Из системы (3) для компоненты y построим дифференциальное уравнение

$$(2y(y+d)y'' - (2y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(by^2+Hd))\times$$
$$\times(2y(y+d)y'' - (4y+d)y'^2 - 2d'yy' + (y+d)^2(-by^2+2Hy+Hd)) = 0, \qquad (4)$$

которое распадается на два. Рассмотрим первое из них. Пусть $d \neq 0$. Выполняя в первом уравнении (4) замену по формуле $y = -du/(u-1)$, получим

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u'^2 + u(u-1)\left(\frac{H}{2u^2} - \frac{H}{2u} - \frac{bd}{2(u-1)} + \frac{d'^2}{2d^2}u + \frac{2dd''-3d'^2}{2d^2}\right). \qquad (5)$$

Согласно [2, с. 318], для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $b = M_1e^{M_2t}$, $d = M_3e^{M_4t}$, где M_i, $i = \overline{1,4}$, — некоторые постоянные. При этом уравнение (5) является частным случаем пятого уравнения Пенлеве. Если $d = 0$, то выполняя в первом уравнении из (4) замену переменной по формуле $y = 1/u$, получим

$$u'' = \frac{u'^2}{u} + \frac{b}{2}.$$

Данное уравнение обладает свойством Пенлеве [2, с. 279], если $b = M_5e^{M_6t}$, где M_i, $i = \overline{5,6}$, — некоторые постоянные, и при этом является частным случаем третьего уравнения Пенлеве. Рассматривая второе уравнение из (4), получим, что для отсутствия подвижных многозначных особых точек необходимо и достаточно полагать $d = M_7e^{M_8t}$, где M_i, $i = \overline{7,8}$, — некоторые постоянные. Объединяя результаты исследования системы (3), заключаем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *с ограничениями* (2) *обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием и аналитической заменой независимой переменной приводилась к виду* (3) *с ограничениями* $b = Ke^{Lt}$, $d = Me^{Nt}$, *где* K, L, M, N *— некоторые постоянные.*

Литература

1. Парманчук О. Н., Пецевич В. М. *Об одной перекрестной системе второго порядка без подвижных многозначных особенностей* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Третьей Междунар. науч. конф. Брест, 17-–22 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина; редкол.: В. И. Корзюк [и др.]. Брест, 2012. С. 74.

2. Bureau F. J. *Differential equations with fixed critical points* // Ann. di Math. 1964. Vol. 64. P. 229—364.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

О.Н. Парманчук

Гродненский государственный аграрный университет, Гродно, Беларусь
statola@tut.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка второй степени:

$$\left(y'' - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{y'^2}{y}\right)^2 = y', \qquad (1)$$

где $N \in \mathbb{Z}$. Найдем необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (1).

Пусть $N \neq 3$. Будем искать решения уравнения (1) в виде

$$y = \frac{N^2}{3(N-3)^2}x^3 + \ldots + hx^{r+3} + \ldots$$

Тогда из (1) получим $r = -1; 3(N-3)/(2N)$. Для того, чтобы резонансы были целыми [1], необходимо требовать $N = \pm 1, -3, \pm 9$.

Пусть $N = 1$, тогда (1) примет вид $y''^2 = y'$. Общее решение последнего уравнения

$$y = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}C_1x^2 + \frac{1}{4}C_1x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $N = 3$ уравнение (1) рассмотрено в [2]. Показано, что в этом случае решения уравнения содержат подвижные многозначные особенности.

Пусть $N \neq 1; 3$. Введем в уравнение (1) замену по формулам $y = w^2/4$. Тогда уравнение (1) представимо в виде

$$w = \frac{N-1}{N}\frac{w^3}{\lambda - w'},$$

где $\lambda^2 = 1$. Из последнего видно, что функции y и w одновременно либо однозначные, либо имеют подвижные критические особые точки. Поэтому для w имеем уравнение

$$w'' = \frac{N-3}{N-1}\frac{w'^2}{w} + \lambda\frac{N+3}{N-1}\frac{w'}{w} - \frac{2N}{N-1}\frac{1}{w}. \tag{2}$$

Полагая в (2) $w = \lambda u$, получим

$$u'' = \frac{N-3}{N-1}\frac{u'^2}{u} + \frac{N+3}{N-1}\frac{u'}{u} - \frac{2N}{N-1}\frac{1}{u}. \tag{3}$$

Согласно [3] для отсутствия подвижных многозначных особенностей у решений уравнения (3) необходимо и достаточно, чтобы $N = 9$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\left(y'' - \frac{8}{9}\frac{y'^2}{y}\right)^2 = y',$$

общее решение которого

$$y = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}C_1(x - C_2)^3 + \frac{1}{2}\right)^3,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Теорема. *Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $N = 1$ *или* $N = 9$.

Литература

1. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П., Парманчук О. Н., Пронько В. А. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений* // Весн. Гродзенскага. дзярж. ун-та. Сер. 2. Прыродазнаўчыя навукі. 2008. №1 (64). С. 8–16.

2. Мартынов И. П., Парманчук О. Н. *Об одном классе дифференциальных уравнений второго порядка второй степени относительно старшей производной* // Весн. Гродзенскага. дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. 2008. № 3(37). С. 54–59.

3. Bureau F. J. *Differential equations with fixed critical points* // Ann. di Math. 1964. Vol. 64. P. 229–364.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ У ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Т. Сазонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
Lozanna86@mail.ru

Рассматривается система

$$\ddot{x} = 2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d\,\frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \quad \ddot{y} = -2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e\,\frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y},$$

$$\ddot{z} = -2c\,\frac{\dot{x}\dot{z}}{x} - 2b\,\frac{\dot{y}\dot{z}}{y} - 2f\,\frac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{y})}{x+y}, \tag{1}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = \tau - \tau_0$.

Для наличия у системы

$$\ddot{x} = 2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d\,\frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \quad \ddot{y} = -2a\,\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e\,\frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y} \tag{2}$$

свойства Пенлеве ([1, 2]) необходимо и достаточно $d = e = -1/2$, $a = 0$. При этом общее решение (2) можно записать в виде $x = (K/6)t^3 + D_2t^2 + D_1t + D_0$, $y = (K/6)t^3 + C_2t^2 + C_1t + C_0$, где $t = \tau - \tau_0$, C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а D_0, D_1, D_2 находятся из соотношений

$$D_0 = \frac{KC_0C_1 + 2C_1^2C_2 - 8C_0C_2^2}{4C_2^2 - 2KC_1}, \quad D_1 = \frac{2C_2}{C_1}(D_0 + 2C_0) - C_1, \quad D_2 = \frac{K}{2C_1}(D_0 + 2C_0).$$

Доказана

Теорема. *Для наличия у системы* (1) *свойства Пенлеве необходимо и достаточно* $d = e = -1/2$, $a = 0$, *а константы* c, b, f *принимают одно из* 17 *значений следующей таблицы:*

c	−1	0	−1	−1	0	0	−1	−1/2	0	0	−1/2	−1/2	0	−1/2	−3/2	0	0
b	−1	−1	0	−1	0	−1	0	0	−1/2	0	−1/2	0	−1/2	−1/2	0	−3/2	0
f	−1	−1	−1	0	−1	0	0	0	0	−1/2	0	−1/2	−1/2	−1/2	0	0	−3/2

Литература

1. Калоджеро Ф. *Разрешаемая задача трех тел и гипотезы Пенлене* // Теоретическая и математическая физика. 2002. Т. 133, № 2. С. 149–159.

2. Лозовская А.Т. *Тест Пенлеве для некоторых систем дифференциальных уравненний, связанных с задачей трех тел* // Наука–2009 : сб. ст. В 2 ч. Ч. 2 / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: А. Ф. Проневич (отв. ред.) [и др.] Гродно: ГрГУ, 2009. С. 48–49.