ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ ПО ЗАДАННОЙ ПРИВОДИМОЙ ГРУППЕ МОНОДРОМИИ

Л.А. Хвощинская, Н.Д. Василевич

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

ludmila.ark@gmail.com

Пусть группа монодромии, которая получается при обходе четырех особых точек $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$ системы двух функций (y_1, y_2), приводима и имеет вид

$$V_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \Delta_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, 4, \quad V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot = E.$$

Найдем дифференциальные матрицы системы Фукса

$$\frac{dY}{dz} = \sum_{k=1}^{3} \frac{U_k}{z - a_k} Y, \tag{1}$$

которой удовлетворяет данная система функций.

Обозначим $\rho_k = (2\pi i)^{-1} \ln \alpha_k$, $0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_k < 1$, $k = 1, \ldots, 4$. Функции y_1, y_2 являются решениями дифференциального уравнения класса Фукса

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1 - \rho_k}{z - a_k} - \frac{1}{z - b} \right) y' = 0,$$

фундаментальная система решений которого в окрестности особых точек имеет вид

$$u_k = \int\limits_{a_k}^{z} \prod_{k=1}^{3} (z - a_k)^{\rho_k - 1} (z - b)\, dz, \quad v_k = 1, \quad k = 1, \ldots, 4,$$

а точка b подлежит определению. В окрестности каждой особой точки a_k функции (u_k, v_k) и (u_{k+1}, v_{k+1}) связаны между собой соотношениями

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \Lambda_k \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\lambda_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \prod_{k=1}^{3} (z - a_k)^{\rho_k - 1} (z - b)\, dz$.

С другой стороны, в окрестности каждой особой точки a_k решение системы (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_k & d_k \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где матрица D_k приводит матрицу V_k к нормальной жордановой форме, $d_k = \Delta_k \times \times (\alpha_k - 1)^{-1}$, γ_k, δ_k — постоянные. Решение (2) допускает аналитическое продолжение «по цепочке» при выполнении условий $D_2 = \Lambda_1 D_1$, $D_3 = \Lambda_2 D_2$ или $\lambda_1 / \lambda_2 = (d_3 - - d_2)/(d_3 - d_1)$, откуда находим точку b:

$$b = \frac{(d_3 - d_2) \int\limits_{a_1}^{a_2} z R(z)\, dz + (d_2 - d_1) \int\limits_{a_2}^{a_3} z R(z)\, dz}{(d_3 - d_2) \int\limits_{a_1}^{a_2} R(z)\, dz + (d_2 - d_1) \int\limits_{a_2}^{a_3} R(z)\, dz}, \quad R(z) = \prod_{k=1}^{3} (z - a_k)^{\rho_{k-1}}.$$

Следовательно, дифференциальные матрицы системы (1) имеют вид $U_k = \begin{pmatrix} \rho_k & \theta_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\theta_k = (b - a_k)/\prod_{j=1, j\neq k}^{3}(a_j - a_k)$.

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

В.В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

tsegvv@bsuir.by

В работе [1] рассмотрены системы

$$\dot{x} = -z, \quad \dot{y} = -x^2 - y, \quad \dot{z} = \alpha + \beta x + y, \tag{1}$$

$$\dot{x} = -z, \quad \dot{y} = x - y, \quad \dot{z} = \alpha x + y^2 + \beta z, \tag{2}$$

$$\dot{x} = -x - \alpha y, \quad \dot{y} = x + z^2, \quad \dot{z} = \beta + x, \tag{3}$$

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \alpha(y - y^2) - \beta z \tag{4}$$

с произвольными фиксированными параметрами α и β.

Системы (1)–(3) являются обобщением систем M, Q, S из списка Спротта [2]. Система (4) является обобщением тороидальной системыРесслера [3]. Характерной (с качественной точки зрения) особенностью систем (1)–(3) является их хаотическое поведение при определенных значениях входящих в них параметров, в частности, наличие странных аттракторов.

В работе [1] показано, что каждая из систем (1)–(4) с точностью до линейного преобразования одной из неизвестных компонент эквивалентна уравнению

$$\dddot{q} = k_1\ddot{q} + k_2\dot{q} + q^2 + k_3, \tag{5}$$

в которых коэффициенты k_i $(i = \overline{1,3})$ являются функциями параметров α и β.

Теорема. *Система уравнений*

$$\nu\dot{p} = y - bp, \quad \dot{y} = z - \mu p, \quad \dot{z} = -\frac{p^2}{2} - A \tag{6}$$

(с произвольными постоянными фиксированными действительными параметрами b, ν, μ $(\nu \neq 0)$ *и произвольной постоянной* A*) эквивалентна уравнению* [4]

$$\nu\dddot{p} + b\ddot{p} + \mu\dot{p} + \frac{p^2}{2} + A = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет собой автомодельную редукцию хорошо известного уравнения Курамото — Сивашинского [5]

$$p_s + \nu p_{\tau\tau\tau\tau} + b p_{\tau\tau\tau} + \mu \rho_{\tau\tau} + p p_\tau = 0$$

в переменных бегущей волны. Уравнение (5) есть частный случай уравнения (7). На основании этого получены новые значения параметров, при которых уравнение (7) обладает хаотическим поведением.