АВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Н.Д. Василевич

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
VasilevichND@gmail.com

Пусть $\mathbb{C}^n$ — линейное векторное пространство над полем комплексных чисел, $\mathbb{R}^m$ — линейное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $M^{n\times m}(\mathbb{C})$ — линейное пространство всех комплексных матриц, у которых n строк и m столбцов, $GL(n,\mathbb{C})$ — группа невырожденных квадратных комплексных матриц порядка n.

Лемма. *Пусть в C^n действует мультипликативная абелева группа линейных преобразований с образующими $A_1,\ldots,A_m \in GL(n,\mathbb{C})$, где каждая матрица A_j диагонализируема: $A_j = \operatorname{diag}(\lambda_{1j},\ldots,\lambda_{nj})$, и все $\lambda_j \neq 0$. Тогда если матрица $H=(\lambda_{ij})$ (у которой n строк и m столбцов) не является мультипликативной матрицей Пуанкаре, то замыкание орбиты любой точки $y(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{C}^n$, у которой отличны от нуля все координаты, не содержит начало координат 0 в $\mathbb{C}^n$.*

Теорема. *Пусть во вполне интегрируемом автономном дифференциальном уравнении Пфаффа*

$$dy = (A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_m)y, \tag{1}$$

где $y\in\mathbb{C}^n$, $a(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}$, семейство попарно коммутирующих матриц $\{A_1,\ldots$ $\ldots,A_m\}$ имеет нормальную форму и H — матрица из $M^{nxm}(\mathbb{C})$, столбцы $\lambda_1,\ldots$ $\ldots,\lambda_m$ которой совпадают с диагоналями матриц $A_1,\ldots,A_m$ соответственно. Тогда замыкание любой интегральной поверхности уравнения (1) содержит начало координат $0\in\mathbb{C}^n$ в том и только в том случае, когда H является аддитивной матрицей Пуанкаре.

Литература

1. Василевич Н. Д. *Об уравнениях Пфаффа с алгебраическими поверхностями* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 25. С. 28–32.

О ПРОСТРАНСТВЕ ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.Р. Гонцов

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Россия
rgontsov@inbox.ru

Рассмотрим на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ систему из p линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = B(z)\,y, \quad y(z)\in\mathbb{C}^p, \tag{1}$$

с матрицей $B(z)$ коэффициентов, являющихся мероморфными (рациональными) функциями. Пусть матрица $B(z)$ имеет n особых точек (полюсов) $a_1,\ldots,a_n$.

Скажем, что решение $y(z)$ этой системы принадлежит классу *лиувиллевых функций* (или является лиувиллевым), если все его компоненты выражаются в элементарных или алгебраических функциях и их первообразных. Множество лиувиллевых решений системы (1) образует подпространство $\mathcal{L}$ в p-мерном пространстве всех решений этой системы. Если $\dim \mathcal{L} = p$, то говорят, что система (1) разрешима в лиувиллевых функциях (или *обобщенных квадратурах*, подробнее см. в [1, гл. III; 2, гл. 3]).

В случае, когда (формальные) показатели $\beta_i^1, \ldots, \beta_i^p$ системы (1) в каждой ее особой точке a_i (числа, отвечающие за составляющие степенного роста (формальных) решений в особой точке) достаточно малы, оценка на размерность пространства $\mathcal{L}$ может быть получена исходя лишь из вида матрицы коэффициентов системы. В частности, имеет место следующее утверждение относительно разрешимости в обобщенных квадратурах такой системы.

Теорема 1. *Если в каждой особой точке* a_i *системы* (1) *ее (формальные) показатели* β_i^j *удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re} \beta_i^j > -\frac{1}{n(p-1)}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

то в общем положении такая система разрешима в обобщенных квадратурах тогда и только тогда, когда найдется постоянная матрица $C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ *такая, что* $CB(z)C^{-1}$ *— верхнетреугольная матрица.*

Частный случай этого утверждения, касающийся фуксовых систем, изложен в [3]. Напомним, что систему (1) называют *фуксовой*, если ее матрица коэффициентов $B(z)$ имеет полюс первого порядка в каждой особой точке. В таком случае показатели в точке a_i — это собственные значения матрицы-вычета $\operatorname{res}_{a_i} B(z)$. Мы проиллюстрируем данный критерий разрешимости в обобщенных квадратурах на примере фуксовой (2×2)-системы с тремя особыми точками 0, 1, ∞, не разрешимой в силу теоремы 1. Ее неразрешимость также будет следовать из того, что она эквивалентна гипергеометрическому уравнению, не попадающему в список Кимуры [4] гипергеометрических уравнений, разрешимых в обобщенных квадратурах.

Литература

1. Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру.* М.: ИЛ, 1959.
2. Хованский А. Г. *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде.* М.: МЦНМО, 2008.
3. Вьюгин И. В., Гонцов Р. Р. *К вопросу о разрешимости в квадратурах фуксовых систем* // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, № 3. С. 183–184.
4. Kimura T. *On Riemann's equations which are solvable by quadratures* // Funk. Ekvac. 1969. Vol. 12. P. 269–281.

О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОДУ

И.В. Горючкина

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

igoryuchkina@gmail.com

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$f(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y, \delta y, \ldots, \delta^n y)$ — это многочлен своих переменных, $\delta = x\, d\, dx$, $\delta^n = \delta^{n-1} \circ \delta$, $n \in \mathbb{N}$.