Изучение решений (2) вблизи оси Ox, т.е. при малых $y > 0$, можно получить, положив в (2) $y^2 = 0$ и решив упрощенное таким образом уравнение.

Изучение решений (2) вблизи окружности $1-x^2-y^2 = 0$ так просто не получается. Если в уравнении (2) коэффициент λ достаточно мал, то (2) можно заменить более простым уравнением

$$y'' = -\frac{1}{k}\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2}\right)y'^2. \tag{3}$$

Выяснилось, что это уравнение (в отличие от уравнения (2)) имеет одномерную группу симметрии и, следовательно, к нему можно применить методы группового анализа дифференциальных уравнений [2]. В результате (3) сводится к двум уравнениям первого порядка

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t \pm z)}, \quad 0 < t < 1, \quad z > 0, \tag{4}$$

где $a = (2-k)/k$. Уравнения (4) позволяют описать поведение решений уравнения (2) вблизи окружности $1-x^2-y^2=0$ в случае, когда коэффициент λ достаточно мал [3].

Литература

1. Милованов М. В., Медведева О. Г. *Об обобщенных цепочках Тоды с двумя экспонентами* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 3. С. 37–42.

2. Софус Ли. *Симметрии дифференциальных уравнений.* Т. 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

3. Милованов М. В., Медведева О. Г. *Применение методов группового анализа к изучению обобщенных цепочек Тоды с двумя экспонентами* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 9–15.

СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.С. Немец

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

nemets@grsu.by

В монографии [1] достаточно подробно изложены и систематизированы исследования по изучению свойств целых решений у алгебраических дифференциальных уравнений общего вида. В основном такие исследования проводились в направлении определения роста решений на бесконечности, то есть определения порядка и типа. Так же изучались вопросы наличия целых трансцендентных решений у таких уравнений а зависимости от характеристик самого уравнения.

Предлагается изучить свойства целых трансцендентных решений у неалгебраических дифференциальных уравнений в зависимости от наличия у этих решений нулей (в частности, целых трансцендентных решений с конечным числом нулей). Такая постановка задачи изучения свойств целых решений в зависимости от количества нулей, продолжает исследования, начатые в [2, 3].

В докладе приводится дифференциальное уравнение первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(z)\exp(B_i(z))\; w^{\nu_i}(w')^{\mu_i} = 0, \tag{1}$$

где $A_i(z) \not\equiv 0$ и $B_i(z)$, $i = \overline{1,n}$, — полиномы комплексного переменного z. Числа ν_i и μ_i — целые неотрицательные, такие, что $|\nu_i - \nu_j| + |\mu_i - \mu_j| \neq 0$, $i, j = \overline{1,n}$.

Решения уравнения (1) будем искать в виде целых трансцендентных решений с конечным числом нулей конечного типа, то есть, в виде

$$w\colon z \to P(z)\exp Q(z), \tag{2}$$

где P — полином, Q — целая функция.

Доказана

Теорема 1. *Любое целое решение уравнения* (1) *вида* (2) *будет таким, что целая функция* Q *является полиномом.*

Далее решения (2) уравнения (1) подразделяются на два класса — особые и неособые экспоненциальные части и исследования проводятся для каждого класса отдельно. Устанавливаются свойства полиномов P и Q: степени, коэффициенты при старших степенях, их структура. В частности, в случае особой экспоненциальной части доказывается

Теорема 2. *Если целая функция* (2), *с особой экспоненциальной частью является решением уравнения* (1), *то рациональная функция* $u\colon z \to Q'(z) + P'(z)/P(z)$ *является решением алгебраического уравнения* $\sum_{i=1}^{n} A_i(z)u^{\mu_i} = 0$.

Литература

1. Горбузов В. Н. *Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений.* Гродно: ГрГУ, 2006. 255 с.

2. Горбузов В. Н., Немец В. С. *К вопросу экспоненциально-полиномиальных решений нелинейного дифференциального уравнения* // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30, № 4. С. 297–300.

3. Горбузов В. Н., Немец В. С. *Целые функции-решения дифференциального уравнения первого порядка с обобщенными квазиполиномиальными коэффициентами* // Punime Matematike. 1988. № 3. P. 23–34.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Ю.В. Новогродская, В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

В работе на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей продолжаем [1] рассматривать систему двух дифференциальных уравнений:

$$x'^2 = A_2y^2 + A_1y + A_0, \quad y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00}, \tag{1}$$

где A_i, $i = \overline{0,2}$, — полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, b_{jk}, $j = \overline{0,1}$, $k = \overline{0,2}$, — аналитические по t функции, $A_2 \neq 0$, $|b_{12}| + |b_{02}| \neq 0$, и правые части ее уравнений не являются одновременно полными квадратами.

В [1] было показано, что справедлива

Лемма 1. *Для того, чтобы дифференциальная система* (1) *не имела подвижных многозначных особенностей, необходимо чтобы степень многочленов* A_i, $i = \overline{0,2}$, *по переменной* x *была не выше* 4.

Пусть $A_2 = a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}$. Используя метод малого параметра [2, 3], показываем, что необходимо требовать $|a_{24}| = |a_{23}| = 0$.

Рассмотрим случай

$$|a_{22}| = |a_{21}| = 0, \quad a_{20} \neq 0. \tag{2}$$