

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е.Р. Бибило, Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
elena.bibilo@mail.ru, vankova_tn@grsu.by, i.martynov@grsu.by

Если уравнение $f(x^{(n)}, \dots, x, z) = 0$ имеет решение $x = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(z - z_0)^{k-s}$, то этому решению будем сопоставлять набор $(s; h_0; r_1, r_2, \dots, r_n)$, где $k = r_m$ — резонансы, h_{r_m} — резонансные коэффициенты. Среди резонансов r_k есть один равный -1 . Остальные резонансы должны быть целыми и различными [1].

Рассмотрим уравнение

$$x^2 x^{IV} = 2xx'x'' + 4xx''^2 - 2x'^2x'' - 2x^5 + \alpha x^2x'' + 2cx^3, \quad (1)$$

где $\alpha' = 0, c'' = 0$, соответствующие наборы

$$(2; \pm 6; -1, -3, 6, 8), \quad (1; h_0; -1, 0, 3, 6), \quad (-2; h_0; -1, 0, -3, 6),$$

и уравнение

$$y^{IV} = 20yy'' + 10y'^2 - 40y^3 + \alpha(y'' - 6y^2) - 4\beta y - 2H_1, \quad (2)$$

которому отвечают наборы $(2; 1; -1, 2, 5, 8), (2; 3; -1, -3, 8, 10)$.

Выполнив в (1) замену переменной $x' = -\omega x$, для ω запишем уравнение

$$\omega^{IV} = 10\omega^2\omega'' + 10\omega\omega'^2 - 6\omega^5 + \alpha(\omega'' - 2\omega^3) - 4c\omega - 2c'. \quad (3)$$

Уравнение (3) встречается в [2], а при $\alpha = 0$ в работе [3]. Имеют место

Теорема 1. Уравнения (3) при $c' = 0$ и (2) связаны между собой преобразованием Беклунда

$$2\omega = -\frac{y''' - 12yy' - \alpha y'}{y'' - 6y^2 - \alpha y - c}, \quad 2y = -\omega' + \omega^2.$$

Теорема 2. Общие решения уравнений (1), (2) и (3) при $c' = 0$ мероморфны.

Замечание 1. При $\alpha = c = 0$ уравнение (1) имеет рациональное решение $x = \pm 6(z - z_0)/((z - z_0)^3 + h)$, отвечающее резонансу $r = -3$.

Замечание 2. При $\alpha = \beta = H_1 = 0$ уравнение (2) имеет рациональное решение $y = 3(z - z_0)((z - z_0)^3 - 2h)/((z - z_0)^3 + h)$, отвечающее резонансу $r = -3$.

Литература

1. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П., Парманчук О. Н., Пронько В. А. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун.-та. Сер. 2. 2008. № 1(64). С. 8–16.
2. Cosgrove, C. M. *Higher-order Painlevé equations in the polynomial class I. Bureau symbol P2 variable* // Stud. Appl. Math. 2000. P. 1–76.
3. Мартынов, И. П. *О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 10. С. 1780–1791.