конечны, различны и в общем случае являются функциями независимой переменной $z$. Если же полюсы $a_k$ постоянны, то уравнение Шази имеет вид

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{y'y'' + A_k(y')^3 + B_k(y')^2 + C_k y'}{y - a_k} + Dy'' + Ey' + \prod_{k=1}^{6}(y - a_k) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{y - a_k}. \quad (1)$$

В работе [1] также приведена система Шази $(A - F)$ относительно 26 неизвестных функций $A_k$, $B_k$, $C_k$, $D$, $E$, $F_k$, решение которой, по утверждению Шази, определяет необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у уравнения Шази.

В настоящей работе исследуются условия существования алгебраического интеграла, определяющего интегрируемость уравнения (1) в специальных функциях.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют системе Шази $(A - F)$, причем

$$A_j = 1/(a_5 - a_j) + 1(a_6 - a_j), \quad j = 1, \ldots, 4,$$
$$A_5 = 1/(a_1 - a_5) + 1/(a_2 - a_5) + 1/(a_3 - a_5) + 1/(a_4 - a_5) + 2/(a_5 - a_6),$$
$$A_6 = 1/(a_1 - a_6) + 1/(a_2 - a_6) + 1/(a_3 - a_6) + 1/(a_4 - a_6) + 2/(a_6 - a_5).$$

Тогда справедлива

**Теорема.** *При выполнении вышеприведенного условия,* $B_k = 0$, $k = 1, \ldots, 6$, *и дополнительного условия на полюсы* $a_k$ *уравнение (1) имеет общий интеграл, определяемый уравнением*

$$(y')^2 = K_1 P(y) + K_2 Q(y) + R(y). \quad (2)$$

Заметим, что в уравнении (2) $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ — полиномы по $y$ не выше четвертой степени с постоянными коэффициентами, а $K_1$, $K_2$ — произвольные постоянные. Третья произвольная постоянная получается разделением переменных и интегрированием. Также мы приводим явное выражение коэффициентов полиномов $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ через полюсы $a_k$. Уравнение (2) в общем случае интегрируется в эллиптических функциях. Заметим также, что в силу известной симметрии уравнения Шази $(A_k, a_k) \leftrightarrow (A_j, a_j)$ результат теоремы можно распространить на другие $A_j$ и $a_j$.

В настоящей работе, продолжая исследования [2], мы приводим новые условия, при выполнении которых уравнение Шази (1) с постоянными полюсами $a_k$ интегрируется в специальных функциях.

**Литература**

1. Chazy J. *Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes* // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 317–385.

2. Громак Е. В. *Об интегрировании уравнения Шази в эллиптических функциях* // Тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013». Гродно, Беларусь 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. С. 9–10.

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЯТОГО ПОРЯДКА

**Е.Е. Кулеш**

[1] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

kulesh@grsu.by

Рассмотим дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{xxxxx} - 150u_x u_{xx} - 60uu_{xxx} + 720u^2 u_x = u_t + au_x + 2a_x u, \quad (1)$$

где $u = u(x,t)$, $a_{xx} = 0$. В работе [1] показано, что уравнение (1) имеет формальное решение в виде ряда

$$u = \frac{1}{4}\varphi^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varphi^k, \tag{2}$$

где $\varphi = x + \gamma(t)$, $a = a_1\varphi + a_2$, коэффициенты $u_1, u_3, u_4, u_5$ и $\varphi_t$ являются произвольными независимыми функциями от $t$, а все остальные коэффициенты можно найти по рекуррентным формулам

$$u_0 = 0, \quad u_2 = \frac{\varphi_t + a_2}{60},$$

$$(k+8)(k-1)(k-3)(k-4)(k-5)u_k = 360(u_{k-4}u_2 + u_{k-3}u_1) + \sum_{m=0}^{k-5}\Bigg(360u_m u_{k-m-2} +$$
$$+150(m+2)(m+1)(k-m-4)u_{k-m-4}u_{m+2} + 60(m+3)(m+2)(m+1)u_{m+3}u_{k-m-5} +$$
$$+180(m+1)u_{m+1}u_{k-m-3} - 720\sum_{l=0}^{m} u_l u_{m-l}(k-m-4)u_{k-m-4}\Bigg) + (u_{k-5})_t + (k-4)u_{k-4}\varphi_t +$$
$$+(k-4)u_{k-4}a_2 + (k-3)u_{k-5}a_1, \quad k = 6,7,\ldots \tag{3}$$

Пусть $T_1$ — область голоморфности коэффициентов $u_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ Методом построения мажорантных рядов доказана

**Теорема 1.** *Ряд* (2) *с коэффициентами* (3) *сходится при* $0 \neq |\varphi| \leqslant M < \delta^{-1}$, *где* $\delta$ *определяется условиями*

$$|\gamma| < \frac{1}{32\delta}, \quad |u_1| < \frac{\delta^3}{32}, \quad |u_3| < \frac{\delta^5}{32}, \quad |u_4| < \frac{\delta^6}{32}, \quad |u_5| < \frac{\delta^7}{32}, \quad |a_1| < \frac{\delta^5}{32}, \quad |a_2| < \frac{\delta^4}{32},$$

*при всех* $t \in T \subset T_1$, *где* $T$ *— замкнутый круг радиуса* $\rho$, *причем* $\rho \geqslant \delta^{-5}$, $|x| \leqslant \sigma$, $\sigma + (32\delta)^{-1} \leqslant M$, *а значит является решением уравнения* (1) *в указанной области.*

Используя метод построения рациональных решений по отрицательным резонансам, описанный в [2], доказана

**Теорема 2.** *Уравнение* (1) *имеет рациональное по* $\varphi$ *решение*

$$u = \frac{2\varphi^{14} + 20h\varphi^7 + h^2}{\varphi^2\varphi^{14} - 4h\varphi^7 + 4h^2},$$

*где* $\varphi_t = -a_2$, $h = Ce^{7b}$, $b_t = a_1$, $C = \mathrm{const}$.

**Литература**

1. Кулеш Е. Е. *О свойствах решений одного уравнения в частных производных пятого порядка* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. 2005. № 1(31). С. 66–70.

2. Здунек А. Г., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О рациональных решениях дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. 2000. № 3. С. 33–39.

## О СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

**Е.С. Лысюк**

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

elysiuk@mail.com

Рассмотрим четыре автономных системы третьего порядка:

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = 3xy + y^2 + yz, \quad z' = 2xz + 8xy; \tag{1}$$