НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БЛОКАМИ ПОЛНОГО РАНГА

А.К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

demenchuk@im.bas-net.by

Хорошо известно, что периодическая дифференциальная система при определенных условиях может иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы, т. е. сильно нерегулярные решения. Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, называют асинхронным режимом, а частотный спектр таких решений — асинхронным спектром. Асинхронные режимы колебаний реализованы в ряде различных технических устройств. Следует отметить, что еще в середине 30-х гг. прошлого века в исследованиях параметрического воздействия на двухконтурные системы, проводимых под руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, была продемонстрирована возможность возбуждения колебаний на частотах, находящихся практически в любом отношении с частотой изменения параметров [11].

Задача синтеза подобных режимов для линейных систем может быть сформулирована в виде задачи управления асинхронным спектром. Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2,$$

где $A(t)$ — непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица, B — постоянная $(n \times \times n)$-матрица. Предположим, что управление задается в виде линейной по фазовым переменным обратной связи $u = U(t)x$.

Задача выбора такого ω-периодического коэффициента обратной связи, чтобы замкнутая система имела сильно нерегулярные периодические решения с заданным спектром частот L называется задачей управления асинхронным спектром.

Поскольку в случае невырожденной матрицы B такая задача разрешима, далее без ограничения общности будем считать, что у матрицы B первые d строк нулевые, а остальные строки линейно независимы. Обозначим через $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$ — верхние левый и правый блоки матрицы $A(t)$ размерностей $d \times d$ и $d \times (n-d)$ соответственно. Предположим, что $\hat{A}_{12} = 0$, а матрицы $A_{11}(t) - \hat{A}_{11}$ и $A_{12}(t)$ имеют полный столбцовый ранг. Пусть p– столбцовый ранг $(d \times n)$-матрицы $\{A_{11}(t) - \hat{A}_{11}, A_{12}(t)\}$.

Теорема. *Если задача управления асинхронных колебаний разрешима, то мощность целевого множества частот не превосходит величины* $n - p$.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

С.А. Заболоцкий

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

nugget13@mail.ru

Рассмотрим дифференциальные уравнения типа Лейна — Эмдена:

$$y'' + \frac{n-1}{r}y' - |y|^k \text{sign}\, y = f(r), \tag{1}$$

$$y'' + \frac{n-1}{r} y' - |y|^k \mathrm{sign} \quad y = 0, \quad r \geqslant 0, \quad k > 1, \quad n \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Определение 1. Решение уравнения (1) (или (2)) назовем правильным решением, если оно абсолютно непрерывно вместе со своей первой производной и не обращается в ноль ни на каком интервале (a, b).

Определение 2. Две ненулевых функции $y_1(r)$ и $y_2(r)$ назовем асимптотически эквивалентными при $r \to \infty$, если $y_1(r) = y_2(r)(1 + o(1))$. Обозначим это отношение эквивалентности выражением $y_1(r) \sim y_2(r)$.

Теорема 1. *Пусть* $y(r)$ *— правильное решение уравнения* (2). *Тогда при* $\beta = 2/(k-1)$ *верны следующие утверждения:*

а) если $n > 2k/(k-1)$, *то для некоторой ненулевой постоянной* C *выполнено*

$$y(r) \sim C r^{-n+2} \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Решение с данным асимптотическим поведением существует для любой $C \neq 0$;

б) если $n = 2k/(k-1)$, *то*

$$y(r) \sim \pm\left(\frac{2}{(k-1)^2 r^2 \ln r}\right)^{\beta/2} \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Решение с данным асимптотическим поведением существует;

в) если $n < 2k/(k-1)$, *то*

$$y(r) \sim \pm(\beta(\beta+1) - \beta(n-1)^{\beta/2} r^{-\beta} \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Решение с данным асимптотическим поведением существует.

При доказательстве теоремы 1 использованы методы, изложенные в работах [1, 2].

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) *функция* $f(r)$ *такая, что*

$$\int\limits_0^\infty |f(r)|^2 e^{2br}\, dr < \infty$$

при некоторой постоянной $b > 0$. *Тогда для каждого правильного решения* $y(r)$ *уравнения* (1), *стремящегося к нулю вместе со своей производной при* $r \to \infty$, *существует единственное правильное решение* $\tilde{y}(r)$ *уравнения* (2), *удовлетворяющее следующим условиям:*

$$|y(r) - \tilde{y}(r)| = o(e^{-br}), \quad r \to \infty, \quad \int\limits_0^\infty |y(r) - \tilde{y}(r)|^2 e^{2br}\, dr < \infty.$$

При доказательстве теоремы 2 использованы результаты работ [3, 4].

Литература

1. Astashova I. V. *On asymptotical behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equation* // Functional differential equations. 2009. Vol. 16, no. 1. P. 93–115.

2. Kiguradze I. T., Chanturia T. A. *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations*. Kluwer Acad. Pub., Dordrecht — Boston — London, 1993.

3. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., Олейник О. А. *Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях* // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 3. С. 45–68.

4. Асташова И. В. *Об асимптотической эквивалентности нелинейных дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 855.