где $u = u(x,t)$, $a_{xx} = 0$. В работе [1] показано, что уравнение (1) имеет формальное решение в виде ряда

$$u = \frac{1}{4}\varphi^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varphi^k, \tag{2}$$

где $\varphi = x + \gamma(t)$, $a = a_1\varphi + a_2$, коэффициенты u_1, u_3, u_4, u_5 и φ_t являются произвольными независимыми функциями от t, а все остальные коэффициенты можно найти по рекуррентным формулам

$$u_0 = 0, \quad u_2 = \frac{\varphi_t + a_2}{60},$$

$$(k+8)(k-1)(k-3)(k-4)(k-5)u_k = 360(u_{k-4}u_2 + u_{k-3}u_1) + \sum_{m=0}^{k-5}\Bigl(360u_m u_{k-m-2} +$$

$$+150(m+2)(m+1)(k-m-4)u_{k-m-4}u_{m+2} + 60(m+3)(m+2)(m+1)u_{m+3}u_{k-m-5} +$$

$$+180(m+1)u_{m+1}u_{k-m-3} - 720\sum_{l=0}^{m} u_l u_{m-l}(k-m-4)u_{k-m-4}\Bigr) + (u_{k-5})_t + (k-4)u_{k-4}\varphi_t +$$

$$+(k-4)u_{k-4}a_2 + (k-3)u_{k-5}a_1, \quad k = 6, 7, \ldots \tag{3}$$

Пусть T_1 — область голоморфности коэффициентов u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Методом построения мажорантных рядов доказана

Теорема 1. *Ряд* (2) *с коэффициентами* (3) *сходится при* $0 \neq |\varphi| \leqslant M < \delta^{-1}$, *где* δ *определяется условиями*

$$|\gamma| < \frac{1}{32\delta}, \quad |u_1| < \frac{\delta^3}{32}, \quad |u_3| < \frac{\delta^5}{32}, \quad |u_4| < \frac{\delta^6}{32}, \quad |u_5| < \frac{\delta^7}{32}, \quad |a_1| < \frac{\delta^5}{32}, \quad |a_2| < \frac{\delta^4}{32},$$

при всех $t \in T \subset T_1$, *где* T — *замкнутый круг радиуса* ρ, *причем* $\rho \geqslant \delta^{-5}$, $|x| \leqslant \sigma$, $\sigma + (32\delta)^{-1} \leqslant M$, *а значит является решением уравнения* (1) *в указанной области.*

Используя метод построения рациональных решений по отрицательным резонансам, описанный в [2], доказана

Теорема 2. *Уравнение* (1) *имеет рациональное по* φ *решение*

$$u = \frac{2\varphi^{14} + 20h\varphi^7 + h^2}{\varphi^2\varphi^{14} - 4h\varphi^7 + 4h^2},$$

где $\varphi_t = -a_2$, $h = Ce^{7b}$, $b_t = a_1$, $C = \mathrm{const}$.

Литература

1. Кулеш Е. Е. *О свойствах решений одного уравнения в частных производных пятого порядка* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. 2005. № 1(31). С. 66–70.

2. Здунек А. Г., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О рациональных решениях дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. 2000. № 3. С. 33–39.

О СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

Е.С. Лысюк

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

elysiuk@mail.com

Рассмотрим четыре автономных системы третьего порядка:

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = 3xy + y^2 + yz, \quad z' = 2xz + 8xy; \tag{1}$$

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = 3xy + y^2 - \nu yz, \quad z' = 2xz + z^2 - 8(\nu+2)/\nu^2 \cdot xy; \tag{2}$$

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = (3+\nu)xy + y^2 - \nu yz, \quad z' = z^2 - (\nu+4)^2/\nu^2 \cdot xy; \tag{3}$$

$$x' = x^2 - xy, \quad y' = -(\nu+1)xy + y^2 + (\nu+4)yz, \quad z' = z^2 - \nu^2/(\nu+4)^2 \cdot xy; \tag{4}$$

где x, y, z — комплекснозначные функции, $\nu \in N\backslash\{1\}$.

Согласно [1, с. 114], если σ — абсцисса абсолютной сходимости рядов Дирихле

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k c^k e^{-kt}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k c^k e^{-kt}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k c^k e^{-kt}, \tag{5}$$

то в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$ ряды (5) сходятся абсолютно.

Для систем (1)–(4) доказана

Лемма 1. *Ряды*

$$x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k c^k e^{-kt}, \quad y = \beta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k c^k e^{-kt}, \quad z = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k c^k e^{-kt}, \tag{6}$$

представляют решение систем (1)–(4) *в области* $\operatorname{Re} t > \sigma$. *При этом* c — *произвольная постоянная,* $\alpha_1 = 1$, *остальные коэффициенты* β_1, γ_1, α_k, β_k, γ_k, $k = 2, 3, 4, \ldots$, *определяются для каждой из систем* (1)–(4) *единственным образом по рекуррентным формулам. Коэффициенты* $\{\alpha_0; \beta_0; \gamma_0\}$ *для систем* (1)–(4) *соответственно равны*

$$\{-1/4; -1/4; 1\}, \quad \left\{-\frac{\nu}{4(\nu+2)}; -\frac{\nu}{4(\nu+2)}; -\frac{1}{\nu+2}\right\},$$

$$\left\{-\frac{\nu}{4(\nu+2)}; -\frac{\nu}{4(\nu+2)}; -\frac{\nu+4}{4(\nu+2)}\right\}, \left\{-\frac{\nu+4}{4(\nu+2)}; -\frac{\nu+4}{4(\nu+2)}; -\frac{\nu}{4(\nu+2)}\right\}.$$

Лемма 2. *Системы* (1), (2) *инвариантны относительно преобразования переменных*

$$x(t) = f'(t)u(\tau) + \varphi(t), \quad x(t)y(t) = f'^2(t)u(\tau)v(\tau), \quad z(t) = f'(t)w(\tau), \quad \tau = f(t).$$

Системы (3), (4) *инвариантны относительно преобразования переменных*

$$x(t) = f'(t)u(\tau) + \varphi(t), \quad x(t)y(t) = f'^2(t)u(\tau)v(\tau), \quad z(t) = f'(t)w(\tau) + \varphi(\tau), \quad \tau = f(t).$$

Здесь f — *дробно-линейная функция от* t.

Справедливость леммы 2 легко проверить непосредственно.

Таким образом, лемма 1 и лемма 2 позволяют установить справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Ряды*

$$x = -\frac{1}{t-t_0} - \alpha_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}, \tag{7}$$

$$y = -h^2 \frac{\alpha_0\beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (\alpha_0\beta_k + \beta_0\alpha_k)\theta^k e^{-kh/(t-t_0)} + \sum\limits_{k=2}^{+\infty}\sum\limits_{p=1}^{k-1} \alpha_k \beta_{k-p} \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}}{(t-t_0)^3 + \alpha_0 h (t-t_0)^2 + h(t-t_0)^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}}, \tag{8}$$

$$z = -\gamma_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)}$$

и ряды (7), (8),

$$z = -\frac{1}{t-t_0} - \gamma_0 \frac{h}{(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \theta^k e^{-kh/(t-t_0)},$$

имеющие место в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением $2\mu t\overline{t} - (2\mu t_0 + h)\overline{t} - (2\mu\overline{t_0} + \overline{h})t + 2\mu t_0\overline{t_0} + h\overline{t_0} + \overline{h}t_0 = 0,$ *представляют общее решение систем* (1), (2) *и* (3), (4) *соответственно. Координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для общего решения каждой из систем* (1)–(4). *Здесь* $\overline{t}, \overline{t_0}, \overline{h}$ *означают числа, комплексно-сопряженные числам* t, t_0, h; $\mu = \sigma + \ln|\theta/c|$. *При этом* θ, h, t_0 *— произвольные постоянные, а коэффициенты* $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *такие же, как и для рядов* (6).

Литература

1. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент.* Москва, 1976.

ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ И ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. Милованов, О.Г. Медведева

Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь

mvmil@mail.ru, olga_medvedeva@tut.by

Под обобщенной цепочкой Тоды с двумя экспонентами будем понимать гамильтонову систему дифференциальных уравнений с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) + c_1^2 e^{\alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_n q_n} + c_2^2 e^{\beta_1 q_1 + \cdots + \beta_n q_n}. \tag{1}$$

В [1] показано, что любая обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2\right)\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right) \tag{2}$$

в полукруге $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$ с коэффициентами k и λ одного знака.

Нет сомнений, что в общем случае уравнение (2) не интегрируется в квадратурах. Тем не менее, с его помощью можно получать важную информацию о решениях цепочек Тоды.

Легко видеть, что уравнение (2) имеет два однопараметрических семейства решений $y = \pm\sqrt{k\lambda}x + C$, которые приводят к двум $(2n-1)$-параметрическим семействам решений исходной цепочки Тоды в элементарных функциях. Эти решения уже невозможно угадать.

Описание решений уравнения (2) вблизи границы полукруга $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$ позволяет исследовать поведение интегральных кривых цепочек Тоды с гамильтонианом (1) «на бесконечности».