О СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
{tatsyana.andreeva,v.a.pronko}@gmail.com, i.martynov@grsu.by

Рассмотрим автономную дифференциальную систему третьего порядка

$$x'=a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{13}xz,\quad y'=a_{21}xy+a_{22}y^2+a_{23}yz,\quad z'=a_{31}xz+a_{32}yz+a_{33}z^2+cxy,\tag{1}$$

где x, y, z — комплекснозначные функции, $c \neq 0$.

Компоненты системы (1) при некоторых значениях ее коэффициентов определяются дифференциальным уравнением

$$w^2(w'-w^2)w''' = w^2w''^2 + b_1ww'^2w'' + b_2w'^4 + b_3w^3w'w'' + b_4w^2w'^3+$$

$$+b_5w^5w'' + b_6w^4w'^2 + b_7w^6w' + b_8w^8.$$

Среди таких уравнений имеются следующие уравнения типа Пенлеве [1, 2]:

$$(w'-w^2)w''' = w''^2 - 5/2ww'w'' + 3/2w'^3 - 3/4w^3w'' + 3/2w^2w'^2 - 5/8w^4w' + 1/8w^6;\tag{2}$$

$$(w'-w^2)w''' = w''^2 - 5/2ww'w'' + 1/2w'^3 + 3/4w^2w'^2 - 1/4w^4w';\tag{3}$$

$$(w'-w^2)w''' = w''^2 - 3ww'w'' + 2(1-\alpha)w'^3 + \alpha w^5w'',\quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\};\tag{4}$$

$$w^2(w'-w^2)w''' = w^2w''^2 + ww'^2w'' - 3/4w'^4 - 9/2w^3w'w'' + 15/4w^2w'^3;\tag{5}$$

$$w^2(w'-w^2)w''' = w^2w''^2 + 1/2ww'^2w'' - 1/2w'^4 - 7/2w^3w'w'' + 5/2w^2w'^3.\tag{6}$$

Выделим классы систем (1), одна из компонент которых удовлетворяет одному из уравнений (2)–(6). Получим системы:

$$x' = 1/4x^2 + xy - xz,\quad y' = -1/2xy,\quad z' = 3/4xz - yz + z^2 - 1/2xy;\tag{7}$$

$$x' = -1/2x^2 + xy - xz,\quad y' = xy - y^2 + yz,\quad z' = 1/2xz - xy;\tag{8}$$

$$x' = -1/2x^2 + xy - xz,\quad y' = xy - y^2 + yz,\quad z' = -1/2xy;\tag{9}$$

$$x' = 1/4x^2 + xy - xz,\quad y' = -1/2xy,\quad z' = -1/4xz - yz + z^2 + 1/2xy;\tag{10}$$

$$x' = 2xy + 2xz,\quad y' = -y^2 - yz,\quad z' = yz + z^2 + xy;\tag{11}$$

$$x' = -4xy - 2xz,\quad y' = 2y^2 + yz,\quad z' = xy.\tag{12}$$

$$x' = -1/2xz,\quad y' = yz,\quad z' = xz + 1/2z^2 + xy;\tag{13}$$

$$x' = -xy + 1/2xz,\quad y' = y^2,\quad z' = xz - 1/2z^2 - xy;\tag{14}$$

$$x' = -1/2xz,\quad y' = yz,\quad z' = xz + xy;\tag{15}$$

$$x' = -xy,\quad y' = y^2 + 1/2yz,\quad z' = xz - 1/2z^2 - 2xy;\tag{16}$$

$$x' = -xy - xz,\quad y' = y^2 + yz,\quad z' = -\alpha xz + (1-\alpha)xy,\quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\};\tag{17}$$

$$x' = -\alpha x^2 + xy - xz,\quad y' = \alpha xy - y^2 + yz,\quad z' = -xy,\quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\};\tag{18}$$

$$x' = -xy - \alpha xz,\quad y' = y^2 + \alpha yz,\quad z' = (\alpha-1)xz + xy,\quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\};\tag{19}$$

$$x' = -xy,\quad y' = y^2,\quad z' = xz - \alpha z^2 - xy,\quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}.\tag{20}$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Системы* (7)–(20) *являются системами типа Пенлеве.*

Литература

1. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1640–1641.

2. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1219–1224.

СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

nberez@grsu.by, i.martynov@grsu.by, v.a.pronko@gmail.com

Рассмотрим систему

$$x' = x(ax+by+cz+d), \quad y' = y(ax+by+cz+d), \quad z' = f(x,y,z)+c_1x+c_2y+c_3z, \tag{1}$$

где $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz$, a_{ij}, $i,j = 1,2,3$, $a,b,c \neq$ $\neq 0$ — постоянные, d, c_i, $i = 1,2,3$ — аналитические функции от t. Не нарушая общности, будем считать $c = 1$.

Из первых двух уравнений системы (1) получаем, что $y = \lambda x$, λ — постоянная. Тогда для компоненты x системы (1) построим уравнение

$$x'' = A\frac{x'^2}{x} + Bxx' + Cx' + Dx^3 + Ex^2 + Fx, \tag{2}$$

где

$$A = 1 + a_{33}, \quad B = (a_{23} - 2ba_{33} + b)\lambda + a_{13} - 2a_{33}a, \quad C = c_3 - 2a_{33}d,$$

$$D = (a_{22} - ba_{23} + b^2a_{33})\lambda^2 + (a_{12} + 2aba_{33} - ba_{13} - aa_{23})\lambda + a_{11} + a^2a_{33} - aa_{13},$$

$$E = (2ba_{33}d - a_{23}d - bc_3 + c_2)\lambda + 2aa_{33}d + c_1 - ac_3 - a_{13}d, \quad F = d' + d^2a_{33} - dc_3.$$

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *имела свойство Пенлеве необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (2) *обладало этим же свойством.*

Выделены системы (1), решения которых выражаются через решения частных случаев второго, третьего и четвертого уравнений Пенлеве. На основе связи, установленной в [1, 2] между решением частных случаев второго и четвертого уравнений Пенлеве соответственно с уравнениями Кортевега де Фриза и Шредингера, а также связи частного случая третьего уравнения Пенлеве с уравнением Лиувилля, получены формулы взаимосвязи между решениями выделенных систем и указанных нелинейных уравнений в частных производных.

Литература

1. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type. I* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, № 4. P. 715–721.

2. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type. II* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, № 5. P. 1006–1015.