АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КЛАССА СЛАБО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОДНОГО ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Е.Б. Бекряева

Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь
evgenia.bekriaeva@gmail.com

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, а матрица коэффициентов $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ кусочно-непрерывна и ограничена на временно́й полуоси $t \geqslant 0$. Класс всех таких систем обозначим $\mathcal{M}_n$. Отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Считаем, что на множестве $\mathcal{M}_n$ задана топология равномерной сходимости на полуоси, т. е. топология, порождаемая метрикой

$$\operatorname{dist}(A(\cdot), B(\cdot)) = \sup_{t \geqslant 0} \|A(t) - B(t)\|, \quad A(\cdot),\ B(\cdot) \in \mathcal{M}_n.$$

Система из $\mathcal{M}_n$ называется [1, 2] слабо экспоненциально дихотомической на полуоси, если существуют такие положительные постоянные ν_1 и ν_2 и такое разложение пространства
$\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ начальных (при $t = 0$) данных в прямую сумму подпространств L_- и L_+ (причем, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для ее решений $x(\cdot)$ выполняются условия:

а) если $x(0) \in L_-$, то $\|x(t)\| \leqslant c_1(x)\, \mathrm{e}^{-\nu_1(t-s)} \|x(s)\|$ для любых $t \geqslant s \geqslant 0$,

б) если $x(0) \in L_+$, то $\|x(t)\| \geqslant c_2(x) \mathrm{e}^{\nu_2(t-s)} \|x(s)\|$ для любых $t \geqslant s \geqslant 0$,

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ — положительные постоянные, вообще говоря, свои для каждого решения $x(\cdot)$.

Если положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из L_- и L_+ соответственно (т. е. если эти оценки равномерны по этим постоянным), то приходим к классическому определению экспоненциально дихотомической системы. Класс n-мерных слабо экспоненциально дихотомических систем обозначим WE_n, а класс n-мерных экспоненциально дихотомических систем — E_n. Очевидно равенство $E_1 = WE_1$. То, что при $n \geqslant 2$ включение $E_n \subset WE_n$ является собственным, вытекает из работы [3]. В работе [1] доказано, что, описательно говоря, неравномерность оценок **а)** и **б)** может быть сделана сколь угодно малой.

Поскольку определения классов E_n и WE_n достаточно близки, то представляется правдоподобным, что и их свойства, если и отличаются, то несущественно. В частности, хорошо известно (например, [4, с. 260]), что свойство системы (1) быть экспоненциально дихотомической является грубым, т. е. множество E_n является открытым в метрическом пространстве M_n. Следующая теорема 1 показывает, что для слабо экспоненциально дихотомических систем свойство грубости места не имеет.

Теорема 1. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ в метрическом пространстве M_n с топологией равномерной сходимости на полуоси внутренность множества WE_n слабо экспоненциально дихотомических систем совпадает с множеством экспоненциально дихотомических систем, т. е.* $\operatorname{int} WE_n = E_n$ *для любого* $n \geqslant 2$.

Следствие. *В метрическом пространстве M_n, $n \geqslant 2$, с топологией равномерной сходимости на полуоси множество WE_n не является ни открытым, ни замкнутым, все его точки предельные, а его край $\operatorname{ed} WE_n$ (т. е. множество $\operatorname{ed} WE_n \stackrel{\text{def}}{=} WE_n \setminus \operatorname{int} WE_n$ составляют в точности слабо экспоненциально дихотомические системы, не являющиеся экспоненциально дихотомическими.*

Теорема 1 и ее следствие допускают усиление.

Приведем необходимое определение. Если вышеупомянутые положительные постоянные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ можно выбрать одними и теми же для всех решений из L_- и L_+, но не при всех $t \geqslant 0$, а при всех $t \geqslant t_x$, где t_x свое, вообще говоря, для каждого решения $x(\cdot)$, то приходим к определению слабо экспоненциально дихотомической системы в узком смысле.

Класс таких систем обозначим SWE_n.

Теорема 2. *Включения $E_n \subset SWE_n \subset WE_n$ являются собственными.*

Теорема 1 и ее следствие справедливы и для класса слабо экспоненциально дихотомических систем в узком смысле.

Литература

1. Бекряева Е. Б. *О равномерности оценок норм решений экспоненциально дихотомических систем* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 626–636.

2. Бекряева Е. Б. *Линейные дифференциальные системы, близкие к экспоненциально дихотомическим* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 1. С. 36–40.

3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1665–1676.

4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970. 536 с.

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.А. Белозерова, Т.С. Тютюникова

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина
Marbel@ukr.net, gedr@inbox.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[$ либо — $]Y_i, y_i^0]$ (здесь при $\omega > 0$ считаем, что $a > 0$, а при $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно). Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i является правильно меняющейся (см. [1]) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, причем $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.