В случае систем (1) с L^p-дихотомией на оси имеет место свойство грубости относительно равномерно малых на оси возмущений, как и в случае множеств L^pD [1, с. 153].

Теорема. *Если система A принадлежит множеству $L^p_{\mathbb{R}}D$ с параметром $p \geqslant 1$, то существует такое $\varepsilon_A > 0$, что система $A+Q$ также принадлежит множеству $L^p_{\mathbb{R}}D$ для любой кусочно-непрерывной матрицы $Q(t)$, удовлетворяющей неравенству $\|Q(t)\| < \varepsilon_A$, $t \in \mathbb{R}$.*

Однако в случае систем (1) из множества $L^p_{\mathbb{R}}D$, $p > 0$, возможно разрушение свойства L^p-дихотомичности на оси при (немалых) возмущениях, отличных от нуля на промежутке сколь угодно малой длины, что не может иметь места для систем с L^p-дихотомией на полуоси.

Утверждение. *Для любых чисел: натурального $n \geqslant 2$ и положительных p и ε, существуют n-мерные матрицы $A(t)$ и $B(t)$ такие, что $A \in L^p_{\mathbb{R}}D$, матрица $B(t)$ отлична от нуля лишь на промежутке длины ε, однако $(A+B) \notin L^p_{\mathbb{R}}D$.*

Литература

1. Изобов Н. А., Прохорова Р. А. *Линейные дифференциальные системы Коппеля — Конти.* Мн.: Белорус. наука, 2008. 230 с.

2. Прохорова Р. А., Шевцов И. Л. *Об ограниченных решениях слабо нелинейных систем с L^p-дихотомичным линейным приближением* // Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. 1. Физика, математика, информатика. 2001. № 2. С. 52–55.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

В.В. Быков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

vvbykov@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с непрерывными (не обязательно ограниченными) оператор-функциями A (которые будем отождествлять с соответствующими системами), наделенное равномерной топологией.

Определение. Следуя [1], для всякой системы $A \in \mathcal{M}^n$ и всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ определим k-й *максимальный показатель Ляпунова* формулой

$$\lambda_k^{\max}(A) = \overline{\lim_{B \to A}} \lambda_k(B),$$

где λ_k — k-й (в порядке возрастания) показатель Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть M — полное метрическое пространство, а $A : M \times \mathbb{R}^+ \to$ $\to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда найдется такое плотное типа G_δ подмножество $D \subset M$, что для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\mu \mapsto \lambda_k^{\max}(A(\mu, \cdot))$ полунепрерывна сверху в каждой точке D.*

Теорема 2. *Пусть задана система $A \in \mathcal{M}^n$ и для некоторых α и $k \in \{1, \ldots$ $\ldots, n\}$ выполнено $\lambda_k^{\max}(A) < \alpha$. Тогда существуют такие $C, \delta > 0$, что для всякой оператор-функции $B \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющей условию*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |B(t)| \leqslant \delta,$$

найдется k-мерное подпространство решений системы $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$, удовлетворяющих оценке

$$|x(t)| \leqslant C|x(0)|e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^{+}.$$

Замечание 1. В случае, когда коэффициенты системы A ограничены, утверждение теоремы 2 вытекает из [2, теорема 15.2.1], а в случае неограниченных коэффициентов для $k = n$ — из результата доклада [3].

Теорема 3. *Для всякой системы $A \in \mathcal{M}^n$ найдется такая система $B \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{t\to\infty} |B(t) - A(t)| = 0,$$

что для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено равенство

$$\lambda_k(B) = \lambda_k^{\max}(A).$$

Замечание 2. В случае, когда коэффициенты системы A ограничены, утверждение теоремы 3 установлено в [1].

Литература

1. Сергеев И. Н. *К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

3. Миллионщиков В. М. *Формула для мажоранты показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1093.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПО МАТРИЦЕ КОШИ ТОЧНЫХ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ ПОДВИЖНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.С. Войделевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
voidelevich@gmail.com

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $n \geqslant 2$, с кусочно-непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси коэффициентами. Класс всех таких систем обозначим через $\mathcal{M}_n$ и, отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит классу E_n экспоненциально убывающих возмущений (т. е. характеристический показатель нормы $\|Q(\cdot)\|$ отрицателен: $\lambda[Q] < 0$). Рассмотрим точные крайние границы подвижности k-го показателя Ляпунова при таких возмущениях: нижнюю $\Delta_k(A) = \inf\limits_{Q\in E_n} \lambda_k(A + Q)$ и верхнюю $\nabla_k(A) = \sup\limits_{Q\in E_n} \lambda_k(A + Q)$, $k = \overline{1, n}$. Величины $\Delta_1(A)$ и $\nabla_n(A)$,