-1 (Часть 1)
ISBN 978-985-6499-82-4

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПФАФФА ТИПА ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В.В. Амелькин, М.Н. Василевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Vasilevich.M@gmail.com

Пусть $\overline{M}_j = \{x \in \mathbb{CP}^n \mid P_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0\}$, $j = \overline{1,n}$, — неприводимое алгебраическое многообразие коразмерности 1 на $\mathbb{CP}^n$. На открытом множестве $M = \mathbb{CP}^n \setminus \overline{M}$, где $\overline{M} = \bigcup_{j=1}^4 \overline{M}_j$, рассмотрим уравнение

$$dY = \omega Y, \tag{1}$$

где Y — квадратная матрица порядка 2, ω — дифференциальная 1-форма вида

$$\omega = \sum_{j=1}^{4} U_j \frac{dP_j(x)}{P_j(x)}$$

с (2×2)-матрицами-вычетами U_j, удовлетворяющими условию $\sum_{j=1}^4 U_j = 0$.

Предположим, что поверхности $\overline{M}_j$, $j = \overline{1,4}$, образуют пучок. Аналитически это означает, что существуют однородные полиномы $Q(x)$ и $R(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, такие, что $P_k(x) = \alpha_k Q(x) + \beta_k R(x)$ для всех $k = \overline{1,4}$ и некоторых $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$.

Замена переменной $z = Q(x)/R(x)$ преобразует уравнение (1) в уравнение

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{z - a_j} \right) Y dz,$$

где $a_j = -\alpha_j/\beta_j$.

Пусть

$$U_j = \begin{pmatrix} \theta_j & (\xi_j - \theta_j)/h \\ h\theta_j & \xi_j - \theta_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $h \neq 0$ — вещественная или комплексная постоянная,

$$\theta_1 = -\frac{b}{a}, \quad \theta_2 = \frac{b-1}{a-1}, \quad \theta_3 = \frac{b}{a} - \frac{b-1}{a-1}, \quad a = \frac{(a_2 - a_4)(a_3 - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_4)},$$

$$b = \xi_1 a^{-\xi_2} (a-1)^{-\xi_1} \int a^{\xi_2} (a-1)^{\xi_1 - 1} \, da,$$

а собственные значения ξ_j матриц U_j, $j = \overline{1,3}$, удовлетворяют условию $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = -1$.

Теорема. *Если поверхности $\overline{M}_j$, $j = \overline{1,4}$, образуют пучок, то уравнение (1) с матрицами-вычетами (2) имеет фундаментальную матрицу решений*

$$Y(x) = -\frac{1}{h} \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) + 1 \\ h\phi_{11}(x) & h\phi_{12}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\phi_{11}(x) = \prod_{j=1}^{4} (P_j(x))^{\xi_j}, \quad \phi_{12}(x) = \phi_{11}(x) \left(\sum_{k=1}^{3} \theta_k \int \phi_{11}^{-1}(x) \frac{dP_k(x)}{P_k(x)} \right).$$

О СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
{tatsyana.andreeva,v.a.pronko}@gmail.com, i.martynov@grsu.by

Рассмотрим автономную дифференциальную систему третьего порядка

$$x'=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{13}xz,\quad y'=a_{21}xy+a_{22}y^2+a_{23}yz,\quad z'=a_{31}xz+a_{32}yz+a_{33}z^2+cxy,\tag{1}$$

где x, y, z — комплекснозначные функции, $c \neq 0$.

Компоненты системы (1) при некоторых значениях ее коэффициентов определяются дифференциальным уравнением

$$w^2(w'-w^2)w''' = w^2w''^2 + b_1ww'^2w'' + b_2w'^4 + b_3w^3w'w'' + b_4w^2w'^3+$$
$$+b_5w^5w'' + b_6w^4w'^2 + b_7w^6w' + b_8w^8.$$

Среди таких уравнений имеются следующие уравнения типа Пенлеве [1, 2]:

$$(w'-w^2)w''' = w''^2 - 5/2ww'w'' + 3/2w'^3 - 3/4w^3w'' + 3/2w^2w'^2 - 5/8w^4w' + 1/8w^6;\tag{2}$$

$$(w'-w^2)w''' = w''^2 - 5/2ww'w'' + 1/2w'^3 + 3/4w^2w'^2 - 1/4w^4w';\tag{3}$$

$$(w'-w^2)w''' = w''^2 - 3ww'w'' + 2(1-\alpha)w'^3 + \alpha w^5w'',\quad \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{-1\};\tag{4}$$

$$w^2(w'-w^2)w''' = w^2w''^2 + ww'^2w'' - 3/4w'^4 - 9/2w^3w'w'' + 15/4w^2w'^3;\tag{5}$$

$$w^2(w'-w^2)w''' = w^2w''^2 + 1/2ww'^2w'' - 1/2w'^4 - 7/2w^3w'w'' + 5/2w^2w'^3.\tag{6}$$

Выделим классы систем (1), одна из компонент которых удовлетворяет одному из уравнений (2)–(6). Получим системы:

$$x' = 1/4x^2 + xy - xz,\quad y' = -1/2xy,\quad z' = 3/4xz - yz + z^2 - 1/2xy;\tag{7}$$

$$x' = -1/2x^2 + xy - xz,\quad y' = xy - y^2 + yz,\quad z' = 1/2xz - xy;\tag{8}$$

$$x' = -1/2x^2 + xy - xz,\quad y' = xy - y^2 + yz,\quad z' = -1/2xy;\tag{9}$$

$$x' = 1/4x^2 + xy - xz,\quad y' = -1/2xy,\quad z' = -1/4xz - yz + z^2 + 1/2xy;\tag{10}$$

$$x' = 2xy + 2xz,\quad y' = -y^2 - yz,\quad z' = yz + z^2 + xy;\tag{11}$$

$$x' = -4xy - 2xz,\quad y' = 2y^2 + yz,\quad z' = xy.\tag{12}$$

$$x' = -1/2xz,\quad y' = yz,\quad z' = xz + 1/2z^2 + xy;\tag{13}$$

$$x' = -xy + 1/2xz,\quad y' = y^2,\quad z' = xz - 1/2z^2 - xy;\tag{14}$$

$$x' = -1/2xz,\quad y' = yz,\quad z' = xz + xy;\tag{15}$$

$$x' = -xy,\quad y' = y^2 + 1/2yz,\quad z' = xz - 1/2z^2 - 2xy;\tag{16}$$

$$x' = -xy - xz,\quad y' = y^2 + yz,\quad z' = -\alpha xz + (1-\alpha)xy,\quad \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{-1\};\tag{17}$$

$$x' = -\alpha x^2 + xy - xz,\quad y' = \alpha xy - y^2 + yz,\quad z' = -xy,\quad \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{-1\};\tag{18}$$

$$x' = -xy - \alpha xz,\quad y' = y^2 + \alpha yz,\quad z' = (\alpha-1)xz + xy,\quad \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{-1\};\tag{19}$$

$$x' = -xy,\quad y' = y^2,\quad z' = xz - \alpha z^2 - xy,\quad \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}.\tag{20}$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Системы* (7)–(20) *являются системами типа Пенлеве.*

Литература

1. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1640–1641.

2. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1219–1224.

СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

nberez@grsu.by, i.martynov@grsu.by, v.a.pronko@gmail.com

Рассмотрим систему

$$x' = x(ax+by+cz+d), \quad y' = y(ax+by+cz+d), \quad z' = f(x,y,z)+c_1x+c_2y+c_3z, \quad (1)$$

где $f(x,y,z) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz$, a_{ij}, $i,j=1,2,3$, $a,b,c \neq$ $\neq 0$ — постоянные, d, c_i, $i=1,2,3$ — аналитические функции от t. Не нарушая общности, будем считать $c=1$.

Из первых двух уравнений системы (1) получаем, что $y=\lambda x$, λ — постоянная. Тогда для компоненты x системы (1) построим уравнение

$$x'' = A\frac{x'^2}{x} + Bxx' + Cx' + Dx^3 + Ex^2 + Fx, \quad (2)$$

где

$$A = 1+a_{33}, \quad B = (a_{23}-2ba_{33}+b)\lambda + a_{13} - 2a_{33}a, \quad C = c_3 - 2a_{33}d,$$

$$D = (a_{22}-ba_{23}+b^2a_{33})\lambda^2 + (a_{12}+2aba_{33}-ba_{13}-aa_{23})\lambda + a_{11} + a^2a_{33} - aa_{13},$$

$$E = (2ba_{33}d - a_{23}d - bc_3 + c_2)\lambda + 2aa_{33}d + c_1 - ac_3 - a_{13}d, \quad F = d' + d^2a_{33} - dc_3.$$

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *имела свойство Пенлеве необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (2) *обладало этим же свойством.*

Выделены системы (1), решения которых выражаются через решения частных случаев второго, третьего и четвертого уравнений Пенлеве. На основе связи, установленной в [1, 2] между решением частных случаев второго и четвертого уравнений Пенлеве соответственно с уравнениями Кортевега де Фриза и Шредингера, а также связи частного случая третьего уравнения Пенлеве с уравнением Лиувилля, получены формулы взаимосвязи между решениями выделенных систем и указанных нелинейных уравнений в частных производных.

Литература

1. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type. I* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, № 4. P. 715–721.

2. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type. II* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, № 5. P. 1006–1015.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е.Р. Бибило, Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
elena.bibilo@mail.ru, vankova_tn@grsu.by, i.martynov@grsu.by

Если уравнение $f(x^{(n)},\ldots,x,z)=0$ имеет решение $x=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(z-z_0)^{k-s}$, то этому решению будем сопоставлять набор $(s;h_0;r_1,r_2,\ldots,r_n)$, где $k=r_m$ — резонансы, h_{r_m} — резонансные коэффициенты. Среди резонансов r_k есть один равный -1. Остальные резонансы должны быть целыми и различными [1].

Рассмотрим уравнение

$$x^2x^{IV}=2xx'x''+4xx''^2-2x'^2x''-2x^5+\alpha x^2x''+2cx^3, \tag{1}$$

где $\alpha'=0, c''=0$, соответствующие наборы

$$(2;\pm 6;-1,-3,6,8),\quad (1;h_0;-1,0,3,6),\quad (-2;h_0;-1,0,-3,6),$$

и уравнение

$$y^{IV}=20yy''+10y'^2-40y^3+\alpha(y''-6y^2)-4\beta y-2H_1, \tag{2}$$

которому отвечают наборы $(2;1;-1,2,5,8)$, $(2;3;-1,-3,8,10)$.

Выполнив в (1) замену переменной $x'=-\omega x$, для ω запишем уравнение

$$\omega^{IV}=10\omega^2\omega''+10\omega\omega'^2-6w^5+\alpha(\omega''-2\omega^3)-4c\omega-2c'. \tag{3}$$

Уравнение (3) встречается в [2], а при $\alpha=0$ в работе [3]. Имеют место

Теорема 1. *Уравнения* (3) *при* $c'=0$ *и* (2) *связаны между собой преобразованием Беклунда*

$$2\omega=-\frac{y'''-12yy'-\alpha y'}{y''-6y^2-\alpha y-c},\quad 2y=-\omega'+\omega^2.$$

Теорема 2. *Общие решения уравнений* (1), (2) *и* (3) *при* $c'=0$ *мероморфны.*

Замечание 1. При $\alpha=c=0$ уравнение (1) имеет рациональное решение $x=$ $=\pm 6(z-z_0)/((z-z_0)^3+h)$, отвечающее резонансу $r=-3$.

Замечание 2. При $\alpha=\beta=H_1=0$ уравнение (2) имеет рациональное решение $y=3(z-z_0)((z-z_0)^3-2h)/((z-z_0)^3+h)$, отвечающее резонансу $r=-3$.

Литература

1. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П., Парманчук О. Н., Пронько В. А. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун.-та. Сер. 2. 2008. № 1(64). С. 8–16.

2. Cosgrove, C. M. *Higher-order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol P2 variable* // Stud. Appl. Math. 2000. P. 1–76.

3. Мартынов, И. П. *О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 10. С. 1780–1791.

О МЕРОМОРФНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е.Р. Бибило, Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
elena.bibilo@mail.ru, vankova_tn@grsu.by, i.martynov@grsu.by, v.a.pronko@gmail.com

Рассмотрим дифференциальную систему

$$x'' = 2xy + ax, \quad y'' = -x^2 + 6y^2 + ay + b, \tag{1}$$

для которой в работе [1] найдены необходимые условия отсутствия подвижных многозначных особых точек $a' = b'' = 0$. С помощью линейного преобразования $(x, y;\ x, y - a/2)$ систему (1) можно привести к виду

$$x'' = 2xy, \quad y'' = -x^2 + 6y^2 + \alpha y + c, \tag{2}$$

где $\alpha' = c'' = 0$.

Имеет место

Лемма 1. *Если α, c — постоянные, то система* (2) *имеет следующие первые интегралы*

$$x'^2 - y'^2 = 2x^2y - 4y^3 - \alpha y^2 - 2cy + H_1,$$

$$4yx'^2 - 4xx'y' + \alpha y'^2 = x^4 - 4x^2y^2 - 2\alpha x^2y + 4\alpha y^3 - 2cx^2 + \alpha^2y^2 + 2\alpha cy + H_2.$$

Рассмотрим систему

$$u'^2 = \frac{P(u)}{(u-v)^2}, \quad v'^2 = \frac{P(v)}{(u-v)^2}, \tag{3}$$

где

$$P(t) = t^5 - 2\alpha t^4 + (\alpha^2 + 8c)t^3 - (8\alpha c + 16H_1)t^2 + 16(H_2 + \alpha H_1)t + H_3,$$

причем α, c, H_1, H_2, H_3 — постоянные. Считаем, что многочлен $P(t)$ не имеет кратных корней. Система (3) сводится к системе, содержащейся в §2 работы [2]. Согласно [2; 3; 4, с. 234] система имеет мероморфные решения и интегрируется в гиперэллиптических функциях.

Соотношения

$$u + v = 4y + \alpha, \quad uv = 4x^2$$

задают формулы связи между системами (2) и (3). Таким образом, справедлива

Теорема. *Если $c' = 0$, то решения системы* (2) *мероморфны.*

Литература

1. Березкина Н. С., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О системе двух дифференциальных уравнений второго порядка типа Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 1. С. 153–155.

2. Ковалевская С. В. *Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки* // Научные работы С.В. Ковалевской. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 153–220.

3. Ляпунов А. М. *Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку* // Сообщения Харьковского математического общества. 1894. II серия. Т. IV, № 3. С. 123–140.

4. Кудряшов Н. А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений.* М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

АВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Н.Д. Василевич

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
VasilevichND@gmail.com

Пусть $\mathbb{C}^n$ — линейное векторное пространство над полем комплексных чисел, $\mathbb{R}^m$ — линейное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $M^{n\times m}(\mathbb{C})$ — линейное пространство всех комплексных матриц, у которых n строк и m столбцов, $GL(n,\mathbb{C})$ — группа невырожденных квадратных комплексных матриц порядка n.

Лемма. *Пусть в C^n действует мультипликативная абелева группа линейных преобразований с образующими $A_1,\ldots,A_m \in GL(n,\mathbb{C})$, где каждая матрица A_j диагонализируема: $A_j = \operatorname{diag}(\lambda_{1j},\ldots,\lambda_{nj})$, и все $\lambda_j \neq 0$. Тогда если матрица $H = (\lambda_{ij})$ (у которой n строк и m столбцов) не является мультипликативной матрицей Пуанкаре, то замыкание орбиты любой точки $y(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{C}^n$, у которой отличны от нуля все координаты, не содержит начало координат 0 в $\mathbb{C}^n$.*

Теорема. *Пусть во вполне интегрируемом автономном дифференциальном уравнении Пфаффа*

$$dy = (A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_m)y, \tag{1}$$

где $y \in \mathbb{C}^n$, $a(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}$, семейство попарно коммутирующих матриц $\{A_1,\ldots$ $\ldots,A_m\}$ имеет нормальную форму и H — матрица из $M^{nxm}(\mathbb{C})$, столбцы $\lambda_1,\ldots$ $\ldots,\lambda_m$ которой совпадают с диагоналями матриц $A_1,\ldots,A_m$ соответственно. Тогда замыкание любой интегральной поверхности уравнения (1) содержит начало координат $0 \in \mathbb{C}^n$ в том и только в том случае, когда H является аддитивной матрицей Пуанкаре.

Литература

1. Василевич Н. Д. *Об уравнениях Пфаффа с алгебраическими поверхностями* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 25. С. 28–32.

О ПРОСТРАНСТВЕ ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.Р. Гонцов

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Россия
rgontsov@inbox.ru

Рассмотрим на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ систему из p линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = B(z)\,y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

с матрицей $B(z)$ коэффициентов, являющихся мероморфными (рациональными) функциями. Пусть матрица $B(z)$ имеет n особых точек (полюсов) $a_1,\ldots,a_n$.

Скажем, что решение $y(z)$ этой системы принадлежит классу *лиувиллевых функций* (или является лиувиллевым), если все его компоненты выражаются в элементарных или алгебраических функциях и их первообразных. Множество лиувиллевых решений системы (1) образует подпространство $\mathcal{L}$ в p-мерном пространстве всех решений этой системы. Если $\dim \mathcal{L} = p$, то говорят, что система (1) разрешима в лиувиллевых функциях (или *обобщенных квадратурах*, подробнее см. в [1, гл. III; 2, гл. 3]).

В случае, когда (формальные) показатели $\beta_i^1, \ldots, \beta_i^p$ системы (1) в каждой ее особой точке a_i (числа, отвечающие за составляющие степенного роста (формальных) решений в особой точке) достаточно малы, оценка на размерность пространства $\mathcal{L}$ может быть получена исходя лишь из вида матрицы коэффициентов системы. В частности, имеет место следующее утверждение относительно разрешимости в обобщенных квадратурах такой системы.

Теорема 1. *Если в каждой особой точке a_i системы* (1) *ее (формальные) показатели β_i^j удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re}\beta_i^j > -\frac{1}{n(p-1)}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

то в общем положении такая система разрешима в обобщенных квадратурах тогда и только тогда, когда найдется постоянная матрица $C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ такая, что $CB(z)C^{-1}$ — верхнетреугольная матрица.

Частный случай этого утверждения, касающийся фуксовых систем, изложен в [3]. Напомним, что систему (1) называют *фуксовой*, если ее матрица коэффициентов $B(z)$ имеет полюс первого порядка в каждой особой точке. В таком случае показатели в точке a_i — это собственные значения матрицы-вычета $\operatorname{res}_{a_i} B(z)$. Мы проиллюстрируем данный критерий разрешимости в обобщенных квадратурах на примере фуксовой (2×2)-системы с тремя особыми точками 0, 1, ∞, не разрешимой в силу теоремы 1. Ее неразрешимость также будет следовать из того, что она эквивалентна гипергеометрическому уравнению, не попадающему в список Кимуры [4] гипергеометрических уравнений, разрешимых в обобщенных квадратурах.

Литература

1. Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру.* М.: ИЛ, 1959.

2. Хованский А. Г. *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде.* М.: МЦНМО, 2008.

3. Вьюгин И. В., Гонцов Р. Р. *К вопросу о разрешимости в квадратурах фуксовых систем* // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, № 3. С. 183–184.

4. Kimura T. *On Riemann's equations which are solvable by quadratures* // Funk. Ekvac. 1969. Vol. 12. P. 269–281.

О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОДУ

И.В. Горючкина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

igoryuchkina@gmail.com

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$f(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y)$ — это многочлен своих переменных, $\delta = x\,d\,dx$, $\delta^n = \delta^{n-1} \circ \delta$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть при $|x| \to 0$, $|\arg x| < \pi$ уравнение (1) имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Согласно лемме Мальгранжа [1] существует такой номер μ', что с помощью замены переменной

$$y = \sum_{k=1}^{\mu} c_k x^k + x^{\mu} u, \quad \mu \geqslant \mu' \tag{3}$$

уравнение (1) приводится к уравнению специального вида

$$L(\delta)u + xg(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u) = 0, \tag{4}$$

где $L(\delta)$ — это линейный дифференциальный оператор, функция $g(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u)$ — это полином своих переменных.

Теорема Мальгранжа [1]. *Если в уравнении* (4), *которое получено из уравнения* (1) *с помощью замены переменной* (3), *степень многочлена* $L(\delta)$ *равна* n, *то ряд* (2) *равномерно сходится для достаточно малых* $|x|$ *и* $|\arg x| < \pi$.

При доказательстве этой теоремы Мальгранж использовал теорему о неявном отображении для Банаховых пространств [2]. Мы же в доказательстве (см. [3]) используем методы и теоремы теории аналитических функций, которые позволяют оценить радиус сходимости ряда (2).

Предложение. *Пусть функция* $g(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ *из уравнения* (4) *голоморфна внутри замкнутого полидиска*

$$\overline{\Delta} = \{|x| \leqslant r, |u_0| \leqslant \rho, \ldots, |u_n| \leqslant \rho\}, \quad \mu = \max_{\overline{\Delta}} |g|.$$

Тогда степенной ряд $u = \sum_{k=\mu+1}^{\infty} c_k x^{k-\mu}$, *удовлетворяющий уравнению* (4), *сходится в диске*

$$D = \left\{ |x| < r \, \frac{\rho}{\rho + \mu r / \sigma N} \right\}, \quad N = (n+1)^{n+1}/(n+2)^{n+2}.$$

Литература

1. Malgrange B. *Sur le théorème de Maillet* // Asympt. Anal. 1989. Vol. 2. P. 1–4.
2. Дьедонне Ж. *Основы современного анализа.* М.: Мир, 1964.
3. Gontsov R. R., Goryuchkina I. V. *An analytic proof of the Malgrange — Sibuya theorem on the convergence of formal solutions of an ODE.* 2013. arXiv:1311.6416.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В.И. Громак, И.И. Козлов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

vgromak@gmail.com, ilya.kazlou@gmail.com

В настоящей работе исследуется свойства решений системы Гарнье, являющейся обобщением третьего уравнения Пенлеве на случай двух независимых переменных с симметрическим Гамильтонианом [1]. Рассмотрим систему Гарнье с двумя независимыми переменными t, s и искомыми скалярными функциями $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$, $w(s,t)$ в гамильтоновой форме

$$dx = \frac{\partial H_1}{\partial y}dt + \frac{\partial H_2}{\partial y}ds, \quad dy = -\frac{\partial H_1}{\partial x}dt - \frac{\partial H_2}{\partial x}ds,$$

$$dz = \frac{\partial H_1}{\partial w}dt + \frac{\partial H_2}{\partial w}ds, \quad dw = -\frac{\partial H_1}{\partial z}dt - \frac{\partial H_2}{\partial z}ds, \tag{1}$$

Гамильтонианы H_1 и $H_2 = \pi(H_1)$ для системы (1) являются симметрическими и имеют вид

$$H_1 = H_1(x,y,z,w,t,s,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{1}{t}[x^2y(y-1) + x((1-2\alpha_1)y - \alpha_0) + ty] +$$

$$+\frac{\alpha_2 s}{t(t-s)} - \frac{\alpha_0}{t-s}zw - \frac{1}{t-s}[tyz^2w + sx^2yw - 2txyzw + \alpha_0 sxw],$$

где $\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, а преобразование π определяется

$$\pi : (x,y,z,w,t,s,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \to (z,w,x,y,s,t,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3).$$

Доказано, что при некоторых условиях, которые выписаны в явной форме, две искомые функции можно из системы (1) исключить. Для системы (1) для специальных значений параметров α_i найдены тривиальные вырожденные решения, а также решения, выражающиеся через функции Бесселя или решения третьего уравнения Пенлеве [2]. С помощью построенных частных решений при специальных значениях параметров и преобразований Беклунда, которые изоморфны бирациональным преобразованиям, составляющим аффинную группу Вейля [3], для системы (1) получены новые классы алгебраических и трансцендентных решений.

Литература

1. Sasano, Y. *Symmetric Hamiltonian of the Garnier system and its degenerate systems in two variables* // arXiv: 0706.0799v3, p. 19.

2. Gromak V., Laine I., Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane.* Wolter De Gruyter, Berlin — New-York, 2002.

3. Suzuki T. *Affine Weyl group symmetry of the Garnier system* // Funkcial. Ekvac. 2005. Vol. 48. P. 203–230.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА *P*-ТИПА

Е.В. Громак

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lenagromak@tut.by

Известно, что проблема классификации нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка относительно свойства Пенлеве в общем случае открыта. Одной из первых работ по этой тематике была работа [1], в которой исследовалось на свойство Пенлеве уравнение третьего порядка с шестью полюсами $a_k = a_k(z)$, которые конечны, различны и в общем случае являются функциями независимой переменной z. Если же полюсы a_k постоянны, то уравнение Шази имеет вид

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{y'y'' + A_k(y')^3 + B_k(y')^2 + C_k y'}{y - a_k} + Dy'' + Ey' + \prod_{k=1}^{6}(y - a_k) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{y - a_k}. \quad (1)$$

В работе [1] также приведена система Шази $(A - F)$ относительно 26 неизвестных функций A_k, B_k, C_k, D, E, F_k, решение которой, по утверждению Шази, определяет необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у уравнения Шази.

В настоящей работе исследуются условия существования алгебраического интеграла, определяющего интегрируемость уравнения (1) в специальных функциях.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют системе Шази $(A-F)$, причем

$$A_j = 1/(a_5 - a_j) + 1(a_6 - a_j), \quad j = 1, \ldots, 4,$$

$$A_5 = 1/(a_1 - a_5) + 1/(a_2 - a_5) + 1/(a_3 - a_5) + 1/(a_4 - a_5) + 2/(a_5 - a_6),$$

$$A_6 = 1/(a_1 - a_6) + 1/(a_2 - a_6) + 1/(a_3 - a_6) + 1/(a_4 - a_6) + 2/(a_6 - a_5).$$

Тогда справедлива

Теорема. *При выполнении вышеприведенного условия,* $B_k = 0$, $k = 1, \ldots, 6$, *и дополнительного условия на полюсы* a_k *уравнение (1) имеет общий интеграл, определяемый уравнением*

$$(y')^2 = K_1 P(y) + K_2 Q(y) + R(y). \quad (2)$$

Заметим, что в уравнении (2) $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ — полиномы по y не выше четвертой степени с постоянными коэффициентами, а K_1, K_2 — произвольные постоянные. Третья произвольная постоянная получается разделением переменных и интегрированием. Также мы приводим явное выражение коэффициентов полиномов $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ через полюсы a_k. Уравнение (2) в общем случае интегрируется в эллиптических функциях. Заметим также, что в силу известной симметрии уравнения Шази $(A_k, a_k) \leftrightarrow (A_j, a_j)$ результат теоремы можно распространить на другие A_j и a_j.

В настоящей работе, продолжая исследования [2], мы приводим новые условия, при выполнении которых уравнение Шази (1) с постоянными полюсами a_k интегрируется в специальных функциях.

Литература

1. Chazy J. *Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes* // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 317–385.

2. Громак Е. В. *Об интегрировании уравнения Шази в эллиптических функциях* // Тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013». Гродно, Беларусь 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. С. 9–10.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.Е. Кулеш

[1] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

kulesh@grsu.by

Рассмотим дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{xxxxx} - 150 u_x u_{xx} - 60 u u_{xxx} + 720 u^2 u_x = u_t + a u_x + 2 a_x u, \quad (1)$$

где $u = u(x,t)$, $a_{xx} = 0$. В работе [1] показано, что уравнение (1) имеет формальное решение в виде ряда

$$u = \frac{1}{4}\varphi^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varphi^k, \tag{2}$$

где $\varphi = x+\gamma(t)$, $a = a_1\varphi + a_2$, коэффициенты u_1, u_3, u_4, u_5 и φ_t являются произвольными независимыми функциями от t, а все остальные коэффициенты можно найти по рекуррентным формулам

$$u_0 = 0, \quad u_2 = \frac{\varphi_t + a_2}{60},$$

$$(k+8)(k-1)(k-3)(k-4)(k-5)u_k = 360(u_{k-4}u_2 + u_{k-3}u_1) + \sum_{m=0}^{k-5}\Bigg(360 u_m u_{k-m-2} +$$
$$+150(m+2)(m+1)(k-m-4)u_{k-m-4}u_{m+2} + 60(m+3)(m+2)(m+1)u_{m+3}u_{k-m-5} +$$
$$+180(m+1)u_{m+1}u_{k-m-3} - 720\sum_{l=0}^{m} u_l u_{m-l}(k-m-4)u_{k-m-4}\Bigg) + (u_{k-5})_t + (k-4)u_{k-4}\varphi_t +$$
$$+(k-4)u_{k-4}a_2 + (k-3)u_{k-5}a_1, \quad k = 6, 7, \ldots \tag{3}$$

Пусть T_1 — область голоморфности коэффициентов u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Методом построения мажорантных рядов доказана

Теорема 1. *Ряд* (2) *с коэффициентами* (3) *сходится при* $0 \neq |\varphi| \leqslant M < \delta^{-1}$, *где* δ *определяется условиями*

$$|\gamma| < \frac{1}{32\delta}, \quad |u_1| < \frac{\delta^3}{32}, \quad |u_3| < \frac{\delta^5}{32}, \quad |u_4| < \frac{\delta^6}{32}, \quad |u_5| < \frac{\delta^7}{32}, \quad |a_1| < \frac{\delta^5}{32}, \quad |a_2| < \frac{\delta^4}{32},$$

при всех $t \in T \subset T_1$, *где* T — *замкнутый круг радиуса* ρ, *причем* $\rho \geqslant \delta^{-5}$, $|x| \leqslant \sigma$, $\sigma + (32\delta)^{-1} \leqslant M$, *а значит является решением уравнения* (1) *в указанной области.*

Используя метод построения рациональных решений по отрицательным резонансам, описанный в [2], доказана

Теорема 2. *Уравнение* (1) *имеет рациональное по* φ *решение*

$$u = \frac{2\varphi^{14} + 20h\varphi^7 + h^2}{\varphi^2\varphi^{14} - 4h\varphi^7 + 4h^2},$$

где $\varphi_t = -a_2$, $h = Ce^{7b}$, $b_t = a_1$, $C = \mathrm{const}$.

Литература

1. Кулеш Е. Е. *О свойствах решений одного уравнения в частных производных пятого порядка* // Весн. Гродненскагa дзярж. ун-та. Сер. 2. 2005. № 1(31). С. 66–70.

2. Здунек А. Г., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О рациональных решениях дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. 2000. № 3. С. 33–39.

О СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

Е.С. Лысюк

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

elysiuk@mail.com

Рассмотрим четыре автономных системы третьего порядка:

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = 3xy + y^2 + yz, \quad z' = 2xz + 8xy; \tag{1}$$

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = 3xy + y^2 - \nu yz, \quad z' = 2xz + z^2 - 8(\nu+2)/\nu^2 \cdot xy; \tag{2}$$

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = (3+\nu)xy + y^2 - \nu yz, \quad z' = z^2 - (\nu+4)^2/\nu^2 \cdot xy; \tag{3}$$

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = -(\nu+1)xy + y^2 + (\nu+4)yz, \quad z' = z^2 - \nu^2/(\nu+4)^2 \cdot xy; \tag{4}$$

где x, y, z — комплекснозначные функции, $\nu \in N\backslash\{1\}$.

Согласно [1, с. 114], если σ — абсцисса абсолютной сходимости рядов Дирихле

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k c^k e^{-kt}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k c^k e^{-kt}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k c^k e^{-kt}, \tag{5}$$

то в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$ ряды (5) сходятся абсолютно.

Для систем (1)–(4) доказана

Лемма 1. *Ряды*

$$x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k c^k e^{-kt}, \quad y = \beta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k c^k e^{-kt}, \quad z = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k c^k e^{-kt}, \tag{6}$$

представляют решение систем (1)–(4) *в области* $\operatorname{Re} t > \sigma$. *При этом* c *— произвольная постоянная,* $\alpha_1 = 1$, *остальные коэффициенты* β_1, γ_1, α_k, β_k, γ_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, *определяются для каждой из систем* (1)–(4) *единственным образом по рекуррентным формулам. Коэффициенты* $\{\alpha_0; \beta_0; \gamma_0\}$ *для систем* (1)–(4) *соответственно равны*

$$\{-1/4; -1/4; 1\}, \quad \left\{-\frac{\nu}{4(\nu+2)}; \ -\frac{\nu}{4(\nu+2)}; \ -\frac{1}{\nu+2}\right\},$$

$$\left\{-\frac{\nu}{4(\nu+2)}; \ -\frac{\nu}{4(\nu+2)}; \ -\frac{\nu+4}{4(\nu+2)}\right\}, \ \left\{-\frac{\nu+4}{4(\nu+2)}; \ -\frac{\nu+4}{4(\nu+2)}; \ -\frac{\nu}{4(\nu+2)}\right\}.$$

Лемма 2. *Системы* (1), (2) *инвариантны относительно преобразования переменных*

$$x(t) = f'(t)u(\tau) + \varphi(t), \quad x(t)y(t) = f'^2(t)u(\tau)v(\tau), \quad z(t) = f'(t)w(\tau), \quad \tau = f(t).$$

Системы (3), (4) *инвариантны относительно преобразования переменных*

$$x(t) = f'(t)u(\tau) + \varphi(t), \quad x(t)y(t) = f'^2(t)u(\tau)v(\tau), \quad z(t) = f'(t)w(\tau) + \varphi(\tau), \quad \tau = f(t).$$

Здесь f *— дробно-линейная функция от* t.

Справедливость леммы 2 легко проверить непосредственно.

Таким образом, лемма 1 и лемма 2 позволяют установить справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Ряды*

$$x = -\frac{1}{t-t_0} - \alpha_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}, \tag{7}$$

$$y = -h^2 \frac{\alpha_0\beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (\alpha_0\beta_k + \beta_0\alpha_k)\theta^k e^{-kh/(t-t_0)} + \sum\limits_{k=2}^{+\infty}\sum\limits_{p=1}^{k-1} \alpha_k \beta_{k-p} \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}}{(t-t_0)^3 + \alpha_0 h (t-t_0)^2 + h(t-t_0)^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}}, \tag{8}$$

$$z = -\gamma_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}$$

и ряды (7), (8),

$$z = -\frac{1}{t-t_0} - \gamma_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)},$$

имеющие место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением $2\mu t\bar{t} - (2\mu t_0 + h)\bar{t} - (2\mu\overline{t_0} + \overline{h})t + 2\mu t_0\overline{t_0} + h\overline{t_0} + \overline{h}t_0 = 0$, *представляют общее решение систем* (1), (2) *и* (3), (4) *соответственно. Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для общего решения каждой из систем* (1)–(4). *Здесь* $\bar{t}, \overline{t_0}, \overline{h}$ *означают числа, комплексно-сопряженные числам* t, t_0, h; $\mu = \sigma + \ln|\theta/c|$. *При этом* θ, h, t_0 *— произвольные постоянные, а коэффициенты* $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 0, 1, 2, \dots,$ *такие же, как и для рядов* (6).

Литература

1. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент.* Москва, 1976.

ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ И ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Милованов, О.Г. Медведева

Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь
mvmil@mail.ru, olga_medvedeva@tut.by

Под обобщенной цепочкой Тоды с двумя экспонентами будем понимать гамильтонову систему дифференциальных уравнений с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2) + c_1^2 e^{\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n} + c_2^2 e^{\beta_1 q_1 + \dots + \beta_n q_n}. \tag{1}$$

В [1] показано, что любая обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k}y'^2\right)\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right) \tag{2}$$

в полукруге $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$ с коэффициентами k и λ одного знака.

Нет сомнений, что в общем случае уравнение (2) не интегрируется в квадратурах. Тем не менее, с его помощью можно получать важную информацию о решениях цепочек Тоды.

Легко видеть, что уравнение (2) имеет два однопараметрических семейства решений $y = \pm\sqrt{k\lambda}x + C$, которые приводят к двум $(2n-1)$-параметрическим семействам решений исходной цепочки Тоды в элементарных функциях. Эти решения уже невозможно угадать.

Описание решений уравнения (2) вблизи границы полукруга $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$ позволяет исследовать поведение интегральных кривых цепочек Тоды с гамильтонианом (1) «на бесконечности».

Изучение решений (2) вблизи оси Ox, т.е. при малых $y > 0$, можно получить, положив в (2) $y^2 = 0$ и решив упрощенное таким образом уравнение.

Изучение решений (2) вблизи окружности $1-x^2-y^2 = 0$ так просто не получается. Если в уравнении (2) коэффициент λ достаточно мал, то (2) можно заменить более простым уравнением

$$y'' = -\frac{1}{k}\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2}\right)y'^2. \tag{3}$$

Выяснилось, что это уравнение (в отличие от уравнения (2)) имеет одномерную группу симметрии и, следовательно, к нему можно применить методы группового анализа дифференциальных уравнений [2]. В результате (3) сводится к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t \pm z)}, \quad 0 < t < 1, \quad z > 0, \tag{4}$$

где $a = (2-k)/k$. Уравнения (4) позволяют описать поведение решений уравнения (2) вблизи окружности $1-x^2-y^2=0$ в случае, когда коэффициент λ достаточно мал [3].

Литература

1. Милованов М. В., Медведева О. Г. *Об обобщенных цепочках Тоды с двумя экспонентами* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 3. С. 37–42.

2. Софус Ли. *Симметрии дифференциальных уравнений.* Т. 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

3. Милованов М. В., Медведева О. Г. *Применение методов группового анализа к изучению обобщенных цепочек Тоды с двумя экспонентами* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 9–15.

СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.С. Немец

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

nemets@grsu.by

В монографии [1] достаточно подробно изложены и систематизированы исследования по изучению свойств целых решений у алгебраических дифференциальных уравнений общего вида. В основном такие исследования проводились в направлении определения роста решений на бесконечности, то есть определения порядка и типа. Так же изучались вопросы наличия целых трансцендентных решений у таких уравнений а зависимости от характеристик самого уравнения.

Предлагается изучить свойства целых трансцендентных решений у неалгебраических дифференциальных уравнений в зависимости от наличия у этих решений нулей (в частности, целых трансцендентных решений с конечным числом нулей). Такая постановка задачи изучения свойств целых решений в зависимости от количества нулей, продолжает исследования, начатые в [2, 3].

В докладе приводится дифференциальное уравнение первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(z)\exp(B_i(z))\; w^{\nu_i}(w')^{\mu_i} = 0, \tag{1}$$

где $A_i(z) \not\equiv 0$ и $B_i(z)$, $i = \overline{1,n}$, — полиномы комплексного переменного z. Числа ν_i и μ_i — целые неотрицательные, такие, что $|\nu_i - \nu_j| + |\mu_i - \mu_j| \neq 0$, $i, j = \overline{1,n}$.

Решения уравнения (1) будем искать в виде целых трансцендентных решений с конечным числом нулей конечного типа, то есть, в виде

$$w\colon z \to P(z)\exp Q(z), \tag{2}$$

где P — полином, Q — целая функция.

Доказана

Теорема 1. *Любое целое решение уравнения* (1) *вида* (2) *будет таким, что целая функция* Q *является полиномом.*

Далее решения (2) уравнения (1) подразделяются на два класса — особые и неособые экспоненциальные части и исследования проводятся для каждого класса отдельно. Устанавливаются свойства полиномов P и Q: степени, коэффициенты при старших степенях, их структура. В частности, в случае особой экспоненциальной части доказывается

Теорема 2. *Если целая функция* (2), *с особой экспоненциальной частью является решением уравнения* (1), *то рациональная функция* $u\colon z \to Q'(z) + P'(z)/P(z)$ *является решением алгебраического уравнения* $\sum_{i=1}^{n} A_i(z)u^{\mu_i} = 0$.

Литература

1. Горбузов В. Н. *Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений.* Гродно: ГрГУ, 2006. 255 с.
2. Горбузов В. Н., Немец В. С. *К вопросу экспоненциально-полиномиальных решений нелинейного дифференциального уравнения* // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30, № 4. С. 297–300.
3. Горбузов В. Н., Немец В. С. *Целые функции-решения дифференциального уравнения первого порядка с обобщенными квазиполиномиальными коэффициентами* // Punime Matematike. 1988. № 3. P. 23–34.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Ю.В. Новогродская, В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

В работе на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей продолжаем [1] рассматривать систему двух дифференциальных уравнений:

$$x'^2 = A_2y^2 + A_1y + A_0, \quad y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00}, \tag{1}$$

где A_i, $i = \overline{0,2}$, — полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, b_{jk}, $j = \overline{0,1}$, $k = \overline{0,2}$, — аналитические по t функции, $A_2 \neq 0$, $|b_{12}| + |b_{02}| \neq 0$, и правые части ее уравнений не являются одновременно полными квадратами.

В [1] было показано, что справедлива

Лемма 1. *Для того, чтобы дифференциальная система* (1) *не имела подвижных многозначных особенностей, необходимо чтобы степень многочленов* A_i, $i = \overline{0,2}$, *по переменной* x *была не выше* 4.

Пусть $A_2 = a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}$. Используя метод малого параметра [2, 3], показываем, что необходимо требовать $|a_{24}| = |a_{23}| = 0$.

Рассмотрим случай

$$|a_{22}| = |a_{21}| = 0, \quad a_{20} \neq 0. \tag{2}$$

Лемма 2. *Для того чтобы система* (1) *при дополнительных условиях* (2) *обладала свойством Пенлеве, необходимо, чтобы она дробно-линейным преобразованием* x, y *и аналитической заменой независимой переменной* t *приводилась к виду*

$$x'^2 = (y + a_{11}x + a_{10})^2, \quad y'^2 = yb_{12}^2(x + b_{11})^2, \tag{3}$$

где $b_{12} \neq 0$.

Построив уравнение относительно компоненты y и выполнив замену $y = v^2$, получим уравнение

$$v'' = \left(\lambda_1 a_{11} + \frac{b'_{12}}{b_{12}}\right)v' - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 b_{12}v^2 - \frac{1}{2}\lambda_2 b_{12}\left(b'_{11} + \lambda_1(a_{10} - a_{11}b_{11})\right), \tag{4}$$

где $\lambda_1^2 = 1$, $\lambda_2^2 = 1$.

Используя метод резонансов [2], найдены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у решений уравнения (4). Учитывая структуру построения уравнения (4), заключаем, что при полученных условиях и система (3) с условиями (2) обладает свойством Пенлеве.

Литература

1. Пецевич В. М. , Погерило Ю. В., Шевченя Д. Н. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у одной системы дифференциальных уравнений специального вида* // Тез. докл. XV Междунар. науч. конф. «Еругинские чтения —2013». Гродно, 13–16 мая 2013 г.: в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, ред-кол.: А. К. Деменчук [и др.]. Минск, 2013. Ч. 1. С. 22.

2. Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИ, 1939. 719 с.

3. Cosgrove C., Scoufis G. *Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree* // Stud. Appl. Math. 1993. Vpl. 88. P. 25–87.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЫ

О.Н. Парманчук

Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь
statola@tut.by

Рассмотрим систему

$$x'^2 = Kb_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + y(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0),$$
$$y'^2 = c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 + x(d_3y^3 + d_2y^2 + d_1y + d_0), \tag{1}$$

где

$$b_3 \neq 0, \quad |c_3| + |d_3| \neq 0, \quad |d_3| + |d_2| + |d_1| + |d_0| \neq 0, \tag{2}$$

$a_0, a_1, a_2, b_i, c_i, d_i$, $i = \overline{0,3}$, — функции аналитические по t, K — постоянная. В [1] показано, что для отсутствия подвижных многозначных особенностей необходимо, чтобы система (1) имела вид

$$x'^2 = (x + b)^2(xy + H), \quad y'^2 = (y + d)^2(xy + H), \tag{3}$$

где H — постоянная, b, d — функции, аналитические по t.

Из системы (3) для компоненты y построим дифференциальное уравнение

$$(2y(y+d)y'' - (2y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(by^2+Hd))\times$$
$$\times(2y(y+d)y'' - (4y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(-by^2+2Hy+Hd)) = 0, \qquad (4)$$

которое распадается на два. Рассмотрим первое из них. Пусть $d \neq 0$. Выполняя в первом уравнении (4) замену по формуле $y = -du/(u-1)$, получим

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u'^2 + u(u-1)\left(\frac{H}{2u^2} - \frac{H}{2u} - \frac{bd}{2(u-1)} + \frac{d'^2}{2d^2}u + \frac{2dd'' - 3d'^2}{2d^2}\right). \qquad (5)$$

Согласно [2, с. 318], для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $b = M_1e^{M_2t}$, $d = M_3e^{M_4t}$, где M_i, $i = \overline{1,4}$, — некоторые постоянные. При этом уравнение (5) является частным случаем пятого уравнения Пенлеве. Если $d = 0$, то выполняя в первом уравнении из (4) замену переменной по формуле $y = 1/u$, получим

$$u'' = \frac{u'^2}{u} + \frac{b}{2}.$$

Данное уравнение обладает свойством Пенлеве [2, с. 279], если $b = M_5e^{M_6t}$, где M_i, $i = \overline{5,6}$, — некоторые постоянные, и при этом является частным случаем третьего уравнения Пенлеве. Рассматривая второе уравнение из (4), получим, что для отсутствия подвижных многозначных особых точек необходимо и достаточно полагать $d = M_7e^{M_8t}$, где M_i, $i = \overline{7,8}$, — некоторые постоянные. Объединяя результаты исследования системы (3), заключаем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *с ограничениями* (2) *обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием и аналитической заменой независимой переменной приводилась к виду* (3) *с ограничениями* $b = Ke^{Lt}$, $d = Me^{Nt}$, *где* K, L, M, N *— некоторые постоянные.*

Литература

1. Парманчук О. Н., Пецевич В. М. *Об одной перекрестной системе второго порядка без подвижных многозначных особенностей* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Третьей Междунар. науч. конф. Брест, 17-–22 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина; редкол.: В. И. Корзюк [и др.]. Брест, 2012. С. 74.

2. Bureau F. J. *Differential equations with fixed critical points* // Ann. di Math. 1964. Vol. 64. P. 229—364.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

О.Н. Парманчук

Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь
statola@tut.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка второй степени:

$$\left(y'' - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{y'^2}{y}\right)^2 = y', \qquad (1)$$

где $N \in \mathbb{Z}$. Найдем необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (1).

Пусть $N \neq 3$. Будем искать решения уравнения (1) в виде

$$y = \frac{N^2}{3(N-3)^2}x^3 + \ldots + hx^{r+3} + \ldots$$

Тогда из (1) получим $r = -1; 3(N-3)/(2N)$. Для того, чтобы резонансы были целыми [1], необходимо требовать $N = \pm 1, -3, \pm 9$.

Пусть $N = 1$, тогда (1) примет вид $y''^2 = y'$. Общее решение последнего уравнения

$$y = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}C_1x^2 + \frac{1}{4}C_1x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $N = 3$ уравнение (1) рассмотрено в [2]. Показано, что в этом случае решения уравнения содержат подвижные многозначные особенности.

Пусть $N \neq 1; 3$. Введем в уравнение (1) замену по формулам $y = w^2/4$. Тогда уравнение (1) представимо в виде

$$w = \frac{N-1}{N}\frac{w^3}{\lambda - w'},$$

где $\lambda^2 = 1$. Из последнего видно, что функции y и w одновременно либо однозначные, либо имеют подвижные критические особые точки. Поэтому для w имеем уравнение

$$w'' = \frac{N-3}{N-1}\frac{w'^2}{w} + \lambda\frac{N+3}{N-1}\frac{w'}{w} - \frac{2N}{N-1}\frac{1}{w}. \tag{2}$$

Полагая в (2) $w = \lambda u$, получим

$$u'' = \frac{N-3}{N-1}\frac{u'^2}{u} + \frac{N+3}{N-1}\frac{u'}{u} - \frac{2N}{N-1}\frac{1}{u}. \tag{3}$$

Согласно [3] для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (3) необходимо и достаточно, чтобы $N = 9$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\left(y'' - \frac{8}{9}\frac{y'^2}{y}\right)^2 = y',$$

общее решение которого

$$y = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}C_1(x - C_2)^3 + \frac{1}{2}\right)^3,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Теорема. *Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $N = 1$ *или* $N = 9$.

Литература

1. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П., Парманчук О. Н., Пронько В. А. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений* // Весн. Гродзенскага. дзярж. ун-та. Сер. 2. Прыродазнаўчыя навукі. 2008. №1 (64). С. 8–16.

2. Мартынов И. П., Парманчук О. Н. *Об одном классе дифференциальных уравнений второго порядка второй степени относительно старшей производной* // Весн. Гродзенскага. дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. 2008. № 3(37). С. 54–59.

3. Bureau F. J. *Differential equations with fixed critical points* // Ann. di Math. 1964. Vol. 64. P. 229–364.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ У ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Т. Сазонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
Lozanna86@mail.ru

Рассматривается система

$$\ddot{x} = 2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d\,\frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \quad \ddot{y} = -2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e\,\frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y},$$

$$\ddot{z} = -2c\,\frac{\dot{x}\dot{z}}{x} - 2b\,\frac{\dot{y}\dot{z}}{y} - 2f\,\frac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{y})}{x+y}, \tag{1}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = \tau - \tau_0$.

Для наличия у системы

$$\ddot{x} = 2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d\,\frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \quad \ddot{y} = -2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e\,\frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y} \tag{2}$$

свойства Пенлеве ([1, 2]) необходимо и достаточно $d = e = -1/2$, $a = 0$. При этом общее решение (2) можно записать в виде $x = (K/6)t^3 + D_2t^2 + D_1t + D_0$, $y = (K/6)t^3 + C_2t^2 + C_1t + C_0$, где $t = \tau - \tau_0$, C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а D_0, D_1, D_2 находятся из соотношений

$$D_0 = \frac{KC_0C_1 + 2C_1^2C_2 - 8C_0C_2^2}{4C_2^2 - 2KC_1}, \quad D_1 = \frac{2C_2}{C_1}(D_0 + 2C_0) - C_1, \quad D_2 = \frac{K}{2C_1}(D_0 + 2C_0).$$

Доказана

Теорема. *Для наличия у системы* (1) *свойства Пенлеве необходимо и достаточно* $d = e = -1/2$, $a = 0$, *а константы* c, b, f *принимают одно из* 17 *значений следующей таблицы:*

c	-1	0	-1	-1	0	0	-1	$-1/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	$-3/2$	0	0
b	-1	-1	0	-1	0	-1	0	0	$-1/2$	0	$-1/2$	0	$-1/2$	$-1/2$	0	$-3/2$	0
f	-1	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	$-1/2$	0	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	0	0	$-3/2$

Литература

1. Калоджеро Ф. *Разрешаемая задача трех тел и гипотезы Пенлене* // Теоретическая и математическая физика. 2002. Т. 133, № 2. С. 149–159.

2. Лозовская А.Т. *Тест Пенлеве для некоторых систем дифференциальных уравнений, связанных с задачей трех тел* // Наука–2009 : сб. ст. В 2 ч. Ч. 2 / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: А. Ф. Проневич (отв. ред.) [и др.] Гродно: ГрГУ, 2009. С. 48–49.

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ ПО ЗАДАННОЙ ПРИВОДИМОЙ ГРУППЕ МОНОДРОМИИ

Л.А. Хвощинская, Н.Д. Василевич

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

ludmila.ark@gmail.com

Пусть группа монодромии, которая получается при обходе четырех особых точек $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$ системы двух функций (y_1, y_2), приводима и имеет вид

$$V_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \Delta_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot = E.$$

Найдем дифференциальные матрицы системы Фукса

$$\frac{dY}{dz} = \sum_{k=1}^{3} \frac{U_k}{z - a_k} Y, \tag{1}$$

которой удовлетворяет данная система функций.

Обозначим $\rho_k = (2\pi i)^{-1} \ln \alpha_k$, $0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_k < 1$, $k = 1, \dots, 4$. Функции y_1, y_2 являются решениями дифференциального уравнения класса Фукса

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1 - \rho_k}{z - a_k} - \frac{1}{z - b} \right) y' = 0,$$

фундаментальная система решений которого в окрестности особых точек имеет вид

$$u_k = \int\limits_{a_k}^{z} \prod_{k=1}^{3} (z - a_k)^{\rho_k - 1} (z - b)\, dz, \quad v_k = 1, \quad k = 1, \dots, 4,$$

а точка b подлежит определению. В окрестности каждой особой точки a_k функции (u_k, v_k) и (u_{k+1}, v_{k+1}) связаны между собой соотношениями

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \Lambda_k \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\lambda_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \prod_{k=1}^{3} (z - a_k)^{\rho_k - 1} (z - b)\, dz$.

С другой стороны, в окрестности каждой особой точки a_k решение системы (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_k & d_k \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где матрица D_k приводит матрицу V_k к нормальной жордановой форме, $d_k = \Delta_k \times \times (\alpha_k - 1)^{-1}$, γ_k, δ_k — постоянные. Решение (2) допускает аналитическое продолжение «по цепочке» при выполнении условий $D_2 = \Lambda_1 D_1$, $D_3 = \Lambda_2 D_2$ или $\lambda_1/\lambda_2 = (d_3 - - d_2)/(d_3 - d_1)$, откуда находим точку b :

$$b = \frac{(d_3 - d_2) \int\limits_{a_1}^{a_2} z R(z)\, dz + (d_2 - d_1) \int\limits_{a_2}^{a_3} z R(z)\, dz}{(d_3 - d_2) \int\limits_{a_1}^{a_2} R(z)\, dz + (d_2 - d_1) \int\limits_{a_2}^{a_3} R(z)\, dz}, \quad R(z) = \prod_{k=1}^{3} (z - a_k)^{\rho_{k-1}}.$$

Следовательно, дифференциальные матрицы системы (1) имеют вид $U_k = \begin{pmatrix} \rho_k & \theta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\theta_k = (b - a_k)/\prod_{j=1, j\neq k}^{3}(a_j - a_k)$.

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

В.В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
tsegvv@bsuir.by

В работе [1] рассмотрены системы

$$\dot{x} = -z, \quad \dot{y} = -x^2 - y, \quad \dot{z} = \alpha + \beta x + y, \tag{1}$$

$$\dot{x} = -z, \quad \dot{y} = x - y, \quad \dot{z} = \alpha x + y^2 + \beta z, \tag{2}$$

$$\dot{x} = -x - \alpha y, \quad \dot{y} = x + z^2, \quad \dot{z} = \beta + x, \tag{3}$$

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \alpha(y - y^2) - \beta z \tag{4}$$

с произвольными фиксированными параметрами α и β.

Системы (1)–(3) являются обобщением систем M, Q, S из списка Спротта [2]. Система (4) является обобщением тороидальной системы Ресслера [3]. Характерной (с качественной точки зрения) особенностью систем (1)–(3) является их хаотическое поведение при определенных значениях входящих в них параметров, в частности, наличие странных аттракторов.

В работе [1] показано, что каждая из систем (1)–(4) с точностью до линейного преобразования одной из неизвестных компонент эквивалентна уравнению

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2\dot{q} + q^2 + k_3, \tag{5}$$

в которых коэффициенты k_i $(i = \overline{1,3})$ являются функциями параметров α и β.

Теорема. *Система уравнений*

$$\nu\dot{p} = y - bp, \quad \dot{y} = z - \mu p, \quad \dot{z} = -\frac{p^2}{2} - A \tag{6}$$

(*с произвольными постоянными фиксированными действительными параметрами* b, ν, μ $(\nu \neq 0)$ *и произвольной постоянной* A) *эквивалентна уравнению* [4]

$$\nu\dddot{p} + b\ddot{p} + \mu\dot{p} + \frac{p^2}{2} + A = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет собой автомодельную редукцию хорошо известного уравнения Курамото — Сивашинского [5]

$$p_s + \nu p_{\tau\tau\tau\tau} + bp_{\tau\tau\tau} + \mu\rho_{\tau\tau} + pp_\tau = 0$$

в переменных бегущей волны. Уравнение (5) есть частный случай уравнения (7). На основании этого получены новые значения параметров, при которых уравнение (7) обладает хаотическим поведением.

Система (6) дополняет список систем Спротта [2], обладающих (при определенных значениях параметров) хаотическим поведением.

Литература

1. Eichhorn R., Linz S. J., Hänggi P. *Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, no. 6. P. 7151–7164.
2. Sprott J. C. *Some simple chaotic flows* // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50, no. 2. P. R647–R650.
3. R ö ssler O. E. // Ann. New York Acad. Sciences. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
4. Конт Р., Мюзетт М. *Метод Пенлеве и его приложения.* М. — Ижевск, 2011. 340 с.
5. Kuramoto Y., Tsuzuki T. *Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium* // Prog. Theor. Phys. 1976. Vol. 55, no. 2. P. 356–369.

DIFFERENTIAL EQUATIONS VS POWER SERIES

V.A. Dobrushkin

Brown University, USA

A typical approach for solving ordinary differential equations with variable coefficients is to seek their solutions in the form of a generalized power series. However, we may wish to know more about the properties of coefficients in the series, such as their partial sums or weighted sums. We work with a general second-order linear differential equation

$$y'' + a(z)\, y' + b(z)\, y = 0, \tag{1}$$

where $a(z)$ and $b(z)$ are continuous functions on some interval. Suppose $y(z)$ is a series solution of this equation. If $y(z)$ has a Maclaurin representation $y(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, then the series is a generating function for its sequence of coefficients $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$. The sequence of finite sums $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ has generating function [1] given by:

$$S(z) = \frac{y(z)}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \right) z^n = \sum_{n\geqslant 0} \sigma_n\, z^n.$$

Actually, the function $S(z)$ satisfies a differential equation

$$S''(z) + \left(a(z) - \frac{2}{1-z} \right) S'(z) + \left(b(z) - \frac{a(z)}{1-z} \right) S(z) = 0.$$

As illustration, consider Chebyshev's equation (in the variable x) $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, where n is a positive integer. This equation has the form of (1) with $a(x) = -x/(1-x^2)$ and $b(x) = n^2/(1-x^2)$. It has two linearly independent solutions $T_n(x)$, known as the Chebyshev polynomial of the first kind, and $\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)$, where $U_{n-1}(x)$ is the Chebyshev polynomial of the second kind (of degree $n-1$). The polynomial $T_n(x)$ can be considered as a generating function for its coefficients, which are zero starting with index $n+1$. Let $\sigma_{k,n}$ be the sum of all coefficients up to index k of $T_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots,$ $k = 0, 1, \ldots n)$. Obviously, this sequence stabilizes when k exceeds n : $\sigma_{n,n} = \sigma_{n+1,n} = \sigma_{n+2,n} = \ldots$. Moreover, the sum of all coefficients in any Chebyshev polynomial $T_n(x)$ is 1, which follows from the relation $(1-x)^{-1}T_n(x) = P_{n-1}(x) + (1-x)^{-1}$, where $P_{n-1}(x)$ is a polynomial of degree $n-1$. Similarly, from the relation $U_{n-1}(x) = Q_{n-2}(x)(1-x) + n$, for some polynomial $Q_{n-2}(x)$ of degree $n-2$, it follows that the sum of all coefficients in Chebyshev polynomial of the second kind $U_{n-1}(x)$ is n.

References

1. Dobrushkin V. A. *Methods in Algorithmic Analysis.* CRC Press, Boca Raton, 2010.

ON VECTOR FIELD DEFINED BY THE HOPF MAP S^3 ON S^2

V.S. Dryuma

Institute of Mathematics and Computer Sciences AS of Moldova, Kishinev, Moldova
valdryum@gmail.com

The subject of our consideration is the system of ODE's in E^3-space

$$\frac{d}{dt}x(t) = 8\,\frac{4\,zx - y(x^2+y^2+z^2) + 4\,y}{(x^2+y^2+z^2+4)^2}, \quad \frac{d}{dt}y(t) = 8\,\frac{4\,zy + x(x^2+y^2+z^2) - 4\,x}{(x^2+y^2+z^2+4)^2},$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{24\,x^2 + 24\,y^2 - 8\,z^2 - (x^2+y^2+z^2)^2 - 16}{(x^2+y^2+z^2+4)^2},$$

associated with the Hopf map $S^3 \to S^2$ of three dimensional sphere with equation $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1$ on two-dimensional sphere S^2 considered as set of the points $[z_1/z_2, 1]$ of complex space C^2.

In our report we discuss the properties of this system of equations. The results presented generalize those obtained in [1].

Theorem. *In the spherical system of coordinates* $x(t) = r(t)\cos(\phi(t))\sin(\psi(t))$, $z(t) = r(t)\cos(\psi(t))$, $y(t) = r(t)\sin(\phi(t))\sin(\psi(t))$ *the system takes form*

$$\frac{d}{dt}r(t) = \frac{((r(t))^4 + 8\,(r(t))^2 - 64\,(r(t))^2(\sin(\psi(t)))^2 + 16)\cos(\psi(t))}{(r(t))^4 + 8\,(r(t))^2 + 16},$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -8\,\frac{-4 + (r(t))^2}{(r(t))^4 + 8\,(r(t))^2 + 16},$$

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{\sin(\psi(t))((r(t))^4 + 40\,(r(t))^2 - 64\,(r(t))^2(\sin(\psi(t)))^2 + 16)}{r(t)((r(t))^4 + 8\,(r(t))^2 + 16)}$$

and it solutions are expressed trough the function $\sqrt{H(r)}$ *which satisfies to the equation*

$$4\,C_1\,\mathrm{Bessel}\,I(0, 1/2\,\sqrt{H(r)r^2}) + C_1\,\mathrm{Bessel}\,I(0, 1/2\,\sqrt{H(r)r^2})r^2 -$$

$$-8\,C_1\,\mathrm{Bessel}\,I(1, 1/2\,\sqrt{H(r)r^2})\sqrt{H(r)r^2} + 4\,\mathrm{Bessel}\,K(0, -1/2\,\sqrt{H(r)r^2}) +$$

$$+\mathrm{Bessel}\,K(0, -1/2\,\sqrt{H(r)r^2})r^2 - 8\,\mathrm{Bessel}\,K(1, -1/2\,\sqrt{H(r)r^2})\sqrt{H(r)r^2} = 0,$$

where $\sqrt{H(r)} = \sin(\psi(r))$ *and* C_i *are the parameters.*

More detail information about properties of the solutions can be obtained by means of the first order p. d. e. associated with the considered systems of equations [2].

Aknowledgement. The work is partially supported by Grant 14-01-00389.

References

1. Aminov Yu. A. *Geometriya vektornogo polya* M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1990. 208 pp.

2. Dryuma V. S. *On the theory of the first order systems of differential equations* // Intern. Conf. on Differential Equations and Dynamical Systems. Suzdal, July' 2–7, 2010.Abstracts. Suzdal, 2010. P. 205–206.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КЛАССА СЛАБО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОДНОГО ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Е.Б. Бекряева

Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь
evgenia.bekriaeva@gmail.com

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, а матрица коэффициентов $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ кусочно-непрерывна и ограничена на временно́й полуоси $t \geqslant 0$. Класс всех таких систем обозначим $\mathcal{M}_n$. Отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Считаем, что на множестве $\mathcal{M}_n$ задана топология равномерной сходимости на полуоси, т. е. топология, порождаемая метрикой

$$\operatorname{dist}(A(\cdot), B(\cdot)) = \sup_{t \geqslant 0} \|A(t) - B(t)\|, \quad A(\cdot),\ B(\cdot) \in \mathcal{M}_n.$$

Система из $\mathcal{M}_n$ называется [1, 2] слабо экспоненциально дихотомической на полуоси, если существуют такие положительные постоянные ν_1 и ν_2 и такое разложение пространства
$\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ начальных (при $t = 0$) данных в прямую сумму подпространств L_- и L_+ (причем, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для ее решений $x(\cdot)$ выполняются условия:

а) если $x(0) \in L_-$, то $\|x(t)\| \leqslant c_1(x)\,\mathrm{e}^{-\nu_1(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t \geqslant s \geqslant 0$,

б) если $x(0) \in L_+$, то $\|x(t)\| \geqslant c_2(x)\mathrm{e}^{\nu_2(t-s)}\|x(s)\|$ для любых $t \geqslant s \geqslant 0$,

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ — положительные постоянные, вообще говоря, свои для каждого решения $x(\cdot)$.

Если положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из L_- и L_+ соответственно (т. е. если эти оценки равномерны по этим постоянным), то приходим к классическому определению экспоненциально дихотомической системы. Класс n-мерных слабо экспоненциально дихотомических систем обозначим WE_n, а класс n-мерных экспоненциально дихотомических систем — E_n. Очевидно равенство $E_1 = WE_1$. То, что при $n \geqslant 2$ включение $E_n \subset WE_n$ является собственным, вытекает из работы [3]. В работе [1] доказано, что, описательно говоря, неравномерность оценок **а)** и **б)** может быть сделана сколь угодно малой.

Поскольку определения классов E_n и WE_n достаточно близки, то представляется правдоподобным, что и их свойства, если и отличаются, то несущественно. В частности, хорошо известно (например, [4, с. 260]), что свойство системы (1) быть экспоненциально дихотомической является грубым, т. е. множество E_n является открытым в метрическом пространстве M_n. Следующая теорема 1 показывает, что для слабо экспоненциально дихотомических систем свойство грубости места не имеет.

Теорема 1. *Для любого натурального* $n \geqslant 2$ *в метрическом пространстве* M_n *с топологией равномерной сходимости на полуоси внутренность множества* WE_n *слабо экспоненциально дихотомических систем совпадает с множеством экспоненциально дихотомических систем, т. е.* $\operatorname{int} WE_n = E_n$ *для любого* $n \geqslant 2$.

Следствие. *В метрическом пространстве* M_n, $n \geqslant 2$, *с топологией равномерной сходимости на полуоси множество* WE_n *не является ни открытым, ни замкнутым, все его точки предельные, а его край* $\operatorname{ed} WE_n$ *(т. е. множество* $\operatorname{ed} WE_n \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} WE_n \setminus \operatorname{int} WE_n$ *составляют в точности слабо экспоненциально дихотомические системы, не являющиеся экспоненциально дихотомическими.*

Теорема 1 и ее следствие допускают усиление.

Приведем необходимое определение. Если вышеупомянутые положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из L_- и L_+, но не при всех $t \geqslant 0$, а при всех $t \geqslant t_x$, где t_x свое, вообще говоря, для каждого решения $x(\cdot)$, то приходим к определению слабо экспоненциально дихотомической системы в узком смысле.

Класс таких систем обозначим SWE_n.

Теорема 2. *Включения* $E_n \subset SWE_n \subset WE_n$ *являются собственными.*

Теорема 1 и ее следствие справедливы и для класса слабо экспоненциально дихотомических систем в узком смысле.

Литература

1. Бекряева Е. Б. *О равномерности оценок норм решений экспоненциально дихотомических систем* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 626–636.
2. Бекряева Е. Б. *Линейные дифференциальные системы, близкие к экспоненциально дихотомическим* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 1. С. 36–40.
3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1665–1676.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970. 536 с.

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.А. Белозерова, Т.С. Тютюникова

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

Marbel@ukr.net, gedr@inbox.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[$ либо — $]Y_i, y_i^0]$ (здесь при $\omega > 0$ считаем, что $a > 0$, а при $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно). Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i является правильно меняющейся (см. [1]) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, причем $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Определение 1. Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Наиболее сложными для изучения являются те из них, для которых $\lambda_0 = 0, 1, \infty$. Настоящая работа посвящена $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решениям.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\varphi_i(z)$, где $i \in \{0, 1\}$, удовлетворяет условию S_i, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L : \Delta_{Y_i} \to\ ]0; +\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

имеет место соотношение

$$\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1 + o(1)) \ \text{ при } \ z \to Y_i, \quad (z \in \Delta_{Y_i}).$$

В работе [2] исследованы $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решения уравнения (1) для случаев, когда функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию S_0. В настоящей работе удалось распространить эти результаты на общий случай уравнения (1). Получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решений, а также найдены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных.

Литература

1. Seneta E. *Regularly varying functions.* Lecture Notes in Math. Vol. 508. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

2. Евтухов В. М., Белозерова М. А. *Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка* // Укр. Мат. журн. 2008. Т. 60, № 3. С. 310–331.

О ГРУБОСТИ L^p-ДИХОТОМИИ НА ОСИ

Л.И. Бортницкая, Р.А. Прохорова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Рассматриваем линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами $A(\cdot) :\ \mathbb{R} \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и с фундаментальной матрицей $X(t)$, $X(0) = E$. В дальнейшем систему (1) будем отождествлять с ее матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ и называть системой A.

Определение [1, с. 9; 2]. Будем говорить, что система (1) обладает свойством L^p-дихотомии на числовой прямой $\mathbb{R}$ с параметром $p > 0$ и обозначать это включением $A \in L^p_{\mathbb{R}} D$, если существуют положительная постоянная K и пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 таких, что выполнено неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\|^p \, d\tau + \int\limits_{t}^{+\infty} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p \, d\tau \leqslant K, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В случае систем (1) с L^p-дихотомией на оси имеет место свойство грубости относительно равномерно малых на оси возмущений, как и в случае множеств L^pD [1, с. 153].

Теорема. *Если система A принадлежит множеству $L^p_{\mathbb{R}}D$ с параметром $p \geqslant 1$, то существует такое $\varepsilon_A > 0$, что система $A+Q$ также принадлежит множеству $L^p_{\mathbb{R}}D$ для любой кусочно-непрерывной матрицы $Q(t)$, удовлетворяющей неравенству $\|Q(t)\| < \varepsilon_A$, $t \in \mathbb{R}$.*

Однако в случае систем (1) из множества $L^p_{\mathbb{R}}D$, $p > 0$, возможно разрушение свойства L^p-дихотомичности на оси при (немалых) возмущениях, отличных от нуля на промежутке сколь угодно малой длины, что не может иметь места для систем с L^p-дихотомией на полуоси.

Утверждение. *Для любых чисел: натурального $n \geqslant 2$ и положительных p и ε, существуют n-мерные матрицы $A(t)$ и $B(t)$ такие, что $A \in L^p_{\mathbb{R}}D$, матрица $B(t)$ отлична от нуля лишь на промежутке длины ε, однако $(A+B) \notin L^p_{\mathbb{R}}D$.*

Литература

1. Изобов Н. А., Прохорова Р. А. *Линейные дифференциальные системы Коппеля — Конти.* Мн.: Белорус. наука, 2008. 230 с.

2. Прохорова Р. А., Шевцов И. Л. *Об ограниченных решениях слабо нелинейных систем с L^p-дихотомичным линейным приближением* // Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. 1. Физика, математика, информатика. 2001. № 2. С. 52–55.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

В.В. Быков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

vvbykov@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с непрерывными (не обязательно ограниченными) оператор-функциями A (которые будем отождествлять с соответствующими системами), наделенное равномерной топологией.

Определение. Следуя [1], для всякой системы $A \in \mathcal{M}^n$ и всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ определим k-й *максимальный показатель Ляпунова* формулой

$$\lambda_k^{\max}(A) = \varlimsup_{B \to A} \lambda_k(B),$$

где λ_k — k-й (в порядке возрастания) показатель Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть M — полное метрическое пространство, а $A : M \times \mathbb{R}^+ \to$ $\to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда найдется такое плотное типа G_δ подмножество $D \subset M$, что для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\mu \mapsto \lambda_k^{\max}(A(\mu, \cdot))$ полунепрерывна сверху в каждой точке D.*

Теорема 2. *Пусть задана система $A \in \mathcal{M}^n$ и для некоторых α и $k \in \{1, \ldots$ $\ldots, n\}$ выполнено $\lambda_k^{\max}(A) < \alpha$. Тогда существуют такие $C, \delta > 0$, что для всякой оператор-функции $B \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющей условию*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |B(t)| \leqslant \delta,$$

найдется k*-мерное подпространство решений системы* $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$, *удовлетворяющих оценке*

$$|x(t)| \leqslant C|x(0)|e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^{+}.$$

Замечание 1. В случае, когда коэффициенты системы A ограничены, утверждение теоремы 2 вытекает из [2, теорема 15.2.1], а в случае неограниченных коэффициентов для $k = n$ — из результата доклада [3].

Теорема 3. *Для всякой системы* $A \in \mathcal{M}^n$ *найдется такая система* $B \in \mathcal{M}^n$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{t\to\infty} |B(t) - A(t)| = 0,$$

что для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ *выполнено равенство*

$$\lambda_k(B) = \lambda_k^{\max}(A).$$

Замечание 2. В случае, когда коэффициенты системы A ограничены, утверждение теоремы 3 установлено в [1].

Литература

1. Сергеев И. Н. *К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

3. Миллионщиков В. М. *Формула для мажоранты показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. №6. С. 1093.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПО МАТРИЦЕ КОШИ ТОЧНЫХ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ ПОДВИЖНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.С. Войделевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
voidelevich@gmail.com

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $n \geqslant 2$, с кусочно-непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси коэффициентами. Класс всех таких систем обозначим через $\mathcal{M}_n$ и, отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит классу E_n экспоненциально убывающих возмущений (т. е. характеристический показатель нормы $\|Q(\cdot)\|$ отрицателен: $\lambda[Q] < 0$). Рассмотрим точные крайние границы подвижности k-го показателя Ляпунова при таких возмущениях: нижнюю $\Delta_k(A) = \inf\limits_{Q\in E_n} \lambda_k(A+ + Q)$ и верхнюю $\nabla_k(A) = \sup\limits_{Q\in E_n} \lambda_k(A + Q)$, $k = \overline{1, n}$. Величины $\Delta_1(A)$ и $\nabla_n(A)$, называемые показателями Изобова, вычислены в работе [1]. В данной докладе для любой системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$ и каждого $k = \overline{1,n}$ вычислена верхняя граница $\nabla_k(A)$ подвижности.

Скажем, что линеал $N(\cdot)$ решений системы (1) экспоненциально больше линеала решений $L(\cdot)$ (далее будем обозначать $N(\cdot) \succeq_{\mathrm{e}} L(\cdot)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T_\varepsilon \geqslant 0$, что при всех $t \geqslant \tau \geqslant T_\varepsilon$ выполнено неравенство $(\|x_1(t)\|/\|x_1(\tau)\|) : (\|x_2(t)\|/\|x_2(\tau)\|) \geqslant \exp\{-\varepsilon t\}$ для любых ненулевых решений $x_1(\cdot) \in N(\cdot)$ и $x_2(\cdot) \in \in L(\cdot)$.

Будем говорить, что пара линеалов $(L(\cdot), N(\cdot))$ является экспоненциально регулярной, если угол $\angle(L(t), N(t))$, $t \geqslant 0$, между этими линеалами имеет точный нулевой характеристический показатель.

Скажем, что линеал $N(\cdot)$ решений системы (1) сильно экспоненциально больше линеала решений $L(\cdot)$ (далее будем обозначать $N(\cdot) \succ_{\mathrm{e}} L(\cdot)$), если $N(\cdot) \succeq_{\mathrm{e}} L(\cdot)$ и пара $(L(\cdot), N(\cdot))$ является экспоненциально регулярной.

Старшим экспоненциальным показателем $\nabla\big|_L(A)$ линеала $L(\cdot)$ решений системы (1) назовем величину

$$\nabla\big|_L(A) = \lim_{\theta \to 1+0} \varlimsup_{\mathbb{N} \ni m \to +\infty} \theta^{-m} \sum_{j=1}^{m} \ln \|X\big|_L(\theta^j, \theta^{j-1})\|,$$

где $X\big|_L(t,\tau)$ — сужение оператора Коши $X(t,\tau)$ системы (1) на подпространство $L(\tau)$.

Теорема. *Пусть k — наименьшее число, больше или равное i, для которого существует такое разбиение пространства $\mathcal{X}_A$ решений системы* (1) $\mathcal{X}_A = L(\cdot) \oplus \oplus N(\cdot)$, *что $N(\cdot) \succ_{\mathrm{e}} L(\cdot)$ и $\dim L = k$. Тогда показатель $\nabla_i(A)$ совпадает со старшим экспоненциальным показателем $\nabla\big|_L(A)$ линеала $L(\cdot)$.*

Литература

1. Изобов Н. А. *Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление* // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5–8.

О МЕТРИЧЕСКОЙ ТИПИЧНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПЕРРОНА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.Г. Гаргянц

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
gaaaric@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty),$$

каждую из которых отождествим с ее непрерывной (не обязательно ограниченной) функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_*(A)$ множества всех и всех ненулевых решений системы A соответственно и положим $\mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_* = = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$.

Определение 1 [1, 2]. Под *показателем Перрона* $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ будем понимать функцию $\pi(x) = \varliminf_{t \to \infty} t^{-1} \ln \|x(t)\|$, $x \in \mathcal{S}_*$, $\pi(0) = -\infty$. *Показателем Перрона системы* $A \in \mathcal{M}^n$ назовем сужение π_A этой функции на пространство $\mathcal{S}(A)$, а его *главным значением* на $L \subset \mathbb{R}^n$ — величину $\Pi_L = \sup\{\pi_A(x) \mid x(0) \in L\}$.

Определение 2. Значение α показателя Перрона π_A системы $A \in \mathcal{M}^n$, принимаемое на решениях, начальные значения которых образуют подмножество $\mathcal{N} = \left(\pi_A^{-1}(\alpha)\right)(0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной мерой, называется *метрически типичным* (*существенным*), если подмножество $\mathcal{N}$ имеет полную меру (содержит подмножество положительной меры).

Понятия метрической типичности и существенности значения α показателя π_A распространяются со всего пространства $\mathbb{R}^n$ на любое его *нетривиальное* (т. е. отличное от одномерной прямой, проходящей через точку $0 \in \mathbb{R}^n$) *аффинное подпространство* L заменой в определении 2 множеств $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{N}$ на их пересечения с L.

Определение 3. Скажем, что показатель π_A системы $A \in \mathcal{M}^n$ обладает свойством:

а) *главной метрической типичности (существенности)*, если его главное значение на каждом нетривиальном аффинном подпространстве метрически типично (существенно).

б) *полной метрической несущественности*, если любое его значение на каждом нетривиальном аффинном подпространстве метрически не существенно.

Известно [1, 2], что показатель π_A любой *ограниченной* системы $A \in \mathcal{M}^n$ обладает свойством главной метрической типичности (а значит, и существенности). Однако для неограниченных систем это уже не так, о чем говорит следующая

Теорема 1 [3]. *Для любого $n \geqslant 2$ существует такая (неограниченная) бесконечно гладкая система $A \in \mathcal{M}^n$, что показатель π_A обладает свойством полной метрической несущественности.*

Несмотря на это, существует довольно широкий класс неограниченных систем, показатели которых сохраняют свойство даже главной метрической типичности.

Определение 4. Во множестве $\mathcal{M}^n$ выделим подмножество $\mathcal{P}^n$ систем A *степенного роста*, т. е. удовлетворяющих хотя бы для одного $k \in \mathbb{N}$ условию $\|A(t)\| = O(t^k)$ при $t \to \infty$.

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 2$ показатель π_A всякой системы $A \in \mathcal{P}^n$ обладает свойством главной аффинной метрической типичности.*

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

2. Изобов Н. А. *О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2168–2170.

3. Гаргянц А. Г. *К вопросу о типичности и существенности значений показателя Перрона неограниченных линейных систем* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1505–1506.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.А. Гержановская

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

hello_greta@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1} f(y, y'), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ — непрерывная функция, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, $f : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая функция, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — промежуток либо $[y_0^i; Y_i[$, либо $]Y_i; y_i^0[$ $(i = 0, 1)$, $\lim\limits_{z_i \to Y_i} z_i \times \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_1, z_2)/f(z_1, z_2) = 0$, равномерно по z_j, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

Частные случаи уравнения (1) применяются в разных областях естествознания и были ранее детально исследованы (см., например, [1]). Целью настоящей работы является распространение на уравнение (1) некоторых результатов, полученных для уравнений более частного вида.

Определение. Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если

$$y^{(i)} : [t, \omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\, y(t)} = \lambda_0.$$

Отметим, что $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения являются правильно меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$, если $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Получена следующая теорема.

Теорема. *Для существования у уравнения* (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений, где* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *необходимо, а если*

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1 \quad \textit{либо} \quad (\sigma_1 - 1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0,$$

то и достаточно выполнение условий

$$\pi_\omega(t) y_1^0 y_0^0 \lambda_0(\lambda_0 - 1) > 0, \quad \pi_\omega(t) \alpha_0 y_1^0 (\lambda_0 - 1) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a, \omega[,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{\lambda_0/(\lambda_0 - 1)} = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{1/(\lambda_0 - 1)} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \frac{1 - \sigma_1 - \sigma_0 \lambda_0}{\lambda_0 - 1}.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место следующие асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}(1 + o(1)),$$

$$\frac{|y(t)|^{1 - \sigma_0/(1 - \sigma_1)}}{f^{1/(1 - \sigma_1)}(y(t), y'(t))} = J(t) |1 - \sigma_1 - \lambda_0 \sigma_0|^{1/(1 - \sigma_1)} \left(1 - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_1}\right) y_0^1 (1 + o(1)),$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \textit{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad I(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega}^{t} p(\tau)\, d\tau, \quad J(t) = \int_{B_\omega}^{t} |I(\tau)|^{1/(1 - \sigma_1)}\, d\tau,$$

A_ω, B_ω *выбираются таким образом, чтобы соответствующие интегралы стремились либо к* 0, *либо к* ∞.

Литература

1. Евтухов В. М., Белозерова М. А. *Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка* // Укр. матем. журнал. 2008. Т. 60, № 3. С. 310—331.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БЛОКАМИ ПОЛНОГО РАНГА

А.К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
demenchuk@im.bas-net.by

Хорошо известно, что периодическая дифференциальная система при определенных условиях может иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы, т. е. сильно нерегулярные решения. Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, называют асинхронным режимом, а частотный спектр таких решений — асинхронным спектром. Асинхронные режимы колебаний реализованы в ряде различных технических устройств. Следует отметить, что еще в середине 30-х гг. прошлого века в исследованиях параметрического воздействия на двухконтурные системы, проводимых под руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, была продемонстрирована возможность возбуждения колебаний на частотах, находящихся практически в любом отношении с частотой изменения параметров [11].

Задача синтеза подобных режимов для линейных систем может быть сформулирована в виде задачи управления асинхронным спектром. Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2,$$

где $A(t)$ — непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица, B — постоянная $(n \times \times n)$-матрица. Предположим, что управление задается в виде линейной по фазовым переменным обратной связи $u = U(t)x$.

Задача выбора такого ω-периодического коэффициента обратной связи, чтобы замкнутая система имела сильно нерегулярные периодические решения с заданным спектром частот L называется задачей управления асинхронным спектром.

Поскольку в случае невырожденной матрицы B такая задача разрешима, далее без ограничения общности будем считать, что у матрицы B первые d строк нулевые, а остальные строки линейно независимы. Обозначим через $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$ — верхние левый и правый блоки матрицы $A(t)$ размерностей $d \times d$ и $d \times (n-d)$ соответственно. Предположим, что $\hat{A}_{12} = 0$, а матрицы $A_{11}(t) - \hat{A}_{11}$ и $A_{12}(t)$ имеют полный столбцовый ранг. Пусть $p-$ столбцовый ранг $(d \times n)$-матрицы $\{A_{11}(t) - \hat{A}_{11}, A_{12}(t)\}$.

Теорема. *Если задача управления асинхронных колебаний разрешима, то мощность целевого множества частот не превосходит величины* $n - p$.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

С.А. Заболоцкий

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
nugget13@mail.ru

Рассмотрим дифференциальные уравнения типа Лейна — Эмдена:

$$y'' + \frac{n-1}{r}y' - |y|^k \mathrm{sign}\, y = f(r), \tag{1}$$

$$y'' + \frac{n-1}{r} y' - |y|^k \mathrm{sign} \quad y = 0, \quad r \geqslant 0, \quad k > 1, \quad n \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Определение 1. Решение уравнения (1) (или (2)) назовем правильным решением, если оно абсолютно непрерывно вместе со своей первой производной и не обращается в ноль ни на каком интервале (a, b).

Определение 2. Две ненулевых функции $y_1(r)$ и $y_2(r)$ назовем асимптотически эквивалентными при $r \to \infty$, если $y_1(r) = y_2(r)(1 + o(1))$. Обозначим это отношение эквивалентности выражением $y_1(r) \sim y_2(r)$.

Теорема 1. *Пусть* $y(r)$ *— правильное решение уравнения* (2). *Тогда при* $\beta = 2/(k-1)$ *верны следующие утверждения:*

а) если $n > 2k/(k-1)$, *то для некоторой ненулевой постоянной* C *выполнено*

$$y(r) \sim Cr^{-n+2} \quad \textit{при} \quad r \to \infty.$$

Решение с данным асимптотическим поведением существует для любой $C \neq 0$;

б) если $n = 2k/(k-1)$, *то*

$$y(r) \sim \pm \Big(\frac{2}{(k-1)^2 r^2 \ln r}\Big)^{\beta/2} \quad \textit{при} \quad r \to \infty.$$

Решение с данным асимптотическим поведением существует;

в) если $n < 2k/(k-1)$, *то*

$$y(r) \sim \pm(\beta(\beta+1) - \beta(n-1)^{\beta/2} r^{-\beta} \quad \textit{при} \quad r \to \infty.$$

Решение с данным асимптотическим поведением существует.

При доказательстве теоремы 1 использованы методы, изложенные в работах [1, 2].

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) *функция* $f(r)$ *такая, что*

$$\int_0^\infty |f(r)|^2 e^{2br}\, dr < \infty$$

при некоторой постоянной $b > 0$. *Тогда для каждого правильного решения* $y(r)$ *уравнения* (1), *стремящегося к нулю вместе со своей производной при* $r \to \infty$, *существует единственное правильное решение* $\tilde{y}(r)$ *уравнения* (2), *удовлетворяющее следующим условиям:*

$$|y(r) - \tilde{y}(r)| = o(e^{-br}), \quad r \to \infty, \quad \int_0^\infty |y(r) - \tilde{y}(r)|^2 e^{2br}\, dr < \infty.$$

При доказательстве теоремы 2 использованы результаты работ [3, 4].

Литература

1. Astashova I. V. *On asymptotical behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equation* // Functional differential equations. 2009. Vol. 16, no. 1. P. 93–115.

2. Kiguradze I. T., Chanturia T. A. *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations.* Kluwer Acad. Pub., Dordrecht — Boston — London, 1993.

3. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., Олейник О. А. *Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях* // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 3. С. 45–68.

4. Асташова И. В. *Об асимптотической эквивалентности нелинейных дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 855.

О ЛЯПУНОВСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В.И. Залыгина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
wizkaz@mail.ru

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{M}^n$ линейное пространство вещественных $(n \times n)$-матриц с нормой

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|,$$

а через $\mathcal{M}^n$ — множество линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty),$$

с кусочно непрерывной (не обязательно ограниченной) матричной функцией $A: \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{M}^n$, которую будем отождествлять с соответствующей системой.

Определение (ср. [1]). Скажем, что система $A \in \mathcal{M}^n$ ляпуновски эквивалентна системе $B \in \mathcal{M}^n$, если существует непрерывная и кусочно дифференцируемая матричная функция $L: \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{M}^n$, удовлетворяющая условиям:

$$\det L(t) \neq 0, \quad B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} (\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\|) < \infty.$$

Для заданной непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ обозначим через $\mathcal{M}^n_f$ множество систем $A \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих при всяком $t \in \mathbb{R}^+$ условию

$$\|A(t)\| \leqslant f(t).$$

Если функция f есть константа $K > 0$, то условимся писать $\mathcal{M}^n_K$ вместо $\mathcal{M}^n_f$.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество неограниченных строго возрастающих последовательностей положительных вещественных чисел. Для всякой последовательности $\tau \in \mathcal{T}$ обозначим через $\mathcal{C}^n(\tau)$ множество кусочно постоянных матричных функций из $\mathcal{M}^n$ с разрывами разве что в точках последовательности τ.

Формулируемые ниже теоремы представляют собой некие аналоги теоремы Богданова [1] для случая системы с неограниченными коэффициентами.

Теорема 1. *Для всякой непрерывной функции* $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ *найдется такая последовательность* $\tau \in \mathcal{T}$, *что для любой системы* $A \in \mathcal{M}^n_f$ *существует ляпуновски эквивалентная ей система* $B \in \mathcal{M}^n_f \cap \mathcal{C}^n(\tau)$.

Теорема 2. *Для всякой непрерывной функции* $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ *найдется такая последовательность* $\tau \in \mathcal{T}$, *что для всяких числа* $K > 0$ *и системы* $B \in \mathcal{M}^n_K$ *существует система* $\widetilde{B} \in \mathcal{C}^n(\tau)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) *элементы матрицы* $\widetilde{B}$ *принимают лишь значения* $\pm K$;

2) *для всякой системы* $A \in \mathcal{M}^n_f$ *системы* $A + B$ *и* $A + \widetilde{B}$ *ляпуновски эквивалентны.*

Замечание. В доказательствах этих теорем использована теорема 1 из [2].

Литература

1. Мазаник С. А. *Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем.* Мн.: БГУ, 2008.

2. Изобов Н. А., Мазаник С. А. *Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 168–173.

СЧЕТНЫЙ ВАРИАНТ ЭФФЕКТА ПЕРРОНА СМЕНЫ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н.А. Изобов [1], А.В. Ильин [2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
{izobov@im.bas-net.by}
[2] Московский государственный университет, Москва, Россия
{iline@cs.msu.su}

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A)\ldots \leqslant \lambda_n(A)$. Эти системы являются линейными приближениями для нелинейных дифференциальных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

также с бесконечно дифференцируемыми по своим переменным $t, y_1, \ldots, y_n$ возмущениями $f : [t_0, +\infty) \times R^n \to R^n$ порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и возможного роста вне ее:

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad y \in R^n, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Различным обобщениям и уточнениям известного эффекта Перрона [1; 2, с. 50–51; 3, с. 43–44] частичной смены знака отрицательных характеристических показателей двумерной линейной системы (1) под действием нелинейных возмущений второго порядка посвящены несколько наших работ. В частности, реализованный в работах [4, 5] общий n-мерный эффект Перрона смены значений всех характеристических показателей в двумерном случае для произвольных параметров $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$, $m > 1$ и

$$\beta_1 \in [\lambda_1 + \infty), \quad \beta_2 \in [\lambda_2 + \infty), \quad \beta_1 \leqslant \beta_2,$$

устанавливает существование двумерной системы (1) с характеристическими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leqslant \lambda_2(A) = \lambda_2$ и удовлетворяющего условию (3) возмущения $f(t,y)$ порядка $m > 1$ таких, что все нетривиальные решения $y(t,c)$, $c = (c_1, c_2) \in \in R^2$, возмущенной двумерной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и имеют характеристические показатели

$$\lambda[y(\cdot,c)] = \begin{cases} \beta_1, & c_2 = 0, \quad c_1 \neq 0, \\ \beta_2, & c_2 \neq 0. \end{cases}$$

Существенным обобщением сформулированного двумерного эффекта Перрона смены значений было бы доказательство его аналога в случае произвольных конечных или бесконечных счетных множеств β_1 и β_2. Такой бесконечный вариант двумерного эффекта Перрона смены значений $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ характеристических показателей двумерной системы линейного приближения (1) на счетное множество $\beta_1 \cup \beta_2$ значений характеристических показателей всех нетривиальных решений двумерной же нелинейной системы (2) с возмущением (3) порядка $m > 1$, в частности, малости в окрестности начала координат, и содержит следующая

Теорема. *Для любых параметров $m > 1$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$ и непустых произвольных конечных или ограниченных счетных множеств*

$$\beta_i = \{\beta_{ik}\} \subset [\lambda_i, +\infty), \quad i \in \{1, 2\},$$

удовлетворяющих условию отделенности $\sup \beta_1 \leqslant \inf \beta_2$, существуют:

1) *двумерная система линейного приближения (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси $[1, +\infty)$ коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leqslant \lambda_2(A) = \lambda_2$;*

2) *бесконечно дифференцируемое по своим аргументам t, y_1, y_2 и удовлетворяющее условию (3) возмущение $f : [1, +\infty) \times R^2 \to R^2$ порядка $m > 1$,*
такие что все нетривиальные решения $y(t, c)$, $y(1, c) = c$, нелинейной двумерной возмущенной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и их характеристические показатели составляют множества

$$\{\lambda[y(\cdot, c)] : c_2 = 0, \ \ c_1 \neq 0\} = \beta_1, \quad \{\lambda[y(\cdot, c)] : c_2 \neq 0\} = \beta_2, \quad c = (c_1, c_2) \in R^2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского (проект Ф14Р-011) и Российского (проект 14-01-90010 Бел-а) фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen* // Mathematische Zeitschriff. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728.

2. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М. — Ижевск: Dynamics, 2006.

3. Leonov G. A. *Strange Attractors and Classical Stability Theory.* St. Petersburg University Press, 2008.

4. Ильин А. В., Изобов Н. А. *Общий многомерный эффект Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 8. С. 1087–1088.

5. Изобов Н. А., Ильин А. В. *Конечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1522–1536.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ В. Г. СПРИНДЖУКА И ПРИЛОЖЕНИИ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ УРАВНЕНИЙ

Э.И. Ковалевская

Белорусский государственный аграрный технический унивeтситет, Минск, Беларусь
ekovalevsk@mail.ru

Связь между теориями диофантовых приближений и дифференциальных уравнений в приложениях изложена в [1–3]. Это так называемая *проблема малых знаменателей.*

В последнее десятилетие в работах математиков школы В. С. Владимирова было развито новое направление: исследование дифференциальных уравнений в частных производных от переменных в поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. В этой области также возникают малые знаменатели, но уже в неархимедовой метрике. В настоящей работе показано, как получить оценку снизу для малых знаменателей, заданных целочисленными многочленами в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_{p_1}\times\mathbb{Q}_{p_2}$. Доказанная теорема является решением уточненной задачи В. Г. Спринджука (1980 г.) в рассматриваемом пространстве.

Пусть $P = P(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $a_n \neq 0$, $H = \max(|a_n|, \dots, |a_1|)$. Пусть $p_i \geqslant 2$ — простое число, $\mathbb{Q}_{p_i}$ — поле p_i-адических чисел, $|\cdot|_{p_i}$ — p_i-адическая норма $(i = 1, 2)$. Положим $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_{p_1}\times\mathbb{Q}_{p_2}$. Определим меру $\overline{\mu}$ в $\mathcal{O}$ как произведение меры Лебега μ_1 в $\mathbb{R}$, меры Лебега μ_2 в $\mathbb{C}$ и меры Хаара μ_{p_i} в $\mathbb{Q}_{p_i}$ $(i = 1, 2)$, т. е. $\overline{\mu} = \mu_1\mu_2\mu_{p_1}\mu_{p_2}$. Пусть $T = I \times K \times D_{p_1} \times D_{p_2} \in \mathcal{O}$, где I — интервал в $\mathbb{R}$, K — круг в $\mathbb{C}$, D_{p_i} — диск в $\mathbb{Q}_{p_i}$ $(i = 1, 2)$. Пусть $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ — монотонно убывающая функция, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, (v_1, v_2, v_3, v_4) — векторы в $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{gathered} |P(x)| < H^{-v_1}\Psi(H)^{\lambda_1}, \quad |P(z)| < H^{-v_2}\Psi(H)^{\lambda_2}, \\ |P(\omega_1)| < H^{-v_3}\Psi(H)^{\lambda_3}, \quad |P(\omega_2)|_p < H^{-v_4}\Psi(H)^{\lambda_4}, \end{gathered} \tag{1}$$

когда $(x, z, \omega_1, \omega_2) \in \mathcal{O}$ и $v_1 + 2v_2 + v_3 + v_4 = n - 4$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$. Пусть $M_n(v, \lambda)$ — множество точек $(x, z, \omega_1, \omega_2) \in T$, для которых (1) имеет бесконечно много решений в многочленах P. Доказана

Теорема. *Если* $n \geqslant 4$ *и* $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) < \infty$, *то* $\overline{\mu}(M_n(v, \lambda)) = 0$.

В доказательстве используется метод *существенных и несущественных областей* Спринджука, развитый и усовершенствованный В. Берником, В. Бересневичем и другими представителями Минской школы теории чисел.

Работа выполнена в рамках ГП БРФФИ «Конвергенция».

Литература

1. Арнольд В. И. *Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике* // УМН. 1963. Т. 18, № 6. С. 91–192.

2. Спринджук В. Г. *Метрическая теория диофантовых приближений.* М.: Наука, 1977.

3. Ptashnik B., Ilkiv V., Kmit I., Pol ishchuk V. *Nonlocal boundary value problems for partial differential equations.* Kiev: Naukova dumka, 2002.

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СТЕПЕННОМ МНОЖЕСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

С.Г. Красовский

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

kras@im.bas-net.by

Рассматриваем исходную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$, совокупностью характеристических показателей $\lambda(A) \equiv (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)) \in \mathbb{R}^n$, упорядоченной по неубыванию, и коэффициентом неправильности Гробмана $\sigma_\Gamma(A)$.

Определение 1 [1]. *Характеристической степенью Демидовича* $d[x]$ решения $x(t)$ системы (1_A) называется число

$$d[x] \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln\|x(t)\| - \lambda[x]t}{\ln t},$$

где $\lambda[x] \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|x(t)\|$ — характеристический показатель Ляпунова того же решения.

Рассмотрим множество нормальных фундаментальных матриц $X_A(t)$ системы (1_A), характеристические показатели $\lambda_i(A)$, $i=1,\ldots,n$, вектор-столбцов которых упорядочены по неубыванию: $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$. Рассмотрим также характеристические степени Демидовича $d_i(A)$, $i=1,\ldots,n$, вектор-столбцов этих матриц. Решения, входящие в матрицу $X_A(t)$ и отвечающие одному и тому же характеристическому показателю и различным характеристическим степеням, очевидно, линейно-независимы и, следовательно, число их не превышает кратности данного характеристического показателя. Поэтому линейная система (1_A) имеет конечное число различных характеристических степеней, которое, с учетом их кратности, равно порядку системы. Среди множества матриц $X_A(t)$ выбрав те, для которых сумма характеристических степеней Демидовича $d_i(A)$, $i=1,\ldots,n$, вектор-столбцов минимальна, получим совокупность (в общем случае неупорядоченную) $d(A)\equiv(d_1(A),\ldots,d_n(A))\in\mathbb{R}^n$ характеристических степеней системы (1_A).

Рассмотрим также сингулярно возмущенную систему

$$\varepsilon\dot y = A(t)y + Q(t)y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0,\quad \varepsilon\in(0,1], \tag{$1_{(A+Q)/\varepsilon}$}$$

с кусочно-непрерывной матрицей $Q(t)$, имеющей показатель Ляпунова $\lambda[Q]\leqslant\sigma<0$.

Определение 2 [2]. *Спектральным сигма-множеством* системы $(1_{A/\varepsilon})$ называется множество

$$S_\sigma(A/\varepsilon)\equiv\bigcup_{\lambda[Q]\leqslant-\sigma}\lambda((A+Q)/\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n.$$

Определение 3. *Степенным спектральным сигма-множеством*, соответствующим точке $\mu\in S_\sigma(A/\varepsilon)$, назовем множество

$$D_\sigma(\mu)\equiv\bigcup_{\lambda[Q]\leqslant-\sigma,\quad \lambda((A+Q)/\varepsilon)=\mu} d((A+Q)/\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n.$$

Справедлива

Теорема. *Для произвольного $n\in\mathbb{N}$ и любых действительных чисел $\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{2n}$, $\sigma_0>2\max_{k=\overline{1,n}}\{\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}\}\equiv 2L$, существует $2n$-мерная система (1_A) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и их производными, имеющая характеристические показатели $\lambda_i(A)=\lambda_i$, $i=\overline{1,2n}$, и коэффициент неправильности Гробмана $\sigma_\Gamma(A)=\sigma_0$ такая, что спектральное сигма-множество $S_\sigma(A/\varepsilon)$ системы $(1_{A/\varepsilon})$ при всяких $\sigma>0$ и $0<\varepsilon<(\sigma_0-2L)\sigma^{-1}$ содержит множество B точек $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}$, такое, что $\mathrm{mes}_{2n}B>0$, $\mathrm{mes}_{2n}B\to+\infty$ при $\varepsilon\to+0$, а каждой внутренней точке μ множества B соответствует характеристическое степенное множество $D_\sigma(\mu)$ системы $(1_{A/\varepsilon})$, совпадающее с $\mathbb{R}^{2n}$.*

Литература

1. Демидович Б. П. *Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем* // Матем. сб. 1965. Т. 66(108), № 3. С. 344–353.

2. Izobov N. A., Krasovskii S. G. *On existence of a measure unbounded exponential spectral quantization on symplectic manifolds* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1998. Vol. 13. P. 140–144.

ОЦЕНКИ СНИЗУ НОРМЫ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

А.В. Липницкий

Институт математики НАН Беларуси. Минск, Беларусь
odu@im.bas-net.by

Будем рассматривать класс В. М. Миллионщикова [1, 2] M_μ матриц вида

$$A_\mu(t) := \ln d_k \operatorname{diag}[1, -1], \quad 2k-2 \leqslant t < 2k-1,$$

$$A_\mu(t) := (\mu + b_k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2k-1 \leqslant t < 2k,$$

где $\mu, b_k \in \mathbb{R}$, $d_k > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

В. М. Миллионщиков использовал матрицы такого вида в работах [1, 2] (см. также [3]) при построении неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Позднее он поставил задачу [4] оценки характеристических показателей уравнения

$$\ddot{x} = (\alpha + \beta \cos t + \gamma \cos \omega t)x, \quad \alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0,$$

в случае $\omega = \sqrt{2}$. Проведенные А. Ф. Филипповым и другими исследователями [5–7] компьютерные вычисления устанавливают положительность старшего показателя Ляпунова этого уравнения с иррациональным $\omega \in \mathbb{R}$ при почти всех значениях параметров β, γ.

В работе [8] доказана положительность на множестве значений параметра μ положительной меры Лебега старшего характеристического показателя системы

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{1_μ}$$

где $A_\mu \in M_\mu$, при всех $d_k \equiv d > 16$. В настоящей работе доказано отсутствие равномерных по $t \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ оценок сверху нормы решений системы (1_μ) и в случае $d_k \geqslant d > 1$, $k \geqslant 1$.

Для любых $\mu \in [0, \pi)$, $t, s \geqslant 0$ через $X_{A_\mu}(t, s)$ обозначим матрицу Коши системы (1_μ) и положим

$$x(\mu, t) := X_{A_\mu}(t, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *При любых $d_k \geqslant d > 1$, $k \geqslant 1$, интеграл $\int_0^\pi \|x(\mu, t)\| \, d\mu$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$.*

Литература

1. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 391–396.

2. Миллионщиков В. М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10, № 3. С. 569.

3. Липницкий А. В. *О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1615–1620.

4. Олейник О. А., Шубин М. А. *Международная конференция выпускников мехмата МГУ* // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 6. С. 261–285.

5. Филиппов А. Ф. *О возмущениях линейной системы с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1343–1348.

6. Broer H, Simo C. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena* // Bul. Soc. Bras. Mat. 1998. Vol. 29. P. 253–293.

7. Romero L. A., Torczynski J. R., Kraynik A. M. *A scaling law near the primary resonance of the quasiperiodic Mathieu equation* // Nonlinear Dynamics. 2011. Vol. 64. № 4. P. 395–408.

8. Липницкий А. В. *О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1095–1101.

ФОРМУЛА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Е.К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов A и матрицей Коши X_A. В работе [1] в связи с изучением минимальных оценок Малкина введено следующее

Определение. Инвариантным равномерным показателем $\iota[x]$ ненулевого решения x системы (1) называется верхняя грань множества $N(x)$ верхних пределов

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{(t_k - s_k)} \ln \frac{\|x(t_k)\|}{\|x(s_k)\|}$$

по всевозможным последовательностям $\tau_k = (t_k, s_k)$, $t_k \geqslant s_k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, таким что $t_k - s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и $\inf\limits_k t_k s_k^{-1} > 1$.

Используя подход, предложенный в [2] и примененный в [1] к оценкам Малкина для матрицы Коши системы (1), можно получить следующее утверждение.

Теорема. *Для любого ненулевого решения* x *системы* (1) *справедливо равенство*

$$\iota[x] = \lim_{\theta\to1+0} \varlimsup_{s\to+\infty} \frac{1}{(\theta-1)s} \ln \frac{\|x(\theta s)\|}{\|x(s)\|}. \tag{2}$$

Соотношение (2) может рассматриваться как одномерный частный случай формулы для вычисления инвариантного особого показателя

$$\mathrm{I}_0(A) = \lim_{\theta\to1+0} \varlimsup_{s\to+\infty} \frac{1}{(\theta-1)s} \ln \|X_A(\theta s, s)\|,$$

который является достижимой границей подвижности инвариантных равномерных показателей при экспоненциальных возмущениях [1].

Сравнение полученных утверждений с результатами работы [3] позволяет утверждать, что инвариантные равномерные и инвариантные особые показатели играют ту же роль по отношению к системам с малым ростом решений, что и показатели Боля по отношению к экспоненциально дихотомическим системам.

Литература

1. Макаров Е. К. *Об оценках Малкина для нормы матрицы Коши линейной дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 328–334.
2. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 3. С. 393–399.
3. Барабанов Е. А., Бекряева Е. Б. *О вычислении показателей малого роста линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1510–1511.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СТЕПЕННО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Н.С. Нипарко

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

nad-den@mail.ru

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на временно́й полуоси $t \geqslant 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначим показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит тому или иному классу возмущений, которые будут указаны ниже. В соответствии с принятыми обозначениями $\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q)$ — показатели Ляпунова системы (2).

Рассмотрим следующие три класса возмущений — классы Z_0^n, Exp_0^n и Deg_0^n, состоящие из кусочно-непрерывных $n \times n$-матриц $Q(\cdot)$, удовлетворяющих соответственно условиям: $\|Q(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ (класс Z_0^n), $\|Q(t)\| \leqslant c_Q \exp(-\sigma_Q t)$ при всех $t \geqslant 0$ (класс Exp_0^n) и $\|Q(t)\| \leqslant c_Q t^{-r_Q}$ при всех $t \geqslant 0$ (класс Deg_0^n), где c_Q, σ_Q и r_Q — положительные постоянные (свои для каждой матрицы $Q(\cdot)$). Класс Z_0^n называется классом убывающих к нулю возмущений, а классы Exp_0^n и Deg_0^n — классами соответственно экспоненциально и степенно убывающих к нулю возмущений. Очевидны собственные включения $\mathrm{Exp}_0^n \subset \mathrm{Deg}_0^n \subset \mathrm{Z}_0^n$.

Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Z}_0^n$ — какое-либо подмножество класса Z_0^n. Показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми при возмущениях из класса $\mathfrak{M}$, если $\lambda_i(A+Q) = \lambda_i(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и любой матрицы $Q(\cdot) \in \mathfrak{M}$. То, что показатели Ляпунова систем (1) могут быть неустойчивыми даже при экспоненциально убывающих возмущениях их матриц коэффициентов, установлено еще О. Перроном [1]. К настоящему времени необходимые и достаточные условия устойчивости показателей Ляпунова системы (1) получены только для классов Z_0^n [2, 3] и Exp_0^n [4] возмущений.

В работе [5] получено необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n. В его формулировке, которую мы не приводими, существенную роль играет понятие степенной интегральной разделенности [5], состоящее в следующем: системы (1) с матрицами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ называются степенно интегрально разделенными, если для их матриц Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ и $X_B(\cdot,\cdot)$ выполнено условие: для любого положительного ε найдется такое $T_\varepsilon \geqslant 0$, что

$$\|X_A^{-1}(t,\tau)\|^{-1} \geqslant t^{-\varepsilon}\|X_B(t,\tau)\|$$

для всех $t \geqslant \tau \geqslant T_\varepsilon$. В этом случае будем говорить, что система A степенно интегрально больше системы B.

Так как необходимое условие [5] устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n получено по той же схеме, что и необходимые условия устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из классов Z_0^n и Exp_0^n, а для последних эти условия оказываются и достаточными, то поскольку класс Deg_0^n является промежуточным между этими классами: $\mathrm{Exp}_0^n \subset \mathrm{Deg}_0^n \subset \mathrm{Z}_0^n$, — представляется вполне правдоподобным, что сформулированное необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n должно быть и достаточным. Оказывается, это не так.

Теорема. *Для любого натурального* $n \geqslant 2$, *каждого* $q \in \{2,\dots,n\}$, *произвольного набора* $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$ *вещественных чисел и любого набора* $n_1, n_2, \dots, n_q$ *натуральных чисел, удовлетворяющего равенству*

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n,$$

существуют линейные дифференциальные системы с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad t \geqslant 0,$$

где $i = 1,\dots,q$, *такие, что система* A_i *имеет один-единственный показатель Ляпунова* Λ_i, *устойчивый при возмущениях из класса* $\mathrm{Deg}_0^{n_i}$ $(i = 1,\dots,q)$, *и для каждого* $k = 1,\dots,q-1$ *система* A_{k+1} *степенно интегрально больше системы* A_k, *а показатели Ляпунова блочно-диагональной системы*

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[A_1(t),\dots,A_q(t)]x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

неустойчивы при возмущениях из класса Deg_0^n.

Результаты доклада опубликованы в статье [6].

Литература

1. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 31. H. 5. S. 748–766.

2. Миллионщиков В. М. *Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1775–1784.

3. Былов Б. Ф., Изобов Н. А. *Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1794–1803.

4. Барабанов Е. А., Денисенко (Нипарко) Н. С. *Необходимое и достаточное условие устойчивости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 165–175.

5. Нипарко Н. С. *Необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при степенно убывающих возмущениях* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16, № 2. С. 105–117.

6. Барабанов Е. А., Нипарко Н. С. *Неустойчивость показателей Ляпунова степенно интегрально разделенной линейной дифференциальной системы при степенно убывающих возмущениях* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 25–31.

О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова, И.Н. Банщикова

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
ps@uni.udm.ru, banshhikova.irina@mail.ru

Рассмотрим линейную систему управления с дискретным временем

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

удовлетворяющую условиям:

1) последовательности матриц $A \doteq \{A_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset M_n$ и $B \doteq \{B_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset M_{nm}$ ограничены;

2) при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ матрица A_k обратима, и последовательность $\{A_k^{-1}\}_{k=0}^{+\infty}$ ограничена.

Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — полный спектр показателей Ляпунова однородной системы

$$x_{k+1} = A_k x_k. \tag{2}$$

Выбирая управление в системе (1) по принципу линейной обратной связи $u_k = U_k x_k$, где последовательность $U \doteq \{U_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset M_{mn}$ предполагается ограниченной, получим систему

$$x_{k+1} = \bigl(A_k + B_k U_k\bigr) x_k, \tag{3}$$

для которой также определены показатели Ляпунова: $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU)$.

Определение. Полный спектр показателей Ляпунова системы (3) называется *пропорционально локально управляемым*, если найдутся такие числа $l > 0$ и $\delta > 0$, что для любого набора $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, удовлетворяющего неравенствам $|\alpha_j - \lambda_j(A)| \leqslant \delta$, $j = 1, \ldots, n$, существует управление U, $\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \|U_k\| \leqslant l \max_{j=1,\ldots,n} |\alpha_j - \lambda_j(A)|$, для которого $\lambda_j(A + BU) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Вопрос об управлении показателями Ляпунова системы (3) впервые был поставлен в работе В. А. Лунькова [1]. Определение пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова систем с непрерывным временем введено в [2].

В докладе исследовано свойство равномерной полной управляемости системы (1) и на его основе получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова системы (3). В частности, установлена

Теорема. *Пусть система* (1) *равномерно вполне управляема, а система* (2) *правильна. Тогда полный спектр показателей Ляпунова системы* (3) *пропорционально локально управляем.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00195).

Литература

1. Луньков В. А. *О полной приводимости линейной системы управления* // Изв. Ин-та математики и информатитки УдГУ. 1996. Вып. 2(8). С. 15–25.

2. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Мн.: Беларуская навука, 2012.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В.В. Рогачев

Московский государственный университет, Москва, Россия
valdakhar@gmail.com

Рассматривается обобщенное уравнение типа Эмдена — Фаулера произвольного порядка

$$y^{(n)} + p_0|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n > 2, \quad k > \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p_0 \neq 0. \tag{1}$$

Доказывается существование решений для уравнения (1) произвольного порядка с заданным числом нулей на заданных интервалах или полуинтервалах. Доказательства данных фактов опираются на теорему 2 из [1] или теорему 1 из [2]. Для случая уравнения порядка $n = 3, 4$ схожие результаты опубликованы в [3] и [4], там же рассматривается случай $k \in (0, 1)$.

Теорема 1. *Для любого целого* $m \geqslant 2$, *четного* $n > 2$ *и действительного* $k > 1$, $p_0 > 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, *у уравнения* (1) *существует решение, определенное на отрезке* $[a, b]$, *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на отрезке ровно* m *нулей.*

Теорема 2. *Для любого целого* $m \geqslant 2$, *нечетного* $n > 2$ *и действительного* $k > > 1$, $p_0 \neq 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, *у уравнения* (1) *существует решение, определенное на отрезке* $[a, b]$, *равное нулю в точках* a, b *и имеющее на отрезке ровно* m *нулей.*

Теорема 3. *Для любого целого* $n > 2$ *и действительного* $k > 1$, $p_0 > 0$, $-\infty < a < < b < +\infty$, *у уравнения* (1) *существует решение, определенное на полуинтервале* $[a, b)$, *равное нулю в точке* a *и имеющее на полуинтервале счетное число нулей.*

Теорема 4. *Для любого нечетного* $n > 2$ *и действительного* $k > 1$, $p_0 < 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, *у уравнения* (1) *существует решение, определенное на полуинтервале* $(a, b]$, *равное нулю в точке* b *и имеющее на полуинтервале счетное число нулей.*

Литература

1. Astashova I. V. *On special solutions to Emden — Fowler type differential equations* // Abstracts of Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. (WBVP) January, 20–24. Brno, Czech Republic. http://users.math.cas.cz/šremr/wbvp2014/abstracts/astashova.pdf

2. Astashova I. V. *On Existence of Quasi-Periodic Solutions to a Nonlinear Higher-Order Differential Equation* // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE–2013» Dedicated to the 100th birthday anniversary of Prof. L. Magnaradze. December 20–22, 2013. Tbilisi, Georgia. http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2013/Astashova_workshop_2013.pdf

3. Асташова И. В., Рогачев В. В. *О существовании решений с заданным числом нулей для уравнений типа Эмдена — Фаулера третьего и четвертого порядков* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1509–1510.

4. Асташова И. В., Рогачев В. В. *О числе нулей осциллирующих решений уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью* // Нелінійні коливання (the Ukrainian for «Nonlinear Oscillations»). 2014. Т. 17, № 1. С. 16–31.

УПОРЯДОЧЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЛУЖДАЕМОСТИ РАЗНЫХ РАНГОВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И.Н. Сергеев

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия
igniserg@gmail.com

Обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

задаваемых непрерывными оператор-функциями $A:\mathbb{R}^+\to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ и отождествляемых с ними, а через $\mathcal{S}_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы $A\in\mathcal{M}^n$.

Определение [1]. При каждом $k=1,\ldots,n$ обозначим через $\mathcal{H}^k$ множество линейных операторов $L\in\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ ранга k каждый и зададим для любого решения $x\in\mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A\in\mathcal{M}^n$ пару его (*нижних*) *показателей блуждаемости* и *блуждания* k*-го ранга* формулами

$$\rho_k(x)=\inf_{L\in\mathcal{H}^k}\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\gamma(Lx,t),\quad \eta_k(x)=\varliminf_{t\to\infty}\inf_{L\in\mathcal{H}^k}\frac{1}{t}\gamma(Lx,t),$$

в которых для каждого $L\in\mathcal{H}^k$ при $k>1$ обозначено

$$\gamma(Lx,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|}\right|d\tau, & Lx(\tau)\ne 0,\ \tau\in[0,t];\\ \infty, & \text{иначе,}\end{cases}$$

а при $k=1$ обозначено

$$\gamma(Lx,t)=\pi\cdot\nu(Lx,t),$$

где $\nu(Lx,t)$ — число нулей функции Lx на промежутке $(0;t]$ с той поправкой, что если в какой-либо точке $\tau\in[0;t]$ выполнено двойное равенство $Lx(\tau)=L\dot{x}(\tau)=0$, то сразу считаем $\nu(Lx,t)=\infty$.

Показатели блуждаемости ρ_1 и блуждания η_1 самого младшего ранга совпадают с полной σ и векторной ζ *гиперчастотами* [2], а показатели блуждаемости ρ_n и блуждания η_n самого старшего ранга — с показателем блуждаемости ρ и показателем блуждания η, введенными ранее в [3].

Теорема 1. *Для любого решения* $x\in\mathcal{S}_*(A)$ *любой системы* $A\in\mathcal{M}^n$ *выполнена цепочка соотношений*

$$\eta_1(x)=\eta_2(x)=\ldots=\eta_n(x)\leqslant\rho_1(x)\leqslant\rho_2(x)\leqslant\ldots\leqslant\rho_n(x).$$

Ни одно из неравенств в теореме 1 не обращается, вообще говоря, в равенство уже при $n=2$, что и подтверждает

Теорема 2. *Существует такая система* $A\in\mathcal{M}^2$, *что для каждого ее решения* $x\in\mathcal{S}_*(A)$ *выполнена цепочка соотношений*

$$\eta_1(x)=\eta_2(x)<\rho_1(x)<\rho_2(x).$$

Литература

1. Сергеев И. Н. *Обобщенные характеристики блуждаемости решений дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1498–1500.

2. Сергеев И. Н. *Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем* // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.

3. Сергеев И. Н. *Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы* // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ С НЕСТАНДАРТНОЙ АСИМПТОТИКОЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И.В. Асташова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
ast@diffiety.ac.ru

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + p_0\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n \geqslant 1, \quad k > 1, \quad p_0 \neq 0. \tag{1}$$

В [1] при $n = 2$, в [2] при $n = 3, 4$ доказано, что при $p_0 < 0$ все решения $y(x)$ уравнения (1) с вертикальной асимптотой $x = x^*$ имеют степенную асимптотику:

$$y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0, \quad \alpha = \frac{n}{k-1}, \quad C^{k-1} = \frac{1}{|p_0|}\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j). \tag{2}$$

В [2] доказано, что при любых $n \geqslant 2$, $k > 1$, $p_0 < 0$, $x^* \in \mathbb{R}$ существует решение $y(x)$ уравнения (1), имеющее вид (2), а при $5 \leqslant n \leqslant 11$ существует $(n - 1)$-параметрическое семейство таких решений. Можно было бы ожидать, что при всех n решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику (гипотеза И. Т. Кигурадзе). Оказалось [3], что у уравнения (1) существуют решения с вертикальной асимптотой, имеющие асимптотику, отличную от степенной.

Теорема 1. *При $n = 12, 13, 14$, $p_0 < 0$ существуют такие $k > 1$, что уравнение* (1) *имеет решение, для которого*

$$y^{(j)}(x) = (x^* - x)^{-\alpha - j}\, h_j(\ln(x^* - x)), \quad j = 0, 1, \ldots, n - 1, \tag{3}$$

где h_j — непостоянные непрерывные положительные периодические функции.

Отметим, что для больших n существование решений вида (3) следует из [4].

Выяснилось также, что подобное асимптотическое поведение характерно и для знакопеременных решений уравнения (1). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого целого $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{1/(k-1)}(x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x)), \quad -\infty < x < x^*,$$

является решением уравнения (1).

Получены следствия из теоремы 1 о существовании кнезеровских решений с нестепенной асимптотикой и из теоремы 2 для уравнений четного и нечетного порядков.

Литература

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1990.

2. Асташова И. В. *Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. С. 22–288.

3. Astashova I. V. *On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden — Fowler type higher-order equations* // Advances in Difference Equations, 2013. DOI: 10.1186/10.1186/1687-1847-2013-220.

4. Kozlov V. A. *On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations*// Ark. Mat. 1999. Vol. 37, no. 2. P. 305–322.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В СМЫСЛЕ СОВПАДЕНИЯ ОТРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ И ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
drakonsm@ya.ru

Теорема. *Пусть* $a_1(t)$ *и* $a_2(t)$ *— непрерывные нечетные функции. Тогда дифференциальная система*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{1+3x^2} - a_1(t)\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2} + a_2(t)\frac{y-x^3}{1+3x^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3x^2\cos t}{1+3x^2} + a_1(t)\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2} + a_2(t)\left(y - x^3 - \frac{y-x^3}{1+3x^2}\right) \tag{1}$$

эквивалентна системе

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{1+3x^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3x^2\cos t}{1+3x^2}, \tag{2}$$

т. е. их отражающие функции [1, с. 62] *совпадают.*

Следствие. *Если непрерывные нечетные функции* $a_1(t)$ *и* $a_2(t)$ *имеют периоды, несоизмеримые с* 2π, *то квазипериодическая дифференциальная система* (1) *будет эквивалентна* 2π*-периодической дифференциальной системе* (2).

В качестве примера рассмотрим квазипериодическую систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t + 2\sin\sqrt{3}t\sin t - 2x\sin\sqrt{3}t + y(\sin 2\sqrt{3}t - 2\sin\sqrt{3}t) - x^3\sin 2\sqrt{3}t}{1+3x^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2\sin\sqrt{3}t\sin t + 2x\sin\sqrt{3}t + 2y\sin\sqrt{3}t + 3x^2\cos t + 3x^2y\sin 2\sqrt{3}t - 3x^5\sin 2\sqrt{3}t}{1+3x^2}.$$

С помощью алгоритма, приведенного в [2], эту систему можно представить в виде (1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{1+3x^2} - 2\sin\sqrt{3}t\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2} + \sin 2\sqrt{3}t\frac{y-x^3}{1+3x^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3x^2\cos t}{1+3x^2}+2\sin\sqrt{3}t\frac{x+y-\sin t}{1+3x^2}+\sin 2\sqrt{3}t\left(y-x^3-\frac{y-x^3}{1+3x^2}\right).$$

Согласно теореме эта квазипериодическая система эквивалентна, в смысле совпадения отражающих функций, 2π-периодической системе (2).

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.

2. Mironenko V. I., Mironenko V. V. *How to construct equivalent differential systems* // Applied Mathematic Letters. 2009. Vol. 22. P. 1356–1359.

К ВОПРОСУ О РАЗЛИЧЕНИИ ЦЕНТРА, ФОКУСА И СЕДЛО — ФОКУСА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДАРБУ

В.В. Блашкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно,Беларусь
blvv@mail.ru

Проблема различения центра и фокуса для двумерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется длительное время (см., например, монографию [1]). В то же время аналогичные вопросы в трехмерном случае почти не изучались. Рассматривается вопрос о различении топологического типа изолированного состояния равновесия $O(0,0,0)$ трехмерной однородной системы Дарбу

$$\frac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+c_1z+xF(x,y,z),\quad \frac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+c_2z+yF(x,y,z),$$

$$\frac{dz}{dt}=a_3x+b_3y+c_3z+zF(x,y,z),\tag{1}$$

где $F(x,y,z)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m\geqslant 1$, имеющего пару чисто мнимых и один вещественный характеристические корни. В этом случае возникает задача различения центра, фокуса и седло — фокуса [2, с. 202–203]. Получены критерии решения данной задачи. В частности, имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Состояние равновесия $O(0,0,0)$ с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическими корнями полиномиальной однородной системы Дарбу (1) при нечетном m является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

Теорема 2. *Если трехмерное вещественное автономное проективное матричное уравнение Риккати [3] имеет состояние равновесия с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическими корнями, то данное состояние равновесия является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

Литература

1. Амелькин А. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Мн.: Изд–во БГУ, 1982.

2. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.* М.–Л.: ГИТТЛ,1947.

3. Winternitz P. *Lie groups and solutions of nonlinear differential equations* // Lect. Notes in Phys. 1983. Vol. 189. P. 263–331.

СВОЙСТВО АТТРАКТОРА

Л.Д. Блистанова

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
ddemidova@mail.ru

Определение 1. Множество $M \subset R$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)$, если оно состоит из траекторий этой динамической системы, т. е. из $p \in M$ следует $f(p,I) \subset M$.

Определение 2. Множество $M \subset R$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)$ в положительном направлении, если оно состоит из положительных полутраекторий этой динамической системы, т. е. из $p \in M$ следует $f(p,I^+) \subset M$. Множество M называют также инвариантным для полупотока.

Ясно, что компактное инвариантное для полупотока множество состоит из полутраекторий, устойчивых по Лагранжу в положительном направлении.

Определение 3. *Аттрактором динамической системы* $f(p,t)$, *заданной в полном метрическом пространстве* R, называется асимптотически устойчивое компактное множество A.

Асимптотическая устойчивость A означает, что оно устойчиво по Ляпунову и обладает свойством $\rho(f(p,t),A) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ при выполнении условия $\rho(p,A) < \delta$, где δ — некоторое положительное число. Если δ оказывается равным $+\infty$, то аттрактор A называется *глобальным.*

Теорема. *Для того чтобы динамическая система* $f(p,t)$ *в евклидовом пространстве* $R = E^n$ *имела аттрактор* A, *необходимо и достаточно, чтобы существовало множество* $M \subset R$ *со следующими свойствами:*

1) *множество* M *вместе со своей некоторой* δ*-окрестностью является компактным и инвариантным для полупотока множеством;*

2) *при некотором* $\delta' < \delta$ *существует число* $0 < T < +\infty$ *такое, что полутраектории, начинающиеся в множестве* $S(M,\delta)\backslash S(M,\delta')$, *покидают его за время* $t \leqslant T$.

Замечание 1. Условия теоремы могут показаться труднопроверяемыми, но это не так. Подобные условия дают функции Ляпунова, используемые в теореме Йошизавы о диссипативности.

Замечание 2. Приведенная теорема по сути является теоремой о неподвижной точке. Действительно, инвариантное множество является неподвижной точкой отображения замкнутой топологии компактного множества M в себя, индуцированного динамической системой $f(p,t)$.

О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
alex-bondarev@tut.by

Рассматривается краевая задача для уравнения Ляпунова вида [1]

$$dX/dt = A(t)X(t) + X(t)B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{s=1}^{k} M_s X(t_s) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times m}$, $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{m\times m})$, $F_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times m})$ $(i = 0, 1)$, M_s — заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы, $\lambda \in \mathbb{R}$, $I = [0, \omega]$.

Введены следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Psi^{-1}\|, \quad m_s = \|M_s\|, \quad \alpha_2 = \max_t \|A_2(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h_i = \max_t \|F_i(t)\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \lambda_1 = \max_t \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_t \|U^{-1}(t)\|, \quad u_s = \|U_s\|, \quad U_s = U(t_s),$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad v_s = \|V_s\|, \quad V_s = V(t_s),$$

$$q = \gamma\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\alpha_2 + \beta_2)\omega \sum_{s=1}^{k} m_s u_s v_s, \quad N = \gamma\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\omega h \sum_{s=1}^{k} m_s u_s v_s,$$

где $t \in I$, $s = \overline{1, k}$, $h = h_0 + \varepsilon h_1$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц, Ψ — линейный оператор, $\Psi Y = \sum_{s=1}^{k} M_s U_s Y V_s$, $U(t)$ и $V(t)$ — фундаментальные матрицы уравнений $dU/dt = A_1(t)U$ и $dV/dt = VB_1(t)$ соответственно, при этом матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$ выбираются определенным образом [2, гл. 1], $A_2(t) = A(t) - A_1(t)$, $B_2(t) = B(t) - B_1(t)$.

В данной работе, являющейся продолжением [1] и развитием [3, 4], с помощью подхода [2, гл. 1] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и оценка области локализации решения задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть оператор* Ψ *обратим и выполнено условие* $q < 1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима; ее решение* $X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка* $\|X(t)\| \leqslant N/(1 - q)$.

На основе используемой методики получено в формально замкнутой форме, представляющей собой двусторонний аналог функции Грина, точное решение данной задачи, из которого при $B(t) \equiv 0$ следует аналогичное решение задачи [2, гл. 1].

Литература

1. Бондарев А. Н. *О многоточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. Междунар. науч. конф. 2013. Ч. 1. С. 44–45.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *О многоточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова* // Тр. ИСА РАН: Динамика неоднородных систем. 2008. Т. 32, № 3. С. 19–26.

4. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА КВАДРАТИЧНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.И. Булгаков, Е.К. Жилко, С.Н. Алыцкая

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z,$$

$$\dot y = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{13}xz + b_{23}yz + b_{33}z^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{30}z,$$
$$\dot z = c_{11}x^2 + c_{12}xy + c_{22}y^2 + c_{13}xz + c_{23}yz + c_{33}z^2 + c_{10}x + c_{20}y + c_{30}z, \qquad (1)$$

где $a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = \overline{0,3}$.

Теорема. *Для того что бы система* (1) *имела первый интеграл*

$$F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Mxz + Fyz + Gx + Ny + Tz + P = c,$$

необходимо и достаточно что бы она имела вид:

$$\dot x = a_{11}x^2 + a_{12}xy + \Big(-\frac{1}{2A}(Da_{12} + 2Bb_{12} + Db_{22} + Mc_{22} + Fc_{12})\Big)y^2 + a_{13}xz +$$
$$+\Big(-\frac{1}{M}(Da_{33}+2Bb_{33}+Fb_{23}+Cc_{23}+Fc_{33})\Big)yz+\Big(-\frac{1}{2A}(Ma_{13}+Db_{33}+Fb_{13}+2Cc_{13}+Mc_{33})\Big)z^2+$$
$$+a_{10}x + a_{20}y + \Big(-\frac{1}{D}(Ma_{20} + Ga_{20} + 2Bb_{30} + Fb_{20} + Nb_{23} + 2Cc_{20} + Fc_{30} + Tc_{23})\Big)z,$$

$$\dot y = \Big(-\frac{1}{N}(2Aa_{10} + Ga_{11} + Db_{10} + Mc_{10} + Tc_{11})\Big)x^2 + b_{12}xy +$$
$$+\Big(-\frac{1}{F}(Da_{23} + Ma_{22} + 2Bb_{23} + +2Cc_{22} + Fc_{23})\Big)y^2 + b_{13}xz +$$
$$+b_{23}yz + \Big(-\frac{1}{N}(Ma_{30} + Ga_{33} + Fb_{30} + 2Cc_{30} + Tc_{33})\Big)z^2 +$$
$$+\Big(-\frac{1}{2B}(2Aa_{20} + Da_{10} + Ga_{12} + Db_{20} + Nb_{12} + Mc_{30} + Fc_{10} + Tc_{12})\Big)x +$$
$$+\Big(-\frac{1}{2B}(Da_{20} + Ga_{22} + Nb_{22} + Fc_{20} + Tc_{22})\Big)y +$$
$$+\Big(-\frac{1}{D}(2Aa_{30} + Ma_{10} + Ga_{13} + Fb_{10} + Nb_{13} + 2Cc_{10} + Mc_{30} + Tc_{13})\Big)z,$$

$$\dot z = \Big(-\frac{1}{M}(2Aa_{11} + Db_{11}\Big)x^2 + \Big(-\frac{1}{M}(2Aa_{12} + Da_{11} + 2Bb_{11} + Db_{12} + Fc_{11})\Big)xy +$$
$$+\Big(-\frac{1}{M}(2Aa_{22} + Db_{22})\Big)y^2 + \Big(-\frac{1}{M}(2Aa_{13} + Ma_{11} + Db_{13} + Fb_{11} + 2Cc_{11})\Big)xz +$$
$$+\Big(-\frac{1}{M}(2Aa_{23} + Da_{13} + Ma_{12} + 2Bb_{13} + Db_{23} + Fb_{12} + 2Cc_{12} + Fc_{13})\Big)yz +$$
$$+\Big(-\frac{1}{M}(2Aa_{33}+Db_{33})\Big)z^2+\Big(-\frac{1}{T}(Ga_{10}+Nb_{10})\Big)x+\Big(-\frac{1}{T}(Ga_{20}+Nb_{20})\Big)y+\Big(-\frac{1}{T}(Ga_{30}+Nb_{30})\Big)z.$$

Литература

1. Еругин Н. П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую* // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 6. С. 659–670.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.В. Вареникова

Филиал Брянского государственного университета им. акад. И. Г. Петровского, Новозыбков, Россия
varenikovaev@yandex.ru

В настоящей работе с помощью отражающей функции (ОФ) исследуется одна двумерная дифференциальная кубическая система с периодическими по времени коэффициентами.

Напомним, что ОФ [1] системы

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R, \tag{1}$$

с общим решением $\varphi(t, t_0, x_0)$, является вектор-функция $F(t,x)$, определяемая формулой $F(t,x) = \varphi(-t,t,x)$. Если $F(t,x)$ есть ОФ для системы (1), то $F(-\omega, x)$ есть отображение за период $[-\pi;\pi]$ (отображение Пуанкаре) этой системы.

Если $\Delta(t,x)$ есть вектор-функция, удовлетворяющая соотношению

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} + \frac{\partial\Delta}{\partial x} - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta = 0, \tag{2}$$

то при любой непрерывной скалярной нечетной функции $\alpha(t)$ система $\dot{x} = X(t,x) + \alpha(t)\Delta(t,x)$ имеет такую же ОФ как и система (1) (см. [2]).

Теорема. *Все решения системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax\cos t + x^3P^2e^{2C\sin t} - 2x^2yPe^{C\sin t}\sin t + xy^2\sin t,$$

$$\frac{dy}{dt} = Bxe^{C\sin t}\cos t + x^2P^3e^{3C\sin t} - 2x^2yP^2e^{2C\sin t}\sin t + xy^2Pe^{C\sin t}\sin t, \tag{3}$$

где $P = B/(C+A)$, $A \neq -C$, *продолжимые на* $[-\pi;\pi]$, *являются периодическими.*

Доказательство. Согласно общему принципу из [1], для того чтобы продолжимое на $[-\pi;\pi]$ решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка (x,y) была неподвижной точкой отображения Пуанкаре, то есть чтобы было $F(-\omega;x,y) = (x,y,)$, где $F(t;x,y)$ есть ОФ системы (3).

Убедиться в том, что система (3) имеет ту же ОФ, что и линейная система

$$\dot{x} = Ax\cos t, \quad \dot{y} = Bxe^{C\sin t}\cos t. \tag{4}$$

нетрудно. Согласно [2], достаточно проверить тождество (2) для вектор-функции Δ, находящейся в системе (3).

ОФ линейной системы (4), а также системы (3) имеет вид:

$$F_1 = xe^{-2A\sin t}, \quad F_2 = \frac{B}{C+A}x(e^{-(C+2A)\sin t} - e^{C\sin t}) + y.$$

Поэтому отображение за период $[-\omega;\omega]$ будут определять функции

$$U = F_1(-\omega;x,y) = xe^{2A\sin\omega}, \quad V = F_2(-\omega;x,y) = \frac{B}{C+A}x(e^{(C+2A)\sin\omega} + e^{-C\sin\omega}) + y.$$

Соответственно отображение за период $[-\pi; \pi]$ есть тождественное отображение $U = x,\ V = y$.

Это и доказывает теорему.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Мн.: Изд-во «Университетское», 1986. 76 с.
2. Мироненко В. В. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 10. С. 1325–1332.

КЛАССИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Н. Горбузов, В.Ю. Тыщенко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

gorbuzov@grsu.by, valentinet@mail.ru

Рассматриваются вещественные голоморфные вполне разрешимые [1] линейные системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^{m} A_j(t_1, \ldots, t_m) x dt_j \tag{1}$$

и

$$dx = \sum_{j=1}^{m} B_j(t_1, \ldots, t_m) x dt_j, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, квадратные матрицы $A_j = ||a_{ikj}||$ и $B_j = \|b_{ikj}\|$ размера n состоят из 1-периодических по своим аргументам голоморфных функций $a_{ikj} : \mathbf{R}^m \to \to \mathbf{R}$, $b_{ikj} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Общие решения голоморфных вполне разрешимых линейных систем уравнений в полных дифференциалах (1) и (2) определяют, соответственно, накрывающие слоения [1, 2] L^1 и L^2 на многообразии $\mathbf{R}^n \times T^m$, где T^m есть m-мерный тор.

Будем говорить, что голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах (1) и (2) **топологически (гладко, голоморфно) эквивалентны**, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм, биголоморфизм) $h : \mathbf{R}^n \times T^m \to \mathbf{R}^n \times T^m$, переводящий слои слоения L^1 в слои слоения L^2.

Учитывая, что группы монодромии систем (1) и (2) абелевы, на основании критериев топологической (гладкой, голоморфной) сопряженности вещественных линейных абелевых групп [2] получены критерии топологической (гладкой, голоморфной) эквивалентности этих систем.

В частности, имеют место такие утверждения.

Теорема 1. *Голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами при $m > 1$ структурно неустойчивы.*

Теорема 2. *Голоморфные вполне разрешимые линейные системы уравнений в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами при $m = 1$ гладко (голоморфно) эквивалентны тогда и только тогда, когда их группы монодромии $\mathbb{R}$ линейно сопряжены.*

Литература

1. Горбузов В. Н. *Интегралы дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ, 2006.
2. Тыщенко В. Ю. *Накрывающие слоения дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ, 2011.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.М. Гребенцов, В.Н. Лаптинский

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь
y7412895@yandex.ru, lavani@tut.by

Исследуется задача об ω-периодических решениях системы

$$\ddot{x} = \lambda A(t)\dot{x} + \lambda Bx + f(t) \tag{1}$$

с непрерывными ω-периодическими $(n \times n)$-матрицей $A(t)$, n-вектором $f(t)$; B — постоянная матрица, λ — скалярный параметр.

На основании [1] решение этой задачи отыскивается в виде

$$x(t,\lambda) = c(\lambda) + z(t,\lambda), \tag{2}$$

где $c(\lambda)$ — постоянный вектор, $z(t,\lambda)$ — ω-периодическая вектор-функция, подчиненная интегральному условию $\int_0^\omega A(\tau)z(\tau,\lambda)\,d\tau = 0$.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \|B\|, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$\sigma = \max_t \|g(t)\|, \quad q = \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2 + \beta\right),$$

где $t \in [0,\omega]$, $g(t) = f(t) - A(t)\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)\,d\tau$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det \tilde{A}(\omega) = 0$, $0 < \varepsilon q < 1$. *Тогда* ω*-периодическое решение уравнения* (1) *существует и единственно и представимо в виде* (2), *при этом справедливы соотношения*

$$c(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\tilde{A}^{-1}\,(\omega)\int\limits_0^\omega f(\tau)d\tau, \quad \|z(t,\lambda)\| \leqslant \frac{\gamma\alpha\omega^3\sigma}{4(1-\varepsilon q)}, \quad \|\dot{z}(t,\lambda)\| \leqslant \frac{\omega\sigma}{2(1-\varepsilon q)}.$$

Для построения решения разработан алгоритм типа [1], при этом

$$\|z(t,\lambda) - \tilde{z}_m(t,\lambda)\| \leqslant (\varepsilon q)^{m+1}\frac{\gamma\alpha\omega^3\sigma}{4(1-\varepsilon q)},$$

$$\|\dot{z}(t,\lambda) - \dot{\tilde{z}}_m(t,\lambda)\| \leqslant (\varepsilon q)^{m+1}\frac{\omega\sigma}{2(1-\varepsilon q)}, \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

где $z(t,\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^k z_k(t)$, $\tilde{z}_m(t,\lambda) = \sum_{k=0}^m \lambda^k z_k(t)$.

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1990. № 5. С. 25–30.

ФУНКЦИЯ ДЮЛАКА — ЧЕРКАСА В ОКРЕСТНОСТИ НЕГРУБОГО ФОКУСА КУБИЧЕСКОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

А.А. Гринь, А.В. Кузьмич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
grin@grsu.by, andrei-ivn@mail.ru

Рассмотрим кубическую автономную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = y + \alpha x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \alpha y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \qquad (1)$$

с фиксированными вещественными коэффициентами $a_{ij}, b_{ij}, 2 \leqslant i+j \leqslant 3$ и параметром $\alpha \in I \subset R$ в случае, когда точка $O(0,0)$ является негрубым фокусом системы и первая фокусная величина Ляпунова v_3 отлична от нуля при $\alpha = 0$.

Для оценки числа и локализации предельных циклов в области $\Omega \subset R^2$ будем использовать обобщенный метод Дюлака [1], который заключается в нахождении функции Дюлака — Черкаса $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ и числа $k \in R, k \neq 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\Phi \equiv k\Psi divX + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0 (< 0), \quad (x,y) \in \Omega, \quad X = (P,Q). \qquad (2)$$

Так как система (1) является структурно неустойчивой, то этот метод напрямую не применим.

Идея нашего подхода заключается в построении функции Ψ в виде полинома четвертой степени

$$\Psi = e_1 + e_2x + e_3y + e_4x^2 + \ldots + e_{15}y^4 \qquad (3)$$

на основе нахождения функции Φ в виде полинома, содержащего члены не ниже четвертого порядка относительно фазовых переменных [2].

Коэффициенты e_i, $i = \overline{1,15}$, выбираем так, чтобы выполнялось равенство

$$\Phi = r\alpha^2 + s(x^2+y^2)^2 + \tilde{\Phi}(x,y), \qquad (4)$$

где функция $\tilde{\Phi}$ содержит члены более высоких порядков, а s зависит от коэффициентов a_{ij}, b_{ij} и числа k. Для положительности Φ в окрестности $U_\delta \times V_\epsilon$ необходимо найти подходящие значения $s > 0$ и $r > 0$. Коэффициенты e_i, $i = \overline{1,15}$, находятся с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях полиномов (2) и (4).

Теорема. *Для системы* (1) *существуют функция* Ψ *в виде полинома* (3), *а также числа* $k < 0$, $\delta_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ *такие, что при всех* (x,y) *из окрестности* $U_\delta = \{(x,y) : |x| \leqslant \delta_0, |y| \leqslant \delta_0\}$ *и всех* α *из окрестности* $V_\epsilon = \{\alpha : 0 < \alpha \leqslant \alpha_0\}$ *для полинома* $\Phi(x,y,k,\alpha)$ *вида* (4) *выполняется неравенство* (2).

Если при этом уравнении $\Psi = 0$ *определяет один овал, то в рассматриваемой окрестности фокуса, кроме, быть может малоамплитудного предельного цикла, других предельных циклов система* (1) *не имеет.*

Литература

1. Черкас Л. А. *Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 689–699.

2. Гринь А. А. *Функция Дюлака-Черкаса в окрестности неустойчивого фокуса полиномиальных автономных систем на плоскости* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 3–9.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

Л.А. Данилович

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

В работе [1] на основе применения метода [2, гл. 2] получены коэффициентые достаточные условия однозначной разрешимости задачи

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X\left(K_0 + \lambda K_1(t)\right) + \lambda^2 B(t)XC(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{2}$$

где $A(t), B(t), C(t), K_1(t), F_i(t)$ $(i = 0, 1)$ — вещественные непрерывные матрицы соответствующих размеров, K_0 — постоянная матрица; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

Данная работа является продолжением и развитием [1].

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|C(t)\|, \quad \beta_0 = \|K_0\|, \quad \beta_1 = \max_t \|K_1(t)\|, \quad r = \|K_0^{-1}\|,$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\beta_0\omega^2 + \gamma(\alpha\beta_1 + \beta\mu)r\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha\beta_1 + \beta\mu), \quad q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\det K_0\tilde{A}(\omega) \neq 0$, $0 < q(\varepsilon) < 1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима. Ее решение* $X(t,\lambda)$ *представимо в виде*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \tag{3}$$

где матрицы $X_{k-1}(t)$ *определены рекурретным интегральным соотношением типа* [1, 2].

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости ряда (3).

Литература

1. Данилович Л. А., Лаптинский В. Н. *О периодической краевой задаче для обощенного уравнения Ляпунова с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинсткие чтения–2013»: тез. докл. Междунар. науч. конф. Ч. 1. 2013. С. 51–52.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.А. Денисковец [1], **П.Б. Павлючик** [2]

[1] Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь
aleksei_deniskov@mail.ru
[2] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
p.pavlyuchik@grsu.by

Рассматривается система линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, $n > 1$, квадратная матрица $A(t)$ порядка n является гладкой на $\mathbb{R}$ и, кроме того,

$$A(t)\int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)\,d\tau A(t),$$

$$A(t+1)\int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)\,d\tau A(t+1), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad B(t) = A(t+1) - A(t). \tag{2}$$

Теорема 1. *Линейная дифференциальная система* (1) *определяет на многообразии* $\mathbf{R}^n \times S^1$ *накрывающее слоение* [2] F *с фазовым слоем* $\mathbf{R}^n$, *базой* S^1 *(единичной окружностью) и фазовой группой, определяемой невырожденным линейным отображением* Lx, $\forall x \in \mathbf{R}^n$.

Наряду с линейной дифференциальной системой (1) будем рассматривать линейную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t)x, \tag{3}$$

с гладкой матрицей $A_1(t)$. Будем считать, что для линейной дифференциальной системы (3) выполняются условия вида (2). На основании теоремы 1 получаем, что линейная дифференциальная система (3) определяет на многообразии $\mathbf{R}^n \times S^1$ накрывающее слоение F_1 с фазовым слоем $\mathbf{R}^n$, базой S^1 (единичной окружностью) и фазовой группой, определяемой невырожденым линейным отображением L_1x, $\forall x \in \mathbf{R}^n$. Будем говорить, что голоморфные линейные дифференциальные системы уравнений (1) и (3) *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $h : \mathbf{R}^n \times S^1 \to \mathbf{R}^n \times S^1$, переводящий слои слоения F в слои слоения F_1.

Теорема 2. *Пусть вещественная нормальная жорданова форма сильно гиперболической матрицы* [2, с. 95] L *имеет вид*

$$J(L) = \begin{pmatrix} J_s(L) & 0 \\ 0 & J_u(L) \end{pmatrix},$$

где все собственные значения матрицы $J_s(L)$ *по модулю меньше* 1, *а все собственные значения матрицы* $J_u(L)$ *по модулю больше* 1, $p = \dim J_s(L)$; *вещественная нормальная жорданова форма сильно гиперболической матрицы* L_1 *имеет вид*

$$J(L_1) = \begin{pmatrix} J_s(L_1) & 0 \\ 0 & J_u(L_1) \end{pmatrix},$$

где все собственные значения матрицы $J_s(L_1)$ *по модулю меньше* 1, *а все собственные значения матрицы* $J_u(L_1)$ *по модулю больше* 1, $q = \dim J_s(L_1)$. *Тогда линейные дифференциальные системы* (1) и (3) *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда либо* $p = q$, $\det J_s(L) \det J_s(L_1) > 0$, $\det J_u(L) \det J_u(L_1) > 0$, *либо* $p = n - q$, $\det J_s(L) \det J_u^{-1}(L_1) > 0$, $\det J_u(L) \det J_s^{-1}(L_1) > 0$.

Литература

1. Денисковец А. А., Тыщенко В. Ю. *О приводимости, устойчивости и топологической эквивалентности одного класса линейных дифференциальных систем* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. 2012. № 3. С. 33–37.

2. Тыщенко В. Ю. *Накрывающие слоения дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ, 2011.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.С. Денисов

Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь
primakovasv@tut.by

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Dy^5 + Ay^3 + By + f(x), \quad \dot{y} = g(x), \quad A > 0, \quad B > 0, \quad D > 0, \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ нечетные и удовлетворяют следующим условиям:

I. $\exists$ x_1, x_3, такие что $f(x) < 0$ на $(0, x_1)$; $f(x) > 0$ на (x_1, x_3); $g(x) < 0$ на $(0, \infty)$; $f(0) = f(x_1) = g(0) = 0$.

II.

$$G(x) = \int_0^x -g(s)\, ds \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

При $D = 0$ в работе [1] найдены достаточные условия существования по крайней мере двух предельных циклов системы (1).

Обозначим

$$M = \max_{[0;x_3]} |f(x)|, \quad \varphi(x) = \int_0^x -g(s) f(s)\, ds,$$

d — единственный действительный корень уравнения $Dy^5 + Ay^3 + By - \gamma M = 0$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия I, II, а также условие III.* $\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in \in (x_1; x_3)$ *такие, что справедливы неравенства*

$$\varphi(x_2) \geqslant 2\varphi(x_1)/(1-\gamma); G(x_3) - G(x_2) \geqslant Dd^6/6 + Ad^4/4 + Bd^2/2 + 2Md, \tag{2}$$

то система (1) имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, лежащий в полосе $-x_3 \leqslant x \leqslant x_3$.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и*

$$\varliminf_{x \to +\infty} (-f(x)) > 0, \tag{3}$$

то система (1) *имеет по крайней мере два предельных цикла.*

Вместо условия (2) теоремы 1 можно потребовать выполнение следующего условия: $\exists\gamma > 1$, такое, что верно неравенство

$$\varphi(x_3) \geqslant 2\varphi(x_2)/(1-\gamma) + (\gamma+1)M(Dd^6/6 + Ad^4/4 + Bd^2/2) \tag{4}$$

Тогда верна

Теорема 3. *Если выполнены условия I, II, а также неравенства* (3) *и* (4), *то система* (1) *имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл.*

В последнем случае неустойчивый предельный цикл не локализован.

Литература

1. Денисов В. С., Примакова О. О. *О существовании предельных циклов одной динамической системы с кубической нелинейностью* // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: материалы Междунар. конф, г. Брест, 2005. В 2-х ч. Ч. 1. Мн.: БГПУ, 2005. С. 102–107.

ИНТЕГРАЛЫ ЖОЛОНДЕКА $CD_{10}^{(11)}$, $CD_{31}^{(12)}$, $CD_{32}^{(12)}$

Л.В. Детченя[1], **А.П. Садовский**[2], **Т.В. Щеглова**[2]

[1] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
detchenya_lv@mail.ru
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by, shcheglovskaya@tut.by

Система

$$\dot{x} = -63(1+ax) + 9b(3x^2-4y) - 14xy^2, \quad \dot{y} = 3(9a(6x^3-y) - 14y^3 + 63x^2(1+by) \tag{1}$$

с комплексными параметрами a и b имеет интеграл Дарбу $H_1 = (x^3+y)^7/f_1^3$, где $f_1 = x^7 + 7x^4y/3 + 14xy^2/9 + ax + by + 1$.

Теорема 1. *Пусть* $f_1 = 0$ *— инвариантная кривая системы*

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{2}$$

где P, Q *— полиномы третьей степени. Тогда система* (2) *имеет вид* (1).

Система

$$\begin{gathered} \dot{x} = -30x(3+2x^2) + x(-15+16ax)y + 8a(-3+2y), \\ \dot{y} = 10y(6(1+2x^2) - 8axy + 3y(3+y)) \end{gathered} \tag{3}$$

с комплексным параметром a имеет интеграл Дарбу

$$H_2 = \frac{(1+y+x^2y)^5}{y^3 f_2},$$

где $f_2 = a + x^5y + 5x^3(1+y)/2 + 15x(2+y)/8$.

Для системы (3) особая точка $A(70a/(32a^2-75), 6(8a^2+25)/(32a^2-75))$ — центр.

Теорема 2. *Пусть* $f_2 = 0$ *— инвариантная кривая системы* (2). *Тогда система* (2) *имеет вид* (3).

Система

$$\begin{gathered} \dot{x} = 2x(1+4ax(2+ax) - 3xy), \\ \dot{y} = 14(2a-y) + 12axy + 8a^2x(2+xy) - 3x(x+2y^2) \end{gathered} \tag{4}$$

с комплексным параметром a имеет интеграл Дарбу

$$H_3 = \frac{(x^3(1+ax)+(1+xy)^2)^3}{f_3^2},$$

где $f_3 = 3x^6/8 + 3x^3(1+ax)(1+xy)/2 + (1+xy)^3$.

Теорема 3. *Пусть* $f_3 = 0$ *— инвариантная кривая системы* (2). *Тогда система* (2) *имеет вид* (4).

Интегралы Дарбу H_1, H_2, H_3 для кубических систем представлены в [1]. Кубическая система с интегралом Дарбу класса $CD_{10}^{(11)}$ рассматривалась в [2].

Литература

1. Żołądek H. *Remarks on the classification of reversible cubic systems with center* // Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. 1996. Vol. 8. P. 335–342.

2. Детченя Л. В., Садовский А. П., Щеглова Н. Л., Щеглова Т. В. *Кубическая система с интегралом Дарбу класса* $CD_{10}^{(11)}$ *Жолондека*// XI Белорус. матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 2. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 24–25.

О СИЛЬНО ИЗОХРОННЫХ ЦЕНТРАХ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕННОЙ БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ

Д. Доличанин-Джекич

Государственный университет в Новом Пазаре, Сербия
dolicanin_d@yahoo.com

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = -y - P_2(x,y) - P_3(x,y), \quad \dot{y} = x + Q_2(x,y) + Q_3(x,y), \tag{1}$$

где $P_k(x,y)$ и $Q_k(x,y)$, $k = 2,3$, — однородные полиномы степени k, удовлетворяющие условию $xQ_3(x,y) + yP_3(x,y) \equiv 0$, где $P_3^2(x,y) + Q_3^2(x,y) \neq 0$.

Такая система является подклассом систем с вырожденной бесконечностью, т. е. систем, у которых при компактификации Пуанкаре прямая в бесконечности сплошь заполнена особыми точками системы.

Теорема. *Исключая случай совершенной (равномерной) изохронности центра, когда* $\dot{\phi} = 1$, *особая точка* $O(0,0)$ *системы* (1) *может быть сильно изохронным центром* [1] *только второго порядка с* $\phi_0 = 0$. *Для того чтобы точка* $O(0,0)$ *была сильно изохронным центром второго порядка с* $\phi_0 = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы линейной заменой координат и изменением масштаба времени система* (1) *приводилась к одной из систем:*

$$\dot{x} = -y + 2bxy - x(b^2xy), \quad \dot{y} = x - bx^2 + by^2 - y(b^2xy);$$

$$\dot{x} = -y - 2axy - x(2cxy), \quad \dot{y} = x + ax^2 - ay^2 - y(2cxy);$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax^2 - 2bxy + x\left(abx^2 + \dfrac{1}{4}(a^2 - 4b^2 - c^2)xy\right), \\ \dot{y} = x + bx^2 + axy - by^2 + y\left(abx^2 + \dfrac{1}{4}(a^2 - 4b^2 - c^2)xy\right), \quad b \neq 0. \end{cases}$$

Литература

1. Амелькин В. В., Чинь Зань Данг. *О сильной изохронности дифференциальных систем Коши — Римана* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1993. № 2. С. 26–30.

ИССЛЕДОВАНИЕ УХОДЯЩИХ ДВИЖЕНИЙ

А.Ф. Зубова, И.С. Стрекопытов, С.А. Стрекопытов

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
ddemidova@mail.ru

Предлагается методика исследования движений, позволяющая изучить окрестность уходящей траектории и основанная на анализе структуры инвариантного множества.

Определение 1. Назовем уходящее движение $f(p,t)$ *положительно устойчивым по Пуассону в расширенном смысле по отношению к пространству* R_1, если существует хотя бы одна ω-предельная точка движения $f(p_1,p_2,t)$, принадлежащая самому движению, т. е. существует момент времени t^* такой, что $f_1(p_1,p_2,t^*)=q_1$, $q_1\in\Omega_{f_1}$.

Аналогичное определение можно ввести и в случае $t\to-\infty$.

Определение 2. Замкнутое в R R_1-инвариантное множество M динамической системы $f(p,t)=(f_1(p_1,p_2,t),f_2(p_1,p_2,t))$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если по любому $\varepsilon>0$ можно указать величину $\delta>0$ такую, что при $\rho(p,M)<\delta$ выполняется

$$\rho_1(f_1(p_1,p_2,t),M\cap R_1)<\varepsilon \quad \text{при} \quad t\geqslant 0.$$

Теорема 1. *Для того чтобы замкнутое R_1-инвариантное множество M было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $V(p)$, заданный в окрестности $S(M\bigcap R_1)\times R_2$ множества $(M\bigcap R_1)\times R_2$, удовлетворяющий условиям:*

1) $\forall c_1>0,\exists c_2>0\colon V(p)>c_2$ *при* $\rho_1(p_1,M\bigcap R_1)>c_1$;

2) $\forall\gamma_2>0,\exists\gamma_1>0: V(p)\leqslant\gamma_2$ *при* $\rho_1(p_1,M\bigcap R_1)<\gamma_1$;

3) $N(f(p,t))$ *является невозрастающей функцией при* $t\geqslant 0$, $p\in S(M,r)$, *пока* $f_1(p,t)$ *остается в* $S(M\bigcap R_1,r)$.

Определение 3. Множество $M\subset R=R_1\times R_2$ назовем R_1-*инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)=(f_1(p_1,p_2,t),f_2(p_1,p_2,t))$, если из $p\in$ $\in M$ следует: $f_1(p,t)\in M_{R_1}$, $\forall t\geqslant 0$, $M_{R_1}=\{p_1\in R_1\colon\exists p_2\in R_2,(p_1,p_2)\in M\}$.

Обозначим $M_{R_1}=M\bigcap R_1$. В качестве примера R_1-инвариантного множества в R можно привести множество $Q=\{q\times p(q_1)\}$. Действительно, из $p\in Q$ следует $f_1(p,t)\equiv q_1$, $f_1(p,I)\subset Q_{R_1}=q_1$. Таким образом, верна следующая

Теорема 2. *Множество точек $Q=\{q\times p(q_1)\}$ есть инвариантное замкнутое множество.*

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ — ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар, В.Н. Лаптинский

Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь
alex.kashpar@tut.by, lavani@tut.by

Рассматривается краевая задача типа [1]:

$$\ddot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{X}}+\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}(t)+\lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t))+\lambda(\mathbf{A}_2(t)\dot{\mathbf{X}}+\dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}_2(t))+\mathbf{F}(t), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda)=\mathbf{M},\quad \mathbf{X}(\omega,\lambda)=\mathbf{N},\quad \mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times m}, \tag{2}$$

где $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ $(i=1,2)$ — матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\mathbf{M},\mathbf{N}$ — заданные вещественные матрицы; $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

В данной работе на основе применения метода [2, гл. I] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), представляющие собой обобщение и развитие результатов [1, 3].

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_U=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\|,\quad \lambda_V=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t)\|,\quad \alpha_i=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{A}_i(t)\|,$$

$$\beta_i=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{B}_i(t)\|,\quad \gamma=\|\mathbf{\Phi}^{-1}\|,\quad \varepsilon=|\lambda|,\quad a=\frac{1}{3}\gamma\omega^3\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_1+\beta_1),\quad b=\frac{1}{2}\gamma\omega^2\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2),$$

где $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ — интегральные матрицы уравнений

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{U},\quad \mathbf{U}(0)=\mathbf{E}_n,\quad \frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{V}\mathbf{B}(t),\quad \mathbf{V}(0)=\mathbf{E}_m,$$

$\mathbf{\Phi}$ — линейный оператор, $\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t)=\int_0^\omega\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau$, $t\neq\tau$, $\mathbf{E}_k$ — единичная матрица порядка k.

Теорема. *Пусть выполнено условие* $\varepsilon(a+b)<1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима, ее решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условиям* (2).

Литература

1. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *О задаче Валле — Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XI Белорус. матем. конф.: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 2. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 32.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

3. Кашпар А. И. *О задаче Валле — Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. С. 57.

ЦЕНТРЫ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛЬЕНАРА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

А.А. Кушнер

EPAM SYSTEMS, Минск, Беларусь

vesna85@tut.by

Рассмотрим систему

$$x'=y(1+Dx+Px^2+Fx^3),$$

$$y'=-x+Ax^2+3Bxy+Cy^2+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3+Rx^4+3Sx^3y+Wx^2y^2+Vxy^3, \tag{1}$$

где $A,B,C,D,F,K,L,M,N,P,R,S,W,V\in\mathbb{C}$.

Фокусные величины f_i, $i=1,2,\ldots$, являются полиномами из кольца $\mathbb{C}[p]$, где $p=(A,B,C,D,F,K,L,M,N,P,R,S,W,V)$. Образуем идеал $T=\langle f_1,f_2,\ldots,f_k,\ldots\rangle\subset\mathbb{C}[p]$. Тогда $\mathbb{V}(T)=\{p\in\mathbb{C}^{14}:\forall f\in T,\ f(p)=0\}$ является многообразием центра системы (1). Начало координат системы (1) — центр тогда и только тогда, когда $p\in\mathbb{V}(T)$. Положим $\omega=A+C$, $\psi=A+2C$, $\tau=A+3C$, $\kappa=C+D$, $\alpha=11A+23C$. Образуем идеалы:

$$J_1 = \langle 9\omega + 4\kappa, B\omega + L, W, C\omega^2 + 4R, V, 3\omega^2(3A + 7C)^2 + 32(2A + 5C)F, 4S - B\omega^2, (A - 3C)\omega + 4K, 8(2A+5C)P - \omega(27A^2 + 117CA + 124C^2), C\omega(9A+23C) + 8(2A+5C)M, N\rangle,$$

$$J_2 = \langle D - 2C, -4BC + 3(L + N), 4C^4 + 108BNC - 9WC + 81N^2, 4C^3 + 9R, 6C^3V - N(4C^4 + 162BNC + 243N^2), 27F - 8C^3, 9S - 2C(2BC - 3N), 16C^2 + 9K, 3P - 4C^2, 3A + 7C, 4C^4 - 3MC^2 + 54BNC + 81N^2\rangle,$$

$$J_3 = \langle 9\omega + 4\kappa, B\omega + L, 8W - \psi(A^2 - C^2 - 8M), \omega^2(A + 5C)^2 + 16(A + 4C)R, V, 3\psi\omega^2 + 8F, 4S - B\omega^2, \omega\,(A^2 - 4CA - 33C^2) + 8(A + 4C)K, 8P - \omega(13A + 23C), N\rangle,$$

$$J_4 = \langle 9\omega + 4\kappa, B\omega + L + N, 3\tau(5A + 9C)(7A + 19C)\omega^2 + 192B(7A + 19C)N\omega + 1536\psi N^2 + 32\tau(7A + 19C)W, 3\omega^2\tau^2 + 2(7A + 19C)R, -384N^3 - 96B(7A + 19C)N^2 - \omega\tau(5A + 9C)(7A + 19C)N + 8\tau^2(7A + 19C)V, (5A + 9C)\omega^2 + 16F, -B(7A + 19C)\omega^2 - 4(5A + 13C)N\omega + 4(7A + 19C)S, 16(7A + 19C)K - \omega(11A^2 + 198CA + 459C^2), 2P - \omega(3A + 5C), -768N^2 - 192B(7A + 19C)N - \omega\tau(7A + 19C)(15A + 19C) + 16\tau(7A + 19C)M\rangle,$$

$$J_5 = \langle 9\omega + 4\kappa, -3\omega^2\psi(A + 5C)(3A + 7C)^2 + 48\alpha LN(3A + 7C) + 16\alpha(29A + 73C)N^2, 3\psi(A + 5C)(3A + 7C)\omega^3 + 16\alpha(11A + 31C)N^2 + 2(A + 5C)(3A + 7C)\alpha W, 3(A + 5C)\omega^2 + 32R, -128\alpha N^3 + 4\omega^2\psi(A + 5C)(3A + 7C)N + \omega(A + 5C)(3A + 7C)\alpha V, 4\omega^2\psi^2 + \alpha F, 3\psi(A + 5C)(3A + 7C)^2\omega^3 - 32\alpha(19A + 47C)N^2\omega + 192(3A + 7C)\alpha NS, (A - 19C)\omega + 16K, 8\alpha P - \omega(141A^2 + 538CA + 509C^2), -(A + 5C)(3A + 7C)(39A^2 + 14CA - 137C^2)\omega^2 + 16(A + 5C)(3A + 7C)\alpha M\omega - 2048\tau\alpha N^2, 3\omega^2\psi(A + 5C)(3A + 7C)^2 + 48B\omega\alpha N(3A + 7C) - 64(5A + 13C)\alpha N^2\rangle,$$

$$J_6 = \langle 9\omega + 4\kappa, B(41A + 45C) + 32L, 3(9A + 13C)(23A + 19C)\alpha B^2 + 768\omega^2\psi^2(A + 5C) + 128(A + 5C)\alpha W, 3(A + 5C)\omega^2 + 32R, -3(9A + 13C)^2\alpha(31A + 59C)B^3 - 16\omega\psi(A + 5C)(9A + 13C)(13A^2 + 26CA - 3C^2)B + 4096\psi\tau(A + 5C)\alpha V, (A - 19C)\omega + 16K, 8\alpha P - \omega(141A^2 + 538CA + 509C^2), B(-9A - 13C) + 32N, 4\omega^2\psi^2 + \alpha F, 64S - B\omega(25A + 29C), -3(9A + 13C)\alpha(31A + 59C)B^2 - 8\omega\psi(A + 5C)(129A^2 + 386CA + 241C^2) + 128\psi(A + 5C)\alpha M, (9A + 13C)\alpha(27A^2 + 58CA - C^2)B^2 + 48\omega^2\psi(A + 5C)(3A + 7C)^2\rangle.$$

Теорема. *Имеет место включение* $\bigcup_{k=1}^{6}\mathbb{V}(I_k) \subset \mathbb{V}(T)$.

Литература

1. Кокс Д., Литл Дж., О'Ши Д. *Идеалы, Многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры.* М.: Мир, 2000.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОГЛОЩАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА И АТТРАКТОРА L-СИСТЕМЫ

А.А. Леваков, Я.Б. Задворный

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

levakov@tut.by, slava.zadvorny@gmail.com

Пусть $f(t,x)$ — полунепрерывная полудинамическая система, заданная на метрическом пространстве (X,ρ). Назовем ее L-системой, если существует постоянная $\omega \geqslant 0$ такая, что, если последовательность движений $\varphi_n(t)$ ограничена на некотором отрезке $[a-\omega, b]$, то из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся при каждом $t \in [a,b]$ к некоторому движению $\varphi(t)$.

Пусть X — произвольное множество, ρ_1, ρ_2 — две метрики на множестве X, такие что $\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y)$ $\forall x, y \in X$, $f(t,x)$ — L-система на метрическом пространстве (X, ρ_2). Будем обозначать $S_i(x_0, r) = \{x \in X \mid \rho_i(x_0, x) < r\}$, $\beta_i(A,B) = \sup\limits_{a \in A} \rho_i(a, B)$, $x_0 \in X$, $r > 0$, $A, B \subseteq X$, $i = 1, 2$.

Множество $B_0 \subseteq X$ называется поглощающим множеством L-системы $f(t,x)$, если для любого множества $B \subseteq X$, ограниченного в (X, ρ_2), существует такой момент времени $T \geqslant 0$, что $f(t, B) \subseteq B_0$ $\forall t \geqslant T$.

Непустое множество $U \subseteq X$ называется аттрактором L-системы $f(t,x)$, если для него выполнены следующие свойства:

1) U компактно в (X, ρ_2);

2) для любого ограниченного в (X, ρ_2) множества $B \subseteq X$ выполнено

$$\beta_2(f(t,B), U) \to 0;$$

3) U строго инвариантно, т. е. $f(t, U) = U$, $\forall t \geqslant 0$.

Будем говорить, что L-система $f(t,x)$ удовлетворяет условию Q относительно метрик ρ_1 и ρ_2, если $\exists \eta \geqslant 0$ такое, что всякая последовательность φ_n движений L-системы $f(t,x)$, ограниченная в (X, ρ_1) на отрезке $[a - \eta, b]$, является ограниченной в (X, ρ_2) на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. *Пусть $f(t,x)$ — L-система в пространстве (X, ρ_2), удовлетворяющая условию Q относительно метрик ρ_1 и ρ_2. Предположим, что в пространстве X существует функция $V(u)$, $V : X \to \mathbb{R}$, непрерывная в пространстве (X, ρ_2) и обладающая вне шара $S_2(O, r_0)$, $O \in X$, $r_0 > 0$, следующими свойствами:*

1) $V(u) \leqslant a(\rho_2(u, O)), \forall u \notin S_2(O, r_0)$ где $a(r)$, $r \geqslant 0$, — положительная непрерывная возрастающая функция;

2) $V(u) \to \infty$ при $\rho_1(u, O) \to \infty$;

3) для каждого движения системы $\varphi(t)$ и для любых двух моментов времени t_1, t_2, $t_1 < t_2$, выполнено $V(\varphi(t_1)) \geqslant V(\varphi_x(t_2))$, если только $\varphi(t) \notin S_2(O, r_0)$, $\forall t \in \in [t_1; t_2]$;

4) не существует полного движения системы $\varphi_x^\infty(t) \notin S_2(O, r_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, такого что $V(\varphi_x^\infty(t)) = V(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Тогда L-система $f(t,x)$ обладает поглощающим множеством, ограниченным в (X, ρ_1) и относительно компактным в (X, ρ_2).

Теорема 2. *Если L-система $f(t,x)$ обладает поглощающим множеством B_0, ограниченным в (X, ρ_1), и удовлетворяет условию Q относительно метрик ρ_1 и ρ_2, то она обладает и аттрактором.*

К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

В.А. Ливинская

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

Изучается задача о периодических решениях с периодом ω уравнения типа [1]

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \lambda^2 A(t) X + \lambda X B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \tag{1}$$

где $A(t), B(t), F_i(t)(i = 0, 1)$ — вещественные непрерывные ω-периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

С помощью метода [2, гл. 2] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи, а также алгоритм построения решения.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{B}(\omega) = \int\limits_0^\omega B(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$q_1 = \frac{1}{4}\gamma\beta^2\omega^3 + \gamma\alpha\omega, \quad q_2 = \frac{1}{4}\gamma\alpha\beta\omega^3,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнено условие* $\det\tilde{B}(\omega) \neq 0$. *Тогда в области* $0 < |\lambda| < 2/(q_1 + \sqrt{q_1^2 + 4q_2})$ ω *-периодическое решение уравнения* (1) *существует и единственно. Это решение представимо в виде*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \tag{2}$$

где матрицы $X_{k-1}(t)$ *определяются рекуррентным интегральным соотношением типа* [1, 2].

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости ряда (2).

Литература

1. Лаптинский В. Н., Ливинская В. А. *О периодических решениях линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013): тез. докл. Междунар. науч. конф. Ч. 1. 2013. С. 59–60.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С.В. Майоровская [1], В.В. Мироненко [2]

[1] Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
svmayor@mail.ru
[2] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
vladimir.v.mironenko@gmail.com

Далее для функции вида $m = m(t)$ будем полагать $\overline{m} = m(-t)$.

Теорема. *Пусть для дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x^2 - a}$$

с непрерывно дифференцируемыми 2ω *-периодическими коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям*

$$a_0 = a^2a_4, \quad a_1 = aa_3 - \dot{a},$$

функции a_4 *и*

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}(\frac{a_3 + \overline{a}_3}{a_4}) - \frac{a_3^2 + \overline{a}_3^2}{8a_4} - 2aa_4 - \frac{(a_3 + \overline{a}_3)^2}{16a_4^2}$$

нечетны. Тогда все продолжимые на $[-\omega, \omega]$ *решения этого уравнения являются* 2ω *-периодическими.*

Доказательство теоремы основано на том, что для рассматриваемого дифференциального уравнения функция $F(t,x)$, определяемая уравнением

$$F - \frac{\overline{a}}{F} = x - \frac{a}{x} + \frac{a_3 + \overline{a}_3}{2a_4},$$

является отражающей функцией [1].

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

РАЗРЕШИМОСТЬ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА — РИККАТИ

О.А. Маковецкая

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
olya.makzi@gmail.com

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$, $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leqslant \infty$.

Следуя [1], решение этой задачи разыскивается в виде

$$X(t) = C + Y(t), \tag{3}$$

где C — постоянная матрица, $Y(t)$ — матрица, подчиненная условиям [2]

$$Y(0) = Y(\omega), \quad \int\limits_0^\omega [A(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)B(\tau)]\, d\tau = 0.$$

Обозначим $M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau$, $N = -\int_0^\omega B(\tau)\, d\tau$.

Установлено, что в случае, когда матрицы M и N не имеют общих характеристических чисел, задача (1), (2) в представлении (3) эквивалентна интегральной задаче [2]

$$C = -\Phi^{-1} \int\limits_0^\omega [(C + Y(\tau))Q(\tau)(C + Y(\tau)) + F(\tau, C + Y(\tau))]d\tau, \tag{4}$$

$$Y(t) = \Phi^{-1}\Big[\int\limits_0^t \Big(\int\limits_0^\tau A(\sigma)d\sigma \Big) S(\tau)d\tau - \int\limits_t^\omega \Big(\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma \Big) S(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t S(\tau)\Big(\int\limits_0^\tau B(\sigma)d\sigma\Big)d\tau - \int\limits_t^\omega S(\tau)\Big(\int\limits_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\Big)d\tau, \qquad (5)$$

где $S(\tau) = A(\tau)(C+Y(\tau))+(C+Y(\tau))B(\tau)+(C+Y(\tau))Q(\tau)(C+Y(\tau))+F(\tau, C+Y(\tau))$, Φ — линейный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$.

Получены конструктивные условия типа [3, гл. III] однозначной разрешимости задачи (4), (5).

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. № 5. С. 25-–30.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. *Конструктивный анализ и структурные свойства решений периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова –– Риккати (двусторонняя регуляризация).* Могилев: Белорус.–Рос. ун-т, 2013. 55 с. (Препринт/ ИТМ НАН Беларуси, № 33).

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. 300 с.

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

И.И. Маковецкий

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
i_makz@mail.ru

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X) + rG(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad (1)$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \ \|X\| < \tilde\rho\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$. Предполагаем, что функции $F(t,X), G(t,X)$ удовлетворяют в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$, $G(t,0) \not\equiv 0$, $r \in \mathbb{R}$.

На основе применения метода [1, гл. III] будем исследовать разрешимость двухточечной краевой задачи для (1) с условием

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \qquad (2)$$

где M, N — заданные вещественные $(n\times n)$-матрицы.

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : t\in I, \ \|X\| \leqslant \rho\}, \quad \mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|,$$

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \varepsilon = |r|, \quad P = N^{-1}M, \quad Q = -V(\omega), \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|,$$

$$m = \max\{\|P\|, \|Q\|\}, \quad h_1 = \max_t \|F(t,0)\|, \quad h_2 = \max_t \|G(t,0)\|,$$

$$q = \gamma\mu m\omega(\alpha + L_1 + \varepsilon L_2), \quad p = \gamma\mu m\omega(h_1 + \varepsilon h_2), \quad \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in I$, $0 < \rho < \tilde\rho$, $\mu = \mu_1\mu_2$, Φ — линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $L_1 = L_1(\rho) > 0$, $L_2 = L_2(\rho) > 0$ — постоянные Липшица для матриц $F(t,X), G(t,X)$

соответственно, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц, $\mathbb{C} = \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ — банахово пространство непрерывных $(n\times n)$-матричных функций.

Теорема *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det N \neq 0$;
2) *матрицы* P, Q *не имеют общих характеристических чисел*;
3) $q < 1$;
4) $p/(1-q) \leqslant \rho$.

Тогда в области D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением типа* [2, гл. 1] *и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{p}{1-q}.$$

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

О ПОИСКЕ ТОЧНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В.И. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
vmironenko@tut.by

Рассматривается дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми 2ω-периодическими коэффициентами.

Теорема. *Пусть существует число* x_o *и дважды непрерывно дифференцируемая нечетная функция* $2\alpha(t)$, *для которых при некотором решении* $m(t)$, $n(t)$, $p(t)$ *дифференциальной системы*

$$\dot{m} + an - bm = 0, \quad \dot{n} + 2ap - 2cm = 0, \quad \dot{p} - cn + bp = 0$$

выполнено тождество

$$(a - \alpha m) + (b - \alpha n)x_0 + (c - \alpha p) \equiv 0.$$

Тогда продолжимое на $[-\omega, \omega]$ *решение* $x(t)$, $x(\omega) = x_0$, *рассматриваемого дифференциального уравнения Риккати является* 2ω*-периодическим. Более того, функции* $m(t)$, $n(t)$, $p(t)$ *определяются формулами*

$$p = \frac{1}{2A}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{\alpha}\right) - \frac{b+2cx_0}{\alpha}\right] + \frac{c}{\alpha},$$

$$n - 2px_0 + \frac{2cx_0 + b}{\alpha} - \frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{\alpha}\right), \quad m = -nx_0 - px_0^2 + \frac{A}{\alpha},$$

где $A := a + bx_0 + x_0^2$.

Доказательство основано на том, что прибавление к правой части дифференциального уравнения Риккати слагаемого $\alpha(t)(m + nx_0 + px_0^2)$ не меняет отражающую функцию [1] этого уравнения. А поскольку при таком прибавлении мы получаем новое уравнение Риккати с известным постоянным решением $x(t) \equiv x_0$, то мы найдем начальные данные всех 2ω-периодических решений исходного уравнения.

Функция $\alpha(t)$ находится из того условия, что отношение $A(t)/\alpha(t)$ доопределяется до непрерывной на **R** функции. Так, например, для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = e^{\sin t} \sin t + x \cos t + x^2 e^{-\sin t} \sin t$$

число $x_0 = 0$, $n = 0$, $m = e^{\sin t}$, $p = e^{-\sin t}$.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

С.В. Подолян

Могилевский государственный технологический университет, Могилев, Беларусь
mti@mogilev.by

Рассматривается задача о периодических решениях с периодом ω уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 A(t)X + \lambda X B(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t), B(t), F(t)$ — действительные непрерывные ω–периодические матрицы подходящих размеров, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе, являющейся продолжением [1] и развитием [2, 3], на основе применения метода [4, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности ω-периодического решения уравнения (1), а также дан алгоритм его построения.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau)d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^2 + \gamma\alpha\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\beta\omega^2, \quad q(\varepsilon) = q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2,$$

где $t \in [0, \omega]$.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\det \tilde{B}(\omega) \neq 0$, $0 < q(\varepsilon) < 1$. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение* $X = X(t,\lambda)$; *это решение представимо в виде*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \tag{2}$$

где матрицы $X_{k-1}(t)$ *определяются рекуррентым интегральным соотношением типа* [4, гл. II].

Литература

1. Лаптинский В. Н., Лапковский В. К., Подолян С. В. *К задаче о периодических решениях матричного уравнения Ляпунова с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. С. 58–59.

2. Лаптинский В. Н., Лапковский В. К., Подолян С. В. *Конструктивный анализ периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова.* Могилев: МГУП, 2004 (Препринт / ИПО НАН Беларуси; № 17). 35 с.

3. Лаптинский В. Н., Лапковский В. К., Подолян С. В. *О периодических решениях линейного матричного уравнения Ляпунова с параметром* // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. В. 2012. № 2(40). С. 4–11.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В.В. Пугин

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

Для уравнения [1]

$$\frac{dX}{dt} = A_0(t) + A_1(t)X + XA_2(t) + A_3(t)X^2 + XA_4(t)X + X^2A_5(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad (1)$$

рассматривается задача с условием

$$\int\limits_0^\omega P(\tau)X(\tau)d\tau = 0, \qquad (2)$$

где $P, A_i \in \mathbb{C}([0,\omega], \mathbb{R}^{n\times n})$ $(i=\overline{0,5})$, $\omega > 0$.

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X)\colon 0 \leqslant t \leqslant \omega, \quad \|X\| \leqslant \rho\}, \quad \tilde{P}(\omega) = \int\limits_0^\omega P(\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{P}^{-1}(\omega)\|,$$

$$\alpha_i = \max_t \|A_i(t)\|, \quad \mu = \max_t \|P(t)\|, \quad \varphi(\rho) = a_0\rho^2 + a_1\rho + a_2,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\rho > 0$, $a_0 = \gamma\mu\omega^2(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)/2$, $a_1 = \gamma\mu\omega^2(\alpha_1+\alpha_2)/2$, $a_2 = \gamma\mu\omega^2\alpha_0/2$.

В данной работе, являющейся продолжением [2], установлено, что при выполнении условий $\det \tilde{P}(\omega) \neq 0$, $\varphi(\rho) \leqslant \rho$, $d\varphi(\rho)/d\rho < 1$ задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ, а ее решение может быть получено как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций $\{X_k(t)\}_0^\infty$, определяемых рекуррентным интегральным соотношением типа [3, 4]

$$X_{k+1}(t) = \int\limits_0^\omega K(t,\tau)[A_0(\tau) + A_1(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)A_2(\tau) + A_3(\tau)X_k^2(\tau) +$$

$$+ X_k(\tau)A_4(\tau)X_k(\tau) + X_k^2(\tau)A_5(\tau)]d\tau, \quad k = 0,1,2,\ldots, \qquad (3)$$

где $X_0(t)$ — произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}([0,\omega],\mathbb{R}^{n\times n})$, такая, что $\|X_0(t)\| \leqslant \rho$,

$$K(t,\tau)=\begin{cases} \tilde{P}^{-1}(\omega)\int_0^t P(\tau)d\tau, & 0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant \omega,\\ -\tilde{P}^{-1}(\omega)\int_t^\omega P(\tau)d\tau, & 0\leqslant t<\tau\leqslant\omega. \end{cases}$$

Исследованы вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3); доказано, что функции $X_m(t), m=1,2,\ldots,$ удовлетворяют условию (2).

Литература

1. Захар-Иткин М. Х. *Об одном классе граничных задач, имеющем применения в теории многоволновых линий передач* // Успехи мат. наук. 1970. Т. XXV, вып. 5(155). С. 240–241.

2. Пугин В. В. *О функциональной задаче для обобщенного матричного уравнения Риккати* // XI Белорус. матем. конф.: тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 2. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 55.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

Д.В. Роголев

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
d-rogolev@tut.by

Рассмотрим краевую задачу [1, 2]

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)+\mathbf{X}\left(\mathbf{S}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{S}_2(t)\mathbf{Y}\right)+\mathbf{F}_1(t)+\lambda\mathbf{G}_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}=\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t)+\mathbf{Y}\left(\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\right)+\mathbf{F}_2(t)+\lambda\mathbf{G}_2(t), \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}(\omega),\quad \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}(\omega), \tag{3}$$

где $t\in[0,\omega]$, $\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$, $\mathbf{S}_i(t)$, $\mathbf{P}_i(t)$, $\mathbf{F}_i(t)$, $\mathbf{G}_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$; $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Примем следующие обозначения:

$$D=\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}): 0\leqslant t\leqslant\omega,\ \|\mathbf{X}\|\leqslant\rho_1,\ \|\mathbf{Y}\|\leqslant\rho_2\},\quad \tilde{\mathbf{B}}_i(\omega)=\int\limits_0^\omega \mathbf{B}_i(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{\gamma}_i=\|\tilde{\mathbf{B}}_i^{-1}(\omega)\|,\quad \alpha_i=\max_t\|\mathbf{A}_i(t)\|,\quad \beta_i=\max_t\|\mathbf{B}_i(t)\|,\quad \delta_i=\max_t\|\mathbf{S}_i(t)\|,$$

$$\mu_i=\max_t\|\mathbf{P}_i(t)\|,\quad \varepsilon=|\lambda|,\quad f_i=\max_t\|\mathbf{F}_i(t)\|,\quad g_i=\max_t\|\mathbf{G}_i(t)\|,$$

$$p_{11}=\tilde{\gamma}_1\left[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2+(\alpha_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega\right],$$

$$p_{12} = \tilde{\gamma}_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\beta_1\omega + 1\right), \quad p_{21} = \tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega + 1\right),$$

$$p_{22} = \tilde{\gamma}_2\left[\frac{1}{2}\beta_2(\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega^2 + (\alpha_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega\right],$$

где $t \in [0, \omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

На основе метода [3, гл. III] получена

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det \tilde{\mathbf{B}}_i(\omega) \neq 0 \quad (i = 1, 2)$,

2) $\tilde{\gamma}_1\{(\beta_1/2)[(\alpha_1 + \beta_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + f_1 + \varepsilon g_1]\omega^2 + [\alpha_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + f_1 + \varepsilon g_1]\omega\} \leqslant \rho_1$, $\tilde{\gamma}_2\{(\beta_2/2)[(\alpha_2 + \beta_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + f_2 + \varepsilon g_2]\omega^2 + [\alpha_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + f_2 + \varepsilon g_2]\omega\} \leqslant \rho_2$,

3) $p_{11} < 1$, $\det(\mathbf{E} - \mathbf{P}) > 0$,

где $\mathbf{E} = \mathrm{diag}\,(1, 1)$, $\mathbf{P} = (p_{ij})$.

Тогда задача (1)–(3) *однозначно разрешима в области* D.

Замечание. В настоящей работе задача (1)–(3) рассмотрена в случае квадратных матриц $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, типичном в задачах прикладного характера. Очевидно, здесь допустим случай, когда $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ с матричными коэффициентами соответствующих размеров.

Литература

1. Роголев Д. В. *Об одном методе построения решения периодической краевой задачи для системы матричных уравнений Риккати с параметром* // Междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания»: материалы конф., Могилев, 20–22 февраля 2013 г. Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2013. С. 170–172.

2. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. С. 62–63.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

ИЗОХРОННЫЕ НЕГЛОБАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ

А.Е. Руденок

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
roudenok@bsu.by

Вещественный гамильтониан $H(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^{n} h_i(x, y)$, где $h_i(x, y)$ — однородный многочлен степени i, называется изохронным, если изохронна особая точка $O(0, 0)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}H_y(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}H_x(x, y). \tag{1}$$

Теорема. *Гамильтониан*

$$H(x, y) = \left(y + x^2y + \sum_{i=2}^{n} a_ix^i)^2 + x^2(1 + y + x^2y + \sum_{i=2}^{n} a_ix^i\right)^2, \tag{2}$$

где a_i *— некоторые постоянные, является изохронным неглобальным.*

Доказательство. В полярных координатах гамильтониан (2) имеет вид

$$H(r,\varphi) = r^2((U(r,\varphi))^2 + (V(r,\varphi))^2), \tag{3}$$

а система (1) — вид

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}H_\varphi(r,\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}H_r(r,\varphi). \tag{4}$$

Преобразование

$$w = \varphi - \frac{i}{2}\ln\left(\frac{(1 - ir\cos\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)(U(r,\varphi) + iV(r,\varphi))}{(1 + ir\cos\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)(U(r,\varphi) - iV(r,\varphi))}\right),$$

где i — мнимая единица, переводит систему (4) в систему с совершенной изохронностью [1], т. е. гамильтониан (3) изохронный. Гамильтониан (3) неглобальный, так как его линия уровня $H = 1$ распадается на две непересекающиеся кривые, асимптотами которых яляется ось Ox.

Литература

1. Руденок А. Е. *Изохронность обратимых систем с однородными нелинейностями* // Вестн. Белоруского гос. ун-та. Сер. 1. 2013. № 2. С. 90–97.

ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНВАРИАНТНЫМИ ПРЯМЫМИ И КОНИКАМИ

А.П. Садовский, Т.В. Щеглова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by, shcheglovskaya@tut.by

Рассматривается система

$$\dot{x} = (1 + Gx)(y + Hx^2 + Dxy + Ry^2),$$
$$\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \tag{1}$$

где $A, B, C, D, G, H, K, L, M, N, R \in \mathbb{C}$.

Введем вектор $p = (A, B, C, D, G, H, K, L, M, N, R)$ и идеалы J_1 и J_2, где $J_1 = \langle 4a_5^2u^5w_1Av + w_1(a_2w_1uv + 2w)(a_2w_1^2u + a_2w_1Ruv + 2Rw) + 2a_5(-2w^2v + w_1^2uv \times (a_2u^2(-v^2 + (a_2 + 3B)u) - 2w) + w_1u(2u^2(a_2 + 3B) - v^2(2R + 3u))w) + 4a_5^2uv(2u^3w_1^2 - v^3w_1u(R + u) + 3u^3w_1Bv - v^2(w_1^2u + w)), -w_1 + Cu + (R + u)v, 8a_5^3u^6w_1^2Kv + (-a_2w_1 + 2a_5v)(4a_5^3u^4v^2w_1^2 + a_2w_1^4u(a_2w_1^2u + a_2w_1Ruv + 2Rw) + 2a_5w_1(a_2u^3w_1^3(-v^2 + (a_2 + 3B)u) + 2w^2Rv + a_2v^2w_1Ruw + 2w_1^2Ruvw) + 2a_5^2v(-2v^2w_1u(R + u)(w_1^2u + w) - 2v(w_1^2u + w)^2 + u^3w_1(w_1^2(a_2+6B)u+2(a_2+3B)w))), 4a_5^3u^2v^2(-2u^2+v^2)w_1^2+12a_5^2u^5w_1^2Lv+a_2w_1^2(2a_2u^2w_1^4 + 4w^2R+a_2u^2w_1^3Rv+2w_1^2u(4R+u)w+2a_2w_1Ruvw)+a_5\, w_1(a_2u^2w_1^3(4u^2(a_2+3B)-v^2(2R + 3u)) - 4w^2(3R+u)v - 8a_2w_1^2uvw + 4a_2w_1u(3u^2B + a_2(u-v)(u+v))w) + 4a_5^2v((-2u^2w_1^4 + w^2)v + v^2w_1u(-w_1^2u(R+u) + a_2w) + u^3w_1(a_2(w_1^2\, u - w) - 3Bw)), -a_2w_1^4u + 2a_5u^3w_1Mv + w_1^3(-2a_5 + a_2R)uv - 2a_5v^2Rw - 2w_1^2(a_5u^3(a_2+3B) - a_5v^2u(3R+2u) + Rw) + 2w_1v(a_5^2(u^3 - 2v^2u) + a_2Rw), -w_1R + Nu + a_5v, 4a_5^2u^3w_1Hv - (a_2w_1 + 2a_5v)(-w_1(a_2w_1^2u + a_2w_1Ruv + 2Rw) + 2\, a_5(-u^3w_1(a_2 + 3B) + v(w_1u(w_1 + (R + u)v) + w))), -a_2w_1^3u + 2a_5u^2w_1Dv - 2w_1Rw + 2a_5(-u^3w_1(a_2 + 3B) + v(w_1u(-w_1 + a_2v) + w)), -2w_1 + a_1u + a_2v, a_2 - 2R - u, 4a_3a_5u^2 - (a_2w_1 - 2a_5v)^2, -a_2w_1 + a_4u + 2a_5v, u^2w_1G - 2w_1^2u - w\rangle$,

$J_2 = \langle 6a_5^2u^2B(2R+u)(2a_5-2R^2-Ru)+w_1^2(2R+u)^2(-2a_5+R(2R+u))^2+2a_5^2(-2v^2\times \times(-2a_5+R(2R+u))^2-u^2(2R+u)(2R(2R+u)^2-a_5(8R+3u))), w_1u(-w_1^2(2R+u)^2(a_5- - R(2R+u))(2a_5-R(2R+u))+2a_5^2(4a_5^2v^2+(u^2+v^2)R(2R+u)^3-a_5(2R+u)(2v^2(3R+ + u)+u^2(4R+u))))-2a_5(2R+u)(2a_5-2R^2-Ru)(-w_1R+a_5v)w, 1+a_2a_5^2w_1GRtu(-2a_5+ + R(2R+u))v(-w_1R+a_5v)(2a_5^2v^2-w_1R(2R+u)^2v+a_5(2R+u)(-(u^2+v^2)R+2w_1v))\rangle.$

Положим $I_1 = (J_1+J_2)\bigcap\mathbb{C}[p]$.

Введем далее идеал $J_3 = \langle w, 4a_5^3v^2(u^2+v^2)+w_1^2R(2R+u)^2v(w_1+Rv)+6a_5u^2B(a_5(u^2+ + v^2)R-2a_5w_1v+w_1R(2R+u)v)+a_5w_1(2R+u)(u^2w_1R-2w_1^2v+2Ru(u^2-v^2+2Ru)v)+ + 2a_5^2(-2v^2w_1^2+R(-u^3v^2-2v^4(R+u)+u^4(2R+u))-w_1u(-v^2+2u(R+u))v), a_5^2(u^2+ + v^2)v+w_1^2R(2R+u)v-a_5w_1(-2u^2R+v(3w_1+uv)), 1+a_2a_5w_1GRtu(-2a_5+R(2R+ + u))v(-w_1R+a_5v)(a_5(u^2+v^2)R-2a_5w_1v+w_1R(2R+u)v)\rangle.$

Положим $I_3 = (J_1+J_3)\bigcap\mathbb{C}[p]$.

Теорема. *Пусть V — многообразие центра системы* (1). *Имеет место включение* $\mathbb{V}(I_1)\bigcup\mathbb{V}(I_2)\subset V$.

При $p\in\mathbb{V}(I_1)\bigcup\mathbb{V}(I_2)$ система (1) имеет инвариантную конику $f=0$, где

$$f = 1+\frac{2w_1-2Rv-uv}{u}x+\frac{(2a_5v-2w_1R-w_1u)^2}{4a_5u^2}x^2+$$
$$+(2R+u)y+\frac{2w_1R+w_1u-2a_5v}{u}xy+a_5y^2.$$

В обоих случаях центра существует интегрирующий множитель Дарбу $\mu = f^{s_1}(1+ + Gx)^{s_2}$, где $s_1, s_2\in\mathbb{C}$.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ТРЕНИЯ

И.Н. Сидоренко

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь

sidorenkoin@tut.by

Рассматривается система Льенара

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y, \tag{1}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — полиномы соответственно степени n, m, $g'(0)>0$. Цикличность фокуса или центра $O(0,0)$ системы (1) эффективно находится с помощью анализа фокусных величин [1]. При $n=3$, $m=3$ она равна четырем. Если хотя бы одна из особых точек такой системы — антиседло, то возможны следующие комбинации особых точек: $2S+A$, $2A+S$, A. Здесь через $2A$ обозначено два антиседла, S — одно седло.

Система (1) с конфигурациями особых точек $2S+A$, A была исследована в [3], было показано, что в этом случае система может имеет не менее 4 предельных циклов «нормального размера».

Если система (1) имеет конфигурацию особых точек $2A+S$, то она может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dx}=x(1-(1+L)x+Lx^2)-\varepsilon(a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3)y. \tag{2}$$

Определение. Пусть система Льенара (2) имеет антиседло $A(x_0, 0)$. Обозначим, через ξ_1 (ξ_2) абсциссу ближайшей слева (справа) к точке A особой точки. Если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1 = -\infty$ $(\xi_2 = +\infty)$. Системой прогноза вокруг особой точки $A(x_0, 0)$ для системы Льенара (2) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), \quad G(\eta) = G(\mu), \tag{3}$$

где $F(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} f(x)\,dx$, $G(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} g(x)\,dx$, $\xi_1 < \eta < x_0$, $x_0 < \mu < \xi_2$.

Исследуем различные распределения предельных циклов системы (2) $2A + S$ с помощью системы прогноза.

Теорема. *При* $L = 1/2$, $a_4 = 1$ *система* (2) *имеет антиседла* $A(-2, 0)$, $E(1, 0)$ *и седло* $O(0, 0)$. *Выполняются следующие утверждения:*

1) *Все решения соответствующей системы прогноза* (3) *для системы Льенара* (2) *типа* $((k_2, k_3), k_1)$ *удовлетворяют неравенству* $k_1 + k_2 + k_3 \leqslant 4$;

2) *Система прогноза* (3) *для рассматриваемой системы Льенара* (2) *может иметь решения следующих типов:* $((0, 4), 0)$, $((4, 0), 0)$, $((0, 0), 4)$, $((1, 1), 2)$, $((2, 2), 0)$;

3) *В каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа* $((k_2, k_3), k_1)$, *существует подмножество, в котором система Льенара* (2) *при* $\varepsilon = 0,01$ *имеет такое же распределение* $((k_2, k_3), k_1)$ *предельных циклов*;

4) *Если* $k_2 = 0$ $(k_3 = 0)$, *то система Льенара* (2) *не имеет предельных циклов, окружающих особую точку* $A(-2, 0)$ $(E(1, 0))$;

5) *Система* (2) *может иметь* 5 *предельных циклов в распределении* $((1, 0), 4)$, $((0, 1), 4)$.

Полученный результат согласуется с результатом, полученном в [2], о том, что максимальное число предельных циклов системы (1) при $n = 3$, $m = 3$ не меньше 5.

Литература

1. Christopher C. J., Lunch S. *Small-amplitude limit cycles bifurcation for Lienard systems with quadraric or cubic dambing or restoring forces* // Nonlineariry. 1999. Vol. 12. P. 1099–1112.

2. Yang J., Han M., Romanovski V. G. *Limit cycle bifurcations of some Lienard systems* // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 366. P. 242–255.

3. Сидоренко И. Н., Черкас Л. А. *Предельные циклы «нормального размера» некоторых классов полиномиальных систем Льенара* // Весн. Магілеўскага дзярж. ун-та ім. А. А. Куляшова. 2007. Т. 26, № 1. С. 163–170.

4. Сидоренко И. Н., Черкас Л. А. *Предельные циклы кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 217–221.

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ

В.Л. Титов

Могилевский государственный технологический университет, Могилев, Беларусь
tttiiittt5@rambler.ru

Рассматривается задача типа [1]

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x)x + f_0(t) + \lambda f_1(t), \tag{1}$$

$$x(0, \lambda) = x(\omega, \lambda), \tag{2}$$

где $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{C}(D, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ $(i = 0,1)$ матрица-функция $A(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x (локально) в области $D = \{(t,x) : t \in I, \|x\| < \delta\}$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \delta \leqslant \infty$, λ — скалярный вещественный параметр.

В данной работе, являющейся продолжением [1] и развитием [2], задача (1), (2) исследуется с помощью метода [3, гл. III].

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,x) : t \in I,\ \|x\| \leqslant \rho\}, \quad \alpha = \max_t \|A(t,0)\|, \quad B(\omega,0) = \int_0^\omega A(\tau,0)d\tau, \quad \gamma = \|B^{-1}(\omega,0)\|,$$

$$h_i = \max_t \|f_i(t)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \varphi(\rho,\varepsilon) = a_0\rho^2 + a_1\rho + a_2, \quad q(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2 + \gamma K\omega\rho(\alpha\omega + 2),$$

$$a_0 = \gamma K\omega\left(\frac{1}{2}\alpha\omega + 1\right), \quad a_1 = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2, \quad a_2 = \gamma\omega(h_0 + \varepsilon h_1)\left(\frac{1}{2}\alpha\omega + 1\right),$$

где $0 < \rho < \delta$, $t \in I$, $K = K(\rho)$ — постоянная Липшица для $A(t,x)$ в D_ρ.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\det B(\omega,0) \neq 0$, $\varphi(\rho,\varepsilon) \leqslant \rho$, $q < 1$. *Тогда в области* D_ρ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима; ее решение может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности функций* $\{x_k(t)\}_0^\infty$, *определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2).

Вычислительная схема соответствующего алгоритма в дифференциальной форме дается соотношением

$$\frac{dx_{k+2}}{dt} = A(t,x_k)x_{k+1} + f_0(t) + \lambda f_1(t), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $x_0 = 0$, $x_1 = -B^{-1}(\omega,0)\int_0^\omega [f_0(\tau) + \lambda f_1(\tau)]\,d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости последовательности $\{x_k(t)\}_0^\infty$.

Литература

1. Титов В. Л. *О разрешимости периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных систем с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. С. 67.

2. Лаптинский В. Н., Титов В. Л. *К теории периодических решений полулинейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1036–1045.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

О СОСТОЯНИЯХ РАВНОВЕСИЯ ПРОЕКТИВНО ОСОБОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ЭКВАТОРЕ СФЕРЫ ПУАНКАРЕ

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, Россия

stvb2006@rambler.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, $a_{rs}, b_{rs} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(P,Q) = 1$, $|P_n(x,y)| + |Q_n(x,y)| \not\equiv 0$.

Если для системы (1) выполняется условие

$$Q_n(x,y) \equiv y\varphi_{n-1}(x,y), \quad P_n(x,y) \equiv x\varphi_{n-1}(x,y), \tag{2}$$

где $\varphi_{n-1}(x,y)$ — однородный многочлен степени $n-1$, то система (1) называется проективно особой системой по терминологии [1], а по [2] — системой с вырожденной бесконечностью. Будем говорить, что система (1) имеет инвариантное множество M_A^r, если состоянию равновесия A этой системы инцидентны r инвариантных прямых, где $r \leqslant n$.

Теорема 1. *Если система* (1) *является проективно особой и имеет инвариантное множество* M_A^n, *то она посредством афинного преобразования переменных* x *и* y *может быть приведена к системе:*

$$dx/dt = x[Q_{n-1}(x,y) + P_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}],$$
$$dy/dt = y[Q_{n-1}(x,y) + Q_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}], \tag{3}$$

где $Q_i(x,y)$ *— однородные многочлены степени* i $(i = \overline{1, n-1})$, $P_{n-2}(x,y)$ *— однородный многочлен степени* $n-2$, *причем* $P_{n-2}(x,y) \not\equiv Q_{n-2}(x,y)$.

Теорема 2. *Пусть* M_O^n *и* M_N^n *— инвариантные множества проективно особой системы* (1), *не имеющей параллельных инвариантных прямых. Тогда эта система имеет не более одного состояния равновесия на экваторе сферы Пуанкаре.*

Следствие 1. *Проективно особая система* (1) *при* $n = 4$ *не имеет бесконечно удаленного состояния равновесия, если* $M_{K_1}^n$ *и* $M_{K_2}^n$ *— инвариантные множества этой системы, а на инвариантной прямой* K_1K_2 *расположено четыре состояния равновесия* (1).

Следствие 2. *Пусть проективно особая система* (1) *при* $n = 3$ *имеет два инвариантных множества* $M_{K_1}^3$ *и* $M_{K_2}^3$, *но не имеет параллельных инвариантных прямых. Тогда для наличия у этой системы бесконечно удаленного состояния равновесия необходимо отсутствие инвариантной прямой* $L \notin M_{K_1}^3 \cup M_{K_2}^3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках единого заказа наряда для Адыгейского госуниверситета.

Литература

1. Горбузов В. Н. *Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка.* arXiv:1401.1000. http://arxiv.org/pdf/1401.1000.pdf

2. Долов М. В. *О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью* // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2010. №8. С. 132–137.

СИСТЕМА С ПЛОСКО-ПОЛУРЕГУЛЯРНОЙ ФУНКЦИЕЙ СООТВЕТСТВИЯ

Д.Н. Чергинец

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
chirgin@tut.by

Система

$$\dot{x} = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{k+4} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k x y^{k+3} - x^2 y, \quad \dot{y} = \frac{-xy^2}{n+2} + x^2 y\left(B + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) + Cx^3, \tag{1}$$

а также условия монодромности ее начала координат

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{2n} = 0, \quad b_0 = b_1 = \cdots = b_n = 0, \quad a_{2n+1} > 0, \quad (n+2)B^2 - 4(n+1)C < 0$$

получены в работе [1]. Целью дальнейших исследований является получение условий на параметры системы (1), при выполнении которых положение равновесия $O(0,0)$ является центром. При $n = 0$ необходимые условия центра получены в [2]. Диаграмма Ньютона, построенная для системы (1) способом, указанным в [3], имеет ограниченное ребро с угловым коэффициентом $-\frac{n+1}{1}$, поэтому значение параметра $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существенно влияет на построение функции последования.

Построим асимптотическое представление функции последования, используя метод, указанный в работе [2]. Функция последования является композицией функций соответствия, которые для системы (1) имеют вид

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{k_{-2(n+1)}}{c^{2(n+1)}} + \cdots + \frac{k_{-1}}{c} + k_0 + \ln c + k_1 c + k_2 c^2 + \cdots + o(c^m)\right),$$

где $r(0) = c$, $k_{-2(n+1)} > 0$. Функции, имеющие такое представление, называются плоско-полурегулярными.

Асимптотическое разложение функции последования имеет вид

$$r(2\pi) = K_1 c + K_2 c^2 + K_3 c^3 + K_4 c^4 + K_5 c^5 + \ldots,$$

где

$$K_1 = \exp\left(\frac{2\pi B(n+2)^{3/2}}{(n+1)\sqrt{4C(n+1) - B^2(n+2)}}\right).$$

Пусть $B = 0$. Тогда $K_1 = 1$, $K_2 = K_4 = 0$. Второе условие центра получаем из коэффициента

$$K_3 = (8C^2 b_1 + c_2)\tilde{K}_3, \quad \tilde{K}_3 \neq 0.$$

Теорема. *Для того чтобы начало координат системы* (1) *являлось центром, необходимо выполнение следующих двух условий*:

1) $B = 0$;
2) $8C^2 b_1 + c_2 = 0$.

Литература

1. Садовский А. П. *Условия возникновения проблемы центра и фокуса для A_3-системы* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 10. С. 1743–1753.

2. Чергинец Д. Н. *Проблема различения центра и фокуса для одного класса систем с ненулевыми кубическими членами* // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. Естественные науки. 2006. № 3. С.10–16.

3. Садовский А. П. *Проблема центра и фокуса для аналитических систем с нулевой линейной частью. I* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 790–799.

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

А.И. Астровский [1], **И.В. Гайшун** [2]

[1] Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
aastrov@tut.by
[2] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
gaishyn@mail.com

Предложен метод [1] построения канонических форм Фробениуса для линейных нестационарных систем управления и наблюдения, основанный на квазидифференцируемости [2] коэффициентов по специально построенной нижнетреугольной матрице. Такой подход позволяет существенно ослабить известные [3, 4] требования гладкости коэффициентов при формулировке признаков существования канонических форм. Вопросы наблюдаемости линейных нестационарных систем с квазидифференцируемыми коэффициентами, а также теория канонических форм систем наблюдения со скалярным выходом разработаны авторами в работах [5–9]. В докладе техника квазидифференцирования применяется к задачам управляемости [10] с целью получения новых условий существования канонических форм для систем управления. Для применения техники квазидифференцирования важно наличие нижнетреугольных матриц, относительно которых существует требуемое число квазипроизводных. Авторами разработан конструктивный метод нахождения таких матриц, использующий системы в нижней форме Хессенберга. В связи с этим указан критерий и способ приводимости системы управления к хессенберговой форме. Основные результаты, полученные в данной работе, конструктивны и выражены через параметры исходных систем управления. Приведены примеры, показывающие возможность построения канонических форм Фробениуса в тех случаях, когда классические результаты не применимы.

Литература

1. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений.* Мн.: Беларус. навука, 2013.

2. Дерр В. Я. *Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения* // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 1999. Вып. 1(16). С. 3–105.

3. Гайшун И. В. *Введение в теорию линейных нестационарных систем.* М.: Едиториал УРСС, 2004.

4. Silverman L. M., Meadows H. E. *Controllability and observability in time-variable linear systems* // SIAM J. Control. 1967. Vol. 5, no. 1. P. 64–73.

5. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1567–1576.

6. Астровский А. И. *Преобразование линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к каноническим формам Фробениуса* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 6. С. 16–21.

7. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Один способ построения канонических форм Фробениуса линейных нестационарных систем наблюдения* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1479–1487.

8. Астровский А. И., Гайшун И. В.*Квазидифференцируемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 3. С. 423–431.

9. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения с квазидифференцируемыми коэффициентами относительно различных групп преобразований* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 2. С. 254–263.

10. Астровский А. И., Гайшун И. В. *Управляемость линейных нестационарных систем со скалярным входом и с квазидифференцируемыми коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 8. С. 1047–1055.

ЗАДАЧА О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ВХОДОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В. К. Бойко, А. М. Кадан, О. А. Панасик

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
boiko@grsu.by, alexander.kadan@gmail.com, panasikolga@rambler.ru

Рассмотрим систему

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in T = [0, t_1], \quad t_1 > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = q, \quad q \in R^n. \tag{2}$$

Здесь A_0, A — постоянные $n \times n$-матрицы такие, что $\det(\lambda A_0 - A) \neq 0$ хотя бы при одном комплексном λ, т. е. пара матриц (A_0, A) — регулярная; B — постоянная $n \times r$-матрица; x — n-вектор фазовых переменных, u — r-вектор управления. В случае множество допустимых управлений может включать только достаточно гладкие функции согласованные с начальным условием (2).

Для задачи (1), (2) существуют различные постановки задач управления (нуль-управляемость, полная управляемость, управляемость в пространстве R^n, H-управляемость, H-относительная управляемость, см. [2–5] и др.).

Будем считать, что матрицы A_0 и A системы (1) зафиксированы, а матрицу B разрешается выбирать так, чтобы полученная система (1) стала управляемой в одном из перечисленных выше смыслов. При этом на матрицу B можно налагать определенные дополнительные условия, например, чтобы число ее столбцов было минимальным. Эту задачу для дифференциальных систем называют задачей о минимальном числе входов (управляющих воздействий) системы. Сохраним это название для нашей задачи.

Авторами построена библиотека матриц управления [5], проверка на которых критериев управляемости рассматриваемых систем позволяет отбирать матрицы управления с минимальным числом столбцов. Подобный алгоритм работает и для алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием по управлению.

Литература

1. Булатов В. И. *Об одном критерии существования решений регулярных систем управления* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2001. Т. 10. С. 33–35.

2. Марченко В. М. *О структуре дескрипторных систем* // Тр. Белорусского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. наук и инф. 2004. Вып. XII. С. 3–6.

3. Минюк С. А., Панасик О. А. *К теории управляемости линейных стационарных алгебро-дифференциальных систем* // Докл. НАН Беларуси. 2007. Т. 51, № 4. С. 13–18.

4. Панасик О. А. *К теории управляемости линейных алгебро- дифференциальных систем* // Вестник Гродненского гос. ун-та. 2009. Сер. 2. № 1(77). С. 14–20.

5. Бойко В. К., Кадан А. М. *Реализация алгоритма решения задачи о минимальном числе управляющих воздействий системы* // «Высокопроизводительные вычисления — математические модели и алгоритмы» : материалы II Междунар. конф., посвященной К. Якоби. Калининград : Изд-во БФУ им. И. Канта, 2013. С. 62–65.

О ПРИМЕНЕНИИ ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЗАШУМЛЕННЫХ ДАННЫХ

В.Т. Борухов, О.И. Костюкова, М.А. Курдина

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
borukhov@im.bas-net.by, kostyukova@im.bas-net.by, kurdina@im.bas-net.by

В настоящее время активно развиваются методы обработки сигналов, которые также могут найти применение при решении обратных задач математической физики. Мы устанавливаем связи между методами априорного синтеза и анализа [1] оптимальной обработки сигналов и методом обращения открытых динамических систем [2].

Метод априорного синтеза дает оценку $\tilde{x}$ искомого сигнала $(x \in \mathbb{R}^n)$ в виде

$$\tilde{x} = T\tilde{c}, \quad \text{где} \;\; \tilde{c} = \arg\min_{c} ||y - Tc||_2^2 + ||c||_\gamma^\gamma.$$

Здесь y — наблюдаемый зашумленный сигнал, $\|c\|_p$ — p-норма вектора c, T — линейный оператор синтеза. Метод априорного анализа дает оценку искомого сигнала в виде

$$\tilde{x} = \arg\min_{x} ||y - x||_2^2 + ||Fx||_p^p,$$

где F — линейный оператор.

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной динамической системой (ДС) вход — состояние — выход (в другой терминологии — открытой ДС)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} &\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_f]; \\ &x(t) = Cz(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $z(\cdot) = (z(t), t \in [t_0, t_f])$ — траектория динамической системы Σ, $u(\cdot) = (u(t), t \in \in [t_0, t_f])$ и $x(\cdot) = (x(t), t \in [t_0, t_f])$ — входной и выходной сигналы соответственно, $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $x \in \mathbb{R}^m$, A, B, C, D — матрицы соответствующих размерностей.

Оптимальное управление ДС Σ состоит в минимизации функционала качества

$$\mathcal{F}(z_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} f(y(s) - x(s))\, ds + R(u(\cdot)), \quad (z_0 := z(t_0)), \tag{2}$$

$$\mathcal{F}(z_0, u(\cdot)) \to \min_{z_0, u(\cdot)}, \tag{3}$$

где $y(\cdot) = (y(t), t \in [t_0, t_f])$, $y \in \mathbb{R}^m$, — заданная функция. Другим словами, необходимо найти пару $(z_0^0, u^0(\cdot))$ такую, что функционал (2) принимает минимальное значение с учетом условий (1).

В задаче оценки сигнала $x(\cdot)$ функция $y(\cdot)$ может быть интерпретирована как зашумленная реализация искомой функции $x(\cdot)$ т.е. $y(t) = x(t) + w(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, где $w(t)$ — ошибка измерений, которая рассматривается как случайная величина. В этом случае оценка $\tilde{x}(t)$ для сигнала $x(t)$ имеет вид $\tilde{x}(t) = Cz^0(t) + Du^0(t)$, где $z^0(\cdot) = (z^0(t), t \in [t_0, t_f])$ — траектория ДС Σ, соответствующая оптимальной паре $(z_0^0, u^0(\cdot))$. Таким образом задачу (1)–(3) можно рассматривать как обобщение подхода априорного синтеза. Применяя обратную ДС Σ^{-1}, получим обобщение метода априорного анализа.

Теорема. *Оценка $\tilde{x}(t)$ сигнала $x(t)$, полученная методом обобщенного априорного синтеза, совпадает с оценкой, полученной методом обобщенного априорного анализа.*

Литература

1. Karahanoglu F. I., Bayram I., Van De Ville D. *A signal processing approach to generalized 1-D total variation* // IEEE Transactions on Signal Processing. 2011. Vol. 59, no. 11. P. 5265–5274.

2. Борухов В. Т., Гайшун И. В., Тимошпольский В. И. *Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики.* Мн.: Бел. навука, 2009. 174 с.

ОБ ОДНОМ ОБОСНОВАНИИ ФОРМУЛЫ СТИРЛИНГА ДЛЯ Г-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

В.И. Булатов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
boulatov@bsu.by

На основании интегрального представления логарифмической производной Г-функции Эйлера [1]

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to+0}\big(\Gamma(b) - B(a;b)\big) = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)dx$$

для $a > 0$ показывается, что

$$\ln\Gamma(a+1) = C + \left(a + \frac{1}{2}\right)\ln a - a + r(a), \tag{1}$$

где

$$C = 1 - \int\limits_0^1 f(x)\,dx, \quad r(a) = \int\limits_0^1 x^{a-1} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln x - 2x + 2}{2(x-1)\ln^2 x}, \quad x \in]0;1[. \tag{3}$$

При этом в отличие от традиционного подхода в [1] вывод формулы (1) не требует ни знания интеграла Фруллани, ни вычисления интеграла Раабе.

Далее, учитывая, что $f(+0) = 0$ и $f(1-0) = 1/12$, получаем, что функция (3) является ограниченной т. е. $\exists M = \mathrm{const} \geqslant 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для $\forall x \in]0;1[$. Отсюда, во-первых, в силу (2) имеем $|r(a)| \leqslant M/a$ и, значит, $r(a) \to 0$ при $a \to +\infty$, и, во-вторых, из (1) получаем

$$\Gamma(a+1) \sim C_0\sqrt{a}\left(\frac{a}{e}\right)^a, \tag{4}$$

где $C_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Использование (4) для соответствующих $a \in \mathbb{N}$ в легко проверяемом для $n \in \mathbb{N}$ равенстве $4^n \cdot \Gamma(n+1/2)\Gamma(n+1) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)$, аналогичном формуле Лежандра, дает значение $C_0 = \sqrt{2\pi}$, что приводит при $a \to +\infty$ к классической асимптотической формуле Стирлинга

$$\Gamma(a+1) \sim \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a.$$

Литература

1. Финтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. II. М., 1982.

К ВОПРОСУ О ГЛОБАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Д. Бурак , А.А. Козлов

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
burakad@inbox.ru, kozlovaa@tut.by

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов. Замыкая систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U — некоторая ограниченная и измеримая $(m\times n)$-матрица, получим однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

матрицы коэффициентов которой также локально интегрируемы и интегрально ограничены. Известно, что в этом случае система (2) имеет конечные показатели Ляпунова [1, с. 245] $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU)$.

Задача о построении для системы (1) обратной связи $u = U(t)x$, которая обеспечивает выполнение равенств $\lambda_i(A+BU) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$ для произвольных заранее заданных вещественных чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, называется задачей глобального управления характеристическими показателями Ляпунова [2, с. 184]. Далее введем определение, необходимое в работе.

Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0; t_0+\sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in [t_0; t_0+\sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в нуль на этом отрезке.

В рамках такого подхода целым рядом авторов были получены различные условия управляемости характеристических показателей Ляпунова линейных нестационарных систем, бóльшую часть из которых монография [2]. Однако применение предложенного авторами монографии подхода даже в случае систем (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами может приводить к неограниченному росту нормы искомого управления U на положительной полуоси, что, исходя из постановки задачи, является недопустимым. В связи с этим возникла задача обобщения результатов, содержащихся в вышеуказанной монографии, на более широкий класс систем

(2), например, систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

А. А. Козловым в статье [3] на основании иного, чем у Е. К. Макарова и С. Н. Поповой, подхода была доказана глобальная управляемость показателей Ляпунова двумерных систем вида (2) с вышеуказанными коэффициентами в случае равномерной полной управляемости соответствующей системы (1), а позднее, в цикле работ [4, 5], им, совместно с А. Д. Бураком, эти результаты были распространены и на трехмерный случай систем (2).

Обобщая этот подход, авторами данной работы установлено следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $n = 4$, $m \in \{1, \ldots, 4\}$. *Если система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то показатели Ляпунова соответствующей замкнутой системы* (2) *глобально управляемы.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования (грант Министерства образования № 20130402.)

Литература

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966. 576 с.

2. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем* Мн.: Беларус. навука, 2012. 407 с.

3. Козлов А. А. *Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально-интегрируемыми коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 10. С. 1319–1335.

4. Козлов А. А., Бурак А. Д. *О существовании линейно-независимых направлений движения для равномерно вполне управляемой трехмерной линейной системы с локально интегрируемыми коэффициентами* // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. 2013. № 3(75). С. 29–45.

5. Козлов А. А., Бурак А. Д. *Об управлении характеристическими показателями линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами* // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. 2013. № 5(77). С. 11–31.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ В КЛАССЕ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Во Тхи Тань Ха

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
thanhhavothi229@gmail.com

Рассматривается линейная задача оптимального управления в реальном времени в классе многомерных импульсных управляющих воздействий:

$$c'x(t^*) \to \max;$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_*) = x_0; \quad x(t^*) \in X^*;$$

$$u(t) = \sum_{\vartheta \in T_h} \delta(t - \vartheta)v(\vartheta), \quad t \in T; \quad v(\vartheta) \in V, \quad \vartheta \in T_h.$$

Здесь $T = [t_*, t^*[$; $h = (t^* - t_*)/N$; $N > 1$ — натуральное число; $T_h = \{t_*, t_* + h, \ldots \ldots, t^* - h\}$; $\delta(t)$, $t \in T$, — δ-функция Дирака; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in T$, — кусочно-непрерывная функция; $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $t \in T$, — непрерывная функция; $c, x_0 \in \mathbb{R}^n$;

$V = \{v \in \mathbb{R}^r : v_* \leqslant v \leqslant v^*\}$; $X^* = \{x \in \mathbb{R}^n : g_* \leqslant Hx \leqslant g^*\}$; $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — постоянная матрица.

Вводятся понятия импульсного управляющего воздействия, программного и позиционного решений задачи. Основное внимание в докладе уделяется построению позиционного решения поставленной задачи.

Классические методы построения позиционных решений [1, 2] основаны на их представлении в аналитической и табличной формах. Эта работа проводится до начала процесса управления и наталкивается, как правило, на большую трудность, называемую «проклятие размерности». При этом в процессе управления никакие существенные вычисления не выполняются. В данном докладе описывается метод реализации позиционных решений с помощью принципа управления в реальном времени, при котором большая часть вычислений выполняется в процессе управления в режиме реального времени. Метод базируется на специальном (динамическом) аналоге двойственного метода [3] линейного программирования. С помощью него осуществляется коррекция в реальном времени основного элемента метода — опоры. Приводятся дополнительные приемы ускорения вычислений. Для стационарных динамических объектов управления ускорение достигается с помощью рекуррентных уравнений, распараллеливания вычислений и метода «разновесов».

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука. 1983. 392 с.

2. Беллман Р., Дрейфус С. *Прикладные задачи динамического программирования.* М.: Наука, 1965. 460 с.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. *Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи.* Мн.: Университетское. 1984. 214 с.

О ПОСТРОЕНИИ ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

М.Н. Гончарова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
m.gonchar@grsu.by

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор состояния объекта, u— n-мерный вектор управления, A — постоянная матрица. На управление наложено ограничение $u \in U$, где U есть компакт в n-мерном пространстве. Допустимым является управление $u(t)$, являющееся интегрируемой по Лебегу функцией на рассматриваемом интервале, принимающей значения из множества U. На состояние объекта в каждый момент времени наложено линейное фазовое ограничение

$$F(t) = \{x \in R^n \mid (c, x) \leqslant b, \quad c \neq 0\}. \tag{2}$$

Здесь через (c, x) обозначено скалярное произведение векторов c и x.

Исследуется задача оптимального быстродействия объекта (1) из заданного начального множества M_0 в конечное множество M_1, удовлетворяющих фазовому ограничению (2). Начальный момент времени t_0 считаем фиксированным, конечный момент времени t_1 определяем из условия попадания объекта на конечное множество.

Обозначим через $X(t)$ множество достижимости в момент времени t для задачи оптимального быстродействия, расматриваемой для системы (1) без фазового ограничения (2) и через $D(t) = X(t) \bigcap F$ — множество достижимости в момент времени t для задачи оптимального быстродействия, расматриваемой для системы (1) с фазовым ограничением (2).

Теорема. *Если* $D(t) = X(t)$, *то опорная функция*

$$c(D(t), \psi) = c(e^{(t-t_0)A} M_0, \psi) + \int\limits_{t_0}^{t} c(e^{(t-s)A} U, \psi)\, ds. \tag{3}$$

Если $D(t) \neq X(t)$, *то найдется такое неотрицательное чсло* λ, *что*

$$c(D(t), \psi) = c(X(t), \psi - \lambda c), \tag{4}$$

причем равенство (4) достигается в точке, принадлежащей границе множества F.

Идея доказательства. В первой части теоремы рассматривается ситуация, когда значения t достаточно малы, и множество достижимости, построенное для задачи без фазового ограничения полностью располагается внутри множества F. В этом случае формула (3) доказана, например, в [1].

При достаточно больших значениях t в множестве $X(t)$ найдутся точки, не принадлежащие множеству F. Тогда правило множителей Лагранжа и теорема Куна — Таккера (например, [2]) позволяют обосновать формулу (4).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.3.02»).

Литература

1. Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения.* М.: МАКС Пресс, 2007. 272 с.

2. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. 824 с.

ВНЕШНЯЯ ОЦЕНКА ПУЧКА РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

В.В. Горячкин, В.В. Крахотко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
krakhotko@bsu.by

Рассмотрим дискретную стационарную 2-D систему

$$x(t+1, s) = Ax(t, s+1) + Dx(t, s) + Bu(t, s) + Cv(t, s),$$
$$x(0, s) = \alpha(s), \quad (t, s) \in Z_+ \times Z, \tag{1}$$

с неопределенными постоянными матрицами A, D, B, C согласованных размерностей из интервалов: $|A - A_0| \leqslant \Delta A$, $|D - D_0| \leqslant \Delta D$, $|B - B_0| \leqslant \Delta B$, $|C - C_0| \leqslant \Delta C$, A_0, D_0, B_0, C_0, ΔA, ΔD, ΔB, ΔC — заданные матрицы, начальная функция $\alpha(s)$ выбирается из заданного интервала $|\alpha(s) - \alpha_0(s)| \leqslant \Delta\alpha(s)$, $s \in Z$, $x \in R^n$, $u \in R^r$; $Cv(t,s)$ $(v \in R^p)$ трактуется как интервальная помеха.

При фиксированном управлении в силу неопределенности параметров задачи (1), получаем пучок траекторий

$$x(t,s) = x(t,s,A,D,\alpha,u,v), \quad t \in Z_+, \quad s \in Z. \tag{2}$$

Сечением пучка траекторий на шаге $t = T$ будем называть множество $X(T,s,u)$ правых концов траекторий (2) системы (1).

Пусть $z(t,s)$ — решение невозмущенной системы

$$z(t+1,s) = A_0 z(t,s+1) + D_0 z(t,s) + B_0 u(t,s), \quad z(0,s) = \alpha_0(s), \quad (t,s) \in Z_+ \times Z,$$

которая задана на серединах интервалов. Такую систему будем называть центральной. Для представления решения интервальной и центральной систем воспользуемся известными конструкциями [1].

Следуя идеям работы [2], можно доказать теорему.

Теорема. *Для $\forall x \in X(T,s,u)$ из сечения пучка траекторий на шаге $t = T$ справедливо неравенство*

$$|x - z(t,s)| \leqslant G + M|w|, \tag{3}$$

где $G, \Delta M$ вычисляются по известным параметрам системы (1), *вектор w составлен из компонент векторов $u(t,s)$.*

Представление (3) дает описание параллелепипеда с ребрами параллельными координатным осям, в который «уложено» сечение пучка траекторий интервальной системы (1) на шаге $t = T$.

Литература

1. Гайшун И. В., Горячкин В. В. *Условия разрешимости и управляемости линейных двухпараметрических дискретных систем* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2047–2051.

2. Ащепков Л. Т., Бадан У. *Модели и методы повышения живучести управляемых систем.* Владивосток: Дальнаука, 2006. 158 с.

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

А.П. Жабко

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
zhabko@apmath.spbu.ru

При моделировании различных динамических процессов и явлений возникают системы дифференциально-разностных уравнений с отклоняющимся аргументом. Любая система автоматического регулирования в той или иной степени представляет собой систему запаздывающего или нейтрального типа. Одной из актуальных проблем теории систем автоматического регулирования является анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Основным методом анализа устойчивости нелинейных систем является прямой метод Ляпунова. Для систем с запаздывающим аргументом при его применении используются или функционалы Ляпунова — Красовского [1, 2] или функции Ляпунова и подход Б. С. Разумихина [2, 3].

В данной работе рассматриваются нелинейные системы с запаздывающим аргументом. Предлагается метод анализа устойчивости, основанный на совмещении подходов Н. Н. Красовского и Б. С. Разумихина. Конструктивный критерий исследования асимптотической устойчивости линейных систем [4] переносится на нелинейные системы.

В качестве примера рассматриваются однородные системы, для которых обобщаются предложенные в статье [1] метод построения функционалов Ляпунова — Красовского для линейных систем и в статье [4] критерий анализа асимптотической устойчивости линейных систем.

Предположим, что векторная функция $g(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ от векторных аргументов $z_0, z_1, \ldots, z_m$ является непрерывно дифференцируемой. Тогда верна

Теорема. *Нулевое решение системы $\dot{x}(t) = g(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m))$ асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда существуют положительно определенная и непрерывно дифференцируемая функция $w(x)$ и непрерывно дифференцируемый функционал $v(\varphi)(v(0) = 0)$, определенный на множестве кусочно непрерывных функций $\varphi \in PC([-\tau_m, 0])$, такие, что:*

1) $\dot{v}(x_t)|_{\dot{x}(t)=g(x(t),x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_m))} \leqslant -w(x(t))$;

2) $v(x_t) \geqslant v_1(c)$ *на множестве функций* $x_t \in S_c(t)$.

Здесь $S_c(t) = \{x_t : \|x(t+\sigma)\| \leqslant \|x(t)\| = c,\ \ \sigma \in [-\tau_m, 0]\}$, а функция $v_1(c)$ положительно определена и непрерывна в некоторой окрестности нуля.

Литература

1. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. *Lyapunov — Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay system* // IEEE Trans. Automatica. 2003. Vol. 39. P. 15–20.

2. Александров А. Ю., Жабко А. П. *Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием* // Сиб. матем. ж. 2012. Т. 53. № 3. С. 495–508.

3. Разумихин Б. С. *Об устойчивости систем с запаздыванием* // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512

4. Жабко А. П., Медведева И. В. *Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем* // Вестн. СПбГУ. 2011. Сер. 10, вып. 1. С. 9–20.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

Белорусский госцдарственный университет, Минск, Беларусь
{kalininai, lavrinovich}@bsu.by

В рамках математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем. Интерес к таким задачам вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых они распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

Доклад посвящен построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению следующей задачи оптимального управления:

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*,$$

$$\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*,$$

$$y(t^*) = 0, \quad z(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (y'M(t)y + \mu z'N(t)z + u'P(t)u)\,dt \to \min,$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y — n-вектор медленных переменных, z — m-вектор быстрых переменных, u — r-вектор управления, $M(t)$, $N(t)$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы, а $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Предполагается, что матрица $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Суть предлагаемого метода состоит в построении асимптотики множителей Лагранжа в виде разложений по целым степеням малого параметра. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными соответственно.

МЕТОД ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б.С. Калитин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Kalitine@bsu.by

В настоящем докладе представлены исследования задачи об устойчивости равновесия для почти периодических по времени (в смысле Бора) обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь D — открытая связная окрестность начала координат n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, $f(x,t)$ — непрерывная, почти периодическая по времени t функция, удовлетворяющая условию Липшица по x, причем $f(0,t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Доказаны теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости (локальной и глобальной) и неустойчивости с использованием не определенно положительных, а знакопостоянных функций Ляпунова. Установлено, что почти периодические системы, как подкласс обыкновенных неавтономных дифференциальных уравнений, допускают формулировки теорем второго метода, весьма близкие к тем, которые представлены для автономных систем в монографиях [1, 2]. В частности, теорема об устойчивости формулируется следующим образом.

Теорема. *Предположим, что для системы* (1) *существуют окрестность* U *точки* $x = 0$, *непрерывно дифференцируемая, почти периодическая по времени* t *функция* $V : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *такая, что для всех* $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$ *выполняются следующие условия:*

1) $V(x,t) \geqslant 0$ *и* $V(0,t) = 0$;

2) $\dot V(x,t) \leqslant 0$;

3) *множество* $Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}}$ *не содержит отрицательных полутраекторий уравнения* (1), *кроме точки* $x = 0$. *Тогда нулевое решение системы* (1) *устойчиво.*

В работе выяснены особенности взаимосвязи результатов об устойчивости в рамках метода функций Ляпунова в цепочке последовательных обобщений: автономные, почти периодические и неавтономные системы дифференциальных уравнений.

В заключение отметим, что так как для состояний равновесия почти периодических систем понятие равномерной устойчивости и устойчивости (в смысле Ляпунова) не совпадают точно так же, как и для неавтономных систем, то результаты исследований, представленные в докладе, дополняют утверждения работ [3, 4] для неавтономного случая.

Литература

1. Калитин Б. С. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.

2. Калитин Б. С. *Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений.* Мн.: БГУ, 2013.

3. Косов А. А. *О глобальной устойчивости неавтономных систем I.* // Изв. вузов. Математика. 1997. № 7. С. 28–35.

4. Калитин Б. С., Шабур Р. *Метод знакопостоянных функций Ляпунова для систем неавтономных дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. 2012. № 5. С. 28-–39.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МНОГОЛИСТНОЙ ДВУСТОРОННЕЙ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

А.М.Камачкин [1], В.Н.Шамберов [2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
akamachkin@mail.ru
[2] Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия
shamberov@mail.ru

Применение метода фазовой плоскости для исследования нелинейных систем второго порядка часто дает ощутимый выигрыш по сравнению с другими методами. Особенно эффективно метод продемонстрировал себя при наличии в системах кусочно-линейных неоднозначных нелинейностей [1]. В своей традиционной форме метод позволяет определять лишь свободные движения в системе, вызванные ненулевыми начальными условиями.

Однако нередко требуется аналитически подтвердить существование определенных движений в системах, находящихся под зависящим от времени управляющим или возмущающим воздействием [2], и не всегда исследуемую систему можно представить также в виде системы второго порядка.

Предлагается метод, основанный на: 1) декомпозиции пространства параметров [3] с целью представления исходной системы в виде составляющих ее систем более низких порядков; 2) исследовании этих систем с помощью многолистной двусторонней фазовой плоскости [4].

В качестве примера рассматриваются динамические системы вида

$$\dot x(t) = \mathbf{A} \cdot x(t) + \mathbf{b} \cdot \{N[y(t)] + \psi(t)\}, \quad y(t) = \langle \mathbf{c}, x(t)\rangle,$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — постоянные вещественные матрицы, соответственно $(n \times n)$, $(n \times 1)$ и $(1 \times n)$; $x(t)$, $\dot{x}(t)$ — n-мерные векторы переменных; $y(t)$ — скалярная переменная; $N[y(t)]$ — кусочно-линейная неоднозначная функция; $\psi(t) = \psi_m \sin(\omega t + \varphi)$ — внешнее воздействие на систему.

Пространство параметров системы определяется элементами матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, параметрами, характеризующими заданную нелинейность $N[y(t)]$, параметрами внешнего воздействия ψ_m, ω. Значение параметра внешнего воздействия φ из диапазона значений $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$ задает начальное значение любого движения в системе на многолистной двусторонней фазовой плоскости.

Литература

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* 2-е изд., доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 448 с.

2.*Нелинейные системы автоматического управления. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления: монография* / Под ред. Р. А. Нелепина; под общей ред. Е. П. Попова. М.: Машиностроение, 1971. 323 с.

3. Камачкин А. М., Шамберов В. Н. *Метод декомпозиции в многомерных нелинейных динамических системах* // Системный анализ и информационные технологии: Вестн. Воронежского гос. ун-та. 2012. №1. С. 47–55.

4. Камачкин А. М., Согонов С. А., Шамберов В. Н. *Анализ вынужденных колебательных процессов в многосвязных нелинейных системах метом декомпозиции пространства параметров* // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ–2013): Сб. тр. VI междунар. конф. 10–16 сентября 2013 г., Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2013. С. 112–115.

РАВНОМЕРНАЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ И ГЛОБАЛЬНАЯ СКАЛЯРИЗУЕМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ РАВНОМЕРНО ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Козлов, И.В. Инц

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
kozlovaa@tut.by

Рассмотрим двумерную линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m \in \{1, 2\}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными [1, с. 252] матрицами коэффициентов A и B. Выберем управление u в системе (1) по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U — некоторая ограниченная и измеримая $(m \times n)$-матрица. Тогда получим однородную систему, коэффициенты которой также локально интегрируемы и интегрально ограничены.

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

В работе будем считать, что система (1) обладает *свойством равномерной полной управляемости* [1, с. 95], т. е. существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

Определение 2 [1, с. 299]. Система (2) называется *равномерно стабилизируемой*, если для каждого $\alpha > 0$ найдется такое такое измеримое и ограниченное матричное управление $U = U(t)$, $t \geqslant 0$, размерности $m \times n$, что верхний показатель Боля $\overline{\beta}[x]$ [1, с. 62] всякого нетривиального решения $x_U = x_U(t)$ системы (2) этим управлением U удовлетворяет неравенству $\overline{\beta}[x] < -\alpha$.

Определение 3 [1, с. 326]. Будем говорить, что система (2) *глобально скляризуема*, если для произвольной наперед заданной локально интегрируемой и интегрально ограниченной на положительной полуоси скалярной функции $p = p(t)$, $t \geqslant 0$, существует такое измеримое и ограниченное матричное управление $U = U(t)$, $t \geqslant 0$, что система (2) с этим управлением *асимптотически эквивалентна* [1, с. 58] системе $\dot{z} = p(t)z$, $z \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$.

Теорема. *Если система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то:*

1) *верхний особый показатель П. Боля* [1, с. 61] *системы* (2) *пропорционально глобально управляем на множестве* $\{\mu \in \mathbb{R} : |\mu| \leqslant \mu_0\}$ *при каждом* $\mu_0 > 0$;

2) *система* (2) *равномерно стабилизируема;*

3) *система* (2) *глобально скаляризуема;*

4) *существует такое измеримое и ограниченное управление* $U = U(t)$, $t \in [0, +\infty)$, *что система* (2) *с этим управлением приводима к системе* $\dot{z} = 0$, $z \in \mathbb{R}^2$, $t \geqslant 0$;

5) *система* (2) *обладает свойством глобальной управляемости коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана* [1, с. 69]*;*

6) *система* (2) *обладает свойством глобальной управляемости правильности;*

7) *система* (2) *обладает свойством глобальной управляемости приводимости.*

Работа выполнялась в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (№ Ф13М–055).

Литература

1. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Мн.: Беларус. навука, 2012. 407 с.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
krakhotko,razmysl@bsu.by

Впервые четкую постановку проблемы управляемости и ее решение для линейных стационарных систем (непрерывных и дискретных) дал Р. Калман в 1960 г.

Этот результат был обобщен и перенесен на различные классы обыкновенных систем, в первую очередь, непрерывных. Наряду с управляемостью рассматривалась и проблема наблюдаемости.

Но математика, сделав спираль по непрерывным системам, возвратилась к тому, с чего начала — к дискретным системам, так как современные прикладные проблемы требуют разработки именно теории дискретных систем.

В настоящее время возрос интерес к сингулярным дискретным системам, которые часто встречаются на практике (экономика, теория электрических цепей и т.д.), т. е. к системам вида

$$A_0x(t+1) = A_1x(t) + A_2x(t-h) + B_1u(t) + B_2u(t-h), \quad y = Cx(t), \quad t \in N_0, \qquad (1)$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^r$, $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2, C$ — постоянные матрицы соответствующих размеров, h $(h \geqslant 1)$ — натуральное число (запаздывание).

В докладе для системы (1) ставится задачи различных видов управляемости и наблюдаемости, приводятся результаты полученные собственно авторами [1–9], а также указываются направления и задачи дальнейших исследований этой и других более сложных сингулярных дискретных систем.

Литература

1. Габасов Р. Ф., Кирилова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А. *Теория управляемости линейных систем. I. Определяющее уравнение* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 767–773.

2. Габасов Р. Ф., Кирилова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А. *Теория управляемости линейных систем. II. Обыкновенные системы* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 6. С. 1081–1091.

3. Габасов Р. Ф., Кирилова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А. *Теория управляемости линейных систем. III. Системы с последействием* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 7. С. 1283–1291.

4. Размыслович Г. П. *Управляемость каузальных линейных дескрипторных дискретных систем с запаздыванием* // Вестн. БГУ. 1996. Сер. 1. № 2. С. 72–74.

5. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *Управляемость каузальных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием* // Изв. Ин-та математики и информатики. 2006. Вып. 3(37). Ижевск. С. 75–76.

6. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *К управляемости дискретных систем с запаздыванием по управлению.* // Тез. докл. Междунар. конф. «АМАДЕ». 11–14 сентября 2009 г. Минск. С. 91–92.

7. Игнатенко В. В. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *H-управляемость линейных дескрипторных дискретных систем с запаздыванием по управлению* // Материалы Междунар. научно-технической конф. «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов». 28–29 сентября 2009 г. БГТУ, Минск. С. 319–320.

8. Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *Некоторые задачи наблюдаемости дискретных динамических систем.* // Тез. докл. Междунар. конф. «XI Белорусская математическая конференция». г. Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 2. С. 114–115.

9. Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П. *Управляемость дескрипторных линейных дискретных систем* // Тез. докл. Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация». Минск, 1–5 октября 2013 г. С. 135–136.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ДЕМПФИРОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОКРЕСТНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА

С.Е. Купцова

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
sekuptsova@yandex.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \tag{1}$$

относительно которой предположим, что она удовлетворяет всем условиям существования и единственности решения задачи Коши, а также имеет устойчивый предельный цикл вида $x^2 + y^2 = 1$. Наряду с системой (1) рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, y) + R_1(t) + b_1 u, \quad \dot{y} = g(x, y) + R_2(t) + b_2 u, \tag{2}$$

где b_1 и b_2 постоянные строчки размерности r, u — вектор управлений размерности r, функции $R_1(t)$ и $R_2(t)$ определены и непрерывны на множестве $t \geqslant 0$. Полагая

$\Phi(x,y)=(xf+yg)/(x^2+y^2)$ и $\omega(x,y)=(xg-yf)/(x^2+y^2)$, перепишем систему (2) полярных координатах:

$$\dot{\varrho}=\Psi(\varrho,\varphi)+R_1(t)\cos\varphi+R_2\sin\varphi+b_1u\cos\varphi+b_2u\sin\varphi,$$

$$\varrho\dot{\varphi}=\varrho\omega+R_2(t)\cos\varphi-R_1\sin\varphi+b_2u\cos\varphi-b_1u\sin\varphi,$$

где $\Psi(\varrho,\varphi)=\Phi(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)\varrho$. Относительно Ψ предположим, что $\Psi(0,\varphi)\equiv 0$, $\Psi(1,\varphi)\equiv 0$ и при каждом $\varrho\neq 0$ и $\varrho\neq 1$ функция $\Psi(\varrho,\varphi)$ равномерно отделена от нуля на множестве $\varphi\in[0,2\pi]$ некоторой константой, зависящей от ϱ, причем $\Psi<0$ при $\varrho>1$ и $\Psi>0$ при $0<\varrho<1$. При выполнении этих условий, система (1) будет иметь устойчивый предельный цикл.

Функция $V(\varrho)=(\varrho-1)/2$ определяет расстояние от точки на траектории, соответствующей переходному процессу до предельного цикла. Нам надо управлять системой так, чтобы это расстояние убывало наискорейшим образом. В качестве управлений будем брать кусочно непрерывные функции с ограничениями вида

$$|u_j|\leqslant 1,\quad j=1,\dots,r. \tag{3}$$

Из [1] известно, что при ограничениях (3) управления оптимальные по отношению к демпфированию функции V будут иметь вид

$$u_j^{(0)}=-\mathrm{sign}((\nabla V)^\top b^j),\quad j=1,\dots,r,$$

где b^j это j-й столбец матрицы $B=(b_1^\top,b_2^\top)^\top$. Положим

$$\overline{\Psi}=\overline{\Psi}(\varrho)=\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\Psi(\varrho,\varphi),\quad R(t)=\sqrt{R_1^2+R_2^2}.$$

Теорема 1. *Если у матрицы B найдутся такие линейно независимые столбцы b^i и b^j, что:*

$$R(t)\leqslant(\|(b^i,b^j)^{-1}\|)^{-1},$$

тогда любая траектория системы (1), *стартующая из точки, находящейся вне произвольной δ-окрестности множества $\varrho\leqslant 1$, в произвольный момент времени $t=t_0$, при выбранном законе управления, будет попадать в эту δ–окрестность множества $\varrho\leqslant 1$ за время $t\leqslant t_0+m^{-1}(r_0-(1+\delta))$, где $m=-\max\overline{\Psi}(r)$.*

Теперь предположим, что $\Psi(1,\varphi)=0$ при всех $\varphi\in[0,2\pi]$ и существует величина $\Delta>0$ такая, что $\Psi(\varrho,\varphi)\leqslant\Delta$ на множестве $\varrho\geqslant 1$ и $\Psi(\varrho,\varphi)\geqslant-\Delta$ на множестве $\varrho\leqslant 1$. В этом случае система (1) будет иметь инвариантное множество $\varrho=1$. Построим управление вида (3), которое будет оптимальным в смысле демпфирования функции $V(\varrho)=(\varrho-1)/2$ и будет переводить любое движение системы (2) в произвольно малую окрестность множества $\varrho=1$.

Теорема 2. *Если у матрицы B найдутся такие линейно независимые столбцы b^i и b^j, что:*

1) $\Delta<(\|(b^i,b^j)^{-1}\|)^{-1}$;

2) $R(t)\to 0$ *при* $t\to+\infty$,

тогда все траектории системы (2), *при выбранном законе управления, будут стремиться к множеству $\varrho=1$ при $t\to\infty$.*

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука, 1975.

РЕГУЛЯТОР ПОЛНОГО УСПОКОЕНИЯ И ОДНОВРЕМЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

А.В. Метельский, В.В. Карпук

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
ametelskii@gmail.com

Пусть объект управления описывается дифференциальной системой с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih) + bu(t), \quad t>0, \quad x(t)=\eta(t), \quad t\in[-mh,0]. \tag{1}$$

Здесь x — n-вектор-столбец решения системы (1) ($n \geqslant 2$); $0 < h$ — постоянное запаздывание; A_i — постоянные $n\times n$-матрицы ($i=\overline{0,m}$); b — постоянный n-вектор; η — начальное кусочно-непрерывное состояние; u — скалярное управление. Считаем, что в уравнении (1) $b = e_n = [0;\ldots;0;1]'$ (штрих $'$ обозначает операцию транспонирования).

Пусть $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m$ ($\lambda\in\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), $w(p,e^{-ph}) = |pE_n - A(e^{-ph})|$ — характеристический квазиполином ($p\in\mathbb{C}$) системы (1). Множество корней $\sigma = \{p\in\mathbb{C} \mid w(p,e^{-ph})=0\}$ характеристического уравнения называют спектром системы (1). Для разрешимости задачи назначения конечного спектра (FSA — finite spectrum assignment) в классе регуляторов с распределенными запаздываниями необходимо и достаточно чтобы

$$\operatorname{rank}[pE_n - A(e^{-ph}), b] = n \quad \forall p\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

Это условие, называемое условием спектральной управляемости, необходимо и достаточно также для полной управляемости системы (1). Поэтому возникает вопрос: нельзя ли одним регулятором обеспечить конечный спектр и асимптотическую устойчивость замкнутой системы и полное успокоение исходной системы: $x(t)\equiv 0$, $t\geqslant t_1$, где $t_1>0$ — некоторый момент времени — один и тот же для всех начальных состояний? Такой регулятор назовем FSC-регулятором (F=finite spectrum, S=stabilization, C=calming). В докладе предлагается алгоритм построения FSC-регулятора для спектрально управляемой системы (1).

Пусть $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ — полиномы, $q'(\lambda) = [q_1(\lambda),\ldots,q_{n+1}(\lambda)]$, $g'(\lambda) = [g_1(\lambda),\ldots\ldots,g_{n+1}(\lambda)]$ — векторные полиномы с действительными коэффициентами; $\hat{q}'_{ki}(\lambda) = [\hat{q}_{ki1}(\lambda),\ldots,\hat{q}_{ki,n+1}(\lambda)]$ — векторные полиномы, возможно, с комплексными коэффициентами ($k=\overline{1,L}$, $i=\overline{0,L_1}$, L, L_1 — натуральные числа); $P^* = \{p_k\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,L}\}$ — самосопряженный набор различных комплексных чисел, в частности, действительных; λ_D — оператор сдвига: $\lambda_D^i\varphi(t) = \varphi(t-ih)$ (φ — функция, $i=0,1,\ldots$). Рассмотрим динамический регулятор по типу обратной связи:

$$u(t) = -e'_n A(\lambda_D)x(t) + x_{n+1}(t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = q'(\lambda_D)\tilde{x}(t) + \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int_0^h \hat{q}'_{ki}(\lambda_D)\tilde{x}(t-s)e^{p_k s}\frac{s^i}{i!}ds + a_1(\lambda_D)y(t),$$

$$\dot{y}(t) = g'(\lambda_D)\tilde{x}(t) + a_2(\lambda_D)y(t), \quad t>0, \tag{3}$$

где $\tilde{x}(t) = [x_1(t),\ldots,x_{n+1}(t)]'$; $x_{n+1}(t), y(t)$ — вспомогательные переменные. Для отрицательных значений аргумента переменные $x_i(t)$, $i=\overline{1,n+1}$, $y(t)$, если они не заданы, считаем произвольными кусочно-непрерывными функциями. Параметры регулятора (3) выбираются такими, что после применения формулы Эйлера: $e^{p_k s} = e^{\alpha_k s}(\cos(\beta_k s) + \mathbf{i}\sin(\beta_k s))$, если $p_k = \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k$ ($\mathbf{i}$ — мнимая единица) и упрощения, все числовые коэффициенты регулятора (3) — действительные числа.

Теорема. *Условие спектральной управляемости* (2) *необходимо и достаточно для существования FSC-регулятора вида* (3) *для системы* (1).

ДИНАМИКА СЛОЕВ АНОРМАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ НА СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Д.И. Пирштук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
PirshtukDI@bsu.by

Основной целью работы является исследование анормальных экстремалей для субримановой задачи оптимального управления. В отличие от регулярных экстремалей, анормальные экстремали определяются условием Гоха и зависят только от неголономного распределения, на котором задана субриманова метрика [1, с. 303–305]. Таким образом, поведение анормальных экстремалей может быть использовано для исследования общих свойств неголономный распределений.

Основными результатами являются алгоритм описания сингулярных точек анормальных экстремалей на свободных нильпотентных группах Ли и исследование динамики слоев проекций кокасательного расслоения $T^*M \to M$ вдоль анормальных экстремалей для свободных градуированных нильпотентных алгебр Ли.

В [2] предложен способ восстановления по базису Холла свободной нильпотентной алгебры Ли $g = g_{m,r}$ семейства m векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_m$, порождающих алгебру Ли векторных полей, изоморфную $g_{m,r}$. В настоящей работе предполагается, что свободное распределение $D \subset TM$ порождено именно таким семейством векторных полей, причем $m = 2$.

В терминологии и обозначениях следуем работе [3]. Пусть u_i — квазиимпульсы, C — характеристика распределения D, а J — поднятие распределения D на $(D^2)^\perp \backslash (D^3)^\perp$ ([3]). Рассмотрим монотонную последовательность флагов $J^{(i)} = J^{(i-1)} + [C, J^{(i-1)}]$, $J^{(0)} = J$. Известно ([3]), что динамика этих флагов вдоль любой анормальной экстремали определяется кривой флагов, изотропных и коизотропных подпространств в симплектических линейных пространствах, а $\dim J^{(i)}(\lambda) - \dim J^{(i-1)}(\lambda) \leqslant 1$ и $\dim J^{(i)}(\lambda) \leqslant 2n - 4$.

В случае $r = 4$ характеристика C коллинеарна полю Эйлера $\sum_i u_i\, \partial/\partial u_i$, а, помимо D^3-аннигилятора, множество сингулярных точек (2-го порядка) задается является уравнением

$$p_1 := u_4^2 u_8 - 2u_4 u_5 u_7 + u_5^2 u_6 = 0. \tag{1}$$

В случае $r = 5$ множество первых сингулярных точек (7-го порядка) в последовательности $J^{(i)}$ состоит из множества, заданного уравнениями (1) и

$$p_2 := 3u_{10} u_4 u_5^2 - 3u_{11} u_4^2 u_5 + u_{12} u_4^3 + 2u_{13} u_4 u_5^2 - u_{14} u_4^2 u_5 - u_5^3 u_9 = 0.$$

Опишем p_1 и p_2 как результанты некоторых многочленов (см., например, [4]).

Утверждение. *Имеет место соотношение* $p_2 = -C(p_1)$. *Кроме того:*

1) p_1 *— результант многочленов* $u_4 x + u_5 y$ *и* $u_6 x^2 + 2u_7 xy + u_8 y^2$ *(с точки зрения классической теории инвариантов это единственный* $GL(2)$*-инвариант* $(2,1)$*-бисистемы)*;

2) p_2 — *результант* $u_9x^3 + (3u_{10} + 2u_{13})x^2y + (3u_{11} + u_{14})xy^2 + u_{12}y^3$.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае $r = 6$ для системы из 3 уравнений.

Таким образом, основным направлением продолжения исследования является проверка гипотезы о том, что при любом r все сингулярные точки описывается системой уравнений, каждое из которых является инвариантом некоторой бисистемы.

Литература

1. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления.* М.: Физматлит, 2005.
2. Grayson M., Grossman. R. *Models for Free Nilponent Lie Algerbras* // J. Algebra. 1988. Vol. 35. P. 177–191.
3. Doubrov B., Zelenko I. *On local geometry of nonholonomic rank 2 distributions* // Journal of London Mathematical Society. 2009. Vol. 80. Iss. 3. P. 545–566
4. Olver P. *Classical Invariant Theory.* London: Cambridge University Press, 1999.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА МАЛЫХ ПАРАМЕТРА

Н.А.Письменный

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
n.pismennyy@gmail.com

Рассматривается следущая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1). \tag{1}$$

Предполагается, что $f_1, f_2 : R^n \to R^n$, $\gamma_1, \gamma_2 : R^1 \times R^n \to R^n$, γ_1, γ_2 являются T-периодическими функциями по первой переменной, μ_1, μ_2 — малые положительные параметры. Функции $f_1, f_2, \gamma_1, \gamma_2$ имеют непрерывные производные по соответствующим пространственным переменным x_1, x_2.

При нулевых значениях параметров μ_1 и μ_2 система (1) распадается на два автономных уравнения:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i), \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

каждое из которых имеет $T-$ периодические решение $\varphi_i(t)$. Также предполагается, что 1 является простым собственным значением у операторов сдвига по траектории линеаризованных на φ_i уравнений (2).

Найдены условия устойчивости периодических решений системы (1).

СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Л.И. Родина

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
box0589@udmnet.ru

Предлагается новый подход к расширению понятия инвариантности, который исследовался в работах [1, 2]. Этот подход состоит в изучении статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

В данной работе предполагаем, что $u \in U$, U — компакт в $\mathbb{R}^m$, функция $f(t,x,u)$ непрерывна, функция $t \to f(t,x,u)$ почти периодическая в смысле Бора.

Определим верхнюю относительную частоту попадания траектории решения $\varphi(t)$ системы (1) в заданное множество $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\big\}$:

$$\mathrm{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Аналогично определим нижнюю относительную частоту $\mathrm{freq}_*(\varphi)$. Если $\mathrm{freq}^*(\varphi) = \mathrm{freq}_*(\varphi)$, то предел $\mathrm{freq}(\varphi) = \mathrm{freq}^*(\varphi) = \mathrm{freq}_*(\varphi)$ назовем *относительной частотой попадания решения* $\varphi(t)$ в множество $\mathfrak{M}$.

Пусть функция $t \to M(t)$, задающая множество $\mathfrak{M}$, почти периодическая и для каждого $t \in \mathbb{R}$ множество $M(t)$ выпукло, компактно и имеет непустую внутренность. Многозначная функция $t \to M(t)$ называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Theta(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{dist}(M(t+\tau), M(t)) \leqslant \varepsilon\}$ относительно плотно на $\mathbb{R}$ (здесь dist — расстояние по Хаусдорфу). Если функции $\varphi(t)$ и $M(t)$ почти периодические, то предел $\mathrm{freq}(\varphi)$ существует. Обозначим через $\partial M(t)$ границу, через $\mathrm{int}M(t)$ — внутренность множества $M(t)$.

Определение [1, 2]. Множество $\mathfrak{M}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для любой точки $x \in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ системы (1), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = x$ и равенству $\mathrm{freq}^*(\varphi) = 1$.

Теорема. *Пусть для любой точки* $x \in M(0)$ *найдется решение* $\varphi(t)$ *системы* (1), *удовлетворяющее условию* $\varphi(0) = x$ *и равенству* $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| = 0$, *где* $\widetilde{\varphi}(t)$ *— почти периодическое решение данной системы. Тогда выполнено неравенство* $\mathrm{freq}^*(\varphi) \leqslant \mathrm{freq}(\widetilde{\varphi})$. *Если, кроме того,*

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in \partial M(t)\}}{\vartheta} = 0,$$

то предел $\mathrm{freq}(\varphi)$ *существует и* $\mathrm{freq}(\varphi) = \mathrm{freq}(\widetilde{\varphi})$.

Следствие. *Пусть для любой точки* $x \in M(0)$ *существует решение* $\varphi(t)$ *системы* (1), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0) = x$ *и равенству* $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| = 0$, *где* $\widetilde{\varphi}(t)$ *— почти периодическое решение, такое что*

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in \mathrm{int}M(t)\}}{\vartheta} = 1.$$

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *статистически слабо инвариантно относительно системы* (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №12-01-00195).

Литература

1. Родина Л. И. *Пространство* $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 217–226.

2. Родина Л. И. *Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем* // Изв. вузов. Математика. 2013. Т. 11. С. 20–32.

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ФДУ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Р.К. Романовский, Е.М. Назарук

Омский государственный технический университет, Омск, Россия
elmarnaz@mail.ru

Работа примыкает к [1, 2]. Рассматривается задача Коши

$$\dot{x}(t) = \int_0^1 [d_s T(s,t)]x(t-s) \quad (t \geqslant 1), \quad x|_{[0,1]} = \varphi \in H^1[0,1]. \tag{1}$$

Здесь $T : [0,1] \times [1,\infty) \to \mathbb{C}^{N\times N}$, $\operatorname{Var}_s(T) < \infty$, $T \in C$ по t, $|T| \leqslant \text{const}$, $T(0,t) = 0$, $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}^N$. Обозначим $\mathcal{H}^1 = \{x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^N,\ x \in H^1_{\text{loc}}\}$.

Лемма 1. *Функции из* $\mathcal{H}^1$ *абсолютно непрерывны. Задача Коши* (1) *в классе* $\mathcal{H}^1$ *эквивалентна разностной задаче Коши*

$$u_n = \Lambda_n u_{n-1} \quad (n \geqslant 1), \quad u_0 = [\dot{\varphi}(\tau), \varphi(0)]^T, \quad \varphi \in H^1_0,$$

где

$$u_n = \begin{bmatrix} \dot{x}(\tau+n) \\ x(n) \end{bmatrix}, \quad \tau \in [0,1], \quad \Lambda_n = \begin{bmatrix} (I-A_n)^{-1}(\Gamma_n S - B_n) & (I-A_n)^{-1}\Gamma_n S \\ S & I_0 \end{bmatrix},$$

$$A_n = \int_0^\tau T(\tau-s,\tau+n) \bullet ds, \quad B_n = \int_\tau^1 [T(1,\tau+n) - T(1+\tau-s,\tau+n)] \bullet ds, \quad S = \int_0^1 \bullet ds,$$

$\Gamma_n = T(1,\tau+n)$, I, I_0 — единицы в $L_2[0,1]$, $\mathbb{C}^N$ соответственно.

Будем отождествлять $\varphi \in H^1[0,1]$ с вектором $u = [\dot{\varphi}, \varphi(0)]^\top$. Положим $\langle u, v\rangle = \int_0^1 \dot{\psi}^* \dot{\varphi}\, d\tau + \psi^*(0)\varphi(0)$, где $v = [\dot{\psi}, \psi(0)]^\top$.

Лемма 2. *Норма* $||u|| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ *топологически эквивалентна стандартной норме в* $H^1[0,1]$.

Введем класс J операторных матриц $V_n \in \operatorname{End} H^1[0,1]$, $n \geqslant 0$:

$$V_n = \begin{bmatrix} F_n & H_n S \\ S H_n^* & G_n \end{bmatrix}, \quad F_n\, H_n \in \operatorname{End} H^1[0,1], \quad G_n \in \mathbb{C}^N, \quad F_n^* = F_n, \quad G_n^* = G_n,$$

$$\varepsilon_1 \operatorname{diag}(I, I_0) \leqslant V_n \leqslant \varepsilon_2 \operatorname{diag}(I, I_0), \quad \varepsilon_i > 0.$$

Теорема. *Для того, чтобы решение* $x = 0$ *системы* (1) *было экспоненциально устойчивым в* H^1*-топологии:* $||u_n|| \leqslant \mu\, e^{-\nu(n-m)}||u_m||$ $(n \geqslant m,\ \mu, \nu > 0)$, *необходимо и достаточно существование матрицы* $V_n \in J$ *такой, что*

$$\Lambda_n^* V_n \Lambda_n - V_{n-1} \leqslant -\varepsilon \operatorname{diag}(I, I_0), \quad \varepsilon > 0.$$

Литература

1. Романовский Р. К., Назарук Е. М. // Докл. АН ВШ РФ. 2013. №2(21). С. 6–15.
2. Романовский Р. К., Назарук Е. М. // Матем. заметки. 2014. Т. 95. №1. С. 129–135.

ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Х. Хаммади

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
aliiraqmath@gmail.com

Изучаются статистические характеристики множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

которая порождена метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$ и функциями f и U.

Условие 1. Существует $\sigma \in \Sigma$, для которого выполнены следующие свойства:

1) для каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(t, x) \to U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа.

Пусть задано множество

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(h^t\sigma)\}.$$

Обозначим через $D(t, \sigma, X)$ множество достижимости системы (1) в момент времени t при заданном $\sigma \in \Sigma$ из начального множества X.

Определение 1 (см. [1]). Верхней относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (1) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется характеристика

$$\operatorname{freq}^*(\sigma, X) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Аналогично определяется нижняя относительная частота $\operatorname{freq}_*(\sigma, X)$.

Рассмотрим скалярную задачу Коши $\dot{z} = w(h^t\sigma, z)$, $z(0, \sigma) = z_0(\sigma)$, для которой выполнено условие единственности решения. Для заданного $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим характеристику

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] :\ z(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

аналогично определяется $\varkappa_*(\sigma)$. Обозначим через $V(\sigma, x)$ функцию Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и через $V^o_{\min}(\sigma, x)$ нижнюю производную функции $V(\sigma, x)$ в силу дифференциального включения, отвечающего системе (1) (определения приведены, в частности, в работе [1].)

Теорема. *Пусть для $\sigma \in \Sigma$ выполнено условие 1 и для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения системы (1), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ такие, что функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $M(\sigma)$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \geqslant w(\sigma, V(\sigma, x)).$$

Тогда, если $X \in \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ *и* $\min\limits_{x \in X} V(\sigma, x) \geqslant z_0(\sigma)$, *то имеют место неравенства*

$$\mathrm{freq}^*(\sigma, X) \leqslant \varkappa^*(\sigma), \quad \mathrm{freq}_*(\sigma, X) \leqslant \varkappa_*(\sigma).$$

Литература

1. Родина Л. И., Тонков Е. Л. *Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем* // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.

К ВОПРОСУ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В.Е. Хартовский

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by

Объект исследования — линейная автономная система нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - D(z)\dot{x}(t) = A(z)x(t) + B(z)u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $D(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$, $D(0) = 0$ ($\mathbb{R}^{k_1\times k_2}[s]$ — множество полиноминальных матриц размера $k_1 \times k_2$), $A(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$, $B(s) \in \mathbb{R}^{n\times r}[s]$, x — вектор решения, u — вектор управления, z — оператор сдвига.

Систему (1) замкнем регулятором вида

$$\varphi(z)u(t) = Q^1(z)\dot{x}(t) + R^1(z)x(t) + \Gamma f(t), \quad t \geqslant 0,$$
$$f(t) = \Omega \cdot zf(t) + Q^2(z)\dot{x}(t) + R^2(z)x(t), \quad t \geqslant 0,$$
$$f(t) \equiv 0, \quad t < 0, \tag{2}$$

где $Q^i(z), R^i(z)$, $i = 1, 2,$ — полиноминальные матрицы, $Q^i(0) = 0$, Γ, Ω — постоянные матрицы, $\varphi(z)$ — полином. Под замкнутой системой (1), (2) понимаем систему вида

$$\varphi(z)(E - D(z))\dot{x}(t) = \varphi(z)A(z)x(t) + B(z)(Q^1(z)\dot{x}(t) + R^1(z)x(t) + \Gamma f(t)). \tag{3}$$

В докладе приводятся условия существования и способ построения регулятора (2) такого, что:

1) при всех $t \geqslant t_0$ система (3) представима в виде

$$\varphi(z)(E - D(z))\dot{x}(t) = \varphi(z)A(z)x(t) + B(z)(Q^*(z)\dot{x}(t) + R^*(z)x(t)), \tag{4}$$

где $Q^*(z)$, $R^*(z)$ — полиноминальные матрицы, $Q^*(0) = 0$;

2) характеристический квазиполином замкнутой системы (1), (2) (т. е. системы (4)) является экспоненциально устойчивым, т. е. действительные части всех его корней меньше некоторого отрицательного числа.

Способ построения регулятора (2) основан на алгебраических операциях не предполагающих вычисление корней характеристического квазиполинома системы (1).

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В.Е. Хартовский, А.Т. Павловская

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by, pavlovskay_at@grsu.by

В докладе представлены результаты исследования проблемы модальной управляемости линейными автономными системами нейтрального типа посредством дифференциально-разностных регуляторов постоянной и динамической структур. Исследуется система вида

$$\dot{x}(t)-\sum_{i=1}^{m}D_i\dot{x}(t-ih)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-ih)+\sum_{i=0}^{m}B_iu(t-ih),\quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

где x — n-вектор-столбец решения уравнения (1), u — r-вектор-столбец кусочно-непрерывного управления, $0<h$ — постоянное запаздывние, $D_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i\in\mathbb{R}^{n\times r}$ — постоянные матрицы соответствующих размеров.

В случае системы (1) ее решение абсолютно-непрерывная функция. Поэтому для управления системой (1) предлагается использовать два класса регуляторов: регуляторы постоянной структуры

$$u(t)=\sum_{i=1}^{s}T_i\dot{x}(t-ih)+\sum_{i=0}^{s}R_ix(t-ih),\, t\geqslant t_0=(s-m)h, \tag{2}$$

и регуляторы динамической структуры

$$u(t)=\sum_{i=1}^{s}M_i\dot{x}(t-ih)+\sum_{i=0}^{s}N_ix(t-ih)+P\psi(t),\quad t\geqslant t_0,$$

$$\psi(t)=S\psi(t-h)+\sum_{i=1}^{s}\widehat{M}_i\dot{x}(t-ih)+\sum_{i=0}^{s}\widehat{N}_ix(t-ih),\quad t\geqslant t_0,\quad \psi(t)\equiv 0,\quad t<t_0, \tag{3}$$

где s — некоторое натуральное число, $T_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $R_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $M_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $N_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $\widehat{M}_i\in\mathbb{R}^{r_1\times n}$, $\widehat{N}_i\in\mathbb{R}^{r_1\times n}$, $P\in\mathbb{R}^{r\times r_1}$, $S\in\mathbb{R}^{r_1\times r_1}$. Под задачей модальной управляемости в классе регуляторов (2) ((3)) понимается задача построения регулятора вида (2) (вида (3)), обеспечивающего замкнутой системе наперед заданный характеристический квазиполином $\Delta(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}\lambda^ir_i(e^{-\lambda h})$, где $r_i(z)=\sum_{j=0}^{s_1}r_{i,j}z^j$, $i=\overline{0,n}$, $r_n(0)=1$. Уточним, что, невзирая на меняющуюся структуру входного воздействия в случае регулятора (3), замкнутая система будет иметь постоянную структуру. В работе получены необходимые и достаточные условия (не совпадающие между собой) разрешимости задачи модальной управляемости в классах регуляторов (2) и (3). Отличительной чертой регулятора (3) является возможность его реализации в случае нарушения условия $\operatorname{rank}[W(\lambda),B(e^{-\lambda h})]=n\ \forall\ \lambda\in\mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $W(\lambda)=\lambda(E_n-D(e^{-\lambda h}))-A(e^{-\lambda h})$, $D(z)=\sum_{i=1}^{m}D_iz^i$, $A(z)=\sum_{i=0}^{m}A_iz^i$, $B(z)=\sum_{i=0}^{m}B_iz^i$, что достаточно существенно расширяет спектр его использования.

Далее в докладе рассматривается вопрос обобщения указанных результатов на системы нейтрального типа с непрерывным (в общем случае не дифференцируемым) решением.

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ТИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО УСПОКОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

В.Е. Хартовский, О.И. Урбан

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
hartovskij@grsu.by, urban_ola@mail.ru

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0], \quad u(t) \equiv 0, \quad t < 0, \tag{2}$$

где x — n-вектор-столбец решения системы (1), u — r-вектор-столбец управления, A_i, B_i, $i = \overline{0,m}$, — постоянные матрицы соответствующих размеров, $h > 0$ — постоянное запаздывание, начальная функция η предполагается непрерывной на отрезке $[-mh, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Определим матрицы $G_0 = B_0 T$, $G_i = G_{i-1} S + B_i T$, $i = \overline{1,m}$, T, S — некоторые матрицы. Обозначим $A(z) = \sum_{i=0}^{m} A_i z^i$, $B(z) = \sum_{i=0}^{m} B_i z^i$, $G(z) = \sum_{i=0}^{m} G_i z^i$, где z — оператор сдвига, (т. е. $zf(t) = f(t-h)$).

Теорема. *Для того, чтобы для любого начального состояния* (2) *системы* (1), (2) *существовало управление* $u(t)$, $t > 0$, *обеспечивающее*

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1. \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rank}\,[\lambda E - A(e^{-\lambda h}), B(e^{-\lambda h}), G(e^{-\lambda h})] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

В работе строится регулятор вида

$$u(t) = K_1(z)x(t) + e_1 x_{n+1}(t) + T\psi(t), \quad \psi(t) = S \cdot z\psi(t) + K_2(z)x(t), \quad t \geqslant 0,$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F_1^1(z)x(t) + F_2^1(z)x_{n+1}(t) + F_3^1(z)y(t), \quad t \geqslant 0,$$
$$\dot{y}(t) = F_1^2(z)x(t) + F_2^2(z)x_{n+1}(t) + F_3^2(z)y(t), \quad t \geqslant 0,$$

обеспечивающий исходной системе (1), (2) выполнение условия (3). Здесь $\mathbb{R}^{k_1 \times k_2}[z]$ — пространство полиноминальных матриц размера $k_1 \times k_2$ элементами которых являются полиномы зависящие от z, тогда $K_1(z) \in \mathbb{R}^{r \times n}[z]$, $K_2(z) \in \mathbb{R}^{r_T \times n}[z]$, T, S — $(r \times r_T)$- и $(r_T \times r_T)$-матрицы соответственно, r_T — некоторое натуральное число, $e_1 = \operatorname{col}[1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{R}^r$, $F_1^1(z) \in \mathbb{R}^{1 \times n}[z]$, $F_2^1(z) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}[z]$, $F_3^1(z) \in \mathbb{R}^{1 \times s}[z]$, $F_1^2(z) \in \mathbb{R}^{s \times n}[z]$, $F_2^2(z) \in \mathbb{R}^{s \times 1}[z]$, $F_3^2(z) \in \mathbb{R}^{s \times s}[z]$, $y = \operatorname{col}[y_1, \ldots, y_s] \in \mathbb{R}^s$, $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ — дополнительные переменные. Для определенности будем считать, что $x(t) \equiv 0$, $t < -mh$, $x_{n+1}(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv 0$, $t < 0$.

Обратим внимание, что условие полной управляемости не является необходимым для существования указанного выше регулятора, обеспечивающего (3).

Далее в работе представленные результаты обобщаются на линейные автономные системы нейтрального типа с непрерывным решением вида:

$$\frac{d}{dt}(x(t)+\sum_{i=1}^{m}L_i x(t-ih))=\sum_{i=0}^{m}A_i x(t-ih)+\sum_{i=0}^{m}B_i u(t-ih),\quad t\geqslant 0, \tag{4}$$

где L_i, $i=\overline{1,m,}$, — постоянные матрицы соответствующего размера. В качестве начального условия системы (4) берется набор (2).

НЕЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ *F*-УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О.Б.Цехан

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
tsekhan@grsu.by

Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием в состоянии (ЛССВСЗ):

$$\dot{x}(t)=A_1x(t)+A_2y(t)+C_1x(t-h)+C_2y(t-h)+B_1u(t),\quad x\in\mathbb{R}^{n_1},\quad y\in\mathbb{R}^{n_2},\quad u\in\mathbb{R}^r,$$

$$\mu\dot{y}(t)=A_3x(t)+A_4y(t)+C_3x(t-h)+C_4y(t-h)+B_2u(t),\quad t\in T=[0,t_1],$$

$$\{x_0(\cdot,\mu),y_0(\cdot,\mu)\}=\{\varphi(\theta),\psi(\theta),\theta\in[-h,0)\},\quad \{x(0),y(0)\}=\{x_0,y_0\}. \tag{1}$$

Здесь A_i,C_i, $i=\overline{1,4}$, B_j, $j=\overline{1,2}$, — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $0<h$ — число, $u(t)$, $t\in T$, — r-вектор-функция управления, $u(\cdot)\in$ $\in U$ — множество кусочно-непрерывных на T r-вектор-функций, $\varphi(\theta),\psi(\theta)$ — кусочно-непрерывные начальные n_1- и n_2-вектор-функции соответственно, μ — параметр, $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0\ll 1$, $x_0\in\mathbb{R}^{n_1}$, $y_0\in\mathbb{R}^{n_2}$.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство, $L^2_m[t_1-h,t_1]$ — гильбертово пространство суммируемых на $[t_1-h,t_1]$ m-вектор-функций, $\mathcal{M}^2_m\triangleq L^2_m[t_1-h,t_1]\times\mathbb{R}^m$.

По параметрам системы (1) построим числовую матрицу

$$C=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix},$$

определим оператор

$$H=\begin{pmatrix}H^{11} & H^{22}\\ H^{31} & H^{42}\end{pmatrix},$$

где $H^{ij}:L^2_{n_i}\to L^2_{n_j}:$ $(H^{ij}\psi)(\theta)=C_i\psi(-\theta-h)\chi(\theta)$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,2}$, $\theta\in[-h,0]$, $\chi(\theta)$ — характеристическая функция интервала $[-h,0]$, а также полиномиальные матрицы $\tilde{P}(z)\in\mathbb{C}^{n\times rn}$, $\tilde{N}(\lambda,z)\in\mathbb{C}^{n\times(n+r)}$, $\tilde{L}(\lambda)\in\mathbb{C}^{n+c\times(n+c+r)}$, где $n=n_1+n_2$, $c=$ $=\operatorname{rank}C$. При фиксированном $\mu>0$ обозначим многообразие достижимых из нуля конечных состояний ЛССВСЗ (1): $\{X,Y\}(\mu)=\{\{x(t,\mu),y(t,\mu)\}$, $t\in(t_1-h,t_1)$, $\{x(t_1,\mu),y(t_1,\mu)\}$; $u(t)\in U\}$ и введем оператор стуктуры $F_\mu:\mathcal{M}^2_{n_1+n_2}\to\mathcal{M}^2_{n_1+n_2}$, $F_\mu=\operatorname{diag}\{M(\mu),M(\mu)H\}$, где $M(\mu)=\operatorname{diag}\{E_{n_1},\mu^{-1}E_{n_2}\}$.

Определение. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ назовем ЛССВСЗ (1) $F(\mu)\{x, y\}$-управляемой, если замыкание множества $F(\mu)\{X, Y\}(\mu)$, образованного при этом μ, совпадает с замыканием множества $\operatorname{Im} F(\mu)$.

Теорема. *Если выполнены условия:*

1) $\operatorname{rank} \tilde{P}(z) = n_1 + n_2$ *для некоторого комплексного* z;
2) $\operatorname{rank} \tilde{N}(\lambda, z) = n_1 + n_2 \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} : e^{\lambda h} = z, rank\tilde{P}(z) < n_1 + n_2$;
3) $\operatorname{rank} \tilde{L}(\lambda) = n_1 + n_2 + c$ *для некоторого комплексного* λ;

то ЛССВСЗ (1) $\{x, y\}$*-управляема в пространстве* $\mathcal{M}^2_{n_1+n_2}$ *для всех достаточно малых* $\mu > 0$.

Доказательство основано на применении к ЛССВСЗ метода пространства состояний [1], ранговых условий F-управляемости систем с запаздыванием [2] и анализе зависимости этих условий от малого параметра, выполненном аналогично [3].

Работа поддержана Министерством образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 гг. (шифр задания «Конвергенция 1.3.02»).

Литература

1. Kopeikina T. B. *Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems* // Systems Science. 1995. Vol. 21, no. 1. P. 17–36.

2. Manitius A.*F-Controllability and observability of linear retarded systems* // Applied Mathematics and Optimization. 1982. Vol. 9. P. 73–95.

3. Цехан О. Б. *О свойствах решений одной системы уравнений, зависящих от параметра* // Весн. Грродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. 2013. № 2(151). С. 51–60.

THEOREM ON EXISTENCE OF A UNIQUE SOLUTION WITH GIVEN PROPERTIES TO RELAY SYSTEM

V.V. Yevstafyeva

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
vica@apmath.spbu.ru

The problem on existence of forced periodic solutions in control systems containing discontinuous hysteresis nonlinearity is concerned. We study the n-dimensional system of ordinary differential equations with relay nonlinearity and external continuous influence. Systems of the considered class can be used as systems of the electric drive constructed with semi-conductor diodes and intended to regulate rotation frequency of a rotor with an asynchronous electric motor. It is also possible to use these systems when processes in electric chains of control systems with a nonideal relay and elements from ferromagnetic materials are described. We offer an approach for choosing coefficients (including feedback coefficients as well) of the system such that there exist the forced harmonic or subharmonic oscillatory modes with the certain configuration in phase space. This approach is based on general problems of nonlinear system dynamics stated by V. I. Zubov, methods of canonical transformation theory, and the method of sections for system parameter space suggested for autonomous systems by R. A. Nelepin. To investigate the system, we use exact analytical methods, namely, the method of images and the fixed point method. We stress that the approach allows to find analytically switching instants and switching points of the image point of the required solution from an auxiliary system of transcendental equations. The auxiliary system constructing and conditions of its solvability are given in [1]. This work develops the results obtained in [1].

We consider the problem related to the existence of continuous periodic solutions with two switching points fixed in phase space and the period multiple to the period of the function describing external influence. A switching point of a solution to the system in phase space is said to be a state of the system such that the nonlinear function takes one of its threshold numbers and changes an output number, i.e. the switch occurs in a relay. The main result of this research work is the following theorem. The proof of the theorem is found in [2].

Theorem. *Let the following conditions hold:*

1) *the external influence of the system is a T-periodic function containing the sum of two sine functions and a constant;*

2) *the virtual points of stability in phase space of the system lie out of the non-single-valued zone of the function describing hysteresis nonlinearity;*

3) *the initial system is reduced to the special canonical form by the nonsingular transformation if the system is completely controllable with respect to the nonlinearity and the eigenvalues of the system matrix are real, prime, and nonzero;*

4) *the coefficients of the real vector defining feedback in the canonical system are nonzero except for one, which is zero;*

5) *the switching instants and the switching points of the image point of the solution to the canonical system are the solutions to the auxiliary system of transcendental equations constructing of which is based on the assumption that there exists at least one periodic solution with two switching points and which parameters satisfy the conditions of its solvability.*

Then, for given $k \in \mathbb{N}$, there exists a unique kT-periodic solution to the initial system with two switching points belonging to the switching hyperplanes, where the switching points can be calculated with the inverce transformation.

Remark. The second switching instant equals the period T provided the image point begins its motion at $t = 0$.

References

1. Yevstafyeva V. V. *On Necessary Conditions for Existence of Periodic Solutions in a Dynamic System with Discontinuous Nonlinearity and an External Periodic Influence* // Ufa Math. J. 2011. Vol. 3, no. 2. P. 19–26.

2. Yevstafyeva V. V. *Existence of the Unique kT-periodic Solution for One Class of Nonlinear Systems* // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. 2013. Vol. 6, no. 1. P. 136–142.

POLE ASSIGNMENT IN DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS WITH INCOMPLETE STATE FEEDBACK

V.A. Zaitsev

Udmurt State University, Izhevsk, Russia
verba@udm.ru

Consider a dicrete-time linear control system

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C^*(t)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (x,u,y) \in \mathbb{K}^{n+m+k}, \qquad (1)$$

with a linear incomplete feedback $u(t) = U(t)y(t)$, where $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. By $X(t,s)$ denote the Cauchy matrix of unforced system $x(t+1) = A(t)x(t)$. System (1) is called *consistent on an interval* $[t_0, t_1)$ if for any $n \times n$-matrix $G \in M_n$ there exists a feedback gain $\widehat{U}(t)$, $t \in [t_0, t_1)$, that transfers the solution of the $n \times n$-matrix system

$$Z(t+1) = A(t)Z(t) + B(t)\widehat{U}(t)C^*(t)X(t,t_0), \quad t \in \mathbb{Z},$$

from the state $Z(t_0) = 0$ to the state $Z(t_1) = G$. Suppose that $(A(t), B(t), C(t)) \equiv \equiv (A, B, C)$ and $U(t) \equiv U$. Denote by $\chi(\lambda; U) = \det(\lambda I - A - BUC^*)$ the characteristic polynomial of the closed-loop system

$$x(t+1) = (A + BUC^*)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{2}$$

We say that the system (2) is *arbitrarily pole assignable* if for any monic polynomial $p(\lambda) = = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ with $\gamma_i \in \mathbb{K}$ there exists a $m \times k$-matrix gain U over the field $\mathbb{K}$ such that $\chi(\lambda; U) = p(\lambda)$.

Suppose that the coefficients of the system (2) have the following form:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \tag{3}$$

$$B = \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{is}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, k}; \tag{4}$$

$$b_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}; \quad c_{is} = 0, \quad i = \overline{p+1, n}, \quad s = \overline{1, k}; \quad p \in \{\overline{1, n}\}. \tag{5}$$

Theorem 1. *Let the coefficients of the system* (2) *have the form* (3), (4), (5). *Then the implications* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *hold for the following conditions.*

1. *System* (2) *is consistent.*
2. *The matrices* C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ *are linearly independent.*
3. *System* (2) *is arbitrarily pole assignable.*

Theorem 2. *Let the coefficients of the system* (2) *have the form* (3), (4), (5), *and* $\det A \neq 0$. *Then the implication* $2 \Longrightarrow 1$ *in Theorem* 1 *holds if at least one of the following conditions is satisfied:*

a) $\operatorname{rank} B = n$;
b) $\operatorname{rank} C = n$;
c) *all eigenvalues of matrix* A *are equal*;
d) $n < 6$.

The above results are similar to the corresponding results [1] for continuous-time systems.

Aknowledgement. The work is supported by RFBR (project no. 12–01–00195) and Ministry of Education and Science of Russia within the framework of the base part.

References

1. Zaitsev V. A. *Consistent Systems and Pole Assignment: I* // Differential Equations. 2012. Vol. 48, no. 1. P. 120–135.

СОДЕРЖАНИЕ

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Асимптотическая теория дифференциальных уравнений

Качественная теория дифференциальных уравнений

Теория устойчивости и управления движением

Научное издание

XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014)

Тезисы докладов

Часть 1

Редакторы *А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовский*

Подписано в печать 05.05.2014 г.
Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{8}$. Усл. печ. л. 13,43. Уч.-изд. л. 12,08. Тираж 107 экз. Зак. 4.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
200072, Минск, ул. Сурганова, 11.