ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

И. Е. Андрушкевич, А. А. Вакульчик

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

В порядке улучшения алгебраического метода разделения переменных [1] доказан ряд теорем, позволивших сопоставить системе уравнений Максвелла в нестационарных неоднородных сферически-симметричных средах с электродинамическими параметрами $\varepsilon = \varepsilon_r(r)\varepsilon_t(t)$, $\mu = \mu_r(r)\mu_t(t)$, $\sigma = 0$, $\rho = 0$ эквивалентную ей систему обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющую вид:

$$(\phi_2(\varphi))' = \phi_4(\varphi)\lambda_{\varphi,2}, \quad (\phi_4(\varphi))' = \phi_2(\varphi)\lambda_{\varphi,4}, \quad \lambda_{\varphi,2} = -\lambda_{\varphi,4} = n, \quad n = 0, \pm 1, \ldots; \tag{1}$$

$$(\varepsilon_t(t)\tau_2(t))' = \tau_5(t)\lambda_{t,2}, \quad (\mu_t(t)\tau_5(t))' = \tau_2(t)\lambda_{t,5}; \tag{2}$$

$$\begin{gathered} x = \cos\theta; \\ \left.\begin{array}{c} (\varsigma_1(\theta))' = \lambda_{\theta,5}\varsigma_2(\theta); \quad -n\varsigma_3(\theta) + (x\varsigma_2(\theta))' = (-\lambda_{1,7}n + \lambda_{\theta,6})x\varsigma_1(\theta); \\ -n\varsigma_2(\theta) + (x\varsigma_3(\theta))' = (-\lambda_{1,6}n + \lambda_{\theta,7})x\varsigma_4(\theta); \quad n\varsigma_1(\theta) = \lambda_{1,5}nx\varsigma_3(\theta); \\ n\varsigma_4(\theta) = \lambda_{1,4}nx\varsigma_2(\theta); \quad n\varsigma_3(\theta) + (x\varsigma_2(\theta))' = (\lambda_{1,3}n + \lambda_{\theta,2})x\varsigma_1(\theta); \\ n\varsigma_2(\theta) + (x\varsigma_3(\theta))' = (\lambda_{1,2}n + \lambda_{\theta,3})x\varsigma_4(\theta); \quad (\varsigma_4(\theta))' = \lambda_{\theta,4}\varsigma_3(\theta); \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} n = 0; \quad \lambda_{\theta,6} = \lambda_{\theta,2}, \quad \lambda_{\theta,7} = \lambda_{\theta,3}; \\ (\varsigma_1)' = \lambda_{\theta,5}\varsigma_2; \quad (x\varsigma_2)' = \lambda_{\theta,2}x\varsigma_1; \quad (\varsigma_4)' = \lambda_{\theta,4}\varsigma_3; \quad (x\varsigma_3)' = \lambda_{\theta,3}x\varsigma_4; \end{array}\right. \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \kappa_7\lambda_{\theta,5}f_5(r) + \kappa_7(rf_6(r))' - \kappa_2\lambda_{t,2}r\varepsilon_r f_2(r) = 0; \\ \lambda_{\theta,2}r\mu_r f_6(r) - (r^2\mu_r f_5(r))' = 0; \quad \lambda_{\theta,3}r\varepsilon_r f_3(r) - (r^2\varepsilon_r f_4(r))' = 0; \\ \kappa_7\lambda_{\theta,3}rf_7(r) + \kappa_2\lambda_{t,2}r^2\varepsilon_r f_4(r) = 0; \quad \kappa_7(rf_7(r))' + \kappa_2\lambda_{t,2}r\varepsilon_r f_3(r) = 0; \\ \kappa_2(rf_2(r))' - \kappa_7\lambda_{t,5}r\mu_r f_6(r) = 0; \quad \kappa_2\lambda_{\theta,2}rf_2(r) - \kappa_7\lambda_{t,5}r^2\mu_r f_5(r) = 0; \\ \kappa_2\lambda_{\theta,4}f_4(r) + \kappa_2(rf_3(r))' + \kappa_7\lambda_{t,5}r\mu_r f_7(r) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

В случае, когда электродинамические параметры удовлетворяют условию:

$$\begin{gathered} (\varepsilon_t\mu_t'' + \varepsilon_t'\mu_t' + \lambda^2\varepsilon_t\mu_t - 2\lambda\varepsilon_t\mu_t' - \lambda\varepsilon_t'\mu_t - \delta_t)e^{2\lambda t} + (\varepsilon_t\mu_t'' + \varepsilon_t'\mu_t' + \lambda^2\varepsilon_t\mu_t + \\ +2\lambda\varepsilon_t\mu_t' + \lambda\varepsilon_t'\mu_t - \delta_t)e^{-2\lambda t} - 6\lambda^2\varepsilon_t\mu_t + 2\varepsilon_t\mu_t'' + 2\varepsilon_t'\mu_t' - 2\delta_t = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

частным решением системы (2) будут функции $\tau_2 = (\mu_t' - \mu_t \operatorname{th}\lambda t)(\lambda_{t,5}\operatorname{ch}\lambda t)^{-1}$, $\tau_5 = (\operatorname{ch}\lambda t)^{-1}$, и для компонент электромагнитного поля получаем:

$$E_\varphi = \frac{\kappa_7}{\lambda_{\theta,2}}\frac{\mu_t' - \mu_t \operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_2 r\mu_r f_5, \quad H_\varphi = \kappa_2\frac{\lambda_{t,2}}{\lambda_{\theta,3}}\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_3 r\varepsilon_r f_4, \quad H_\theta = \frac{\kappa_7}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_2 f_6,$$

$$E_\theta = \frac{\kappa_2}{\lambda_{t,5}}\frac{\mu_t' - \mu_t th\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\varsigma_3 f_3, \quad E_r = \varsigma_4 f_4\frac{-\kappa_2}{\lambda_{t,5}}\frac{\mu_t' - \mu_t \operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}, \quad H_r = \frac{-\kappa_7}{\operatorname{ch}\,\lambda t}\varsigma_1 f_5.$$

Литература

1. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях.* Новополоцк: ПГУ, 2010. 240 с.