найдется k*-мерное подпространство решений системы* $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$, *удовлетворяющих оценке*

$$|x(t)| \leqslant C|x(0)|e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Замечание 1. В случае, когда коэффициенты системы A ограничены, утверждение теоремы 2 вытекает из [2, теорема 15.2.1], а в случае неограниченных коэффициентов для $k = n$ — из результата доклада [3].

Теорема 3. *Для всякой системы* $A \in \mathcal{M}^n$ *найдется такая система* $B \in \mathcal{M}^n$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{t\to\infty} |B(t) - A(t)| = 0,$$

что для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнено равенство*

$$\lambda_k(B) = \lambda_k^{\max}(A).$$

Замечание 2. В случае, когда коэффициенты системы A ограничены, утверждение теоремы 3 установлено в [1].

Литература

1. Сергеев И. Н. *К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.
3. Миллионщиков В. М. *Формула для мажоранты показателей Ляпунова* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1093.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПО МАТРИЦЕ КОШИ ТОЧНЫХ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ ПОДВИЖНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.С. Войделевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
voidelevich@gmail.com

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $n \geqslant 2$, с кусочно-непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси коэффициентами. Класс всех таких систем обозначим через $\mathcal{M}_n$ и, отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит классу E_n экспоненциально убывающих возмущений (т. е. характеристический показатель нормы $\|Q(\cdot)\|$ отрицателен: $\lambda[Q] < 0$). Рассмотрим точные крайние границы подвижности k-го показателя Ляпунова при таких возмущениях: нижнюю $\Delta_k(A) = \inf\limits_{Q\in E_n} \lambda_k(A+ + Q)$ и верхнюю $\nabla_k(A) = \sup\limits_{Q\in E_n} \lambda_k(A + Q)$, $k = \overline{1, n}$. Величины $\Delta_1(A)$ и $\nabla_n(A)$, называемые показателями Изобова, вычислены в работе [1]. В данной докладе для любой системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n$ и каждого $k = \overline{1,n}$ вычислена верхняя граница $\nabla_k(A)$ подвижности.

Скажем, что линеал $N(\cdot)$ решений системы (1) экспоненциально больше линеала решений $L(\cdot)$ (далее будем обозначать $N(\cdot) \succeq_{\mathrm{e}} L(\cdot)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T_\varepsilon \geqslant 0$, что при всех $t \geqslant \tau \geqslant T_\varepsilon$ выполнено неравенство $(\|x_1(t)\|/\|x_1(\tau)\|) : (\|x_2(t)\|/\|x_2(\tau)\|) \geqslant \exp\{-\varepsilon t\}$ для любых ненулевых решений $x_1(\cdot) \in N(\cdot)$ и $x_2(\cdot) \in L(\cdot)$.

Будем говорить, что пара линеалов $(L(\cdot), N(\cdot))$ является экспоненциально регулярной, если угол $\angle(L(t), N(t))$, $t \geqslant 0$, между этими линеалами имеет точный нулевой характеристический показатель.

Скажем, что линеал $N(\cdot)$ решений системы (1) сильно экспоненциально больше линеала решений $L(\cdot)$ (далее будем обозначать $N(\cdot) \succ_{\mathrm{e}} L(\cdot)$), если $N(\cdot) \succeq_{\mathrm{e}} L(\cdot)$ и пара $(L(\cdot), N(\cdot))$ является экспоненциально регулярной.

Старшим экспоненциальным показателем $\nabla\big|_L(A)$ линеала $L(\cdot)$ решений системы (1) назовем величину

$$\nabla\big|_L(A) = \lim_{\theta \to 1+0} \overline{\lim_{\mathbb{N} \ni m \to +\infty}} \theta^{-m} \sum_{j=1}^{m} \ln\|X\big|_L(\theta^j, \theta^{j-1})\|,$$

где $X\big|_L(t,\tau)$ — сужение оператора Коши $X(t,\tau)$ системы (1) на подпространство $L(\tau)$.

Теорема. *Пусть k — наименьшее число, больше или равное i, для которого существует такое разбиение пространства $\mathcal{X}_A$ решений системы* (1) $\mathcal{X}_A = L(\cdot) \oplus N(\cdot)$, *что $N(\cdot) \succ_{\mathrm{e}} L(\cdot)$ и $\dim L = k$. Тогда показатель $\nabla_i(A)$ совпадает со старшим экспоненциальным показателем $\nabla\big|_L(A)$ линеала $L(\cdot)$.*

Литература

1. Изобов Н. А. *Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление* // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5–8.

О МЕТРИЧЕСКОЙ ТИПИЧНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПЕРРОНА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.Г. Гаргянц

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
gaaaric@gmail.com

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty),$$

каждую из которых отождествим с ее непрерывной (не обязательно ограниченной) функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_*(A)$ множества всех и всех ненулевых решений системы A соответственно и положим $\mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_* = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$.

Определение 1 [1, 2]. Под *показателем Перрона* $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ будем понимать функцию $\pi(x) = \underline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1} \ln\|x(t)\|$, $x \in \mathcal{S}_*$, $\pi(0) = -\infty$. *Показателем Перрона системы* $A \in \mathcal{M}^n$ назовем сужение π_A этой функции на пространство $\mathcal{S}(A)$, а его *главным значением* на $L \subset \mathbb{R}^n$ — величину $\Pi_L = \sup\{\pi_A(x) \mid x(0) \in L\}$.