АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПФАФФА ТИПА ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В.В. Амелькин, М.Н. Василевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Vasilevich.M@gmail.com

Пусть $\overline{M}_j = \{x \in \mathbb{CP}^n \mid P_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0\}$, $j = \overline{1,n}$, — неприводимое алгебраическое многообразие коразмерности 1 на $\mathbb{CP}^n$. На открытом множестве $M = \mathbb{CP}^n \backslash \overline{M}$, где $\overline{M} = \bigcup_{j=1}^4 \overline{M}_j$, рассмотрим уравнение

$$dY = \omega Y, \tag{1}$$

где Y — квадратная матрица порядка 2, ω — дифференциальная 1-форма вида

$$\omega = \sum_{j=1}^{4} U_j \frac{dP_j(x)}{P_j(x)}$$

с (2×2)-матрицами-вычетами U_j, удовлетворяющими условию $\sum_{j=1}^4 U_j = 0$.

Предположим, что поверхности $\overline{M}_j$, $j = \overline{1,4}$, образуют пучок. Аналитически это означает, что существуют однородные полиномы $Q(x)$ и $R(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, такие, что $P_k(x) = \alpha_k Q(x) + \beta_k R(x)$ для всех $k = \overline{1,4}$ и некоторых $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$.

Замена переменной $z = Q(x)/R(x)$ преобразует уравнение (1) в уравнение

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{z - a_j} \right) Y\, dz,$$

где $a_j = -\alpha_j/\beta_j$.

Пусть

$$U_j = \begin{pmatrix} \theta_j & (\xi_j - \theta_j)/h \\ h\theta_j & \xi_j - \theta_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $h \neq 0$ — вещественная или комплексная постоянная,

$$\theta_1 = -\frac{b}{a}, \quad \theta_2 = \frac{b-1}{a-1}, \quad \theta_3 = \frac{b}{a} - \frac{b-1}{a-1}, \quad a = \frac{(a_2 - a_4)(a_3 - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_4)},$$

$$b = \xi_1 a^{-\xi_2} (a-1)^{-\xi_1} \int a^{\xi_2} (a-1)^{\xi_1 - 1}\, da,$$

а собственные значения ξ_j матриц U_j, $j = \overline{1,3}$, удовлетворяют условию $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = -1$.

Теорема. *Если поверхности* $\overline{M}_j$, $j = \overline{1,4}$, *образуют пучок, то уравнение* (1) *с матрицами-вычетами* (2) *имеет фундаментальную матрицу решений*

$$Y(x) = -\frac{1}{h} \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) + 1 \\ h\phi_{11}(x) & h\phi_{12}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\phi_{11}(x) = \prod_{j=1}^{4} (P_j(x))^{\xi_j}, \quad \phi_{12}(x) = \phi_{11}(x) \left(\sum_{k=1}^{3} \theta_k \int \phi_{11}^{-1}(x) \frac{dP_k(x)}{P_k(x)} \right).$$