с симметрическим Гамильтонианом [1]. Рассмотрим систему Гарнье с двумя независимыми переменными t, s и искомыми скалярными функциями $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$, $w(s,t)$ в гамильтоновой форме

$$dx = \frac{\partial H_1}{\partial y}dt + \frac{\partial H_2}{\partial y}ds, \quad dy = -\frac{\partial H_1}{\partial x}dt - \frac{\partial H_2}{\partial x}ds,$$

$$dz = \frac{\partial H_1}{\partial w}dt + \frac{\partial H_2}{\partial w}ds, \quad dw = -\frac{\partial H_1}{\partial z}dt - \frac{\partial H_2}{\partial z}ds, \tag{1}$$

Гамильтонианы H_1 и $H_2 = \pi(H_1)$ для системы (1) являются симметрическими и имеют вид

$$H_1 = H_1(x,y,z,w,t,s,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \frac{1}{t}[x^2y(y-1) + x((1-2\alpha_1)y - \alpha_0) + ty] +$$

$$+\frac{\alpha_2 s}{t(t-s)} - \frac{\alpha_0}{t-s}zw - \frac{1}{t-s}[tyz^2w + sx^2yw - 2txyzw + \alpha_0 sxw],$$

где $\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, а преобразование π определяется

$$\pi : (x,y,z,w,t,s,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \to (z,w,x,y,s,t,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3).$$

Доказано, что при некоторых условиях, которые выписаны в явной форме, две искомые функции можно из системы (1) исключить. Для системы (1) для специальных значений параметров α_i найдены тривиальные вырожденные решения, а также решения, выражающиеся через функции Бесселя или решения третьего уравнения Пенлеве [2]. С помощью построенных частных решений при специальных значениях параметров и преобразований Беклунда, которые изоморфны бирациональным преобразованиям, составляющим аффинную группу Вейля [3], для системы (1) получены новые классы алгебраических и трансцендентных решений.

Литература

1. Sasano, Y. *Symmetric Hamiltonian of the Garnier system and its degenerate systems in two variables* // arXiv: 0706.0799v3, p. 19.
2. Gromak V., Laine I., Shimomura S. *Painlevé differential equations in the complex plane*. Wolter De Gruyter, Berlin — New-York, 2002.
3. Suzuki T. *Affine Weyl group symmetry of the Garnier system* // Funkcial. Ekvac. 2005. Vol. 48. P. 203–230.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА *P*-ТИПА

Е.В. Громак

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

lenagromak@tut.by

Известно, что проблема классификации нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка относительно свойства Пенлеве в общем случае открыта. Одной из первых работ по этой тематике была работа [1], в которой исследовалось на свойство Пенлеве уравнение третьего порядка с шестью полюсами $a_k = a_k(z)$, которые конечны, различны и в общем случае являются функциями независимой переменной z. Если же полюсы a_k постоянны, то уравнение Шази имеет вид

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{y'y'' + A_k(y')^3 + B_k(y')^2 + C_k y'}{y - a_k} + Dy'' + Ey' + \prod_{k=1}^{6}(y - a_k) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{y - a_k}. \qquad (1)$$

В работе [1] также приведена система Шази $(A - F)$ относительно 26 неизвестных функций A_k, B_k, C_k, D, E, F_k, решение которой, по утверждению Шази, определяет необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у уравнения Шази.

В настоящей работе исследуются условия существования алгебраического интеграла, определяющего интегрируемость уравнения (1) в специальных функциях.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют системе Шази $(A{-}F)$, причем

$$A_j = 1/(a_5 - a_j) + 1(a_6 - a_j), \quad j = 1, \ldots, 4,$$
$$A_5 = 1/(a_1 - a_5) + 1/(a_2 - a_5) + 1/(a_3 - a_5) + 1/(a_4 - a_5) + 2/(a_5 - a_6),$$
$$A_6 = 1/(a_1 - a_6) + 1/(a_2 - a_6) + 1/(a_3 - a_6) + 1/(a_4 - a_6) + 2/(a_6 - a_5).$$

Тогда справедлива

Теорема. *При выполнении вышеприведенного условия,* $B_k = 0$, $k = 1, \ldots, 6$, *и дополнительного условия на полюсы* a_k *уравнение (1) имеет общий интеграл, определяемый уравнением*

$$(y')^2 = K_1 P(y) + K_2 Q(y) + R(y). \qquad (2)$$

Заметим, что в уравнении (2) $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ — полиномы по y не выше четвертой степени с постоянными коэффициентами, а K_1, K_2 — произвольные постоянные. Третья произвольная постоянная получается разделением переменных и интегрированием. Также мы приводим явное выражение коэффициентов полиномов $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ через полюсы a_k. Уравнение (2) в общем случае интегрируется в эллиптических функциях. Заметим также, что в силу известной симметрии уравнения Шази $(A_k, a_k) \leftrightarrow (A_j, a_j)$ результат теоремы можно распространить на другие A_j и a_j.

В настоящей работе, продолжая исследования [2], мы приводим новые условия, при выполнении которых уравнение Шази (1) с постоянными полюсами a_k интегрируется в специальных функциях.

Литература

1. Chazy J. *Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes* // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 317–385.

2. Громак Е. В. *Об интегрировании уравнения Шази в эллиптических функциях* // Тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013». Гродно, Беларусь 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. С. 9–10.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.Е. Кулеш

[1] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
kulesh@grsu.by

Рассмотим дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{xxxxx} - 150u_x u_{xx} - 60uu_{xxx} + 720u^2 u_x = u_t + au_x + 2a_x u, \qquad (1)$$