Пусть при $|x| \to 0$, $|\arg x| < \pi$ уравнение (1) имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Согласно лемме Мальгранжа [1] существует такой номер μ', что с помощью замены переменной

$$y = \sum_{k=1}^{\mu} c_k x^k + x^\mu u, \quad \mu \geqslant \mu' \tag{3}$$

уравнение (1) приводится к уравнению специального вида

$$L(\delta)u + xg(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u) = 0, \tag{4}$$

где $L(\delta)$ — это линейный дифференциальный оператор, функция $g(x, u, \delta u, \ldots, \delta^n u)$ — это полином своих переменных.

Теорема Мальгранжа [1]. *Если в уравнении* (4), *которое получено из уравнения* (1) *с помощью замены переменной* (3), *степень многочлена* $L(\delta)$ *равна* n, *то ряд* (2) *равномерно сходится для достаточно малых* $|x|$ *и* $|\arg x| < \pi$.

При доказательстве этой теоремы Мальгранж использовал теорему о неявном отображении для Банаховых пространств [2]. Мы же в доказательстве (см. [3]) используем методы и теоремы теории аналитических функций, которые позволяют оценить радиус сходимости ряда (2).

Предложение. *Пусть функция* $g(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ *из уравнения* (4) *голоморфна внутри замкнутого полидиска*

$$\overline{\Delta} = \{|x| \leqslant r, |u_0| \leqslant \rho, \ldots, |u_n| \leqslant \rho\}, \quad \mu = \max_{\overline{\Delta}} |g|.$$

Тогда степенной ряд $u = \sum_{k=\mu+1}^{\infty} c_k x^{k-\mu}$, *удовлетворяющий уравнению* (4), *сходится в диске*

$$D = \left\{ |x| < r\,\frac{\rho}{\rho + \mu r/\sigma N} \right\}, \quad N = (n+1)^{n+1}/(n+2)^{n+2}.$$

Литература

1. Malgrange B. *Sur le théorème de Maillet* // Asympt. Anal. 1989. Vol. 2. P. 1–4.

2. Дьедонне Ж. *Основы современного анализа.* М.: Мир, 1964.

3. Gontsov R. R., Goryuchkina I. V. *An analytic proof of the Malgrange — Sibuya theorem on the convergence of formal solutions of an ODE.* 2013. arXiv:1311.6416.

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В.И. Громак, И.И. Козлов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

vgromak@gmail.com, ilya.kazlou@gmail.com

В настоящей работе исследуется свойства решений системы Гарнье, являющейся обобщением третьего уравнения Пенлеве на случай двух независимых переменных с симметрическим Гамильтонианом [1]. Рассмотрим систему Гарнье с двумя независимыми переменными t, s и искомыми скалярными функциями $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$, $w(s,t)$ в гамильтоновой форме

$$dx = \frac{\partial H_1}{\partial y}dt + \frac{\partial H_2}{\partial y}ds, \quad dy = -\frac{\partial H_1}{\partial x}dt - \frac{\partial H_2}{\partial x}ds,$$

$$dz = \frac{\partial H_1}{\partial w}dt + \frac{\partial H_2}{\partial w}ds, \quad dw = -\frac{\partial H_1}{\partial z}dt - \frac{\partial H_2}{\partial z}ds, \tag{1}$$

Гамильтонианы H_1 и $H_2 = \pi(H_1)$ для системы (1) являются симметрическими и имеют вид

$$H_1 = H_1(x,y,z,w,t,s,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{1}{t}[x^2y(y-1) + x((1-2\alpha_1)y - \alpha_0) + ty] +$$

$$+\frac{\alpha_2 s}{t(t-s)} - \frac{\alpha_0}{t-s}zw - \frac{1}{t-s}[tyz^2w + sx^2yw - 2txyzw + \alpha_0 sxw],$$

где $\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, а преобразование π определяется

$$\pi : (x,y,z,w,t,s,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \to (z,w,x,y,s,t,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3).$$

Доказано, что при некоторых условиях, которые выписаны в явной форме, две искомые функции можно из системы (1) исключить. Для системы (1) для специальных значений параметров α_i найдены тривиальные вырожденные решения, а также решения, выражающиеся через функции Бесселя или решения третьего уравнения Пенлеве [2]. С помощью построенных частных решений при специальных значениях параметров и преобразований Беклунда, которые изоморфны бирациональным преобразованиям, составляющим аффинную группу Вейля [3], для системы (1) получены новые классы алгебраических и трансцендентных решений.

Литература

1. Sasano, Y. *Symmetric Hamiltonian of the Garnier system and its degenerate systems in two variables* // arXiv: 0706.0799v3, p. 19.

2. Gromak V., Laine I., Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane*. Wolter De Gruyter, Berlin — New-York, 2002.

3. Suzuki T. *Affine Weyl group symmetry of the Garnier system* // Funkcial. Ekvac. 2005. Vol. 48. P. 203–230.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА *P*-ТИПА

Е.В. Громак

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lenagromak@tut.by

Известно, что проблема классификации нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка относительно свойства Пенлеве в общем случае открыта. Одной из первых работ по этой тематике была работа [1], в которой исследовалось на свойство Пенлеве уравнение третьего порядка с шестью полюсами $a_k = a_k(z)$, которые